گراف تسلط کلمات دودویی

فرزاد شاویسی[۱]، سهیلا نصوری

گروه ریاضی، دانشگاه رازی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۵/۱۴ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۴/۶

چکیده: گراف تسلط کلمات دودویی، گرافی است جهت‌دار با مجموعه رئوس تمام کلمات دودویی به طول n که با نماد $\overrightarrow{\Gamma_n}$ نشان داده می‌شود، برای هر رأس دلخواه $w = w_۱w_۲\cdots w_n$ قرار می‌دهیم $B_۱(\mathrm{w}) = \{۱ \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n} \mid \mathrm{w_i} = ۱\}$ و دو رأس v و w را با پیکان جهت‌دار $v \to w$ به هم وصل می‌کنیم هرگاه داشته باشیم $B_۱(\mathrm{w}) \subseteq B_۱(\mathrm{v})$. در این مقاله، به مطالعه و محاسبه برخی پارامترهای این گراف می‌پردازیم؛ به‌عنوان مثال، پس از محاسبه فاصله هر دو رأس و نیز انحراف از مرکز هر رأس، ثابت می‌شود که قطر گراف زمینه $\overrightarrow{\Gamma_n}$ برابر ۳ و شعاع آن برابر ۲ است. همچنین ثابت خواهد شد که این گراف دارای تعداد $۳^{\mathrm{n}} - ۳(۲^{\mathrm{n}} - ۱)$ یال است. در ادامه نشان خواهیم داد که عدد خوشه‌ای و عدد رنگی رأسی گراف تسلط کلمات دودویی با طول n هردو برابر $n - ۱$ هستند. در دیگر نتایج، ثابت می‌شود که عدد رنگی یالی این گراف و ماکزیمم درجه رئوس آن مساوی $۲^{n-۱} - ۲$ هستند. در پایان، عدد استقلال این گراف نیز به روش ترکیباتی محاسبه خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: گراف تسلط، کلمات دودویی، قطر، کمر، شعاع، عدد رنگی، عدد استقلال.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۹۷R۹۹ و ۰۵C۳۳.

۱- مقدمه

کدهای دودویی در محاسبات و ارتباطات راه دور برای انواع روش‌های رمزگذاری داده‌ها مانند تبدیل رشته‌های کاراکتر به رشته‌های بیتی مورد استفاده قرار می‌گیرند. هر عدد در مبنای ده قابل ترجمه به یک کلمه (رشته) دودویی است و برعکس. همچنین حروف الفبا نیز با استفاده از کدهای اسکی قابل تبدیل به کلمات دودویی هستند. البته لازم به ذکر است که تصاویر، کدهای نرم‌افزاری مانند متلب، ... نیز قابل تبدیل به کلمات دودویی هستند. تمام مواردی که ذکر شد

---

[۱] آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: f.shaveisi@razi.ac.ir

تأییدی بر این مطلب است که مجموعه کلمات دودویی دارای نقش اساسی و بنیادی در کامپیوتر هستند. دستگاه اعداد دودویی مدرن که پایه و اساس کد باینری است، برای بار اول در سال ۱۶۷۹ توسط گوتفرید لایبنیتس و در مقاله‌ای تحت عنوان «توضیح حساب دودویی» معرفی شد [۹].

از طرفی، می‌دانیم که شاخه نظریه گراف در ریاضیات ارتباطی قوی و اجتناب‌ناپذیر با کامپیوتر و نظریه کد دارد. ازجمله مقالاتی که اخیراً در مورد کاربردهای گراف‌ها در کدگذاری انتشار یافته است، می‌توان به [۱۱،۱۰،۶،۵،۴،۲] اشاره کرد. یکی از مهم‌ترین گراف‌هایی که به کلمات دودویی نسبت داده شده است، گراف مکعب n-بعدی است که رئوس آن تمام کلمات دودویی به طول n هستند و دو رأس باهم مجاورند هرگاه دقیقاً در یک رقم (بیت) باهم مختلف باشند. در این مقاله با نسبت دادن گرافی به نام «گراف تسلط» به کلمات دودویی سعی خواهیم کرد که ویژگی‌های این گراف را با استفاده از پارامترهای گرافی موردبحث و مطالعه قرار دهیم.

ابتدا تعاریف و نمادهای مقدماتی مربوط به گراف را که در این مقاله مورداستفاده قرار می‌گیرند، بیان می‌کنیم. گراف G از زوج مرتب $(V(G),E(G))$ تشکیل شده است. $V(G)$ یک مجموعه ناتهی است که آن را مجموعه رئوس می‌نامند و $E(G)$ مجموعه‌ای است از زوج‌های نامرتب از رئوس G که آن را مجموعه یال‌های گراف G می‌نامند. اگر شرط نامرتب بودن اعضای $E(G)$ را به زوج مرتب تبدیل کنیم، گراف جهت‌دار خواهد بود. برای سادگی یال $e=\{u,v\}$ را با نماد uv نشان خواهیم داد. در هر گراف $G=(V,E)$ تعداد اعضای مجموعه V را مرتبه G و تعداد اعضای E را اندازه G می‌نامیم. دو رأس u و v را مجاور گوییم هرگاه رئوس انتهایی یک یال باشند. یک مسیر بین دو رأس u و v دنباله‌ای است از رئوس گراف به شکل $u=v_0,v_1,\dots,v_{n-1},v_n=v$ که در آن به ازای هر $1\le i\le n$، v_{i-1} با v_i مجاور است. مسیر nـرأسی با نماد P_n نشان داده می‌شود. همچنین اگر $u=v$، آنگاه مسیر را دور گویند و با نماد C_n نشان می‌دهند. مسیر هامیلتونی در گراف مسیری است که از تمام رئوس گراف و هرکدام دقیقاً یک‌بار عبور می‌کند. گراف G را یک گراف همبند گویند هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. اگر در یک گراف جهت‌دار، جهت‌ها را در نظر نگیریم گراف حاصل را گراف زمینه آن گراف جهت‌دار می‌نامند. درصورتی‌که گراف زمینه‌ی یک گراف جهت‌دار همبند باشد، آن را همبند ضعیف نامند. طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس u و v و از گراف همبند Gفاصله این دو رأس نامیده می‌شود و با نماد $d(u,v)$ نشان داده می‌شود. قطر گراف G به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$diam(G)=\max\{d(u,v):u,v\in V(G)\}$$

اگر $x\in V(G)$، آنگاه خروج از مرکز برای رأس x به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e(x)=\max\{d(x,v):v\in V(G)\}$$

و عدد

$$\min\{e(x):x\in V(G)\}=\min\max\{d(x,v):x,v\in V(G)\}$$

شعاع گراف G نامیده می‌شود و با نماد $rad(G)$ نشان داده می‌شود. کمر گراف G که با $girth(G)$ نشان داده می‌شود، طول کوتاه‌ترین دور در گراف است. درجه‌یک رأس در یک گراف عبارت است از تعداد یال‌هایی که از آن رأس می‌گذرد که همان رئوس مجاور با آن رأس است. درجه رأس v با نماد $\deg(v)$ نشان داده می‌شود. در یک گراف جهت‌دار، تعداد یال‌های ورودی به یک رأس را درجه ورودی (d^-نماد درجه ودی) و تعداد یال‌های خروجی را درجه خروجی (d^+نماد درجه خروجی) آن رأس می‌نامند. کمترین و بیشترین درجه رئوس گراف G را به ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نشان می‌دهند. گراف فاقد دور را جنگل و گراف همبند فاقد دور را درخت می‌نامند. فرض کنید G یک گراف باشد. در این صورت مجموعه $S\subseteq V(G)$ را مجموعه مستقل گویند هرگاه هیچ دو رأسی از S مجاور نباشند و $S\subseteq V(G)$ را خوشه گویند هرگاه هر دو رأس از S مجاور باشند. مرتبه بزرگ‌ترین خوشه (زیرگراف کامل) در گراف G را عدد خوشه‌ای نامیده و با نماد $\omega(G)$ نشان داده می‌شود و عدد استقلال که با نماد $\omega(G)$ نشان داده می‌شود، اندازه بزرگ‌ترین مجموعه مستقل در گراف است. کمترین تعداد رنگ لازم برای رنگ‌آمیزی رئوس (یال‌ها) گراف G به‌طوری‌که هیچ دو رأس (یال) مجاور همرنگ نباشند را عدد رنگی رأسی (یالی) گراف G می‌نامند و با نماد $\chi(G)(\chi'(G))$ نشان می‌دهند. درواقع رنگ‌آمیزی رأسی (یالی) گراف G تابعی است به شکل $f:V(G)\to\mathbb{N}$ به‌طوری‌که برای هر دو رأس (یال) غیرمجاور u و v داشته باشیم $f(u)\neq f(v)$. برای مطالعه بیشتر در مورد مفاهیم اولیه و تعاریف نظریه گراف می‌توان به [۱،۱۲] مراجعه کرد.

۲-مفهوم گراف تسلط و فاصله‌های رئوس در آن

در این بخش، به بررسی برخی از ویژگی‌های گراف که با فاصله رئوس گراف در ارتباط هستند، می‌پردازیم. در این مقاله، مجموعه تمام کلمات دودویی به طول n را با نماد ς_n نشان می‌دهیم. به‌عبارت‌دیگر داریم:

$$\varsigma_n=\{w_۱w_۲...w_n:w_i\in\{۰,۱\}\};$$

همچنین قرار می‌دهیم:

$$\varsigma_n^*=\varsigma_n-\{۰۰...۰,۱۱...۱\}.$$

برای هر کلمه دودویی $w=w_۱w_۲...w_n$، قرار می‌دهیم:

$$B_{1}(W)=\{i:1\leq i\leq n,w_{i}=1\};$$
$$B_{0}(W)=\{i:1\leq i\leq n,w_{i}=0\}.$$

واضح است که $|B_1(W)|$ همان وزن کلمه w است که در کدگذاری با نماد $wt(w)$ نیز نشان داده می‌شود. فرض کنید $u=u_1u_2...u_n$ و $v=v_1v_2...v_n$ دو کلمه دودویی باشند. دراین‌صورت، گوییم u بر v مسلط است هرگاه $B_1(v)\subseteq B_1(u)$. حال، شرایط ارائه مفهوم گراف تسلط فراهم شده است.

تعریف ۱: گراف جهت‌دار تسلط کلمات دودویی به طول n که آن را با نماد $\overrightarrow{\Gamma_n}$ نشان می‌دهیم، گرافی است با مجموعه رئوس $V(\overrightarrow{\Gamma_n})=\varsigma_n^*$ و دو کلمه v و w را با پیکان جهت‌دار $v\rightarrow w$ به همدیگر وصل می‌کنیم هرگاه $B_1(w)\subseteq B_1(v)$. همچنین گراف زمینه $\overrightarrow{\Gamma_n}$ را با نماد Γ_n نشان می‌دهیم.

قبل از بررسی خواص گراف معرفی شده، توضیحاتی را در مورد دلایل لزوم تعریف چنین گرافی ارائه می‌دهیم.

یک رشته دودویی از مجموعه چند کلمه دودویی تشکیل شده است؛ بنابراین هر کد دودویی یک رشته دودویی است. ارتباط تنگاتنگی بین کلمات، رشته‌ها و کدهای دودویی از یک طرف و گراف‌ها از طرف دیگر وجود دارد. بخش عمده‌ای از این ارتباطات را می‌توان در [۸] مشاهده کرد. ازجمله سؤالات اساسی که در علوم کامپیوتر و در مورد ارتباط گراف‌ها و کلمات (دودویی) مطرح می‌شود، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱- آیا نمایش گرافی برای کلمات و رشته‌های دودویی وجود دارد؟

۲-چگونه می‌توان گراف‌های دارای نمایش برحسب کلمات دودویی را رده‌بندی کرد؟ چه تعداد از این گراف‌ها وجود دارند؟

۳-پارامترهای گرافی در گراف‌های نسبت داده شده به کلمات و کدهای دودویی چه نقشی در ساختن کدهای دودویی و بهینه کردن آن‌ها دارد؟

در راستای جواب سؤال اول، گراف‌های زیادی به رشته‌های دودویی نسبت داده شده‌اند که از آن جمله می‌توان به گراف مکعب، درختان ریشه‌دار و دیاگرام‌های هاش[1] اشاره کرد. در مورد سؤال دوم لازم است اشاره شود که نمایش‌های متنوعی برای گراف‌ها برحسب رشته‌های دودویی وجود دارد. به‌عنوان مثال اگر هر سطر ماتریس مجاورت گراف را به‌عنوان یک کلمه دودویی در نظر

1- Hasse diagrams

بگیریم آنگاه کلمات ظاهر شده در سطرهای این ماتریس می‌تواند به‌عنوان یک نمایش دودویی برای گراف‌ها در نظر گرفته شود. این مسئله در مورد گراف‌های خاصی مانند گراف‌های دوبخشی، گراف‌های آستانه‌ای و ... بررسی شده است. البته در مورد گراف‌های آستانه‌ای ثابت شده است که یک تناظر دوسویی بین گراف‌های آستانه‌ای و کلمات دودویی به طول یک واحد بیشتر از تعداد رئوس وجود دارد. هر مواردی که اشاره شد، نشان می‌دهد که نسبت دادن گراف به کلمات دودویی می‌تواند از اهمیت زیادی برخوردار باشد؛ اما دلیل دیگر تعریف و مطالعه گراف تسلط کلمات دودویی در این مقاله در راستای جواب به سؤال سوم است. برای روشن‌تر شدن موضوع ابتدا یادآور می‌شویم که گراف‌های نسبت داده شده به کدهای (خطی) دودویی اهمیت بیشتری دارد و طبیعی است که برای شروع به کد بدیهی شامل تمام کلمات دودویی گراف نسبت داده شود. گراف مکعب یک مورد از این گراف‌هاست؛ در این گراف دو رأس u و v مجاورند هرگاه دقیقاً در یک بیت (رقم) باهم متفاوت باشند یا به‌عبارت‌دیگر

$$B_{۱}(u) \subseteq B_{۱}(v)$$

یا

$$B_{۱}(v) \subseteq B_{۱}(u).$$

در دیاگرام‌های هاش نیز خواص مشابهی وجود دارند. در «گراف تسلط کلمات دودویی» یال‌ها بر اساس خاصیت مهم بالا در نظر گرفته شده‌اند. در ضمن زیرگراف القایی از این گراف روی کلمات یک کد خطی (دودویی) می‌تواند اهمیت به مراتب بیشتری داشته باشد. این زیرگراف‌ها در بهینه کردن کدهای خطی با استفاده از نمایش گرافی آن‌ها کاربرد دارند. به‌عنوان مثال، کران‌های مهم «کره چینی»، «گیلبرت-ورشامو»، «همینگ» و ... در کدگذاری با استفاده از این زیرگراف‌ها از گراف تسلط کلمات دودویی قابل‌بررسی هستند. علاوه‌براین می‌توان به دنبال یافتن یک روش کدگشایی جدید با استفاده از تکنیک‌های نظریه گراف بود. کدهای دودویی که از گراف مکعب و گراف‌های مشابه و گراف‌های خطی آن‌ها به دست می‌آیند نیز دارای اهمیت ویژه‌ای هستند؛ به‌عنوان یک مثال از این کدها می‌توان به [۳] اشاره کرد. در واقع، این گراف حالت خاصی از کد معروف همینگ است؛ بنابراین کد دودویی متناظر با گراف خطی «گراف تسلط کلمات دودویی» نیز دارای اهمیت است.

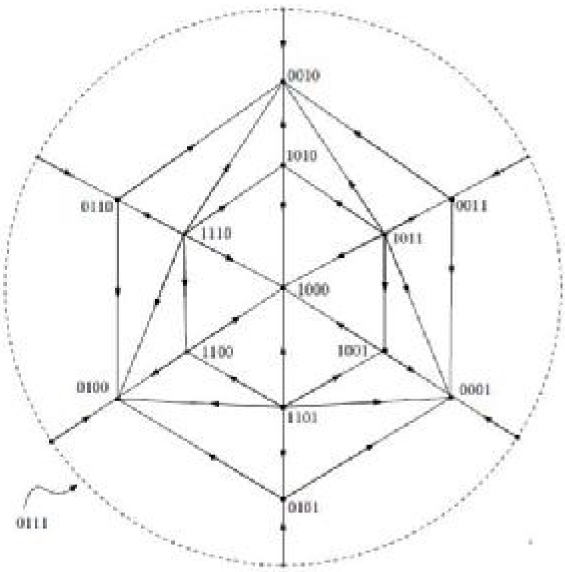
نکته ۲: با توجه به تعریف گراف جهت‌دار $\overrightarrow{\Gamma_n}$، به‌سادگی می‌توان نشان داد که اگر $x \to y$ و $y \to z$، آنگاه $x \to z$.

مثال ۳: با توجه به تعریف فوق واضح است که گراف $\Gamma_{۲}$ همان مکمل گراف $K_{۲}$ است که رئوس آن ۰۱ و ۱۰ می‌باشند، گراف $\overrightarrow{\Gamma_{۳}}$ که گراف زمینه آن همان دور $C_{۶}$ است و گراف $\overrightarrow{\Gamma_{۴}}$

به شکل زیر می‌باشند:

$$\begin{tikzcd} 010 & 110 \arrow[l] \arrow[r] & 100 \\ 011 \arrow[u] \arrow[r] & 001 & 101 \arrow[u] \arrow[l] \end{tikzcd}$$

شکل (۱): گراف $\overrightarrow{\Gamma_3}$



شکل (۲): گراف $\overrightarrow{\Gamma_4}$

در قضیه بعدی نشان خواهیم داد که گراف تسلط $\overrightarrow{\Gamma_n}$ همبند است.

قضیه ۴: برای هر $n \geq 2$، گراف $\overrightarrow{\Gamma_n}$ همبند ضعیف است؛ علاوه بر این $\operatorname{diam}(\Gamma_n) \leq 5$.

اثبات: فرض کنید $u = u_1u_2\cdots u_n$ و $v = v_1v_2\cdots v_n$ دو رأس دلخواه غیرمجاور از گراف Γ_n باشند. فاصله u و v را در سه حالت محاسبه می‌کنیم.

حالت اول: $u_n = v_n = 0$ در این حالت مسیر زیر بین دو رأس u و v وجود دارد. در این حالت داریم $v \to$ ۱۱۰۰۰۱۰ $\leftarrow u$. لذا $d(u,v) \leq 2$.

حالت دوم: $u_n = v_n = 1$. در این حالت رأس ۰۰۰۰۰۱ همسایه مشترک دو رأس u و v است

و لذا $\mathrm{d}(u,v)\le ۲$.

حالت سوم: $u_n \ne v_n$ در این حالت بدون کاسته شدن از کلیت حکم می‌توان فرض کرد که $u_n=۰$ و $v_n=۱$. در این صورت مسیر زیر در گراف $\overrightarrow{\Gamma_n}$ وجود دارد:

$$\mathrm{u} \leftarrow ۱۰۰۱۰ \rightarrow ۱۰۰۰۰ \leftarrow ۱۰۰۰۰۱ \rightarrow ۰۰۰۰۱ \leftarrow \mathrm{v}.$$

بنابراین $\mathrm{d}(u,v)\le ۵$. لذا در هر حالت Γ_n گرافی همبند است و $\mathrm{diam}(\Gamma_n)\le ۵$. ■

در مورد کمر گراف Γ_n، واضح است که در حالت $n=۳$، $\Gamma_n = C_۶$ و لذا $\mathrm{girth}(\Gamma_n)=۶$. همچنین اگر $n\ge ۴$، آنگاه Γ_n شامل مثلث است زیرا رئوس $u=۱۱۱۰...۰$، $v=۱۱۰۰...۰$ و $w=۱۰۰۰...۰$ دوبه‌دو مجاور هستند؛ بنابراین

$$\mathrm{girth}(\Gamma_n)=\begin{cases}\infty & n\le ۲\\ ۶ & n=۳\\ ۳ & n\ge ۴\end{cases}.$$

تبصره ۵: قضیه قبلی نشان می‌دهد که $diam(\Gamma_n)\le ۵$، در ادامه نشان خواهیم داد که درواقع، $\mathrm{diam}(\Gamma_n)\le ۳$.

نتیجه ۶: گراف Γ_n جنگل (درخت) است اگر و تنها اگر $n\le ۲$.

در ادامه این بخش فاصله هر دو رأس دلخواه در گراف تسلط را محاسبه خواهیم کرد و با استفاده از آن شعاع و قطر گراف را می‌یابیم. ابتدا نمادهایی را برای رئوس این گراف معرفی می‌کنیم. چنانچه گراف Γ_n همبند باشد، $n\ge ۳$ و هر رأس گراف Γ_n متعلق به یکی از مجموعه رئوس زیر است:

الف) رئوس:

$$a=۱۱۰۰...۰, b=۱۰۰...۰, c=۰۱۰۰...۰,$$
$$d=۱۰۱...۱, e=۰۱۱...۱, f=۰۰۱...۱$$

ب) رئوس به شکل $۱۰u, ۰۱u, ۱۱u, ۰۰u$ که در آن $u\in \varsigma_{n-۲}^{*}$.

لم ۷: فرض کنید $n\ge ۳$ عددی صحیح و مثبت باشد. در این صورت، در مورد فاصله دو رأس در گراف Γ_n داریم:

$$d(a,f)=d(c,d)=d(b,e)=۳,$$

در غیر این صورت، فاصله هر دو رأس غیرمجاور برابر ۲ است.

اثبات: می‌دانیم مسیر زیر بین دو رأس a و f وجود دارد:

$$a \to b \to d \to f$$

لذا چون a و f مجاور نیستند، پس $۲ \leq d(a,f) \leq ۳$.

نشان می‌دهیم $d(a,f) \neq ۲$. به برهان خلف، فرض کنید $d(a,f) = ۲$. در این صورت a و f دارای همسایه مشترکی مانند $w = w_۱ w_۲ ... w_n$ هستند و بنا به نکته ۲، یکی از مسیرهای جهت‌دار زیر وجود دارد:

$$a \to w \leftarrow f \quad \text{یا} \quad a \leftarrow w \to f$$

وجود هرکدام از این مسیرها نتیجه می‌دهد که $w = ۱۱...۱$ یا $w = ۰۰...۰$ و این تناقض است؛ بنابراین $d(a,f) = ۳$. با اثبات مشابهی می‌توان نشان داد که $d(c,d) = d(b,e) = ۳$. حال فرض کنید $x.y$ دو رأس غیرمجاور باشند به‌طوری‌که

$$\{x, y\} \notin \{\{a, f\}, \{b, e\}, \{c, d\}\}.$$

در این صورت، به‌سادگی می‌توان نشان داد که $x.y$ دارای همسایه مشترک هستند و لذا $d(x, y) = ۲$. ■

با توجه به لم قبلی، می‌توان جدول زیر را در مورد فاصله‌های رئوس در گراف Γ_n (برای $n \geq ۳$) تنظیم کرد.

جدول (۱): فاصله رئوس در گراف Γ_n

رئوس	a	B	c	d	e	f	۱۰u	۰۱u	۱۱u	۰۰u
a	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۲	۲	۱	۲
b	۱	۰	۲	۱	۳	۲	۱	۲	۱	۲
c	۱	۲	۰	۳	۱	۲	۲	۱	۱	۲
d	۲	۱	۳	۰	۲	۱	۱	۲	۱	۲
e	۲	۳	۱	۲	۰	۱	۲	۱	۲	۱
f	۳	۲	۲	۱	۱	۰	۲	۲	۲	۱
۱۰u	۲	۱	۲	۱	۲	۲	۰	۲	۱	۱
۰۱u	۲	۲	۱	۲	۱	۲	۲	۰	۱	۱
۱۱u	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۱	۱	۰	۱
۰۰u	۲	۲	۲	۲	۱	۱	۱	۱	۱	۰
خروج از مرکز	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۲	۲	۲	۲

با توجه به جدول ۱، نتیجه مفید زیر را می‌توان نوشت.

نتیجه ۸: برای هر عدد صحیح $n \geq ۳$ داریم:

$$\mathrm{rad}(\Gamma_n) = ۲. \quad \mathrm{diam}(\Gamma_n) = ۳;$$

۳- تعداد یال‌ها در گراف Γ_n

در این بخش اندازه (تعداد یال‌های) گراف تسلط کلمات دودویی محاسبه خواهد شد.

قضیه ۹: تعداد یال‌ها در گراف Γ_n به‌صورت زیر است:

$$\left|E\left(\Gamma_n\right)\right| = ۳^{\mathrm{n}} - ۳\left(۲^{\mathrm{n}} - ۱\right) \qquad (۱)$$

اثبات: می‌دانیم که در گراف جهت‌دار $\overrightarrow{\Gamma_n}$ یال $u \rightarrow v$ وجود دارد هرگاه $B_۱(v) \subseteq B_۱(u)$. لذا تعداد یال‌های جهت‌دار از رأس u به رئوس دیگر برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های غیر بدیهی $B_۱(u)$. به‌طور مشابه تعداد یال‌های جهت‌دار از رئوس گراف به رأس ثابت u برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های غیر بدیهی $B_۰(u)$. این بدین معنی است که درجه خروجی و درجه ورودی رأس u به ترتیب به‌صورت زیر می‌باشند:

$$d^+(u) = ۲^{|B_۱(u)|} - ۲;$$

$$d^-(u) = ۲^{|B_۰(u)|} - ۲.$$

از طرفی می‌دانیم که درجه رأس u مجموع درجات خروجی و ورودی است. لذا

$$d(u) = d^+(u) + d^-(u) = ۲^{|B_۱(u)|} + ۲^{|B_۰(u)|} - ۴.$$

چون $|B_۰(u)| = n - |B_۱(u)|$ پس داریم:

$$d(u) = ۲^{|B_۱(u)|} + ۲^{n-|B_۱(u)|} - ۴.$$

با توجه به اینکه تعداد یال‌ها در هر گرافی، نصف مجموع درجات آن گراف است داریم:

$$\begin{aligned} |E\left(\Gamma_n\right) &= \frac{۱}{۲} \sum_{u \in \varsigma_n^*} \deg\left(u\right) \\ &= \frac{۱}{۲} \sum_{u \in \varsigma_n^*} ۲^{|\mathrm{B}_۱(\mathrm{u})|} + ۲^{\mathrm{n}-|\mathrm{B}_۱(\mathrm{u})|} - ۴ \\ &= \frac{۱}{۲} \sum_{i=۱}^{n-۱} \binom{n}{i} \left[۲^i + ۲^{n-i} - ۴ \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{۱}{۲}\Big[\sum_{i=۱}^{n-۱}\binom{n}{i}۲^{i}\,۱^{n-i} + \sum_{i=۱}^{n-۱}\binom{n}{i}۲^{n-i}\,۱^{i} - ۴\sum_{i=۱}^{n-۱}\binom{n}{i}۱^{i}\,۱^{n-i}\Big]\\
&= \frac{۱}{۲}\left[۳^{n}+۳^{n}-۴\times ۲^{n}-۲-۲\times ۲^{n}-۴(-۲)\right]\\
&= \frac{۱}{۲}\left[۲\times ۳^{n}-۶\times ۲^{n}+۶\right]\\
&= ۳^{n}-۳\left(۲^{n}-۱\right).
\end{aligned}$$

یادآوری می‌کنیم که به ازای هر عدد حقیقی x کف و سقف این عدد را به ترتیب با $\lfloor x \rfloor$ و $\lceil x \rceil$ نشان می‌دهیم.

نتیجه ۱۰: از اثبات قضیه قبلی نتیجه می‌شود که در گراف Γ_n داریم:

$$\Delta(\Gamma_n) = ۲^{n-۱} - ۲;$$

$$\delta(\Gamma_n) = ۲^{\left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor} + ۲^{\left\lceil \frac{n}{۲} \right\rceil} - ۴.$$

۴- اعداد رنگی و استقلال در گراف Γ_n

در این بخش به محاسبه اعداد رنگی رأسی و یالی و نیز عدد استقلال گراف تسلط می‌پردازیم.

قضیه ۱۱: برای هر عدد صحیح مثبت n داریم:

$$\omega(\Gamma_n) = \chi(\Gamma_n) = n - ۱.$$

اثبات: فرض کنید $C = \{u_۱, u_۲, \ldots u_t\}$ یک خوشه در Γ_n باشد. در این صورت، طبق تمرین ۴۴،۲،۷ از [۱۲] و بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که مسیر زیر یک مسیر هامیلتونی جهت‌دار است:

$$u_۱ \leftarrow u_۲ \leftarrow u_۳ \leftarrow \ldots \leftarrow u_t;$$

بنابراین

$$B_۱(u_۱) \subseteq \ldots \subseteq B_۱(u_t)$$

یک زنجیر از زیرمجموعه‌های غیر تهی و سره از مجموعه $\{۱,۲,\ldots,n\}$ است.؛ بنابراین $t \le n-۱$. این نشان می‌دهد که $\omega(\Gamma_n) \le n-۱$. از طرفی می‌دانیم که مجموعه

$$C' = \{۱۰۰\ldots۰, ۱۱۰۰\ldots۰, \ldots ۱۱\ldots۱۰\}$$

یک خوشه $n-1$ عضوی در گراف Γ_n است. درنتیجه $\omega(\Gamma_n)=n-1$.

از لم قبلی می‌توان عدد رنگی گراف Γ_n را به دست آورد، در واقع کافی است تعریف کنیم:

$$f:\varsigma_n^* \to \{1,2,\ldots,n\}$$
$$f(u)=|B_1(u)|.$$

در این صورت واضح است که f یک رنگ‌آمیزی رأسی سره از گراف Γ_n است و لذا $\chi(\Gamma_n)\le n-1$. از طرفی داریم

$$\chi(\Gamma_n)\ge\omega(\Gamma_n)\ge n-1.$$

بنابراین $\chi(\Gamma_n)=n-1$. ■

لم ۱۲: فرض کنید G یک گراف ساده است که برای هر رأس u از درجه ماکسیمم یال $\{u,v\}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\Delta(G)-d(v)+2$$

بیشتر از تعداد رئوس با درجه ماکسیمم باشد. در این صورت

$$\chi'(G)=\Delta(G).$$

اثبات: رجوع شود به نتیجه ۴,۵ از [۱۲].■

قضیه ۱۳: برای هر عدد صحیح مثبت n داریم:

$$\chi'(\Gamma_n)=\Delta(\Gamma_n)=2^{n-1}-2.$$

اثبات: با توجه به رابطه (۱) می‌دانیم که رأس u در گراف Γ_n دارای درجه ماکسیمم است اگر و تنها اگر $|B_1(u)|=n-1$ یا $|B_0(u)|=n-1$؛ بنابراین تعداد رئوس با درجه ماکسیمم در گراف Γ_n برابر است با $2n$. حال فرض کنید u یک رأس با درجه ماکسیمم در گراف Γ_n باشد. در این صورت طبق لم ۱۲ باید نشان دهیم رأس v مجاور با u وجود دارد به‌طوری‌که

$$\deg(u)-\deg(v)+2>2\mathrm{n}$$

بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که $|B_1(u)|=n-1$ و $u=11\ldots10$.

قرار دهید $v=11\ldots100\ldots0$ که در آن تعداد یک‌ها برابر $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ و لذا تعداد صفرها برابر $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ خواهد بود. حال داریم:

$$\begin{aligned}\deg(u)-\deg(v)+۲&=۲^{n-۱}-۲-(۲^{\frac{n}{۲}}+۲^{\frac{n}{۲}}-۴)+۲\\&=۲^{n-۱}+۴-۲^{\frac{n}{۲}}-۲^{\frac{n}{۲}}\end{aligned}$$

عبارت اخیر برای $n \geq ۶$ از تعداد رئوس با درجه ماکسیمم یعنی $۲n$ بیشتر است.؛ بنابراین طبق لم ۱۲ برای $n \geq ۶$ داریم:

$$\chi'(\Gamma_n)=\Delta(\Gamma_n).$$

همچنین برای $n \leq ۵$ به‌صورت مستقیم می‌توان بررسی کرد که $\chi'(\Gamma_n)=\Delta(\Gamma_n)$ است. ■

قبل از بیان قضیه بعدی یادآور می‌شویم که خانواده Υ از زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی را پادزنجیر گویند هرگاه به ازای هر دو مجموعه A و B از خانواده Υ نه A زیرمجموعه B باشد و نه B زیرمجموعه A. قبل از محاسبه عدد استقلال گراف تسلط لازم است قضیه زیر را بیان کنیم.

گزاره ۱۴: فرض کنید Υ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی باشد. در این صورت، اگر Υ یک پادزنجیر باشد، آنگاه $|\Upsilon| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor}$.

اثبات: رجوع شود به قضیه ۵,۸ از [۷]. ■

قضیه ۱۵: عدد استقلال گراف Γ_n عبارت است از:

$$\alpha(\Gamma_n)=\binom{n}{\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor}.$$

اثبات: ابتدا توجه داریم که دو رأس u و v در Γ_n غیرمجاورند اگر و تنها اگر داشته باشیم $B_۱(u)\not\subset B_۱(v)$ و $B_۱(v)\not\subset B_۱(u)$؛ بنابراین زیرمجموعه Ω از رئوس Γ_n یک مجموعه مستقل است اگر و تنها اگر مجموعه $\Upsilon=\{B_۱(u):u\in\Omega\}$ یک پادزنجیر از زیرمجموعه‌های مجموعه n عضوی $\{۱,۲,\dots,n\}$ باشد. لذا طبق گزاره ۱۴ داریم:

$$|\Upsilon|=|\Omega|\leq\binom{n}{\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor}.$$

از آنجایی‌که خانواده زیرمجموعه‌های $\left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor$- عضوی از مجموعه n-عضوی $\{۱,۲,...,n\}$ پادزنجیر است، پس مجموعه متناظر آن یعنی مجموعه

$$\Omega^* = \left\{ u \in V(\Gamma_n) : |B_۱(u)| = wt(u) = \left(\begin{array}{c} n \\ \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor \end{array} \right) \right\}$$

یک مجموعه مستقل ماکسیمم در Γ_n است؛ بنابراین حکم برقرار است.■

تشکر و قدردانی

ما نویسندگان این مقاله لازم می‌دانیم که از داوران محترم به خاطر پیشنهادات مفید آن‌ها در راستای بهبود نگارش مقاله مراتب سپاس و تشکر خود را اعلام نماییم.

منابع

[1] Beineke, L.W. and Wilson, B.J. (1978), *Selected Topics in Graph Theory*, Academic Press Inc., London.

[2] Farzan, A. and Ian Munro, J. (2013), Succident encoding of arbitrary graphs, *Theoretical Computer Science*, **513**, 38-52.

[3] Fish, W., Key, J.D., and Mwambene, E. (2010), Binary codes from the line graph of the n-cube, *Journal of Symbolic Computation*, **45**, 800-812.

[4] Foucaud, F., Gravier, J., Naserasr, R., Parreau, A. and Valecov, P. (2013), Identifying codes in line graphs, *Journal of Graph Theory*, **73**(4), 425-448.

[5] Gadouleau, M. (2018), On the possible values of the entropy of undirected graphs, *Journal of Graph Theory*, **88**(2), 302-311.

[6] Grady, A. and Poznanovic, S. (2018), Graphical Mahonian statistics on words. *The electronic journal of combinatorics*, **25**(1), #P1.1.

[7] Jukna, S. (2001), *Extermal combinatorics with applications in computer science*, Texts in theoretical computer science, Springer.

[8] Kitaev, S., Lozin, V. (2015), *Words and Graphs*, Springer Cham Heidelberg New York.

[9] Leibniz, G. (1703), *Explication de l'Arithmétique Binaire* (Explanation of Binary Arithmetic). Mathematical Writings VII, Gerhardt, 223.

[10] Millo, J. -V. and Simone, R. de (2012), Periodic scheduling of marked graphs using balanced binary words, *Theoretical Computer Science*, **458**, 113-130.

[11] Rawlings, D. (1981), The r-major index, *J. Combin. Theory Ser. A*, **31**(2), 175-183.

[12] West,D.B. (2001), *Introductionto to Graph Theory*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River.

Dominance Graph of Binary Words

Farzad Shaveisi, Soheila Nasouri

Department of Mathematics, Razi University, Kermanshah, Iran

Abstract: The dominance graph of the binary words, which is denoted by $\overrightarrow{\Gamma_n}$, is a directed graph whose vertex set is the set of all binary words of length *n*. Setting $B_1(w) = \{1 \leq i \leq n | w_i = 1\}$, for every vertex $w_1 w_2 \dots w_n$, we join two vertices v and w by an arc if $B_1(w)$ is contained in $B_1(v)$. In this paper, we study and calculate some parameters of this graph. For example, after computing the distance of every two vertices and the eccentricity of any vertex, it is proved that the diameter and the radius of the underlying graph of $\overrightarrow{\Gamma_n}$ equals 3 and 2, respectively. Also, it is proved that this graph has $3^{\mathrm{n}} - 3(2^{\mathrm{n}} - 1)$ edges. Then we prove that both of the clique number and the chromatic number of the dominance graph of binary words of length *n* are *n-1.* Among other results, it is shown that the edge chromatic number and the maximum degree of vertices are equal to $2^{n-1} - 2$. Finally, by a combinatorial method, the independence number of this graph is determined.

Keywords: Dominance graph, Binary words, Diameter, Girth, Radius, Chromatic number, Independence number.

Mathematics Subject Classification (2010): 97R99, 05C33.