پایداری ناارشمیدسی هایرز-اولام معادلات دیفرانسیل خطی ناهمگن مرتبه دوم

حمید ماجانی[1]

گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۵/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۱/۵

چکیده: فرض کنیم $(\mathbb{R},|\ |)$ فضای نرمدار ناارشمیدسی اعداد حقیقی باشد. معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن مرتبه دوم با ضرایب غیرثابت $y''+f(x)y'+g(x)y=h(x)$ را در نظر می‌گیریم که در آن توابع داده شده $f,g,h:(a,b)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته هستند. در این مقاله پایداری هایرز-اولام این معادله را در فضای نرمدار ناارشمیدسی اعداد حقیقی ثابت می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: پایداری هایرز-اولام، معادلات دیفرانسیل خطی، نرم ناارشمیدسی.

رده‌بندی موضوعی (۲۰۱۰): ۳۴D۴۰، ۳۹B۸۲.

۱- مقدمه

فرض کنیم $\varepsilon>0$ دلخواه و $y:(a,b)\to\mathbb{R}$، تابعی دو بار مشتق‌پذیر پیوسته، جوابی برای نامعادله زیر باشد:

$$\left|y''+f(x)y'+g(x)y-h(x)\right|\le\varepsilon \tag{۱}$$

که در آن $f,g,h:(a,b)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ توابعی داده شده و پیوسته هستند. اگر برای هر تابع $y:(a,b)\to\mathbb{R}$ که در نامساوی (۱) صدق می‌کند، تابع $y_0:(a,b)\to\mathbb{R}$ موجود باشد به‌گونه‌ای که اولاً جوابی برای معادله دیفرانسیل زیر باشد:

$$y''+f(x)y'+g(x)y=h(x) \tag{۲}$$

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: h.majani@scu.ac.ir

و ثانیاً برای هر $x \in (a,b)$ نامساوی زیر برقرار باشد:

$$|y(x) - y_{\circ}(x)| \le k(\varepsilon)$$

که در آن $k(\varepsilon)$ فقط به ε وابسته است و $\lim_{\varepsilon \to \circ} k(\varepsilon) = \circ$، آنگاه می‌گوییم معادله دیفرانسیل (۲) دارای پایداری هایرز–اولام است. اگر در این تعریف ε و $k(\varepsilon)$ به ترتیب با توابع مناسبی چون $\varphi(x)$ و $\Phi(x)$ جایگزین شوند، آنگاه می‌گوییم این معادله دیفرانسیل دارای پایداری تعمیم‌یافته هایرز–اولام یا پایداری هایرز–اولام–راسیاس است. برای ملاحظه جزئیات بیشتر به مراجع [۱-۳] مراجعه کنید.

اولین بار در سال ۱۹۹۳، آبلوزا [۴ و ۵] پایداری هایرز–اولام معادلات دیفرانسیل خطی را بررسی نمود. پس‌ازآن مقالات بسیاری در این زمینه منتشر گردیده است که تعدادی از آن‌ها را می‌توان در مراجع [۶-۲۱] ملاحظه نمود.

فرض کنیم $\mathbb{k}$ یک میدان باشد. تعریف تابع قدر مطلق روی میدان $\mathbb{k}$ را یادآوری می‌کنیم. یک تابع قدر مطلق روی میدان $\mathbb{k}$ تابعی است به‌صورت $|\ |: \mathbb{k} \to [\circ, +\infty)$ که اولاً صفر میدان $\mathbb{k}$ تنها عضوی است که قدر مطلق آن برابر با صفر است، ثانیاً $|ab| = |a||b|$ برای تمام اعضای a و b در میدان $\mathbb{k}$ برقرار باشد و ثالثاً نامساوی مثلثی برقرار باشد، یعنی $|a+b| \le |a| + |b|$ برای تمام اعضای a و b در میدان $\mathbb{k}$ برقرار باشد. میدان $\mathbb{k}$ مجهز به یک قدر مطلق را یک میدان قدر مطلق می‌نامیم. مجموعه اعداد حقیقی با قدر مطلق معمولی و مجموعه اعداد مختلط با قدر مطلق مختلط مثال‌های معروفی از میدان‌های قدر مطلق می‌باشند.

اگر در تعریف قدر مطلق شرط نامساوی مثلثی را با شرط $|a+b| \le max\{|a|,|b|\}$ که آن را نامساوی مثلثی قوی می‌نامیم، جایگزین نماییم، تابع قدر مطلق را یک قدر مطلق نااارشمیدسی و میدان مجهز به چنین قدر مطلقی را میدان نااارشمیدسی می‌نامیم. واضح است که هر میدان نااارشمیدسی یک میدان ارشمیدسی است ولی عکس آن در حالت کلی برقرار نیست. مثلاً در میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ با قدر مطلق معمولی اگر قرار دهیم $a = b = ۱$، آنگاه نامساوی مثلثی قوی برقرار نیست؛ بنابراین میدان قدر مطلق $\mathbb{R}$ با قدر مطلق معمولی یک میدان نااارشمیدسی نیست. تابع قدر مطلق گسسته روی میدان دلخواه $\mathbb{k}$ را به این شکل تعریف می‌کنیم که قدر مطلق تمام اعضای $\mathbb{k}$ برابر با یک باشد به‌جز صفر میدان و قدر مطلق صفر میدان نیز برابر با صفر باشد. قدر مطلق گسسته را مثال بدیهی برای میدان نااارشمیدسی $\mathbb{k}$ می‌نامیم. می‌توان ثابت نمود که روی یک میدان متناهی $\mathbb{k}$ تنها تابع قدر مطلق نااارشمیدسی قابل‌تعریف، همان تابع قدر مطلق بدیهی است.

اولین بار هنشل [۲۲] مفهوم میدان ناارشمیدسی را ارائه نمود. همچنین مثال مهم میدان ناارشمیدسی اعداد p-اَدیک را هنشل ارائه نمود. برای آشنایی با فضای ناارشمیدسی اعداد p-ادیک به مرجع [۲۳] مراجعه نمایید.

فرض کنیم E یک میدان برداری روی یک میدان ناارشمیدسی $\mathbb{k}$ با قدر مطلق نابدیهی $|\ |$ باشد. تابع $\|\ \|: E \to [0,+\infty)$ را یک نرم ناارشمیدسی گوییم هرگاه اولاً صفر فضای برداری E تنها عضوی باشد که نرمش برابر با صفر است، ثانیاً برای تمام اعضای a در فضای برداری E و تمام اعضای r در میدان $\mathbb{k}$، $\|ra\| = |r|\|a\|$ و ثالثاً نامساوی مثلثی قوی برقرار باشد، یعنی $\|a+b\| \le \max\{\|a\|,\|b\|\}$ برای تمام اعضای a و b در فضای برداری E برقرار باشد. فضای برداری E مجهز به یک نرم ناارشمیدسی $\|\ \|$ را یک فضای نرمدار ناارشمیدسی می‌نامیم. از جمله ویژگی‌های فضاهای نامدار ناارشمیدسی این است که دنباله $\{a_n\}$ در فضای نامدار ناارشمیدسی E کوشی است هرگاه دنباله $\{a_{n+1} - a_n\}$ در E همگرا به صفر باشد، زیرا برای $n > m$ داریم:

$$\|a_n - b_m\| \le \max\{\|a_{j+1} - a_j\| : m \le j \le n-1\}.$$

فضای نرمدار ناارشمیدسی E را کامل (باناخ) نامیم هرگاه هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد. برای آشنایی بیشتر با فضاهای نرمدار ناارشمیدسی و مفاهیم پیوستگی و مشتق‌پذیری توابع در فضاهای نرمدار ناارشمیدسی، مراجع [۲۴ و ۲۵] را ملاحظه کنید.

در این مقاله می‌خواهیم پایداری معادله دیفرانسیل خطی (۲) را در فضای نرمدار ناارشمیدسی $\mathbb{R}$ بررسی کنیم.

۲- پایداری ناارشمیدسی معادله دیفرانسیل (۲)

لم زیر را در اثبات پایداری معادله (۲) استفاده خواهیم کرد. اثبات این لم را می‌توان در مرجع [۲۶] ملاحظه نمود.

لم ۱. فرض کنیم معادله همگن متناظر با معادله (۲)، یعنی

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 \qquad (۳)$$

دارای جواب عمومی $y_h : (a,b) \to \mathbb{R}$ به‌صورت $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ باشد که در آن c_1 و c_2 ثابت‌های حقیقی دلخواه هستند. آنگاه معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن (۲) یک جواب عمومی $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ به‌صورت

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)-y_1(x)\int_{a_1}^{x}\frac{y_2(t)r(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt$$
$$+y_2(x)\int_{a_2}^{x}\frac{y_1(t)r(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt$$

دارد که در آن a_1 و a_2 نقطه‌های دلخواهی از بازه (a,b) هستند و W رونسکی y_1 و y_2 با ضابطه

$$W(y_1,y_2)(t)=y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)$$

است. اکنون نتیجه اصلی مقاله را ارائه می‌کنیم. در قضیه زیر پایداری معادله دیفرانسیل خطی (۲) را در فضای نرمدار ناارشمیدسی $\mathbb{R}$ ثابت می‌کنیم. در این بخش باید توجه داشته باشیم که تابع قدر مطلق روی $\mathbb{R}$ ناارشمیدسی است و با قدر مطلق معمولی متفاوت است.

قضیه ۱. فرض کنیم $(\mathbb{R},|\ |)$ یک فضای نرمدار ناارشمیدسی روی میدان ناارشمیدسی $(\mathbb{R},|\ |)$ باشد و $f,g,h:(a,b)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ توابعی داده شده و پیوسته هستند و معادله دیفرانسیل همگن (۳) دارای جواب عمومی $y_h:(a,b)\to\mathbb{R}$ به‌صورت $y_h(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ باشد که در آن c_1 و c_2 ثابت‌های حقیقی دلخواهی هستند. اگر تابع دو بار مشتق‌پذیر پیوسته $y:(a,b)\to\mathbb{R}$ در نامساوی (۱) صدق کند، آنگاه تابع $y_0:(a,b)\to\mathbb{R}$ موجود است به‌گونه‌ای که اولاً جوابی برای معادله دیفرانسیل (۲) است و ثانیاً برای هر $x\in(a,b)$ نامساوی

$$|y(x)-y_0(x)|\le|\varepsilon|\max\left\{|y_1(x)|\int_{a_1}^{x}\left|\frac{y_2(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\right|dt,|y_2(x)|\int_{a_2}^{x}\left|\frac{y_1(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\right|dt\right\}$$

برقرار است که در آن a_1 و a_2 نقطه‌های دلخواهی از بازه (a,b) هستند.

اثبات: تابع پیوسته $r:(a,b)\to\mathbb{R}$ را با ضابطه

$$r(x):=y''+f(x)y'+g(x)y \tag{۴}$$

تعریف می‌کنیم. طبق نامساوی (۱) برای هر $x\in(a,b)$ داریم:

$$|r(x)-h(x)|\le\varepsilon \tag{۵}$$

بنا بر لم ۱ و رابطه (۴) ثابت‌های حقیقی α_1 و α_2 موجود هستند به‌گونه‌ای که برای نقطه‌های a_1 و a_2 دلخواه از بازه (a,b) داریم:

$$y(x)=\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)-y_1(x)\int_{a_1}^{x}\frac{y_2(t)r(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt + y_2(x)\int_{a_2}^{x}\frac{y_1(t)r(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt \tag{۶}$$

که در آن برای هر $t\in(a,b)$، $W(y_1,y_2)(t)\neq 0$ زیرا y_1 و y_2 مستقل خطی هستند. حال تابع $y_0:(a,b)\to\mathbb{R}$ را با ضابطه

$$y_0(x):=\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)-y_1(x)\int_{a_1}^{x}\frac{y_2(t)h(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt + y_2(x)\int_{a_2}^{x}\frac{y_1(t)h(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt \tag{۷}$$

تعریف می‌کنیم. بنا بر لم ۱ واضح است که y_0 جوابی برای معادله دیفرانسیل (۲) است. همچنین از روابط (۵)، (۶) و (۷) رابطه

$$\begin{aligned}|y(x)-y_0(x)| &= \left|y_1(x)\int_{a_1}^{x}\frac{y_2(t)}{W(y_1,y_2)(t)}(h(t)-r(t))dt\right.\\ &\left.+y_2(x)\int_{a_2}^{x}\frac{y_1(t)}{W(y_1,y_2)(t)}(h(t)-r(t))dt\right|\\ &\le|\varepsilon|\max\left\{|y_1(x)|\int_{a_1}^{x}\left|\frac{y_2(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\right|dt,|y_2(x)|\int_{a_2}^{x}\left|\frac{y_1(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\right|dt\right\}\end{aligned} \tag{۸}$$

نتیجه می‌گردد. با توجه به اینکه برای هر $t\in(a,b)$، توابع y_1 و y_2 دو بار مشتق‌پذیر پیوسته و $W(y_1,y_2)(t)\neq 0$، پس عبارت ضریب ε در سمت راست رابطه (۸) متناهی است؛ بنابراین پایداری معادله دیفرانسیل (۲) برقرار است و اثبات تمام است.

اکنون معادله کوشی (کوشی-اویلر) را در نظر می‌گیریم:

$$x^2y''+\alpha xy'+\beta y=h(x) \tag{۹}$$

که در آن α و β ثابت‌هایی حقیقی هستند و تابع داده شده $h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. در ادامه با استفاده از قضیه ۲ پایداری هایرز-اولام معادله دیفرانسیل کوشی را ثابت می‌کنیم

که حالت خاصی از معادلات دیفرانسیل خطی (۲) است. پایداری این معادله را برای حالتی خاص ثابت می‌کنیم. در سایر حالات اثبات مشابه است.

قضیه ۳. فرض کنیم $(\mathbb{R}, |\ |)$ یک فضای نرمدار ناارشمیدسی روی میدان ناارشمیدسی $(\mathbb{R}, |\ |)$ باشد و تابع داده شده $h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد. همچنین اعداد ثابت حقیقی α و β به‌گونه‌ای باشند که رابطه

$$(\alpha-1)^2-4\beta>0 \qquad (10)$$

برقرار باشد. آنگاه معادله دیفرانسیل (۹) دارای پایداری ناارشمیدسی هایرز–اولام است.

اثبات: در واقع باید ثابت کنیم که اگر برای تابع دو بار مشتق‌پذیر پیوسته $y:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ نامساوی

$$\left|x^2y''(x)+\alpha xy'(x)+\beta y(x)-h(x)\right|\le\varepsilon \qquad (11)$$

برقرار باشد، آنگاه تابع $y_0:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ موجود است به‌گونه‌ای که اولاً جوابی برای معادله دیفرانسیل (۹) است و ثانیاً برای هر $x\in(0,\infty)$ نامساوی

$$\left|y(x)-y_0(x)\right|\le k(\varepsilon)$$

برقرار است که در آن $k(\varepsilon)$ فقط به ε وابسته است و $\lim_{\varepsilon\to 0}k(\varepsilon)=0$. فرض کنیم c یک ثابت حقیقی مثبت دلخواه است. ابتدا معادله دیفرانسیل (۹) را با جایگذاری $\ln x=t$ و $z(t):=y(e^t)$ به یک معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت به شکل

$$z''(t)+(\alpha-1)z'(t)+\beta z(t)=h(e^t) \qquad (12)$$

تبدیل می‌کنیم. در واقع برای استنتاج معادله (۱۰) باید روابط زیر را در معادله (۹) جایگذاری کنیم:

$$xy'=x\frac{dy(x)}{dx}=x\frac{dy(e^t)}{dt}\frac{dt}{dx}=z'(t)$$
$$x^2y''=x^2\frac{dy'(x)}{dx}=x^2\frac{dy(e^{-t}z'(t))}{dt}\frac{dt}{dx}=z''(t)-z'(t)$$

با توجه به فرض (۱۰) معادله مشخصه معادله دیفرانسیل همگن وابسته به معادله دیفرانسیل (۱۲) دارای دو ریشه متمایز r_1 و r_2 و جواب عمومی به شکل $z_h(t)=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}$ است که

در آن c_1 و c_2 ثابت‌هایی حقیقی می‌باشند. با اعمال جایگذاری اخیر در نامساوی (۱۰) نتیجه می‌شود:

$$\left|z''(t)+(\alpha-1)z'(t)+\beta z(t)-h(e^{t})\right|\leq\varepsilon \tag{۱۳}$$

با در نظر گرفتن $z(t)$، $\alpha-1$، β، $h(e^{t})$ و $\ln c$ در رابطه (۷) به ترتیب به‌جای $y(x)$، $f(x)$، $g(x)$، $h(x)$ و a در قضیه ۲، نتیجه می‌گیریم که ثابت‌های حقیقی c_1 و c_2 موجود هستند به‌گونه‌ای که روابط

$$z_{\circ}(t)=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}-\frac{e^{r_1t}}{r_2-r_1}\int_{\ln c}^{t}e^{-r_1\mu}h(e^{\mu})d\mu+\frac{e^{r_2t}}{r_2-r_1}\int_{\ln c}^{t}e^{-r_2\mu}h(e^{\mu})d\mu$$

و

$$\left|z(t)-z_{\circ}(t)\right|\leq\frac{|\varepsilon|}{|r_2-r_1|}\max\{\int_{\ln c}^{t}\left|e^{r_1(t-\mu)}\right|d\mu,\int_{\ln c}^{t}\left|e^{r_2(t-\mu)}\right|d\mu\}$$

برقرار هستند. اکنون با عمل معکوس جایگذاری، یعنی $x=e^{t}$ و $z(t)=y(x)$ به روابط

$$y_{\circ}(x)=c_1x^{r_1}+c_2x^{r_2}-\frac{x^{r_1}}{r_2-r_1}\int_{c}^{x}\lambda^{-r_1-1}h(\lambda)d\lambda+\frac{x^{r_2}}{r_2-r_1}\int_{c}^{x}\lambda^{-r_2-1}h(\lambda)d\lambda$$

و

$$|y(x)-y_0(x)| \le \frac{|\varepsilon|}{|r_2-r_1|}\max\left\{\left|\int_c^x \lambda^{-r_1-1}x^{r_1}d\lambda\right|,\left|\int_c^x \lambda^{-r_2-1}x^{r_2}d\lambda\right|\right\}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{|\varepsilon|}{|r_2-r_1|}\max\left\{\left|\dfrac{1-(\frac{x}{c})^{r_1}}{r_1}\right|,\left|\dfrac{1-(\frac{x}{c})^{r_2}}{r_2}\right|\right\} & if \quad r_1\neq 0\ \&\ r_2\neq 0\\ \dfrac{|\varepsilon|}{|r_2|}\max\left\{\left|\ln(\frac{x}{c})\right|,\left|\dfrac{1-(\frac{x}{c})^{r_2}}{r_2}\right|\right\} & if \quad r_1=0\ \&\ r_2\neq 0\\ \dfrac{|\varepsilon|}{|r_1|}\max\left\{\left|\ln(\frac{x}{c})\right|,\left|\dfrac{1-(\frac{x}{c})^{r_1}}{r_1}\right|\right\} & if \quad r_2=0\ \&\ r_1\neq 0 \end{cases}$$

دست می‌یابیم؛ بنابراین معادله دیفرانسیل (۱۱) دارای پایداری نارشمیدسی هایرز–اولام است و اثبات تمام است.

منابع

[1] Czerwik, S. (2002). *Functional Equations and Inequalities in Several Variables*, World Scientific, Singapore.

[2] Hyers, D.H., Isac, G. and Rassias, T.M. (1998). *Stability of Functional Equations in Several Variables*, Birkhäuser, Boston.

[3] Sahoo, P.K. and Kannappan, P. (2011). *Introduction to Functional Equations,* CRC Press, Boca Raton.

[4] Obłoza, M. (1993). Hyers stability of the linear differential equation, *Rocz. Nauk.-Dydakt. Pr. Mat.* **13**, 259-270.

[5] Obłoza, M. (1997). Connections between Hyers and Lyapunov stability of the ordinary differential equations, *Rocz. Nauk.-Dydakt. Pr. Mat.* **14**, 141-146.

[6] Alsina, C and Ger, R. (1998). On some inequalities and stability results related to the exponential function, *J. Inequal. Appl.* **2**, 373-380.

[7] Găvruţa, P., Jung, S-M. and Li, Y. (2011). Hyers-Ulam stability for second-order linear differential equations with boundary conditions, Electronic. *J. Differ. Equ.*, 801-5.

[8] Jung, S-M. (2004). Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order, *Appl. Math. Lett.* **17**, 1135-1140.

[9] Jung, S-M. (2006). Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order, II*, Appl. Math. Lett.* **19**, 854-858.

[10] Jung, S-M. (2006). Hyers-Ulam stability of a system of first order linear differential equations with constant coefficients, *J. Math. Anal. Appl.* **320**, 549-561.

[11] Miura, T., Oka, H., Takahasi, S-E. and Niwa, N. (2007). Hyers-Ulam stability of the first order linear differential equation for Banach space-valued holomorphic mappings, *J. Math. Inequal.* **3**, 377-385.

[12] Popa, D. and Raşa, I. (2011). On the Hyers-Ulam stability of the linear differential equation, *J. Math. Anal. Appl.* **381**, 530-537.

[13] Popa, D. and Raşa, I. (2012). Hyers-Ulam stability of the linear differential operator with non-constant coefficients, *Appl. Math. Comput*. **219**, 1562-1568.

[14] Rus, I.A. (2009). Ulam stability of ordinary differential equations, *Stud. Univ. Babeş–Bolyai, Math*. **54**, 125-134.

[15] Wang, G., Zhou, M. and Sun, L. (2008). Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order, *Appl. Math. Lett*. **21**, 1024-1028.

[16] Alqifary, Q.H. and Jung, S-M. (2014). On the Hyers-Ulam stability of differential equations of second order, Abstr. *Appl. Anal.*, Article ID 483707.

[17] Cîmpean, D.S. and Popa, D. (2010). On the stability of the linear differential equation of higher order with constant coefficients, *Appl. Math. Comput*. **217**, 4141-4146.

[18] Ghaemi, M.B., Gordji, M.E., Alizadeh and B, Park, C. (2012). Hyers-Ulam stability of exact second-order linear differential equations, *Adv. Differ. Equ*., Article ID 36.

[19] Li, Y. and Shen, Y. (2010). Hyers-Ulam stability of linear differential equations of second order, *Appl. Math. Lett.* **23**, 306-309.

[20] Javadian, A. (2015). Approximately n-order linear differential equations, *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications,* **6**(1), Page 135-139.

[21] S. Shagholi, M. Eshaghi Gordji and M. Bavand Savadkouhi, (2011) *Stability of ternary quadratic derivation on ternary Banach algebras,* J. Comput. Anal. Appl. 13, 1097–1105.

[22] Hensel, K. (1899). Uber eine neue begründung der theorie der algebraischen zahlen, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **6**, 83–88.

[23] Bachman, G. (1964). *Introduction to P-Adic Numbers and Valuation Theory*, Academic Press inc. (London) LTD.

[24] Khrennikov, A. (1997). *Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[25] Mahler, K. (1981). *p-adic numbers and their functions,* Cambridge University Press.

[26] Kreyszig, E. (1979). *Advanced Engineering Mathematics*, 4th edition. Wiley, New York.

Non-Archimedean Stability of Nonhomogeneous Second Order Linear Differential Equations

Hamid Majani

Department of Mathematics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Abstract

Let $(\mathbb{R},|\ |)$ be a non-Archimedean normed space of real numbers. In this paper, we prove the Hyers-Ulam stability of nonhomogeneous second order linear differential equations with non-constant coefficients,

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$$

in the non-Archimedean normed space $(\mathbb{R},|\ |)$, where $f, g, h : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are given continuous functions.

Keywords: Hyers-Ulam stability, Linear Differential Equations, Non-Archimedean norm.

Mathematics Subject Classification (2010): 40D82, 34B39.