

یک راه حل تحلیلی تقریبی معادله Bethe برای ذرات باردار در محدوده انرژی رادیوتراپی

سیده نسرین حسینی مطلق* و حامد سلوکی نژاد

گروه فیزیک، پردیس، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شیراز، شیراز، فارس، ایران.

*فارس، شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شیراز، پردیس، گروه فیزیک، کدپستی: ۷۱۸۵۷-۵۱۹۵۳

پست الکترونیکی: hosseinimotlagh@hotmail.com

چکیده

ذرات باردار مانند پروتون‌ها و یون‌های کربن یک ابزار فزاینده مهم در پرتودرمانی هستند. با این حال، مشکلات فیزیکی حل نشده مانع از اجرای مطلوب، از جمله: برآورد بجاگذاری دز در بافت غیر همگن، یک جنبه ضروری بهینه‌سازی درمان است. روش مونت کارلو (MC) می‌تواند برای برآورد میزان تشعشع مورد استفاده قرار گیرد و در عین حال، این عملیات محاسباتی قدرت‌مند بسیار گران است و قابلیت محدود کردن آن را دارد. در این کار از فیزیک پایه به شکل معادله Bethe استفاده می‌کنیم تا یک جواب جدید تحلیلی برای برد، انرژی و انتقال انرژی خطی (LET) ذرات ارائه شود. این راه حل از لحاظ عملکرد انتگرال نمایشی با تبدیل نسبی هم‌هنگ ارائه شده است، که امکان استفاده از آن در سطح انرژی رادیوتراپی (پروتون‌های ۵۰-۳۵۰ مگاالکترون ولت، یون‌های کربن 100-600 MeV/a.m.u) را فراهم می‌کند. توافق در امتداد مسیر ذرات، با برخی از اختلافات در رسیدن به مسیر بالا می‌باشد. مدل ارائه شده در یک چارچوب بهینه‌سازی ذرات پرتودرمانی به عنوان یک روش سریع برای دز و LET برآورد شده است، که قادر به حساب آوردن ناهمگونی در چگالی الکترون و پتانسیل یونیزاسیون است.

کلیدواژه‌گان: معادله Bethe، دز، LET، رادیوتراپی، ذرات باردار، پروتون، یون کربن.

۱. مقدمه

ذرات باردار تحت تاثیر برهم‌کنش‌های الکترونی قرار می‌گیرند، زیرا آن‌ها از درون ماده عبور می‌کنند و انرژی خود را از دست می‌دهند و کند می‌شوند [۱]. همان‌طور که ذره کند می‌شود، چگالی یونیزاسیون‌هایی که در محیط ایجاد می‌شود، قبل از آن‌که چگالی یونیزاسیون افزایش یابد، به طور ناگهانی از قله براگ به صفر برسد، زیرا که تمام انرژی جنبشی ذره کم شده و می‌توان آن‌ها را ثابت فرض کرد. تحت فرض‌های خاص، قدرت متوقف شدن در یک محیط به وسیله معادله Bethe

نسبیتی ارائه می‌شود. تصحیحات ویژه‌ای برای ذرات انرژی بالا و عدد اتمی بالا قابل اجرا است: از جمله: تصحیح Barkas، Fermi و Bloch که به طور کامل توسط Ziegler بررسی شده است. با این حال، در انرژی و در مواد مربوط به رادیوتراپی، انتظار می‌رود که این اثرات خطاهایی کم‌تر از ۱٪ را نشان دهند، در حالی که در پرتودرمانی، عدم قطعیت به میزان قابل توجهی از این سطح فراتر رفته است. بر این اساس، این اصلاحات را برای رسیدن به یک جواب تحلیلی، بدون از

کاهش می‌یابد. با این حال، این تاثیر در انرژی‌های بالا در مواد با Z کوچک‌تر کم است. به این ترتیب تعریف ما از برد بر حسب انرژی و سرعت به صورت زیر است [۳]:

$$R = \int_0^{E_0} \frac{dx}{dE} dE = \int_0^{v_0} \frac{dx}{dv} dv \quad (2)$$

که در آن اندیس صفر معرف مقدار اولیه در $x=0$ است.

۱.۱. استخراج مدل

در ابتدا از تعریف نسبیتی انرژی جنبشی ذره که بر حسب فاکتور لورنتس بیان می‌شود، شروع می‌کنیم [۴]:

$$E = (\gamma - 1)m_p c^2, \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \beta = \frac{v}{c} \quad (3)$$

از این می‌توان به راحتی dE/dv را محاسبه کرد و با استفاده از قانون زنجیره‌ای $\frac{dE}{dx} = \frac{dE}{dv} \frac{dv}{dx}$ می‌توان نشان داد که:

$$\frac{dE}{dx} = m_p v(x) \gamma^3 \frac{dv}{dx} \quad (4)$$

اگر معادله ۴ و معادله ۱ مستقیماً مساوی یک‌دیگر قرار داده شوند، یک جواب برای $v(x)$ که از لحاظ تحلیلی قابل چالش می‌باشد، بدست می‌آید. برای جلوگیری از این، یک سیستم مختصات x' را معرفی می‌کنیم که در آن عبارت کلاسیکی انرژی جنبشی ذرات $E = \frac{m_p v(x')^2}{2}$ برقرار است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{dE}{dx'} = m_p v(x') \gamma^3 \frac{dv}{dx'} \quad (5)$$

معادله ۱ را می‌توان با حذف β^2 به صورت زیر نوشت:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi n z^2}{m_e} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{v^2} \right) \ln \left(\frac{2m_e v^2}{I} \right) \quad (6)$$

این توجیه است اگر:

$$\ln \left(\frac{2m_e v^2}{I(1 - \beta^2)} \right) - \beta^2 \approx \ln \left(\frac{2m_e v^2}{I} \right)$$

برای پروتونی با انرژی بالا در حدود ۲۵۰ MeV، تنها ۱٪ تفاوت بین دو طرف و برای یون کربن با انرژی بالا

دست دادن دقت در ناحیه مورد علاقه، نادیده می‌گیریم. معادله Bethe به صورت زیر است [۲]:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi n z^2}{m_e c^2 \beta^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2}{I(1 - \beta^2)} \right) - \beta^2 \right) \quad (1)$$

جایی که n چگالی الکترونی ماده و e بار الکترون، m_e جرم الکترون، I میانگین پتانسیل برانگیختگی، Z عدد اتمی و $\beta = v/c$ ، جایی که v سرعت ذره است و c سرعت نور در خلاء است. انرژی ذره تابعی از سرعت ذره است که خود تابعی از فاصله است. کمیت مشخص شده توسط معادله ۱ می‌تواند به عنوان توان توقف الکترونی خطی یک محیط برای متوقف کردن یک نوع ذره معین در نظر گرفته شود و نشان‌دهنده اثر ماده بر ذره است. اثر برهم‌کنش ذرات بر ماده، انتقال انرژی خطی (LET) نامیده می‌شود. به طور کلی، LET فقط بر خوردهایی را که انرژی جنبشی بین الکترون‌های ثانویه تقسیم شده و به پایین‌تر از یک مقدار آستانه می‌رسند، در نظر می‌گیرد. این کمیت برد الکترون‌ها را به مقدار کوتاه‌تری محدود می‌کند، که ممکن است خصوصیات بیش‌تری از اثرات تابشی در مقیاس سلولی را فراهم کند. با این حال، این مطالعه قصد دارد که تشعشعات را در یک مقیاس میلی‌متری مشخص کند و دزیمتری میکروسکوپی و اثرات رادیو بیولوژیکی در خارج از محدوده فرار را بررسی کند. که به مقدار قابل توجهی برای کار مدل‌سازی بالینی مهم است. برد یک ذره باردار در یک محیط می‌تواند بسته به محتوای نظری یا تجربی به چندین روش مختلف تعریف شود. در این کار، ما روی برد تقریبی کند شدن مداوم (CSDA) تمرکز داریم که با انتگرال‌گیری روی وارون معادله ۱ از انرژی اولیه ذرات تا انرژی نهایی آنها به دست می‌آید. لازم به ذکر است که در عمل برد پیش‌بینی شده (همان فاصله‌ای است که ذره در راستای مسیر اولیه طی می‌کند) بدلیل انحرافات کوچک ناشی از پراکندگی، کمی

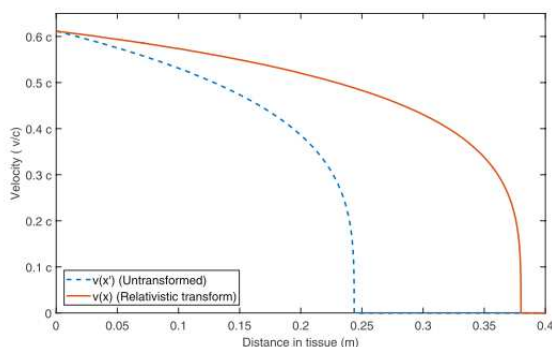
معادلات ۴ و ۵ را برابر قرار دهیم؛ بنابراین می توان نشان داد که: $dx = \gamma^3 dx'$ و در نتیجه آن:

$$x(x') = \int_0^{x'} \left(1 - \left(\frac{v(x')}{c}\right)^2\right)^{-3/2} dx' \quad (11)$$

این تبدیل را می توان به راحتی مورد ارزیابی قرار داد. زمانی که $v(x')$ شناخته شده است و تبدیل حاصل جواب واقعی $v(x)$ است. در چارچوب x برد واقعی CSDA، R توسط معادله زیر داده می شود:

$$x(x') = \int_0^{x'} \left(1 - \left(\frac{v(x')}{c}\right)^2\right)^{-3/2} dx' \quad (12)$$

هم چنین می تواند با استفاده از روش بسط سری محاسبه شود. تصویری از تبدیل نسبی در شکل ۱ نشان داده شده است. هنگامی که پروفایل سرعت تبدیل شده شناخته شده باشد، می توان آن را به آسانی برای بدست آوردن منحنی تک انرژی و LET از طریق اتحادهای ۳ و ۶ به ترتیب اعمال کرد.



شکل (۱): مقایسه $v(x)$ و $v(x')$ (توجه داشته باشید سرعت نشان داده شده در محور عمودی به صورت کسری از سرعت نور c است) مربوط به پروتونی با انرژی 250 MeV.

جدول (۱): پارامترهای مورد استفاده برای هر شبیه سازی.

Parameter	Value (Proton)	Value (Carbon Ion)
Electron density n	$3.343 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}$	$3.343 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}$
Electron mass m_e	$1.672 \times 10^{-27} \text{ kg}$	$1.672 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Electron charge e	$1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$	$1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Vacuum permittivity ϵ_0	$8.854 \times 10^{-12} \text{ F}$	$8.854 \times 10^{-12} \text{ F}$
Ionization Potential I	75 eV	75 eV
Atomic number z	1	6
Particle mass m_p	$1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$	$2.007 \times 10^{-26} \text{ kg}$

400MeV/a.m.u) تنها ۲٪ تفاوت بین دو طرف وجود دارد [۵]. این اختلاف جزئی به سرعت از بین می رود زمانی که شتاب ذرات کاهش می یابد، بنابراین این ساده سازی می تواند تنها با اختلاف جزئی برای ذرات در محدوده انرژی رادیواکتیو استفاده شود. برای خلاصه تر شدن، فرض می کنیم: $A = \frac{4\pi n z^2}{m_e m_p} \left(\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0}\right)^2$ و $B = \frac{2m_e}{I}$ اکنون برد CSDA را در سیستم مختصات x' با استفاده از عبارت مشابهی با معادله ۲ تعریف می کنیم [۶]:

$$R' = \int_0^{v_0} \frac{dx'}{dv} dv \quad (7)$$

با قرار دادن معادله ۶ در معادله ۵، و نتیجه آن در معادله ۷، عبارتی شبیه به آنچه که توسط ایوانس گزارش شده است، بدست می آوریم:

$$R' = \int_0^{v_0} \frac{v^3}{A \ln(Bv^2)} dv \quad (8)$$

این را می توان حل کرد که جوابی را از لحاظ عملکرد انتگرال نمایی Ei به ارمان می آورد. از این رو برد ذرات در سیستم مختصات x' را می توان به شکل زیر نوشت:

$$R' = \frac{Ei(\ln(B^2 v_0^4))}{2B^2 A} \quad (9)$$

اگر ما باند پایینی را در معادله ۷ تغییر دهیم، می توانیم به راحتی نشان دهیم که $x' = R' - \frac{Ei(\ln(B^2 v(x')^4))}{2B^2 A}$ و بنابراین به سادگی جواب سرعت $v(x')$ برحسب x' به صورت زیر در می آید:

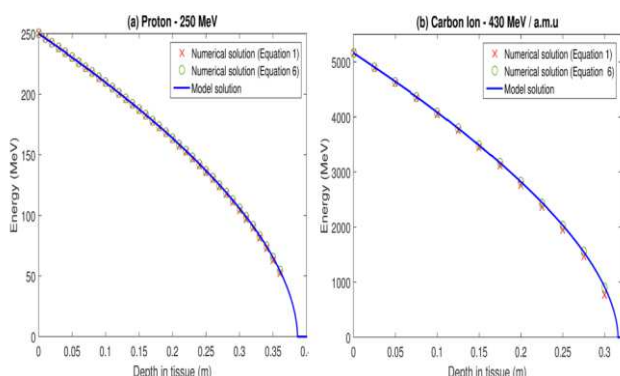
$$v(x') = \frac{1}{\sqrt{B}} \exp\left[\frac{1}{4} \left(Ei^{-1}(2B^2 A(R' - x'))\right)\right] \quad (10)$$

فرمول سرعت در معادله ۱۰ هنگامی برقرار است که: $\gamma \cong 1$ ، اما در عمل، سرعت ذرات باردار با انرژی بالا که در درمان استفاده می شوند، اغلب فراتر از این هستند و عبارت بهتری برای آن ها لازم است. برای مجاز دانستن اثرات نسبی، می توانیم تبدیل از چارچوب x به x' را معرفی کنیم. می توانیم

سطح مقطع‌های مختلفی مورد بررسی قرار گرفتند: یک فانتوم $10\text{cm} \times 10\text{cm}$ ، که در آن پروتون‌ها تحت پراکندگی کولنی چندگانه (MCS) قرار گرفته و انتظار می‌رود که متوقف شوند و در حالت $1\text{mm} \times 1\text{mm}$ انتظار می‌رود که اکثریت پروتون‌ها تحت MCS فرار کنند. برد یون‌های کربن با نتایج جدول‌بندی شده مربوط به گزارش ICRU و برآورد تجربی نرم‌افزار MSTAR مقایسه شده است [۹].

جدول (۲): چگالی الکترونی انواع مختلف بافت.

Tissue	Electron density relative to water - ρ_e
Water	1.000
Muscle	1.040
Adipose tissue	0.957
Bone (Femur)	1.278
Bone (Rib)	1.347



شکل (۲): مقایسه مدل حل عددی معادله Bethe (معادله ۱) و مدل فرم ساده (معادله ۶) برای (a) پروتون انرژی بالا و (b) یون کربن با انرژی بالا. انرژی‌های بالا.

۲.۲. برنامه‌های کاربردی مدل

مزیت اصلی درمان با ذرات باردار این است که دز به طور دقیق به یک منطقه تومور تحویل داده می‌شود، در حالی که عمدتاً بافت سالم را در پایین‌دست قرار می‌دهد، در مقایسه با فوتون‌هایی که نسبتاً به طور یکنواخت در طول مسیر پرتو قرار می‌گیرند. با این حال، این مزیت نیز دشوار است. دز باید به خوبی هدف را دربرگیرد و به دقت بسیار بالایی تحویل داده شود. اگر این مورد نباشد، مقدار زیادی از آن می‌تواند از تومور

تابع انتگرال نمایی معکوس Ei^{-1} در جواب فوق‌الذکر نیاز به دانستن عملکرد انتگرال نمایی معکوس دارد. در اغلب بسته‌های نرم‌افزاری محاسباتی، با استفاده از روش ساده ریشه‌یابی، می‌توان ریشه‌ها را به راحتی استخراج کرد [۷]. همچنین ممکن است از برخی از تقریب‌های ساده استفاده شود. برای اغلب موارد، تقریب $Ei^{-1}(x) \approx \ln(x \ln(x \ln x))$ می‌تواند بدون ارائه خطای جدی استفاده شود و از چندجمله‌ای چیشف می‌توان استفاده کرد. روش بسط سری نیز امکان‌پذیر است.

۲. مواد و روش‌ها

۲.۱. مقایسه با روش‌های عددی.

برای اطمینان یافتن از این‌که جواب پیشنهاد شده متناسب با هر دو فرم از معادله Bethe (به طور کامل نسبتی) و معادله ۶ (فرم ساده) می‌باشد از روش Runge-Kutta استفاده می‌شود. این جواب‌ها با روش تحلیلی که در این مقاله آمده مشخص می‌شود. پارامترهای فیزیکی مورد استفاده در این کار در جدول ۱ آمده است. از مقایسه داده‌های موجود در جدول داده شده، روش مونت‌کارلو و داده‌های تجربی از کدهای انتقال ذرات MC به طور سنتی به عنوان روش اصلی برای محاسبه عمق دز پروتون استفاده می‌شود. در این کار از نرم‌افزار MCNPX v2.7.0 برای شبیه‌سازی پرتوهای مدادی پروتونی با طیف وسیعی از انرژی اولیه در آب بافتی استفاده شده است. کارهای کم‌تری روی یون‌های کربن انجام شده است، زیرا این موارد در استفاده بالینی شایع‌تر است، اگرچه روش MC با استفاده از GEANT4 روش دقیق‌تری است. در حالی که در اجرای MC برای یون‌های کربن هنوز تحقیقات زیادی انجام نگرفته است. هندسه پروتون در روش MC شامل یک پرتو مدادی باریکی از ذرات تک انرژی بوده که در فانتوم آب اتفاق می‌افتد که طول آن ۲۰٪ بیش‌تر از برد پروتون است [۸]. فانتوم‌هایی با

و اندام‌های سالم خارج شود و از هیچ‌گونه مزیتی برای درمان برخوردار نباشد. مثال‌های بیشتری در جدول ۲ ارائه شده است. اخیراً روش‌های محاسباتی مربوط به دزها از الگوریتم‌های پرتوهای مدادی استفاده می‌کنند که منجر به ناهمگونی منحنی دز عمقی در آب می‌شود. چنین رویکردی تخمینی از LET را ارائه نمی‌دهد، که مهم‌ترین نکته برای ارزیابی رادیوبیولوژیکی روش‌های درمانی است. این مدل در این‌جا می‌تواند برای چنین کاربردهایی مفید باشد زیرا می‌توان آن را به سرعت برای تخمین توزیع انرژی از طریق ماده‌هایی مانند بافت مورد استفاده قرار داد.

علاوه بر این، این مدل در این‌جا می‌تواند برای بررسی اثر پارامترهای فیزیکی بر پروفایل رسوب انرژی مورد استفاده قرار گیرد. اکثر پارامترهای مورد نیاز در این مدل ثابت فیزیکی هستند، همان‌طور که در جدول ۱ دیده می‌شود. با این حال، مقدار میانگین انرژی پتانسیل یونیزاسیون آب، اختلاف قابل توجهی با مقادیر موجود در دیگر مقالات دارد. اما مقدار استفاده شده در این‌کار 75eV است که در مطابقت با ICRU است، اخیراً ICRU مقدار پایین‌تر 67eV را برای آن گزارش کرده است در حالی که سایر نویسندگان مقدار بسیار بالاتر $80.2 \pm 2\text{eV}$ را بر اساس اندازه‌گیری در آزمایشگاه پیشنهاد داده‌اند [۱۰]. با استفاده از این مدل، می‌توانیم به راحتی مقدار این کمیت را تغییر دهیم و ببینیم که تاثیر آن بر پروفایل‌های محدوده انرژی چگونه است.

۳. بحث و نتایج

از مقایسه عددی حل معادلات ۱ و ۶ با استفاده از MATLAB ODE45، و Runge-Kutta تطابق خوبی دیده شده است. برای پرتون‌ها، تفاوت بین این مدل و معادله ۶ ناچیز بود، با میانگین خطایی حدود «۱٪». حتی اگر نسخه کاملاً

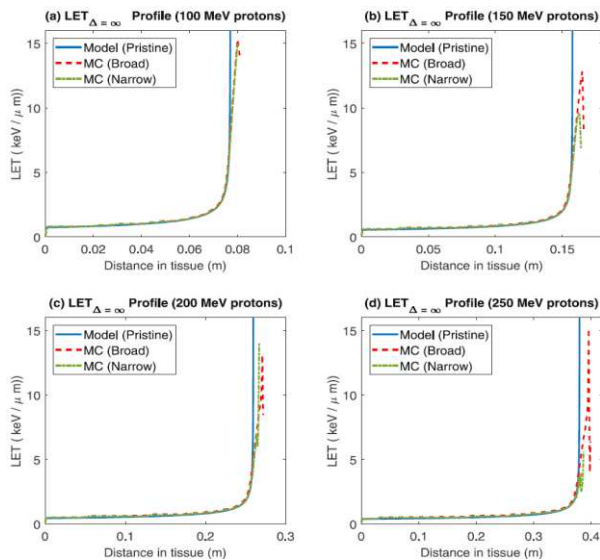
نسبیتی معادله Bethe مورد استفاده قرار گیرد (معادله ۱)، خطاها جزئی هستند؛ در مورد پرتون‌ها، میانگین خطا بین مدل و جواب نسبیتی از ۰.۰۴۹٪ در 100MeV تا 0.7800% در 250MeV است. برای یون‌های کربن، میانگین خطا بین مدل و جواب عددی نسبیتی، از ۰.۴۳٪ در 250MeV تا 2.1584% در $430\text{MeV} / \text{a.m.u}$ تا بالاترین نرخ است. این نشان می‌دهد که مدل دقیقاً پویایی معادله ۶ را نشان می‌دهد و می‌تواند در مورد رابطه کاملاً نسبیتی در معادله ۱ با تنها خطای جزئی توضیح داده شود. شکل ۲ جواب‌ها را به صورت تابعی از عمق برای پرتون‌ها و یون‌های کربن در انرژی اولیه نشان می‌دهد که در آن اختلاف باید آشکار شود. حتی در این‌جا پیش‌بینی مدل‌ها با جواب‌های عددی، بدون تفاوت قابل توجهی بین پیش‌بینی‌های مدل و جواب‌های عددی معادله ۶، و تنها انحراف جزئی از معادله ۱ و مدل بر یک محدوده واقعی از انرژی هم‌خوانی دارد. این نشان می‌دهد که این مدل به شدت دینامیک معادله Bethe را بدون استفاده از حل‌کننده‌های عددی ODE ضبط می‌کند.

جدول (۳): نتایج مدل در مقایسه با مقادیر PSTAR و شبیه‌سازی

مونت‌کارلو برای پرتون‌ها.

Energy	R_T (Model)	R_T (PSTAR)	R_T (MC)	PSTAR Error	R^2	Mean error (MC)
100MeV	7.72 cm	7.718 cm	8.1 cm	0.03%	0.9989	0.81 MeV
150MeV	15.80 cm	15.77 cm	16.6 cm	0.19%	0.9977	1.96 MeV
200MeV	26.05 cm	25.86 cm	27.2 cm	0.35%	0.9962	3.47 MeV
250MeV	38.15 cm	37.94 cm	40.0 cm	0.55%	0.9931	5.89 MeV

اولاً قابل توجه است که شبیه‌سازی MC یک انرژی کمی پایین در طول منحنی را پیش‌بینی می‌کند، همان‌طور که در جدول ذکر شده است. ثانیاً، پیش‌بینی یک دم کوچک می‌شود که فراتر از پیش‌بینی R_T ناشی از مدل پیشنهادی است.

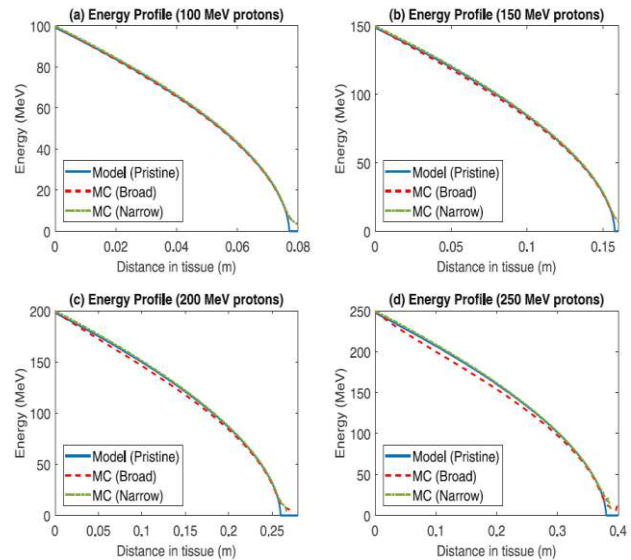


شکل (۴): مقایسه پیش‌بینی مدل‌های تک انرژی و شبیه‌سازی MC برای پروتون بدون محدودیت LET به صورت تابعی از عمق برای پروتون‌ها با انرژی‌های اولیه 100-250 MeV در فانتوم‌های سطح مقطع عرضی.

جدول (۴): نتایج مدل در مقایسه با MSTAR و نتایج تجربی برای یون های کربن.

Energy	RT (Model)	RT (MSTAR)	RT (Experiment)	MSTAR Error (%)	Experiment Error (%)
135.00 MeV/u	4.38 cm	4.37 cm	4.43 cm ³²	0.23%	1.37%
195.00 MeV/u	8.31 cm	8.28 cm	8.34 cm ³²	0.36%	0.36%
208.58 MeV/u	9.33 cm	9.29 cm	8.79 cm ³⁴	0.43%	6.14%
241.50 MeV/u	11.99 cm	11.92 cm	11.87 cm ³³	0.58%	1.01%
270.00 MeV/u	14.48 cm	14.37 cm	14.45 cm ³²	0.76%	0.21%
279.97 MeV/u	15.39 cm	15.27 cm	14.73 cm ³⁴	0.78%	4.48%
330.00 MeV/u	20.24 cm	20.04 cm	19.98 cm ³³	0.99%	1.30%
332.15 MeV/u	20.46 cm	20.25 cm	19.74 cm ³⁴	1.03%	3.64%
380.45 MeV/u	25.57 cm	25.25 cm	24.76 cm ³⁴	1.25%	3.27%

جدول ۴ نتایج محاسباتی و آزمایشگاهی برای یون‌های کربن را با استفاده از روش‌های مختلف نشان می‌دهد. برای سهولت در مقایسه، برد آزمایشی به عمق زاویه قله براگ تقسیم شد. شکل ۵ پیش‌بینی این مدل برای برد در مقایسه با مقادیر جدول‌بندی شده در ICRU را نشان می‌دهد، و توافق بالایی را برای یون‌های کربن در محدوده پرتو درمانی از 100-600 MeV/a.m.u، با داده‌های موجود در جدول نشان می‌دهد.



شکل (۳): مقایسه پیش‌بینی مدل‌های تک انرژی و شبیه‌سازی MC برای انرژی پروتون به صورت تابعی از عمق برای پروتون‌ها با انرژی‌های اولیه 100 تا 250 MeV در فانتوم‌های سطح مقطع.

شکل ۲، پروفایل انرژی شبیه‌سازی شده از مدل ایجاد شده در این کار و روش‌های MC سنتی را نشان می‌دهد. به‌طور کلی توافق خوبی بین هر دو رویکرد وجود دارد که با داده‌های اندازه‌گیری شده در جدول ۳ در تطابق است.

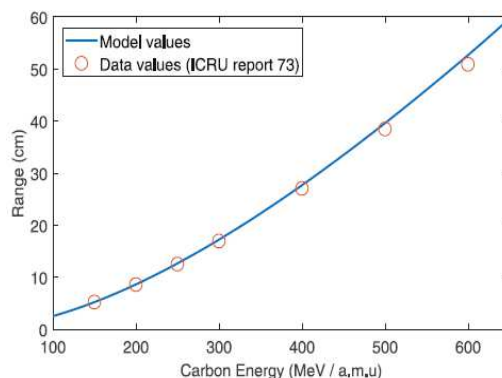
این موضوع در بحث در نظر گرفته شده است، اما به احتمال زیاد از این واقعیت ناشی می‌شود که یک جواب معادله Bethe را در MCNPX نظر نمی‌گیرد. جدول ۳ هم‌چنین درصد خطای بین محدوده برآورد شده توسط روش استفاده شده در این کار و داده‌های PSTAR NIST را نشان می‌دهد، انحراف دم نیز در منحنی‌های LET، که در شکل ۴ نشان داده شده است، واضح است. بر اساس معادله Bethe، این مدل با استفاده از تعریف معادلات ۱ و ۳ منحنی انحراف را پیش‌بینی می‌کند. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، این اختلاف ممکن است با برهم‌کنش‌های ثانویه توضیح داده شود که معادله Bethe پیش‌فرضی را در نظر نمی‌گیرد.

می دهد را در نظر نمی گیرد. به طور خاص، میزان انحراف مشاهده شده تقریباً متناسب با برد کل ذرات است. نتایج محاسباتی نشان می دهند که از دست دادن انرژی اضافی در یک عمق مشخص در MC، در مقایسه با معادله Bethe بیش تر خواهد بود. همان طور که در شکل ۴ دیده می شود، معادله Bethe افزایش آستانه LET در R_T را پیش بینی می کند.

مهم است که توجه داشته باشیم که جواب مورد بحث در این جا به عنوان جایگزینی برای روش های معمول MC نیست، بلکه به عنوان ابزار مفیدی برای بهینه سازی سریع است. همان طور که فرم تحلیلی ارائه شده در این جا می تواند به سرعت با حداقل هزینه های محاسباتی اجرا شود، می تواند به راحتی در بهینه سازی مورد استفاده قرار گیرد.

روش ذکر شده در این جا یک جواب برای معادله Bethe و از این رو، سرعت، انرژی و منحنی LET برای هر ذره باردار به سرعت از اصول اولیه تولید می کند. این بسیار مفید است، اما می تواند به صورت بالقوه برای محاسبه منحنی های براگ در ID با استفاده از مدل سازی متنوع انرژی و محدوده جابجایی و یا حتی در 3D با توجه دقیق MCS گسترش یابد. تعدادی از فرمول های نیمه تجربی برای پراکندگی چندگانه کوانتومی و انرژی های مختلف وجود دارد، اما مقایسه دقیق چنین رویکردهایی فراتر از محدوده این کار است. علاوه بر این، معادله Bethe تنها متوقف شدن با توجه به الکترون در داخل یک ماده است، اما بررسی دقیق مکانیسم های رسوب دز در بافت نیز شامل اثرات هسته ای می شود.

برای اکثریت طول مسیر، روش مونت کارلو LET با مدل مشابه با شکل ۳ نشان داده شده است. می توانیم حداکثر LET قابل دستیابی را از معادله Bethe ارائه شده در معادله ۶ و تعریف آن را به عنوان S در نظر بگیریم، می توانیم به راحتی $\frac{ds}{dv}$ را محاسبه کنیم. در برخی از سرعت ها، v_m ذره در حداقل سرعت خود است و بنابراین S تمایل به حداکثر شدن دارد.



شکل (۵): مقایسه مقادیر جدول برد برای یون های کربن گزارش شده

توسط ICRU نسبت به پیش بینی های این مدل.

انگیزه اصلی این مدل که در این جا معرفی شده است، مربوط به سرعت شبیه سازی پروفایل های احتمالی انرژی برای بهینه سازی دز است. این مدل هم چنین به راحتی برای شبیه سازی سریع دز از طریق انواع مختلف بافت قابل اجرا است.

مدل ارائه شده در این جا یک جواب دقیق و تحلیلی برای معادله Bethe است. شکل ۱ نشان می دهد که چگونه جواب این معادله با آنچه که حاصل از روش های معمول Runge-Kutta است هم خوانی دارد. نتایج هر دو تقریباً یکسان هستند. مزیت دیگر این جواب تحلیلی این است که به صراحت برد ذره R_T و به تبع آن انرژی، سرعت و LET پیش بینی شده معادله Bethe را در هر نقطه ای از مسیر بدست می دهد. در مقایسه با شبیه سازی MC، اشکال ۲ و ۳ نشان می دهند که این مدل رفتار ناخالصی یک پرتو پروتونی را به خوبی می بلعد اما برخی از نکات مهم در این مورد همچنان وجود دارد. در ابتدا، این مدل انرژی را کمی بیش از حد انرژی ذرات در طول مسیر به طور متوسط پیش بینی می کند، با میانگین خطای حدودی 0.81 MeV برای پروتون های 100-5.89 MeV تا پروتون های 250 MeV (جدول ۳)، اختلافات بین سرعت و شتاب گرفتن ذرات پرتو در حال رشد است. به احتمال زیاد توضیح این موضوع به دلیل محدودیت ذاتی معادله Bethe است که در واقع MCS تولید ذرات ثانویه که شبیه سازی MC انجام

مدل ارائه شده مطمئناً جایگزینی برای محاسبات MC برای LET نیست، اما رفتار کلی را خوب می‌بیند، هر چند باید در تفسیر نتایج احتیاط شود. LET نیز در تعیین مشارکت اکسیژن در آسیب تابشی بسیار اهمیت دارد، زیرا اکسیژن مولکولی اثربخشی رادیوتراپی استاندارد فوتون را تا سه برابر دارد. افزایش اکسیژن به طور قابل توجهی در LET متفاوت است و در اصل تعیین دقیق LET برای ذرات باردار می‌تواند همراه با اطلاعاتی در مورد مناطق کمبود اکسیژن بافت، به طور بالقوه در بهبود درمان بیش‌تر شناخته شود.

۴. نتیجه گیری

جواب ارائه شده در این جا مربوط به معادله Bethe می‌تواند به هر نوع ذرات باردار اعمال شود و ارزیابی دقیقی از مشخصات انرژی، سرعت و LET را درون یک محیط انجام می‌دهد. این کار با نتایج تجربی و مونت‌کارلو برای پروتون و یون کربن در توافق خوبی است. روشی که به محاسبه سریع پروفایل دز از طریق ماده‌های مختلف کمک می‌کند و می‌تواند به عنوان پایه‌ای برای بهینه‌سازی سریع دز برای درمان با شار ذرات پایدار باشد.

$\frac{ds}{dv} = 0$ ، می‌توانیم به طور صریح این سرعت را به دست آوریم که برابر است با:

$$v_m = \frac{e^{0.5}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{Ie^1}{2m_e}} \quad (13)$$

و برای ذرات باردار $v_m = 0.0141c$ است. حداکثر LET برای پروتون‌ها از معادله Bethe به این ترتیب $84.35 \text{ KeV} / \mu\text{m}$ و برای کربن $3036.72 \text{ KeV} / \mu\text{m}$ در آب است. در واقع انحراف انرژی از MCS، برهم‌کنش‌های هسته‌ای و تولید ذرات ثانویه، به طور ذاتی توسط معادله Bethe و یا این مدل در نظر گرفته نمی‌شوند، و این نتیجه‌بخشی از تفاوت‌های بین این مدل و نتایج مونت‌کارلو را نشان می‌دهد که در شکل ۳ نشان داده شده است. گفته می‌شود LET مونت‌کارلو در فانتوم "باریک" بالاتر است، که نشان‌دهنده این واقعیت است که حداکثر LET به عنوان پتانسیل پراکندگی کاهش می‌یابد. مهم است که توجه داشته باشیم که معادله Bethe یک عملکرد پیوسته دارد، درحالی‌که برهم‌کنش‌های ذرات باردار در واقع گسسته است. آب و دیگر اهداف بیولوژیکی گسسته نیز برای انتقال انرژی محدودیت دارند و ما انتظار نداریم LET به حداکثر برسد.

۵. مراجع

- [1] Brown, A. & Suit, H. The centenary of the discovery of the Bragg peak. *Radiotherapy and Oncology* 73, 265–268, doi:10.1016/j.radonc.2004.09.008 (2004).
- [2] Wilson, R. R. Radiological use of fast protons. *Radiology* 47, 487–91 (1946).
- [3] Pedroni, E. et al. The 200-MeV proton therapy project at the Paul Scherrer Institute: conceptual design and practical realization. *Medical physics* 22, 37–53, doi:10.1118/1.597522 (1995).
- [4] Newhauser, W. D. & Zhang, R. The physics of proton therapy. *Physics in Medicine & Biology* 60, R155, doi:10.1088/0031-9155/60/8/R155 (2015).
- [5] Lomax, A. J., Pedroni, E., Rutz, H. P. & Goitein, G. The clinical potential of intensity modulated proton therapy. *Zeitschrift für Medizinische Physik* 14, 147–152 (2004).
- [6] Schulz-Ertner, D. & Tsujii, H. Particle radiation therapy using proton and heavier ion beams. *Journal of Clinical Oncology* 25, 953–964, doi:10.1200/JCO.2006.09.7816 (2007).
- [7] Schlaff, C. D., Krauze, A., Belard, A., Connell, J. J. & Camphausen, Ka Bringing the heavy: carbon ion therapy in the radiobiological and clinical context. *Radiation oncology* (London, England) 9, 88, doi:10.1186/1748-717X-9-88 (2014).
- [8] Allen, A. M. et al. An evidence based review of proton beam therapy: The report of ASTRO's emerging technology committee. *Radiotherapy and Oncology* 103, 8–11, doi:10.1016/j.radonc.2012.02.001 (2012).
- [9] De Ruyscher, D. et al. Charged particles in radiotherapy: A 5-year update of a systematic review. *Radiotherapy and Oncology* 103, 5–7, doi:10.1016/j.radonc.2012.01.003 (2012).
- [10] Goitein, M. Trials and tribulations in charged particle radiotherapy. *Radiotherapy and Oncology* 95, 23–31, doi:10.1016/j.radonc.2009.06.012 (2010).