خمینه‌های فینسلر با انحنای استرچ

نسرین صادق‌زاده*، اکبر طیبی؛ دانشگاه قم

دریافت ۹۵/۱۲/۱۰ پذیرش ۹۶/۰۶/۲۷

چکیده

در این مقاله متریک‌های فینسلر با انحنای استرچ به‌طور نسبی نامنفی (به‌ترتیب نامثبت)، ایزوتروپیک و ثابت بررسی می‌شود. به‌طور خاص، نشان داده می‌شود که هر خمینه فینسلری فشرده با انحنای استرچ به‌طور نسبی نامنفی (به‌ترتیب نامثبت)، یک متریک لندزبرگی است. هم‌چنین ثابت می‌شود که هر (α,β)- متریک غیرریمانی با انحنای پرچمی ثابت نا صفر و انحنای استرچ به‌طور نسبی ایزوتروپیک ناصفر بر روی یک خمینه از بعد $n\geq ۳$، از مشخصه اسکالر ثابت روی ژئودزیک‌های فینسلری است. خمینه‌های فینسلری با انحنای استرچ نسبی دو بعدی نیز بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: انحنای استرچ، انحنای استرچ نسبی، انحنای پرچمی، (α,β)- متریک، متریک راندرز

مقدمه

در هندسه فینسلری کمیت‌های غیرریمانی بسیاری وجود دارند. از جمله می‌توان به تاب کارتان[۱] C، انحنای بروالد[۲] B، انحنای لندزبرگ[۳] L، انحنای میانگین لندزبرگ[۴] J، انحنای استرچ[۵] $\sum$ و ... اشاره کرد. بررسی این کمیت‌های غیرریمانی که همگی در هندسهٔ ریمانی برابر صفر هستند، ما را با طبیعت هندسه فینسلری آشنا می‌کند.

یک متریک فینسلر F روی خمینه هموار M، یک متریک بروالد گفته می‌شود اگر انحنای بروالد آن برابر صفر باشد. یا به‌عبارتی، ضرایب G^i از اسپری تعریف شده روی M، یعنی

$$G(x,y)=y^i\frac{\partial}{\partial x^i}-2G^i\frac{\partial}{\partial y^i},$$

مربعی باشند. یعنی توابع اسکالر $\Gamma^i{}_{jk}(x)$ موجودند به‌طوری که $\frac{\partial^2G^i}{\partial y^i\partial y^j}=\Gamma^i{}_{jk}(x)$. خانوادهٔ دیگری از متریک های فینسلری که شامل خانواده متریک‌های بروالد می‌شوند، متریک‌های لندزبرگ هستند. این خانواده، متریک‌های فینسلری با تانسور انحنای لندزبرگ برابر صفر هستند. تانسور لندزبرگ L_y برای هر $y\in T_XM_0$، برابر با آهنگ تغییرات تانسور کارتان در طول ژئودزیک‌ها است. با فرض این‌که $\{e_i\}$ یک پایهٔ متعامد یکه فضای (T_xM,g_y) باشد آن‌گاه $J_y:=\sum_{i=1}^n\mathrm{L}_y(e_i,e_i,.)$ انحنای میانگین لندزبرگ گفته می‌شود. متریک فینسلر F لندزبرگ ضعیف گفته می‌شود اگر $J=0$ [10].

بروالد مفهوم انحنای استرچ را به‌عنوان تعمیمی از انحنای لندزبرگ ارائه داد [3]. او نشان داد که انحنای استرچ $\sum$

*نویسنده مسئول nasrin_sadeghzadeh@yahoo.com

1. Cartan torsion
2. Berwald curvature
3. Landsberg curvature
4. Mean Landsberg curvature
5. Stretch curvature

برابر صفر است اگر و تنها اگر طول یک بردار تحت انتقال موازی روی یک متوازی الاضلاع بی‌نهایت کوچک ثابت باقی بماند. سپس این انحنا را ماتسوموتو به‌صورت $\sum_{ijkl}:=2\left(L_{ijk|l}-L_{ijl|k}\right)$ معرفی کرد [6]. به‌وضوح هر متریک لندزبرگ دارای انحنای استرچ صفر است. هم‌چنین هر متریک با انحنای استرچ صفر یک متریک با انحنای استرچ به‌طور نسبی ایزوتروپیک، نامثبت یا نامنفی هست ولی لزوماً عکس آن ها برقرار نیست. از این رو، بررسی شرایطی که عکس این قضایا برقرار باشد قابل توجه به‌نظر می‌رسد. در این مقاله قصد داریم متریک‌های فینسلر با انحنای استرچ نسبی (به‌طور نسبی نامنفی یا نامثبت، و یا ثابت) را بررسی کنیم و قضایایی را که در ادامه می‌آید ثابت کنیم.

قضیهٔ ۱. هر خمینهٔ فینسلری فشرده با انحنای استرچ به‌طور نسبی نامنفی (به‌ترتیب نامثبت)، لندزبرگی است. هم‌چنین هر خمینهٔ فینسلری کامل با انحنای استرچ به‌طور نسبی ثابت و انحنای لندزبرگ کراندار، لندزبرگی است.

قضیهٔ ۲. هر (α,β)-متریک غیرریمانی با انحنای پرچمی ثابت ناصفر و انحنای استرچ نسبی ناصفر بر روی یک خمینه از بعد $n\geq ۳$ ، از مشخصه اسکالر ثابت روی ژئودزیک های فینسلری است.

قضیهٔ ۳. فرض کنیم F یک متریک ۲-بعدی با انحنای ایزوتروپیک استرچ نسبی c باشد. آن‌گاه F ریمانی است اگر و تنها اگر اسکالر اصلی آن در این رابطه صدق کند:

$$2\,\mu^{'}+2\,\mu^{2}F-c\,\mu\,F\neq 0,$$

که در آن I اسکالر اصلی F، $\mu:=I^{-1}I_{|1}$ و $\mu^{'}=\mu_{|s}y^{s}$ مشتق کواریانت μ در طول یک ژئودزی دلخواه است.

فرض شود M یک خمینه n-بعدی C^{∞}، T_xM نمایش فضای مماس بر M در نقطه $x\in M$، $TM=\cup_{x\in M}T_xM$ کلاف مماس بر خمینه M و $TM_0=\mathrm{TM}\backslash\{0\}$ کلاف مماس سفته باشد. یک متریک فینسلر روی M، یک تابع $F:TM\ \to[0,+\infty)$ است که این خواص را دارد:

۱. F روی TM_0 نگاشتی C^{∞} است.

۲. F روی تارهای کلاف مماس TM، همگن مثبت از درجه ۱ است.

۳. برای هر $y\in T_xM$، صورت g_y که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، مثبت معین است:

$$g_y(\mathrm{u},\mathrm{v})=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left[F^2(y+su+tv)\right]_{s,t=0},\qquad u,v\in T_xM.$$

برای $x\in M$ قرار دهید $F_x:=F_{|T_xM}$. برای اندازه‌گیری نااقلیدسی بودن F_x تانسور کارتان $C_y:T_xM\otimes T_xM\otimes T_xM\ \to R$ بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$C_y(\mathrm{u},\mathrm{v},\mathrm{w})=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[g_{y+tw}(u,v)\right]_{t=0},\qquad u,v,w\in T_xM.$$

خانوادهٔ $C:=\{C_y\}_{y\in TM_0}$ تاب کارتان نامیده می‌شود. F یک متریک ریمانی است اگر و تنها اگر $C=0$. برای بردار $y\in T_xM$، تاب میانگین کارتان $I_y:T_xM\to R$ را به‌صورت $I_y=I_i(y)\,dx^i$ تعریف می‌کنند که در آن $I_i:=g^{ij}C_{ijk}$ و $g^{ij}=(g_{ij})^{-1}$.

فرض می‌شود (M,F) یک خمینه فینسلری از بعد $n\geq 3$ باشد. آن‌گاه F را یک متریک شبه-C-تحلیلی گوییم که تانسور کارتان آن بدین‌صورت باشد:

$$C_{ljm}=\frac{p}{(n+1)}\left(I_lh_{jm}+I_jh_{lm}+I_mh_{jl}\right)+\frac{q}{\|I\|^2}I_lI_jI_m,$$

که در آن $p := p(x,y)$ و $q = q(x,y)$ توابعی اسکالر روی TM با شرط $p + q = 1$ بوده، $||I||^2 := I_k I^k$ و نیز $h_{ij} := g_{ij} - F^{-2} y_i y_j$ متریک زاویه‌ای است [8].
کمیت p را اسکالر مشخصه متریک F می‌نامیم. اگر که $p = 1$ آن‌گاه F را C-تحلیلی گوییم.

قضیهٔ ۴. [8] هر (α, β)-متریک غیرریمانی بر روی یک خمینه از بعد $n \geq 3$، یک متریک شبه-C-تحلیلی است.

اولین کسی که مفهوم الصاق را برای متریک‌های فینسلر معرفی کرد بروالد بود [3]. بعد از کارهای ارزشمند وی، چندین الصاق با روش‌های مختلف معرفی شدند که معروف‌ترین آن‌ها الصاق‌های چرن، کارتان و بروالد هستند. برای بررسی بیش‌تر در این زمینه می‌توان به [10] مراجعه کرد.
قضایای زیر در روند محاسبات این مقاله دارای کاربرد هستند.

قضیه ۵. [5] فرض کنیم M یک خمینه جهت‌پذیر با صورت حجمی ω و ∇ التصاقی تاب آزاد باشد که در آن $\nabla\omega = 0$. آن‌گاه برای هر میدان برداری X روی M، $Y \in T_x M$ که $x \in M$ داریم،

$$(div\, X)_x = -trace\,(Y \rightarrow \nabla_Y X) = \nabla_i X^i.$$

قضیهٔ ۶. [5] فرض کنیم M یک خمینهٔ فشرده، جهت‌پذیر و با یک عنصر حجم ω باشد. در این صورت برای هر میدان برداری X روی M داریم،

$$\int_M (div\, X)\omega = 0.$$

قضیه مذکور برای خمینه‌های نافشرده برقرار نیست اما برای میدان برداری X با محمل فشرده برقرار است.

فرض کنیم (M, F) یک خمینهٔ فینسلری n-بعدی باشد. هم‌چنین فرض کنید ∇ الصاق بروالد و $\{e_i\}_{i=1}^n$ یک میدان پایه‌ای متعامد یکه (نسبت به g) برای کلاف برگشت $\pi^* TM$ باشد به‌طوری که $e_n = l$ و l برش کانونی $l = y/F$ است. $\{\omega^i\}_{i=1}^n$ را میدان‌های پایه‌ای دوگان در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم،

$$\nabla e_i = \omega_i^j \otimes e_j,$$

که در آن $\{\omega_i^j\}$ صورت های الصاق ∇ نسبت به $\{e_i\}_{i=1}^n$ هستند. به‌راحتی می‌توان دید که $\{\omega^i, \omega^{n+i}\}$ یک پایهٔ موضعی برای $T^*(TM_0)$ هست که در آن

$$\omega^{n+i} = \omega_n^i + d(\log F)\delta_n^i.$$

۲. صورت $\{\Omega_i^j\}$ روی TM_0 بدین‌صورت بیان می‌شود:

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2} R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l + B_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^{n+l}.$$

فرض کنیم که $\{\bar{e}_i, \dot{e}_i\}_{i=1}^n$ یک پایهٔ موضعی برای $T(TM_0)$، دوگان پایهٔ $\{\omega^i, \omega^{n+i}\}$ برای $T^*(TM_0)$ باشد. R و B تعریف شده در بالا را به‌ترتیب hh-انحنا و hv-انحنا نامند [10].

با استفاده از الصاق بروالد می‌توان مشتقات کواریانت توابع روی TM_0 را تعریف کرد. برای مثال، اگر f یک تابع اسکالر باشد آن‌گاه $f_{|i}$ و $f_{.i}$ بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$df = f_{|i}\omega^i + f_{.i}\omega^{n+i},$$

که در آن "|" و "." به‌ترتیب نماد h- مشتق کواریان (مشتق افقی) و v-مشتق کواریان (مشتق عمودی) نسبت به

الصاق بروالد F هستند.

لم ۱. [10] اتحادهای بیانکی زیر برای الصاق بروالد برقرار است:

$$R^{i}_{j\ kl.m} = B^{i}{}_{jml|k} - B^{i}{}_{jmk|l},$$
$$B^{i}{}_{jkl.m} = B^{i}{}_{jkm.l}.$$

مشتق افقی تاب کارتان در امتداد ژئودزیک‌ها، انحنای لندزبرگ را بدین‌صورت تعریف می‌کند:

$$L_y: T_xM \otimes T_xM \otimes T_xM \to R$$
$$L_y(u,v,w) = L_{ijk}(y)u^i v^j w^k,$$

که در آن $L_{ijk} = C_{ijk|s}y^s$، $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$، $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ و نیز $w = w^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$. خانواده $L := \{L_y\}_{y\in TM_0}$ انحنای لندزبرگ نامیده می‌شود. یک متریک فینسلر لندزبرگ گفته می‌شود اگر $L = 0$.

با استفاده از خاصیت‌های ۲-صورت انحنای الصاق بروالد، روابط زیر به‌راحتی نشان داده می‌شوند [10]:

$$g_{ij|k} = -2L_{ijk}, \qquad g_{ij.k} = 2C_{ijk}.$$

هم‌چنین می‌توان نتیجه گرفت،

$$L_{ijk} = -\frac{1}{2}y^s g_{sm}B^{m}{}_{ijk}.$$

بعد از معرفی مفهوم انحنای استرچ به‌منزلهٔ تعمیمی از انحنای لندزبرگ به‌وسیلهٔ بروالد، ماتسوموتو صورتول آن را بدین‌صورت معرفی کرد:

$$\textstyle\sum_y: T_xM \otimes T_xM \otimes T_xM \otimes T_xM \to R$$
$$\textstyle\sum_y(u,v,w,z) = \sum_{ijkl}(y)u^i v^j w^k z^l,$$

که در آن $\sum_{ijkl} := 2\big(L_{ijk|l} - L_{ijl|k}\big)$. یک متریک فینسلر یک متریک استرچ گفته می‌شود اگر $\sum = 0$. متریک فینسلر F روی خمینه M از انحنای استرچ نسبی (با نسبت c) گفته می‌شود اگر

$$\textstyle\sum_{ijkl} := cF\big(C_{ijk|l} - C_{ijl|k}\big),$$

که در آن $c = c(x,y)$ است. انحنای استرچ F به‌طور نسبی نامنفی (به‌ترتیب نامثبت) گفته می‌شود اگر که $c = c(x,y)$ تابعی نامثبت (به‌ترتیب نامنفی) باشد. انحنای استرچ متریک فینسلر F روی خمینهٔ M به‌طور نسبی ایزوتروپیک گفته می‌شود اگر $c = c(x)$ یک تابع اسکالر روی M باشد. F از انحنای استرچ به‌طور نسبی ثابت گفته می‌شود اگر c یک عدد حقیقی ثابت باشد.

مثال ۱. متریک F، R- مربعی نامیده می‌شود اگر که $R^{i}_{j\ kl.m} = 0$. اگر اتحاد دوم از لم ۱ را در y_i ضرب کنیم، به این رابطه می‌رسیم:

$$\textstyle\sum_{jmkl} = y_i R^{i}_{j\ kl.m}$$

در نتیجه هر متریک فینسلر R- مربعی یک متریک با انحنای استرچ صفر است.

مثال ۲. قرار می‌دهیم:

$$F_a(x,y) := \frac{\sqrt{|y|^2 - \left(|x|^2|y|^2 - <x,y>^2\right)}}{1-|x|^2} + \frac{<x,y>}{1-|x|^2}$$

$$+\frac{<a,y>}{1-|x|^2}, \qquad\qquad y\in T_xB^n \simeq R^n,$$

که در آن $a\in R$ یک بردار ثابت است که $|a|<1$. برای $a\neq 0$، به‌سادگی می‌توان دید که F_a به‌طور موضعی مسطح با انحنای پرچمی ثابت منفی است. F یک متریک استرچ به‌طور نسبی ثابت با $c=-۱$ است.

با مشتق‌گیری کواریان افقی از تانسور تاب میانگین کارتان I در امتداد ژئودزیک‌ها تانسور میانگین لندزبرگ $J_y(u)=J_i(y)u^i,$ به‌دست می‌آید، که در آن $J_i := I_{i|s}y^s$ می‌توان انحنای میانگین لندزبرگ را از رابطهٔ $J_i := g^{kl}L_{ikl}$ نیز به‌دست آورد. یک متریک فینسلر لندزبرگ ضعیف گفته می‌شود اگر $J=0$.

برای هر متریک فینسلر (M,F)، یک میدان برداری سرتاسری $\boldsymbol{G}$ روی TM_0 به‌وسیلهٔ F تولید می‌شود که در مختصات موضعی (x^i,y^i) برای TM_0 بدین‌صورت می‌تواند بیان شود و آن را اسپری حاصل از متریک F نامیم:

$$\boldsymbol{G}(y)=y^i\frac{\partial}{\partial x^i}-2G^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i},$$

که در آن G^iها توابعی موضعی روی TM_0 هستند که بدین‌صورت نمایش داده می‌شوند:

$$G^i(x,y):=\frac{1}{4}g^{il}\left\{\frac{\partial^2F^2}{\partial x^k\partial y^l}y^k-\frac{\partial F^2}{\partial x^l}\right\}.$$

برای بردار مماس $y\in TM_0$،

$$B_y: T_xM\otimes T_xM\otimes T_xM\to T_xM,$$
$$B_y(u,v,w)=B^i{}_{jkl}(y)\,u^jv^kw^l\frac{\partial}{\partial x^i}|_x,$$

و

$$E_y: T_xM\otimes T_xM\to R,$$
$$E_y(u,v)=E_{jk}(y)\,u^jv^k,$$

به‌ترتیب انحنای بروالد و انحنای میانگین بروالد نامیده می‌شوند که در آن

$$B^i{}_{jkl}(y):=\frac{\partial^3G^i}{\partial y^j\partial y^k\partial y^l}(y), \qquad E_{jk}(y):=\frac{1}{2}B_j{}^m{}_{km}(y).$$

F به‌ترتیب بروالد و بروالد ضعیف نامیده می‌شود اگر $B=0$ و $E=0$.

انحنای ریمان $R_y=R^i{}_k(y)\,dx^k\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}: T_xM\to T_xM$ یک خانواده از نگاشت‌های خطی روی فضای مماس است که بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$R^i{}_k=2\frac{\partial G^i}{\partial x^k}-y^j\frac{\partial^2G^i}{\partial x^j\partial y^k}+2G^j\frac{\partial^2G^i}{\partial y^j\partial y^k}-\frac{\partial G^i}{\partial x^j}\frac{\partial G^j}{\partial x^k}.$$

هم‌چنین برای انحنای ریمان، این رابطه برقرار است [10]:

$$R_{j\ kl}^{\ i}=\frac{1}{3}(R^i_{k.l}-R^i_{l.k})_{.j}. \qquad (۱)$$

انحنای پرچمی در هندسهٔ فینسلری یک توسیع از انحنای برشی در هندسهٔ ریمانی است که اولین بار بروالد معرفی کرد [3].

برای یک پرچم $P=span\{y,u\}\subset T_xM$ با میلهٔ پرچم y، انحنای پرچمی بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$K(P,y):=\frac{g_y(u,R_y(u))}{g_y(y,y)\,g_y(u,u)-g_y(u,y)^2}.$$

متریک فینسلر F از انحنای اسکالر گفته می‌شود اگر برای هر $y \in T_xM$، انحنای پرچمی $K = K(x,y)$ یک تابع اسکالر روی برش کلاف مماس TM_0 باشد. اگر K ثابت باشد آن‌گاه F متریک با انحنای ثابت نامیده می‌شود.

انحنای استرچ متریک‌های فینسلری

در این بخش به اثبات قضایای اصلی و برخی نتایج آن‌ها می‌پردازیم.

اثبات قضیه ۱. فرض کنید p یک نقطه روی خمینهٔ M، $y, u, v, w \in T_pM$ و $\sigma: (-\infty, +\infty) \to M$ ژئودزیک گذرنده از نقطه p با سرعت واحد باشد به‌طوری‌که باشد:

$$\frac{d\sigma}{dt}(0) = y.$$

$U(t)$، $V(t)$ و $W(t)$ را میدان‌های برداری موازی در طول σ در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که $U(0) = u$، $V(0) = v$ و $W(0) = w$. آن‌گاه قرار می‌دهیم:

$$L(t) = L_{\dot{\sigma}}\big(U(t), V(t), W(t)\big),$$

$$L^{'}(t) = L'_{\dot{\sigma}}\big(U(t), V(t), W(t)\big).$$

اما خمینهٔ فینسلری (M,F) دارای انحنای استرچ به‌طور نسبی نامنفی (به‌ترتیب نامثبت) یا ثابت است. با توجه به تعریف و ضرب تانسور استرچ در y^l به‌آسانی نتیجه می‌شود:

$$L_{ijk|l}y^l = cFL_{ijk},$$

که در آن $c := c(x,y)$ تابع نامنفی (به‌ترتیب نامثبت) همگن روی TM_0 است یا c یک ثابت است.

ابتدا فرض کنید $c := c(x,y)$ تابع نامنفی (به‌ترتیب نامثبت) روی TM_0 است. با قرار دادن $\varphi(x,y) := L^{ijk}L_{ijk}$ داریم،

$$\dot{\varphi} = \varphi_{|m}y^m = 2g^{ir}g^{js}g^{kt}L_{rst}L_{ijk|m}y^m$$
$$= 2L^{ijk}L_{ijk|m}y^m = 2cF\varphi. \tag{۲}$$

با توجه به این که F و φ دارای مقادیری مثبت‌اند اگر c نامنفی (به‌ترتیب نامثبت) باشد آن‌گاه $\dot{\varphi}$ نامنفی (به‌ترتیب نامثبت) خواهد بود.

با توجه به قضیهٔ ۵ داریم،

$$\dot{\varphi}(y) = \varphi_{|m}y^m = \xi(\varphi) = \overline{div}(\varphi\xi).$$

دقت شود که $\xi = y^i \frac{\delta}{\delta x^i}$ یک میدان برداری ژئودزیک روی کلاف یکه SM است و $\overline{div}(\xi) = 0$. [13].

چون M فشرده است پس SM نیز فشرده است. هم‌چنین صورت حجمی ω_{SM} روی کلاف کروی SM از صورتی حجمی ω روی M حاصل شده است [1].

با توجه به قضیهٔ ۶ داریم:

$$\int_{SM} \dot{\varphi}\omega_{SM} = 0.$$

با توجه به این‌که $\dot{\varphi}$ تابعی همگن و علامت آن همیشه نامنفی (به‌ترتیب نامثبت) است پس $\dot{\varphi} = 0$ که با توجه به (۲)، نتیجه می‌شود که $\varphi = 0$ یا $c = 0$. اگر $\varphi = 0$ آن‌گاه $L_{ijk} = 0$. اگر $c = 0$ آن‌گاه $\sum_{ijkl} = 0$ و در نتیجه $L^{'}(t) = L_{ijk|l}y^l = 0$. یعنی $L(t) = L(0)$، از این رو، تاب کارتان برابر است با:

$$C(t) = t\, L(0) + C(0)$$

که اگر $t \to \pm\infty$، آن‌گاه تابعی کراندار نخواهد شد و این با فشردگی M (در نتیجه کرانداری تاب کارتان) در تناقض است. در نتیجه $L(0) = 0$ و چون خمینه‌های فشرده همواره کامل هستند، از این رو، $L(t) = 0$، یعنی متریک F یک متریک لندسبرگی است. به‌این ترتیب قسمت اول قضیه اثبات می‌شود.

حال اگر c تابعی ثابت باشد آن‌گاه دوباره با ضرب تانسور استرچ در y^l به رابطه $L_{ijk|m}y^m = cFL_{ijk}$ می‌رسیم. جواب عمومی این معادله بدین‌صورت است:

$$L(t) = e^{ct}L(0),$$

با میل دادن t به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ در جواب فوق، عدم کرانداری انحنای لندزبرگ به‌دست می‌آید، که این موضوع با فرض قضیه در تناقض است. بنا براین

$$L(t) = L(0) = 0$$

به این ترتیب قسمت دوم قضیه ۱ نیز به اثبات می‌رسد.

اثبات قضیهٔ ۲. فرض کنیم F متریک استرچ با انحنای ثابت ناصفر λ روی خمینهٔ M باشد. بنا براین داریم،

$$R^i_k = \lambda\{F^2\delta^i_k - y^i y_k\}.$$

در نتیجه،

$$R_{j\ kl}^{\ i} = \lambda\{g_{jl}\delta^i_k - g_{jk}\delta^i_l\}. \tag{۳}$$

با توجه به رابطه (۳) و اتحاد دوم از لم ۱ داریم،

$$\sum_{jmkl} = y_i R_{j\ kl.m}^{\ i} = 2\lambda\{C_{jlm}y_k - C_{jkm}y_l\}. \tag{۴}$$

اما F دارای انحنای استرچ نسبی است یعنی،

$$\sum_{jmkl} = 2\big(L_{jmk|l} - L_{jml|k}\big) = cF\big(C_{jmk|l} - C_{jml|k}\big). \tag{۵}$$

از این رو،

$$2\lambda\{C_{jlm}y_k - C_{jkm}y_l\} = cF\big(C_{jmk|l} - C_{jml|k}\big).$$

با ضرب عبارت مذکوق در y^l داریم،

$$L_{jmk} + 2\frac{\lambda}{c}FC_{jmk} = 0. \tag{۶}$$

با ضرب (۶) در g^{jm} داریم،

$$J_k + 2\frac{\lambda}{c}FI_k = 0. \tag{۷}$$

از طرفی دیگر، F یک (α,β)-متریک غیرریمانی با بعد $n \geq 3$ است، یعنی، تانسور کارتان آن بدین‌صورت نوشته

می‌شود:

$$C_{ljm} = \frac{p}{(n+1)}\left(I_l h_{jm} + I_j h_{lm} + I_m h_{jl}\right) + \frac{q}{\|I\|^2} I_l I_j I_m, \qquad (۸)$$

به‌طوری‌که رابطهٔ $p + q = 1$ برقرار است. حال با مشتق‌گیری افقی $|_s$ از رابطهٔ (۸) و ضرب آن در y^s داریم،

$$C_{jmk|0} = L_{jmk} = \frac{p}{n+1} S_{jmk} + \frac{p'}{n+1} X_{jmk} + \frac{1}{\|I\|^2}\left(q' - \frac{2q}{\|I\|^2} I^r J_r\right) I_j I_m I_k + \frac{q}{\|I\|^2} T_{jmk}, \qquad (۹)$$

که در آن

$$S_{jmk} = J_j h_{mk} + J_m h_{jk} + J_k h_{jm},$$
$$X_{jmk} = I_j h_{mk} + I_m h_{jk} + I_k h_{jm},$$
$$T_{jmk} := J_j I_m I_k + J_m I_j I_k + J_k I_m I_j.$$

با جای‌گذاری (۷) در (۹) و نیز استفاده از روابط (۶) و (۸) داریم:

$$\frac{p'}{n+1} X_{jmk} + \frac{1}{\|I\|^2} q' I_j I_m I_k = 0.$$

با ضرب عبارت فوق در $I^j I^m$ و با استفاده از (۷) داریم،

$$3\,\|I\|^2 p' I_k + (n+1) q' I_k = 0. \qquad (۱۰)$$

با توجه غیرریمانی بودن F، نتیجه می‌گیریم که

$$3\,\|I\|^2 p' + (n+1) q' = 0. \qquad (۱۱)$$

چون $p + q = 1$ از این رو، داریم $p' + q' = 0$. با قرار دادن آن در (۱۱) داریم $p' = 0$. یعنی اسکالر مشخصه متریک F بر روی ژئودزی‌های فینسلری همواره مقداری ثابت است.

نتیجه. هر متریک فینسلری $(n \geq ۳)$ با انحنای پرچمی ثابت غیرصفر λ و انحنای استرچ نسبی ناصفر (با نسبت c) ریمانی است اگر و تنها اگر رابطهٔ $2c\, c' + c^2 F + 4\lambda\, F \neq 0$ برقرار باشد، که در آن $c' := c_{|m} y^m$.

اثبات. با ضرب رابطهٔ (۵) در y^l داریم،

$$L'_{jmk} = \frac{c}{2} \mathrm{F} L_{jmk}. \qquad (۱۲)$$

که در آن $L'_{jmk} := L_{jmk|s} y^s$. با جای‌گذاری (۶) در (۱۲) داریم:

$$L'_{jmk} = -\lambda\, F^2 C_{jmk}. \qquad (۱۳)$$

هم‌چنین با مشتق‌گیری از رابطهٔ (۶) داریم،

$$L'_{jmk} = \frac{2\lambda\, F}{c}\left(c' C_{jmk} - L_{jmk}\right) = \frac{2\lambda\, F}{c}\left(c' + \frac{2\lambda\, F}{c}\right) C_{jmk} \qquad (۱۴)$$

با مقایسهٔ (۱۳) و (۱۴)، به‌راحتی حکم نتیجه می‌شود

اثبات قضیهٔ ۳. برای اثبات این قضیه از قاب بروالد استفاده می‌کنیم. قاب بروالد به‌عنوان یک ابزار اساسی برای بررسی خمینه‌های فینسلری ۲-بعدی است که بروالد معرفی کرده است [4].

برای یک خمینه فینسلری ۲-بعدی (M, F)، یک میدان موضعی از قاب عمود برهم (ℓ^i, m^i) را قاب بروالد گفته

می‌شود که در آن $\ell^i = y^i/F$ و m^i بردار واحد با شرط $\ell_i m^i = 0$ و $\ell_i = g_{ij}\ell^j$ است. با در نظر گرفتن قاب بروالد داریم،

$$C_{ijk} = F^{-1} I\, m_i m_j m_k,$$
$$B^i{}_{jkl} = -\frac{2I_{|1}}{I}\, C_{jkl}\ell^i + \frac{I_2}{3F}\,\{h_{jk}h^i_l + h_{jl}h^i_k + +h_{lk}h^i_j\}, \quad (۱۵)$$

که در آن I یک تابع همگن از درجه صفر است که اسکالر اصلی متریک F نامیده می‌شود. با ضرب (۱۵) در y_i خواهیم داشت،

$$L_{jkl} = \mu\, F\, C_{jkl}, \quad (۱۶)$$

که در آن $\mu := \frac{I_{|1}}{I}$. از این رو، با مشتق‌گیری افقی از (۱۶) خواهیم داشت:

$$L_{jkl|s} = \mu_{|s} F\, C_{jkl} + \mu F\, C_{jkl|s}. \quad (۱۷)$$

بنابر رابطهٔ (۱۷)، تانسور استرچ به‌صورت (۱۸) بیان می شود:

$$\Sigma_{ijkl} = 2\mu F(C_{ijk|l} - C_{ijl|k}) + 2F\,(\mu_{|l}C_{ijk} - \mu_{|k}C_{ijl}). \quad (۱۸)$$

بنا بر فرض F از انحنای استرچ نسبی ثابت است،

$$\Sigma_{ijkl} = cF(C_{ijk|l} - C_{ijl|k}), \quad (۱۹)$$

که در آن c یک تابع اسکالر روی TM است. با ضرب (۱۸) و (۱۹) در y^l و مقایسه روابط به‌دست آمده، به رابطهٔ (۲۰) می‌رسیم:

$$cF\, L_{jkl} = 2\mu\, F\, L_{jkl} + 2\, F\, \mu' C_{jkl}. \quad (۲۰)$$

با در نظر گرفتن رابطهٔ (۱۶)، رابطهٔ (۲۰) به معادله (۲۱) تبدیل می‌شود:

$$(2\,\mu' + 2\,\mu^2 F - c\,\mu\, F)\, C_{jkl} = 0. \quad (۲۱)$$

از (۲۱) حکم به‌دست می‌آید.

نتیجه. هر متریک استرچ ۲-بعدی کامل و غیرریمانی یک متریک لندزبرگی است.

اثبات. طبق فرض، رابطهٔ (۲۱) به $\mu' + \mu^2 F =$ تحلیل می‌یابد. فرض کنید p یک نقطه روی M، $y \in T_pM$ و $\sigma: (-\infty, +\infty) \to M$ ژئودزیک گذرنده از نقطهٔ p با سرعت واحد باشد به‌طوری‌که $\frac{d\sigma}{dt}(0) = y$ بر روی ژئودزیک σ، معادله به‌دست آمده به‌صورت $\mu' + \mu^2 = 0$ نوشته می‌شود. جواب چنین معادله دیفرانسیلی به‌صورت (۲۲) است،

$$\mu(t) = \frac{\mu(0)}{t\,\mu(0)+1}. \quad (۲۲)$$

اگر $t \to \pm\infty$ آن‌گاه $\mu(t) = 0$. با قرار دادن آن در (۱۶) به‌راحتی نتیجه می‌گیریم که F یک متریک لندزبرگی است.

منابع

1. Akbarzadeh H. "Les espaces de Finsler et certaines de leurs généralisation." Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (Ann. Sci. Ecole Norm Sup.), 1963: 1-79.

2. Berwald L. "Uber Parallelubertragung in Raumen mit allgemeiner Massbestimmung." Jber. Deutsch. Math.-Verein. 34, 1926: 213-220.

3. Berwald L. "Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus." Math. Z., 1926: 40-73.

4. Berwald L. "On Cartan and Finsler Geometries, III, Two dimensional Finsler spaces with rectilinear extremal." Ann. of Math., 1941: 84-122.

5. Kobayashi S. and Nomizu K. Foundations of Differential Geometry. Wiley, 1969.

6. Matsomoto M. "An improvment proof of Numata and Shibata's theorem on Finsler spaces of scalar curvature." Publ. Math. Debrecen 64, 2004: 489-500.

7. Matsumoto M. and Shibata C. "On semi-C-reducibility, T-tensor and S4-1ikeness of Finsler spaces." J. Math. Kyoto Univ., 1979: 301-314.

8. Matsumoto M. "On Finsler spaces with Randers metric and special forms of important tensors, J. Math. Kyoto Univ." 1974: 477-498.

9. Najafi B., Saberali S. "On a class of isotropic mean Landsberg metrics,." Differential Geometry - Dynamical Systems, 2016: 72-80.

10. Shen Z. Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces. Kluwer Academic, 2010.

11. Shen Z. "On R-quadratic Finsler spaces." Publ. Math. Debrecen, 2001: 263-274.

12. Tayebi A., Sadeghi H. "On Cartan torsion of Finsler metrics." Publ. math. Debrecen, 2013: 461-471.

13. Wu B. "A global rigidity theorem for weakly Landsberg manifolds." Sci. China Ser. A, 2007: 609-614.