

## بازنگری رهیافت نارایانا بر قضیه چانگ – فلر

سید محسن قریشی شهرکی<sup>۱</sup>

گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۷/۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۲/۲۰

چکیده: نارایانا<sup>۲</sup> با به کار بردن جایگشت‌های دوری رابطه بین مساحت ناحیه زیر مسیره‌های شمالی – شرقی از مبدأ به نقطه  $(n, n)$  و تعداد نقیصه‌های<sup>۳</sup> آن‌ها را مورد بررسی قرار داد و از این طریق اثباتی برای قضیه معروف چانگ – فلر<sup>۴</sup> ارائه نمود. در این مقاله با بازنگری رهیافت نارایانا، اثبات‌هایی کوتاه بر قضایای نارایانا و چانگ – فلر ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: اعداد کاتالان، مسیر شمالی-شرقی، نقیصه

رده‌بندی موضوعی (۲۰۱۰): ۰۵A۱۵.

### ۱-مقدمه

فرض کنید  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  یک زیرمجموعه متناهی از بردارهایی در  $\mathbb{Z}^2$  باشد. یک مسیر شبکه‌ای  $P$  از طول  $n$  با گام‌هایی در  $V$ ، دنباله‌ای به صورت  $(p_0, p_1, \dots, p_n)$  در  $\mathbb{Z}^2$  است که  $p_{i+1} - p_i \in V$ . یک مسیر دایک مسیری شبکه‌ای است که تنها دارای گام‌های شرقی  $(1, 0)$  و گام‌های شمالی  $(0, 1)$  است. از مهم‌ترین مسیرهای دایک، می‌توان به مسیرهای کاتالان اشاره کرد. یک مسیر دایک که از مبدأ  $(0, 0)$  شروع می‌شود، متشکل از  $n$  گام شمالی و  $n$  گام شرقی است و  $2n$  گام آن بالای خط  $x = y$  قرار دارد مسیر کاتالان با  $T$  نقیصه نامیده می‌شود. به‌وضوح چنین مسیری در نقطه  $(n, n)$  خاتمه می‌یابد و  $0 \leq T \leq n$ . یکی از مهم‌ترین قضایا در این رابطه قضیه زیر است [۱ و ۵].

<sup>۱</sup>- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: [m.ghoraishi@scu.ac.ir](mailto:m.ghoraishi@scu.ac.ir)

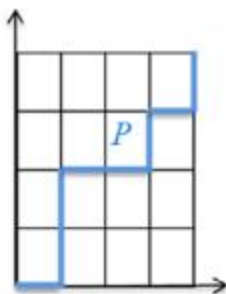
2- Narayana  
3- flaw  
4- Chung-Feller

قضیه (چانگ - فلر). تعداد مسیرهای کاتالان به طول  $2n$  و با  $r$  نقیصه، مستقل از  $r$  و برابر با

$$n \text{ امین عدد کاتالان یعنی } C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \text{ است.}$$

نارایانا در  $[n]$  با به کار بردن جایگشت‌های دوری به مطالعه رابطه‌ای بین مساحت ناحیه زیر یک مسیر شمالی - شرقی و تعداد نقیصه‌های آن پرداخت. رهیافت وی بدین قرار است: فرض کنید  $C(n)$  مجموعه تمامی مسیرهای شمالی - شرقی از  $(0,0)$  به  $(n,n)$  باشد و قرار دهید:

$$N(n) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \mid 0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq n\}.$$



شکل (۱): مسیر شمالی - شرقی متناظر با بردار  $(4) \in N(4)$  (۱,۳,۳)

به هر مسیر  $P \in C(n)$  بردار  $\bar{a}_P = (a_1, \dots, a_n) \in N(n)$  را وابسته سازید، به طوری که  $a_i$  برابر با مینیمم فاصله‌ای است که نقطه  $(n, n-i)$  به موازات محور  $x$  ها از مسیر  $P$  دارد. به عکس هر بردار  $\bar{a} \in N(n)$  متناظر با مسیری یکتا در  $C(n)$  است که آن را با  $P_{(\bar{a})}$  نشان می‌دهیم. برای مثال مسیر داده شده در شکل ۱ متناظر با بردار  $(4) \in N(4)$  است. برای  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in N(n)$  و  $0 \leq i \leq n$ ، قرار دهید  $\bar{b}_{(i)} = (a_1 + i, a_2 + i, \dots, a_n + i)$ . سپس ترتیب جملات هر  $\bar{b}_{(i)}$  را چنان تغییر دهید که دنباله‌ای صعودی حاصل شود. بردارهای جدید متناظر با هر  $\bar{b}_{(i)}$  را با  $\bar{a}_{(i)}$  نشان دهید، به طوری که  $0 \leq i \leq n$ . اگر  $i \neq j$ ، آنگاه مساحت‌های نواحی زیر مسیرهای  $\bar{a}_{(i)}$  و  $\bar{a}_{(j)}$  مختلفاند [۷، لم ۱]. برای  $\bar{a}, \bar{b} \in N(n)$ ، تعریف کنید  $\bar{a} \sim \bar{b}$  اگر و تنها اگر  $\bar{a} \in \{\bar{a}_{(i)}, \dots, \bar{a}_{(n)}\}$ . در این صورت  $\sim$  یک رابطه هم‌ارزی است و هر رده هم‌ارزی شامل  $n+1$  مسیر است. بعلاوه قضیه زیر برقرار است [۷، قضیه اصلی].

قضیه ۱. فرض کنید  $\bar{a}, \bar{b} \in N(n)$  و  $\bar{a} \sim \bar{b}$ . اگر مساحت ناحیه زیر مسیر  $P_{(\bar{a})}$  بیشتر از مساحت ناحیه زیر مسیر  $P_{(\bar{b})}$  باشد، آنگاه تعداد نقیصه‌های  $P_{(\bar{a})}$  بیشتر از نقیصه‌های  $P_{(\bar{b})}$  است.

قضیه ۱ که اثبات آن چندان هم ساده و کوتاه نیست، به سادگی قضیه چانگ - فلر را نتیجه می‌دهد. در این مقاله با بازنگری رهیافت نارایانا، اثبات‌هایی کوتاه برای قضایای نارایانا و چانگ - فلر ارائه می‌دهیم. پیش از آن خواننده را برای اثبات‌هایی کوتاه و ترکیباتی از قضیه چانگ - فلر به [۲، ۳ و ۶] ارجاع می‌دهیم. همچنین [۴] مرجع مناسبی برای مطالعه در زمینه‌ی شمارش مسیرهای شبکه‌ای است.

## ۲- بازنگری رهیافت نارایانا

فرض کنید  $X(n) \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$  مجموعه همه  $\binom{2n}{n}$  جواب‌های صحیح نامنفی معادله زیر باشد.

$$x_0 + x_1 + \dots + x_n = n \quad (۱)$$

به هر بردار  $\bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in X(n)$  مسیر  $P_{\bar{x}} \in C(n)$  را به شرح زیر وابسته می‌سازیم. برای  $0 \leq i \leq n$ ، قرار دهید

$$X_i = x_0 + x_1 + \dots + x_i \quad \text{و} \quad P_{\bar{x}} \text{ را مسیری در نظر بگیرید که از نقاط زیر می‌گذرد.}$$

$$(0, 0), (0, X_0), (1, X_0), (1, X_1), \dots, (i, X_{i-1}), (i, X_i), \dots, (n, X_{n-1}), (n, n) \quad (\#)$$

به عکس، هر مسیر  $P \in C(n)$  متناظر با جوابی یکتا از معادله (۱) است. دقت کنید که نقاط  $(i, X_i)$  و  $(i, X_{i-1})$  به ترتیب نقاط پایینی و بالایی اشتراک مسیر  $P$  با خط  $x = i$  می‌باشند که ممکن است برهم منطبق باشند. برای مثال مسیر داده شده در شکل (۱) متناظر با بردار  $(0, 2, 0, 1, 1) \in X(4)$  است. بالعکس بردار  $(0, 2, 0, 1, 1)$  به وضوح یک جواب معادله  $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$  است و با توجه به (#) دنباله نقاط

$$(0, 0), (0, 0), (1, 0), (1, 2), (2, 2), (2, 2), (3, 2), (3, 3), (4, 3), (4, 4),$$

را مشخص می‌کند که منطبق بر مسیر شکل (۱) است.

برای هر  $\bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in X(n)$  و هر  $0 \leq k \leq n$  قرار دهید  $\bar{x}_k = (x_{+k}, x_{1+k}, \dots, x_{n+k})$  به طوری که اندیس‌ها به پیمانه  $n+1$  در نظر گرفته می‌شوند. به وضوح  $\bar{x}_k$  نیز جوابی از (۱) است. رابطه  $\approx$  بر  $X(n)$  را بدین صورت تعریف کنید که  $\bar{x} \approx \bar{y}$  اگر و تنها اگر  $\bar{y} = \bar{x}_k$ ، برای برخی  $0 \leq k \leq n$ . به وضوح  $\approx$  یک رابطه هم‌ارزی بر  $X(n)$  است. حال فرض کنید مسیر  $P \in C(n)$  به بردارهای  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in N(n)$  و  $\bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in X(n)$  متناظر شود. در این صورت برای هر  $0 \leq i \leq n$  داریم:  $x_i = |\{j \mid a_j = n - i\}|$  فرض کنید  $0 \leq k \leq n$  و  $\bar{a}_{(k)} = (a'_1, \dots, a'_n)$  همچنین در نظر

بگیرید که  $P' = P_{\bar{a}(k)}$  مسیر متناظر با بردار  $\bar{a}(k)$  است. اگر  $P'$  متناظر با  $\bar{x}' = (x'_0, x'_1, \dots, x'_n) \in X(n)$  باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} x'_i &= |\{j \mid a'_j = n - i\}| \\ &= |\{j \mid a_j + k = n - i\}| \\ &= |\{j \mid a_j = n - k - i\}| = x_{k+i}. \end{aligned}$$

بنابراین  $\bar{x} = \bar{x}_k$ . از این رو مسیرهای متناظر با رده‌های هم‌ارزی روابط  $\sim$  و  $\approx$  برهم منطبق‌اند؛ بنابراین نشان داده‌ایم که

لم ۱. روابط هم‌ارزی  $\sim$  و  $\approx$  رابطه هم‌ارزی یکسانی را بر  $C(n)$  القا می‌کنند.

برای هر دنباله متناهی از اعداد صحیح مانند  $(x_0, x_1, \dots, x_m)$  قرار دهید:  $X_i = \sum_{j=0}^i x_j$

$$f(x_0, x_1, \dots, x_m) = |\{i \mid X_i > i, 0 \leq i \leq m\}|,$$

$$S(x_0, x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^{m-1} X_i.$$

بنابراین اگر  $\bar{x} \in X(n)$ ، آنگاه  $f(\bar{x})$  تعداد نقیصه‌های مسیر  $P_{\bar{x}}$  و  $S(\bar{x})$  مساحت ناحیه زیر آن را نشان می‌دهد.

نتیجه اصلی این مقاله اثبات قضیه زیر است.

قضیه ۲. برای هر عدد طبیعی  $0 \leq k \leq n$  و  $\bar{x} \in X(n)$ ، فرض کنید  $\bar{y} = \bar{x}_k$ . در این صورت  $f(\bar{x}) \neq f(\bar{y})$ . به‌علاوه اگر  $f(\bar{x}) < f(\bar{y})$ ، آنگاه  $S(\bar{x}) < S(\bar{y})$ .

فرض کنید  $\bar{a}, \bar{b} \in N(n)$  و  $\bar{a} \sim \bar{b}$  و مساحت ناحیه زیر مسیر  $P_{\bar{a}}$  بیشتر از مساحت ناحیه زیر مسیر  $P_{\bar{b}}$  باشد. اگر  $\bar{x}$  و  $\bar{y}$  به ترتیب بردار متناظر با  $\bar{a}$  و  $\bar{b}$  در  $X(n)$  باشند، آنگاه چون  $\bar{a} \sim \bar{b}$  با توجه به لم ۱ داریم  $\bar{y} = \bar{x}_k$ ، برای برخی  $1 \leq k \leq n$ . بنا بر قضیه ۲،  $f(\bar{x}) \neq f(\bar{y})$  یعنی تعداد نقیصه‌های  $P_{\bar{x}}$  کمتر از تعداد نقیصه‌های  $P_{\bar{y}}$  باشد، آنگاه با توجه به قضیه ۲،  $S(\bar{x}) < S(\bar{y})$  یعنی مساحت زیر مسیر  $P_{\bar{a}}$  کمتر از مساحت زیر مسیر  $P_{\bar{b}}$  است و این در تناقض با فرض است. پس تعداد نقیصه‌های  $P_{\bar{x}}$  بیشتر از تعداد نقیصه‌های مسیر  $P_{\bar{y}}$  است؛ بنابراین قضیه ۲، قضیه نارایانا (قضیه ۱) را نتیجه می‌دهد. همچنین قضیه ۲ به‌وضوح لم ۱ از مرجع [۷] را نتیجه می‌دهد.

اثبات. فرض کنید  $X_{k-1} \leq k-1$ . لذا

$$X_{k+i} = X_{k-1} + Y_i, \quad 0 \leq i \leq n-k,$$

$$Y_{n-k+i+1} = Y_{n-k} + X_i, \quad 0 \leq i \leq k-1.$$

بنابراین

$$f(\bar{x}) = f(x_0, \dots, x_{n-1}) \leq f(x_0, \dots, x_{k-1}) + f(x_k, \dots, x_{n-1}).$$

از آنجا که  $X_{k-1} + Y_{n-k} = n$  داریم، پس  $Y_{n-k} \geq n+1-k$

$$f(y_0, \dots, y_{n-k}) = f(x_k, \dots, x_n) > f(x_k, \dots, x_{n-1})$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f(\bar{y}) &\geq f(y_0, \dots, y_{n-k}) + f(y_{n-k+1}, \dots, y_n) \\ &> f(x_k, \dots, x_{n-1}) + f(x_0, \dots, x_{k-1}) \geq f(\bar{x}). \end{aligned}$$

به علاوه

$$\begin{aligned} S(\bar{x}) &= \sum_{i=0}^{n-1} X_i = X_0 + \dots + X_{k-1} + (X_{k-1} + Y_0) + \dots + (X_{k-1} + Y_{n-k-1}) \\ &= (X_0 + \dots + X_{k-1}) + (Y_0 + \dots + Y_{n-k-1}) + (n-k+1)X_{k-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(\bar{y}) &= \sum_{i=0}^{n-1} Y_i = Y_0 + \dots + Y_{n-k} + (Y_{n-k} + X_0) + \dots + (Y_{n-k} + X_{k-1}) \\ &= (X_0 + \dots + X_{k-1}) + (Y_0 + \dots + Y_{n-k-1}) + kY_{n-k}. \end{aligned}$$

از این رو  $S(\bar{x}) < S(\bar{y})$

سپس فرض کنید  $X_{k-1} > k-1$  قرار دهید.  $j = n-k$  در این صورت  $Y_j \leq j$  و  $\bar{y}_j = \bar{x}$ . حال بحث قبلی ایجاب می کند که  $f(\bar{y}) < f(\bar{x})$  و  $S(\bar{y}) < S(\bar{x})$ . این مطلب اثبات را کامل می کند.

منابع

- [1] Chung, K. L. and Feller, W. (1949). On fluctuations in coin-tossing. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **35**, 605-608.
- [2] Chen, Y. M. (2008). The Chung-Feller theorem revisited. *Disc. Math.*, **308**, 1328-1329.
- [3] Hodges, J. (1955). Galton's rank-order test. *Biometrika*, **42**(1/2), 261-262.

- 
- [4] Krattenthaler, C. (2015). *Lattice path enumeration. Handbook of Enumerative Combinatorics*, M. Bona, *Discrete Math. and Its Appl.* CRC Press, Boca Raton London-New York. 589-678.
- [5] MacMahon, P. (1909). Memoir on the theory of the partitions of numbers. Part IV. *Phil. Trans. R. Soc. A* **209**, 153-175.
- [6] Montagh, B. (1991). A simple proof and a generalization of an old result of Chung and Feller, *Disc. Math.*, **87**, 105-108.
- [7] Narayana, T.V. (1967). Cyclic permutation of lattice paths and the Chung-Feller theorem, *Skand. Aktuarietidsk*, 23-30.

---

**Revisiting Narayana's Approach to the Chung-Feller Theorem**

Seyed Mohsen Ghoraiishi Shahraki

Department of Mathematics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz,  
Iran**Abstract**

Using cyclic permutations, Narayana investigated the relation between the area under north-east paths from the origin to the point  $(n, n)$  and the number of the flaws of the paths. His result implies a proof to the Chung-Feller Theorem. In this paper by revising the Narayana's approach, we offer short proofs to the theorems of Narayana and Chung-Feller.

**Keywords:** Catalan numbers, North-east path, Flaw.**Mathematics Subject Classification (2010) :** 05A15.

*Archive of SID*