عدد چرخش و ویژگی‌های آن در سیستم‌های توابع تکرار شونده و غیرخودگردان

مهدی فاتحی‌نیا؛ دانشگاه یزد، دانشکدهٔ علوم ریاضی

دریافت ۹۵/۱۱/۲۷ پذیرش ۹۶/۰۶/۲۷

چکیده

هدف اصلی این مقاله تعریف عدد چرخش و بررسی ویژگی‌های آن برای سیستم‌های تکرار توابع و غیرخودگردان روی دایرهٔ یکه است. ابتدا سیستم‌های تکرار توابع روی یک دایره و بالابر این نوع سیستم‌ها را معرفی می‌کنیم. در ادامه به تعریف عدد چرخش و اثبات قضیه‌های مرتبط با شرایط وجود عدد چرخش و یکتایی آن می‌پردازیم. سپس ویژگی سایه‌زنی چرخشی و آنتروپی چرخشی را برای این نوع سیستم‌ها تعریف می‌کنیم و برخی ویژگی‌های اساسی مرتبط با این مفاهیم را بیان و اثبات می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: آنتروپی چرخشی، سایه‌زنی چرخشی، عدد چرخش، سیستم‌های غیرخودگردان، تابع بالابر.

۱. مقدمه

پوآنکاره در ۱۸۸۵ در مورد تغییرات نقطهٔ حضیض مدار یک سیاره حول خورشید مطالعاتی انجام داد و در این رابطه به هر هم‌سان‌ریختی حافظ جهت روی دایره یکه یک عدد نسبت داد که عدد چرخش نامیده می‌شود. این عدد در واقع به نوعی بیان کننده تشابه رفتاری مدارهای مختلف در یک سیستم دینامیکی روی دایره یکه است. وی بعداً ثابت کرد که وجود مدارهای متناوب معادل با گویا بودن عدد چرخش است. بسیاری از دانشمندان این مفهوم و کاربردهای آن را بررسی کرده، و روی فضاهای مختلف از جمله چنبره و هم‌چنین هموتوپی‌ها تعمیم داده‌اند [2]، [9]، [11]، [13]، [15]، [16]. در [7] ثابت شده است که هر هم‌سان‌ریختی روی چنبره که با تابع همانی هموتوپ باشد و تعدادی متناهی نقطهٔ متناوب داشته باشد، دارای عدد چرخش است.

یکی از کاربردهای مهم عدد چرخش در بررسی پایداری ساختاری سیستم‌های دینامیکی روی دایرهٔ یکه است. رابینسون [12] ثابت کرده است که اگر عدد چرخش یک دیفیومورفیسم حافظ جهت روی دایرهٔ یکه عددی گویا باشد و همهٔ نقاط ثابت و متناوب آن هذلولوی باشند آن‌گاه به طور ساختاری پایدار است.

از جمله مباحث مهم دیگری که دانشمندان در ارتباط با عدد چرخش بررسی کرده‌اند، آشوب و خاصیت سایه‌زنی است. در ۱۹۸۸ بارگی و سوآنسون[1] مفاهیم مجموعهٔ شبه چرخش و سایه‌زنی چرخشی حاصل از شبه مدارها برای خودریختی‌های روی دایرهٔ یکه و چنبره را تعریف کردند و ثابت کردند که خاصیت سایه‌زنی چرخشی برای همه خودریختی‌ها روی دایره یکه برقرار است. هم‌چنین آن‌ها ثابت کرده‌اند که مجموعهٔ شبه چرخش با بستار مجموعه

*نویسنده مسئول fatehiniam@yazd.ac.ir

1. Barge and Swanson

چرخشی در حالت معمولی یک‌سان است [1].

مفهوم آنتروپی چرخشی را اولین بار بوتِلهو[2] معرفی کرد. وی ثابت کرد که تحت شرایط خاصی آنتروپی چرخشی تحدید تابع روی مجموعهٔ نقاط غیر سرگردان با آنتروپی چرخشی تابع مساوی است و با استفاده از آن ثابت کرد که اگر تابع f روی چنبره با تابع همانی ایزوتوپ و مجموعه نقاط متناوب آن متناهی باشد آن‌گاه آنتروپی چرخشی تابع مساوی صفر است. هم‌چنین وی ثابت کرد که وجود عدد چرخش و خاصیت سایه‌زنی چرخشی نتیجه می‌دهد که آنتروپی چرخشی مساوی صفر است [3]. بعد از این نیز آنتروپی چرخشی بررسی و ثابت شد که برای هر هم‌سان‌ریختی حافظ جهت روی دایره یکه یا هر تابع روی چنبره که با تابع همانی هموتوپ باشد، آنتروپی توپولوژیک مساوی صفر می‌شود [8].

از طرفی، در سال‌های اخیر بررسی سیستم‌های دینامیکی غیرخودگردان و سیستم توابع تکرار شونده مورد توجه بسیاری از محققان در این زمینه شده است. در [10] آنتروپی توپولوژیک برای سیستم‌های غیرخودگردان روی فضاهای توپولوژیک و متریک تعریف کرده و ویژگی‌های اساسی این مفهوم که برای سیستم‌های کلاسیک برقرار بود، برای سیستم‌های غیرخودگردان هم بررسی و اثبات شد. در ادامه ویژگی‌های مهم دیگر در دینامیک توپولوژیک مانند، سایه‌زنی، نقاط غیرسرگردان و زنجیره‌های بازگشتی برای سیستم‌های غیرخودگردان هم تعریف شده و قضیه‌های مرتبط با این موضوعات بیان و اثبات شده است [4]، [14]، [17]، [19].

در این مقاله، ابتدا سیستم توابع تکرار شونده شامل تعدادی متناهی تابع حافظ جهت روی دایره یکه، S^1 و بالابر آن را معرفی می‌شود و برخی ویژگی‌های مقدماتی راجع به این نوع سیستم‌ها بررسی می‌شود. سپس عدد چرخش برای سیستم‌های غیرخودگردان تعریف کرده و به بررسی قضیه‌های مرتبط با شرایط وجود و یکتایی این کمیت می‌پردازیم. نشان می‌دهیم که عدد چرخش نسبت به تغییر سیستم بالابر و هم‌چنین نسبت به مزدوج توپولوژیکی یک کمیت پایاست. در سیستم‌های کلاسیک که در آن تنها یک تابع داریم، وجود نقطه ثابت معادل با صفر بودن عدد چرخش و وجود نقطه متناوب معادل با گویا بودن این عدد است. با توجه به مفهوم نقطهٔ متناوب در سیستم‌های تکرار توابع، به‌دست آوردن چنین نتیجه کلی در این مقاله دشوار به نظر می‌آید. در قضیه ۳. ۱۳ ارتباط بین صفر بودن عدد چرخش و وجود نقاط ثابت در سیستم‌های غیرخودگردان را بررسی کرده‌ایم. در بخش چهارم مجموعه‌های چرخش و شبه چرخش برای سیستم‌های غیرخودگردان را تعریف می‌کنیم. در این بخش توابعی که روی آن‌ها کار می‌کنیم لازم نیست که حافظ جهت باشند. سپس خاصیت سایه‌زنی چرخشی را معرفی کرده و شرایط وجود این خاصیت و نتایج مرتبط با آن بررسی می‌شود. بخش پایانی این مقاله به مفهموم آنتروپی چرخشی برای سیستم‌های غیرخودگردان اختصاص دارد. قضیه ۵. ۴ نشان می‌دهد که وجود عدد چرخش نتیجه می‌دهد که آنتروپی چرخشی مساوی صفر است. در ادامه این بخش، سیستم‌های غیرخودگردان روی چنبره را در نظر گرفته و نشان می‌دهیم که هر سیستم هموتوپ با همانی روی چنبره، دارای آنتروپی چرخشی مساوی صفر است.

2. Botelho

۲. مفاهیم و تعریف‌های مقدماتی

در این بخش مفاهیم، اصطلاحات و قضیه‌هایی که در بخش‌های بعد به آن‌ها نیاز داریم را معرفی می‌کنیم.

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و $f: X \to X$ یک تابع پیوسته است. به‌ازای هر $n \in N$ گیریم f^n ترکیب n بار تابع f با خودش و f° تابع همانی باشد دوتایی (X, f) را یک سیستم دینامیکی گسسته می‌نامیم. در این مقاله برای سادگی صرفاً از کلمه سیستم استفاده می‌کنیم. به‌ازای هر نقطه $x \in X$ دنباله $\{f^n(x)\}_{n\geq 0}$ را مدار این نقطه در سیستم (X, f) می‌نامیم.

دایره به مرکز مبدأ و شعاع یک در صفحه مختلط را دایره یکه می‌نامیم و با S^1 نمایش می‌دهیم. نقاط روی S^1 را به‌صورت $e^{2i\pi\theta}$ نشان می‌دهیم. تابع $\pi: R \to S^1$ با ضابطه $\pi(t) = e^{2i\pi t}$ پوشا و پیوسته است. با توجه به این تابع، بین بازه $[0,1)$ و S^1 یک تناظر یک‌به‌یک وجود دارد و در نتیجه نقاط S^1 را با t که $t \in [0,1)$ نمایش می‌دهیم. اگر تابع $f: S^1 \to S^1$ ترتیب نقاط روی دایره را حفظ کند آن‌گاه گوییم f یک تابع حافظ جهت است. تابع $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک بالابر برای تابع $f: S^1 \to S^1$ نامیده می‌شود هرگاه $\pi 0 F = f 0 \pi$. چون f حافظ جهت است پس F یک تابع یک به یک و صعودی روی $\mathbb{R}$ است.

چند لم و قضیه در مورد توابع بالابر که در بخش‌های بعد به آن‌ها نیاز داریم را بیان می‌کنیم.

لم ۲.۱. [12] فرض کنیم f یک دیفیومورفیسم حافظ جهت روی دایره یکه است. توابع F و G دو تابع بالابر برای تابع f هستند اگر و تنها اگر یک عدد صحیح مانند k وجود داشته باشد که به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $F(x) = G(x) + k$.

لم ۲.۲. [12] فرض کنیم F یک تابع بالابر برای تابع f است. در این صورت به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $F(x+1) = F(x) + 1$.

قضیه ۲.۳. [12] با توجه به لم قبل تابع $L(x) = F(x) - x$ یک تابع متناوب با دوره تناوب یک است. از طرفی اگر F یک بالابر برای تابع f باشد آن‌گاه به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، تابع F^n نیز یک بالابر برای تابع f^n است. در نتیجه $F^n - id$ نیز یک تابع متناوب با دوره تناوب یک است.

تعریف ۲.۴. [12] فرض کنیم F یک تابع بالابر برای تابع f است. قرار می‌دهیم:

$$\rho_0(F, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)}{n}$$

قضیه ۲.۵. [12] عدد $\rho_0(F, x)$ وجود دارد و مقدار آن وابسته به x نیست.

با توجه به قضیه بالا به جای $\rho_0(F, x)$ از $\rho_0(F)$ استفاده می‌کنیم.

قضیه ۲.۶. فرض کنیم F و G دو تابع بالابر برای تابع f هستند و $G(x) = F(x) + k$. در این صورت $\rho_0(G) = \rho_0(F) + k$.

با توجه به قضیه ۲.۶ تنها یک بالابر مانند F برای تابع f وجود دارد که $0 \leq \rho_0(F) < 1$. این عدد را عدد چرخش f می‌نامیم و با $\rho(f)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه مهم ۲.۷ با استفاده از گنگ بودن عدد چرخشِ هم‌سان‌ریختی‌های مینیمال اثبات می‌شود.

قضیه ۷.۲. (قضیه پوآنکاره [11]) هر هم‌سان‌ریختی مینیمال روی دایره یکه با یک چرخش گنگ مزدوج توپولوژیکی هست.

فرض کنیم Λ یک مجموعه ناتهی و متناهی و X یک فضای توپولوژیک است و به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$، $f_\lambda : X \to X$ یک تابع پیوسته است. مجموعه $\mathcal{F} = \{X; f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ را یک سیستم توابع تکرارشونده می‌نامیم. فرض کنیم Λ^N مجموعه همه دنباله‌هایی مانند $\sigma = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$ از اعضای Λ باشد. به‌ازای هر عدد طبیعی n و هر نقطه $x \in X$ قرار می‌دهیم. $\mathcal{F}_{\sigma_n}(x) = f_{\lambda_n} 0 f_{\lambda_{n-1}} ....0 f_{\lambda_1}(x)$

اگر $\sigma = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$ یک دنباله در Λ^N باشد آن‌گاه $\mathcal{F}_\sigma = \{f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}, f_{\lambda_3}, \cdots\}$ یک سیستم غیرخودگردان نامیده می‌شود [5]، [6]، [10]، [17]، [19].

۳. عدد چرخش

در این بخش عدد چرخش روی سیستم‌های تکرار توابع را تعریف می‌کنیم و برخی ویژگی‌های اساسی این مفهوم را که در حالت کلاسیک برقرار هستند را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

ابتدا مفهوم بالابر برای یک سیستم توابع تکرار شونده را تعریف می‌کنیم و ویژگی‌های آن را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۳. فرض کنیم $\mathcal{F} = \{S^1; f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ یک سیستم توابع تکرار شونده روی دایره یکه است و به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$، $F_\lambda : R \to R$ بالابر متناظر با f_λ است. در این صورت سیستم $\phi = \{R; F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ یک بالابر برای $\mathcal{F}$ نامیده می‌شود.

فرض کنیم $\mathcal{F} = \{S^1; f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ یک سیستم توابع تکرارشونده روی دایره یکه است و $\phi = \{R; F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ یک بالابر برای آن است. به‌ازای هر $\sigma \in \Lambda^N$ قرار می‌دهیم $\phi_{\sigma_n} = F_{\lambda_n} 0 F_{\lambda_{n-1}} ....0 F_{\lambda_1}$ و

$$\phi_{\sigma_n}^m = F_{\lambda_{m+n}} 0 F_{\lambda_{m+n-1}} ....0 F_{\lambda_{n+1}}.$$

ملاحظه ۲.۳. در سرتاسر این مقاله، $\mathcal{F}$ یک سیستم توابع تکرار شونده روی دایره یکه و ϕ بالابر مرتبط با آن است. همچنین در این بخش همه توابع روی دایره یکه همسان‌ریختی و حافظ جهت هستند.

لم ۳.۳. با فرضیات داده شده در بالا، به‌ازای هر n و $\sigma \in \Lambda^N$ تابع $\phi_{\sigma_n} - id$ یک تابع متناوب با دورهٔ تناوب یک است.

اثبات. بنابر لم ۲.۲ به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$ و هر $x \in R$ داریم $F_\lambda(x+1) = F_\lambda(x) + 1$؛ بنا براین به‌ازای هر $\sigma \in \Lambda^N$ و هر $x \in R$ داریم $F_{\lambda_2} o F_{\lambda_1}(x+1) = F_{\lambda_2}(F_{\lambda_1}(x)+1) = F_{\lambda_2} o F_{\lambda_1}(x) + 1$. به‌راحتی و با استفاده از استقرا می‌توان نشان داد که به‌ازای هر n، $\phi_{\sigma_n}(x+1) = \phi_{\sigma_n}(x) + 1$. در نتیجه به‌ازای هر $x \in R$، $(\phi_{\sigma_n} - id)(x+1) = \phi_{\sigma_n}(x+1) - (x+1) = \phi_{\sigma_n}(x) - x$ و اثبات کامل می‌شود.

قضیهٔ ۴.۳. فرض کنیم $\mathcal{F} = \{S^1; f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ یک سیستم توابع تکرارشونده روی دایره یکه است و $\phi = \{R; F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ یک بالابر برای آن است. برای هر $\sigma \in \Lambda^N$ حد

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\phi_{\sigma_n}(x)}{n} \qquad (۱)$$

در صورت وجود وابسته به x نیست.

اثبات. دنباله $\sigma\in\Lambda^N$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم x و y دو نقطه دلخواه در R هستند. بنابر لم ۳.۳ به‌ازای هر n، $\phi_{\sigma_n}-id$ یک تابع متناوب با دوره تناوب یک است. پس

$$|\phi_{\sigma_n}(x)-\phi_{\sigma_n}(y)|\le|(\phi_{\sigma_n}(x)-x)-(\phi_{\sigma_n}(y)-y)|+|x-y|\le 1+|x-y|؛$$

بنا براین

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\phi_{\sigma_n}(x)-\phi_{\sigma_n}(y)}{n}\right|\le\lim_{n\to\infty}\frac{1+|x-y|}{n}=0.$$

پس $\lim_{n\to\infty}\frac{\phi_{\sigma_n}(x)}{n}$ در صورت وجود مساوی $\lim_{n\to\infty}\frac{\phi_{\sigma_n}(y)}{n}$ است.

تعریف ۵.۳. عدد $\lim_{n\to\infty}\frac{\phi_{\sigma_n}(x)}{n}$ را در صورت وجود عدد چرخش $\mathcal{F}$ نسبت به دنباله σ و بالابر ϕ می‌نامیم و آن را با $\rho(\phi_\sigma)$ نمایش می‌دهیم. با توجه به لم قبل این عدد به انتخاب نقطه x وابسته نیست.

ملاحظه ۶.۳. فرض کنیم $\Lambda=\{\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_k\}$ یک مجموعه اندیس‌گذار متناهی است. دنباله $\sigma=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots\}$ را در نظر می‌گیریم. به‌ازای هر عدد طبیعی n و هر $1\le j\le k$ قرار می‌دهیم $n(\sigma,j)=\{i\,|\,1\le i\le n,\lambda_i=\eta_j\}$ و $N(\sigma,j)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sigma,j)}{n}$.

واضح است که به‌ازای هر $\sigma\in\Lambda^N$، عدد $N(\sigma,j)$ کم‌تر یا مساوی یک است و

$$N(\sigma,1)+N(\sigma,2)+\cdots+N(\sigma,k)=1$$

لم ۷.۳. فرض کنیم $\mathcal{F}=\{S^1;f_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ یک سیستم توابع تکرار شونده روی دایره یکه است و $\phi=\{R;F_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ یک بالابر برای $\mathcal{F}$ است که $\rho(\phi_\sigma)$ وجود دارد. در این صورت به‌ازای هر بالابر دیگر برای $\mathcal{F}$ مانند $\psi=\{R;G_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ نیز $\rho(\psi_\sigma)$ وجود دارد.

اثبات. با توجه به لم ۱.۲ به‌ازای هر $\lambda\in\Lambda$ عدد صحیح k_λ وجود دارد که $G_\lambda=F_\lambda+k_\lambda$؛ بنا براین به‌ازای هر n، $\psi_{\sigma_n}(x)=\phi_{\sigma_n}(x)+k_{\lambda_1}+k_{\lambda_2}+\cdots+k_{\lambda_n}$. در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\psi_{\sigma_n}(x)}{n}=$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\phi_{\sigma_n}(x)+k_{\lambda_1}+k_{\lambda_2}+\cdots+k_{\lambda_n}}{n}=$$
$$\rho(\phi,\sigma)+N(\sigma,1)k_{\lambda_1}+N(\sigma,2)k_{\lambda_2}+\cdots+N(\sigma,k)k_{\lambda_n}.$$

با توجه به قضیه ۴.۳ وجود عدد $\rho(\phi_\sigma)$ به انتخاب بالابر وابسته نیست ولی مقدار آن وابسته به بالابر ϕ است. از این به بعد فرض می‌کنیم که $\phi=\{R;F_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ یک بالابر برای $\mathcal{F}$ است که به‌ازای هر $\lambda\in\Lambda$ داریم $F_\lambda(0)\in[0,1)$. در این صورت $\rho(\phi_\sigma)$ نیز یک عدد در بازه $[0,1]$ است.

فرض کنیم $m>1$. قرار می‌دهیم $(\phi_\sigma)^m=\{\phi_{\sigma_m},\phi_{\sigma_{2m}},\phi_{\sigma_{3m}},\cdots\}$.

قضیه ۸.۳. اگر $\rho(\phi_\sigma)$ وجود داشته باشد آن‌گاه $\rho((\phi_\sigma)^m)=m\rho(\phi_\sigma)$.

اثبات. بدیهی است که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\phi_{\sigma_{nm}}(x)}{n}=\lim_{n\to\infty}m\frac{\phi_{\sigma_{mn}}(x)}{mn}=m\rho(\phi_\sigma).$$

تعریف ۹.۳. فرض کنیم $\mathcal{F}=\{S^1;f_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ و $\mathcal{G}=\{S^1;g_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ دو سیستم توابع تکرار شونده روی دایره یکه هستند، گوییم $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ مزدوج توپولوژیکی هستند اگر تابع هم‌سان‌ریخت $h:S^1\to S^1$ وجود داشته باشد که به‌ازای هر $\lambda\in\Lambda$، $g_\lambda oh=hof_\lambda$ [6].

لم ۱۰.۳. فرض کنیم $\mathcal{F}=\{S^1;f_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ و $\mathcal{G}=\{S^1;g_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ دو سیستم توابع تکرار شونده مزدوج با تابع h هستند. اگر $\phi=\{R;F_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ و H به‌ترتیب بالابرهایی برای $\mathcal{F}$ و h باشند، آن‌گاه $\psi=\{R;HoF_\lambda oH^{-1}\mid\lambda\in\Lambda\}$ یک بالابر برای $\mathcal{G}$ است.

اثبات. با توجه به تعریف تابع بالابر واضح است که به‌ازای هر $\lambda\in\Lambda$ داریم $\pi(H0F_\lambda 0H^{-1})=h0f_\lambda 0h^{-1}$.

قضیه ۱۱.۳. فرض کنیم $\mathcal{F}=\{S^1;f_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ و $\mathcal{G}=\{S^1;g_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ دو سیستم توابع تکرار شونده مزدوج با تابع مزدوج h هستند. اگر $\phi=\{R;F_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ یک بالابر برای $\mathcal{F}$ و $\sigma\in\Lambda^N$ یک دنباله باشد که به‌ازای آن $\rho(\phi_\sigma)$ وجود دارد. در این صورت یک بالابر ψ برای $\mathcal{G}$ وجود دارد که به‌ازای آن $\rho(\psi_\sigma)$ وجود دارد و $|\rho(\phi_\sigma)|=|\rho(\psi_\sigma)|$.

اثبات. بالابر $\psi=\{R;HoF_\lambda oH^{-1}\mid\lambda\in\Lambda\}$ برای $\mathcal{G}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $x=H(0)$ و به‌ازای هر n قرار می‌دهیم $k_n=[\phi_{\sigma_n}(0)]$؛ و به‌ازای هر $\lambda\in\Lambda$، قرار می‌دهیم $G_\lambda=HoF_\lambda oH^{-1}$. در این صورت به‌ازای هر n داریم $\psi_{\sigma_n}=Ho\phi_{\sigma_n}oH^{-1}$ و در نتیجه به‌ازای هر n،

$$\frac{\psi_{\sigma_n}(x)}{n}=\frac{Ho\phi_{\sigma_n}oH^{-1}(x)}{n}=\frac{Ho\phi_{\sigma_n}(0)}{n}=\frac{H(\phi_{\sigma_n}(0)-k_n)\pm k_n}{n}.$$

که در آن، اگر H صعودی باشد، علامت مثبت و اگر H نزولی باشد علامت منفی است.
از آن جا که به‌ازای هر n، $|\phi_{\sigma_n}(0)-k_n|\le 1$ پس دنباله $\{\phi_{\sigma_n}(0)-k_n\}$ کراندار است؛ با فرض صعودی بودن تابع H داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\psi_{\sigma_n}(x)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{k_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\phi_{\sigma_n}(0)}{n}=\rho(\phi_\sigma).$$

قضیه ۱۲.۳. فرض کنیم $\mathcal{F}=\{S^1;f_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ یک سیستم توابع تکرارشونده روی دایره یکه است و $\phi=\{R;F_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ یک بالابر برای آن است که در آن $\Lambda=\{\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_k\}$ یک مجموعه از اعداد بین صفر و یک است و به‌ازای هر $1\le i\le k$، $F_{\eta_i}(x)=x+\eta_i$. آن‌گاه به‌ازای هر $\sigma\in\Lambda^N$، $\rho(\phi_\sigma)$ وجود دارد و

$$\rho(\phi,\sigma)=$$

$$N(\sigma,1)\rho(F_1)+N(\sigma,2)\rho(F_2)+\cdots N(\sigma,k)\rho(F_k)=$$
$$N(\sigma,1)\eta_1+N(\sigma,2)\eta_2+\cdots+N(\sigma,k)\eta_k.$$

اثبات. دنباله دلخواه $\sigma\in\Lambda^N$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به فرضیات و ملاحظه ۶.۳ به‌ازای هر عدد طبیعی n داریم

$$\phi_{\sigma_n}(x)=F_{\eta_1}^{n(\sigma,1)}oF_{\eta_2}^{n(\sigma,2)}o\cdots oF_{\eta_k}^{n(\sigma,k)}(x)=x+n(\sigma,1)\eta_1+n(\sigma,2)\eta_2+\cdots n(\sigma,k)\eta_k$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\psi_{\sigma_n}(x)}{n}=$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x+n(\sigma,1)\eta_1+n(\sigma,2)\eta_2+\cdots n(\sigma,k)\eta_k}{n}=$$
$$.N(\sigma,1)\eta_1+N(\sigma,2)\eta_2+\cdots+N(\sigma,k)\eta_k$$

قضیه بعد ارتباط بین صفر بودن عدد چرخش و وجود نقاط ثابت را بیان می‌کند.

قضیه ۱۳.۳. فرض کنیم $\mathcal{F}=\{S^1;f_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ یک سیستم توابع تکرارشونده روی دایرهٔ یکه است و $\phi=\{R;F_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ یک بالابر برای آن است که در آن به‌ازای هر $\lambda\in\Lambda$، F_λ یک تابع صعودی است و $0\le F_\lambda(0)<1$. اگر $\sigma\in\Lambda^N$ به گونه‌ای وجود داشته باشد که $\rho(\phi_\sigma)=0$. در این صورت تعداد نامتناهی $\lambda_i\in\sigma$ وجود دارد که f_{λ_i} دارای نقطه ثابت است.

اثبات. با برهان خلف، فرض کنیم به‌ازای هر $\lambda_i\in\sigma$، تابع f_{λ_i} دارای نقطهٔ ثابت نیست. با توجه به متناهی بودن مجموعه اندیس‌گذار Λ و با استفاده از لم ۳.۳، $\delta>0$ وجود دارد که به‌ازای هر $x\in R$ و هر $\lambda_i\in\sigma$، $.F_{\lambda_i}(x)-x>\delta$

بنا براین

$$F_{\lambda_1}(0)-0>\delta$$
$$F_{\lambda_2}oF_{\lambda_1}(0)>F_{\lambda_2}(\delta)>2\delta$$
$$\phi_{\sigma_3}(0)=F_{\lambda_3}(\phi_{\sigma_2}(0))>F_{\lambda_3}(2\delta)>3\delta$$
$$\vdots$$
$$\phi_{\sigma_n}(0)=F_{\lambda_n}(\phi_{\sigma_{n-1}}(0))>F_{\lambda_n}((n-1)\delta)>n\delta.$$

در نتیجه $\rho(\phi_\sigma)\ge\delta$ که با فرض قضیه در تناقض است.

ملاحظه ۱۴.۳. در این بخش عدد چرخش برای ϕ_σ را تعریف کردیم و نشان دادیم که این عدد در صورت وجود وابسته به انتخاب نقطه x در تعریف این عدد نیست. بدیهی‌ترین سؤالی که به ذهن می‌رسد این است که آیا برای هر دنبالهٔ $\sigma\in\Lambda^N$ این عدد وجود دارد؟ در صورتی که جواب منفی است، چه مثالی می‌توان پیدا کرد که به‌ازای آن حد داده شده در تعریف ۵.۳ موجود نباشد؟ در قضیه ۱۲.۳ ثابت شده است که اگر هر تابع f_λ یک دوران روی S^1 باشد آن‌گاه برای هر دنباله $\sigma\in\Lambda^N$ عدد $\rho(\phi_\sigma)$ وجود دارد؛ اما در حالت کلی، با توجه به این که Λ^N دارای تعداد ناشمارا

دنباله است که بیش‌تر آن‌ها هم دارای نظم و قاعده مشخصی نیستند، جواب دادن به این سؤال در حالت کلی سخت است و می‌تواند یک موضوع تحقیقاتی برای کارهای بعدی باشد.

در ادامه حالت‌های خاصی را بررسی می‌کنیم که در آن‌ها عدد $\rho(\phi_\sigma)$ وجود دارد.

قضیه ۱۵.۳. فرض کنیم $\mathcal{F}=\{S^1; f_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ یک سیستم توابع تکرارشونده روی دایرG یکه است و $\phi=\{R;F_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ یک بالابر برای آن است که در آن به‌ازای هر $\lambda\in\Lambda$، F_λ یک تابع صعودی است و $0\le F_\lambda(0)<1$. گیریم α و β دو عضو متمایز از Λ هستند و $\sigma=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots\}$ دنباله‌ای هست که به‌ازای هر $n\ge 0$، $\lambda_{2n-1}=\alpha$ و $\lambda_{2n}=\beta$ در این صورت $\rho(\phi_\sigma)$ وجود دارد.

اثبات. فرض کنیم $f=f_\beta o f_\alpha$ و $F=F_\beta o F_\alpha$. در این صورت

$$\pi o F=\pi(F_\beta o F_\alpha)=f_\beta o(\pi o F_\alpha)=(f_\beta o f_\alpha)o\pi=f o\pi$$

پس F یک بالابر برای f هست و به‌ازای هر $k\ge 1$ ، داریم. $\phi_{\sigma_{2k}}=F^k$ در نتیجه

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\phi_{\sigma_{2k}}(0)}{2k}=\lim_{k\to\infty}\frac{F^k(0)}{2k}=\frac{1}{2}\rho(F).$$

از طرفی، بنابر قضیه ۳.۲، به‌ازای هر k داریم $|F_\beta(\phi_{\sigma_{2k}}(0))-\phi_{\sigma_{2k}}(0)|\le 1$ پس

$$\lim_{k\to\infty}\frac{F_\beta(\phi_{\sigma_{2k}}(0))-\phi_{\sigma_{2k}}(0)}{2k+1}=0.$$

با توجه به این که $\phi_{\sigma_{2k+1}}=F_\beta(\phi_{\sigma_{2k}})$ خواهیم داشت

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\phi_{\sigma_{2k+1}}(0)}{2k+1}=\lim_{k\to\infty}\frac{F_\beta(\phi_{\sigma_{2k}}(0))}{2k+1}=\lim_{k\to\infty}\frac{F^k(0)}{2k}=\frac{1}{2}\rho(F).$$

بنابراین $\rho(\phi_\sigma)$ موجود و مساوی $\frac{1}{2}\rho(F_\beta o F_\alpha)$ است.

مثال ۱۶.۳ فرض کنیم $\mathcal{F}=\{S^1; f_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ یک سیستم توابع تکرارشونده روی دایره یکه است و $\phi=\{R;F_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ یک بالابر برای آن است که در آن به‌ازای هر $\lambda\in\Lambda$، F_λ یک تابع صعودی است و $0\le F_\lambda(0)<1$. گیریم $\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_m$ یک دنباله متناهی از اعضای Λ است و

$$\sigma=\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_m,\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_m,\cdots$$

یک دنبالهٔ متناوب و نامتناهی از اعضای Λ است که حاصل تکرار دنباله متناهی داده شده است، با استدلال‌های مشابه قضیهٔ ۱۲.۳ می‌توان ثابت کرد که $\rho(\phi_\sigma)$ موجود و مساوی $\frac{1}{m}\rho(F)$ است که در آن

$$F=F_{\eta_m}oF_{\eta_{m-1}}o\cdots oF_{\eta_1}.$$

قضیهٔ بعد نشان می‌دهد که اگر σ یک دنباله باشد که از یک مرحله به بعد ثابت است آن‌گاه عدد چرخش وابسته به آن وجود دارد.

قضیه ۱۷.۳. فرض کنیم $\mathcal{F}=\{S^1; f_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ یک سیستم توابع تکرارشونده روی دایرهٔ یکه است و $\phi=\{R;F_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ یک بالابر برای آن است. گیریم $\sigma=\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots$ یک دنباله از اعضای Λ است که

وجود دارد یک $m \in N$ که به‌ازای هر $n \geq m$، $\lambda_n = \lambda_m$. در این صورت $\rho(\phi_\sigma)$ موجود و مساوی $\rho(F_{\lambda_m})$ است.

اثبات. فرض کنیم $n = m + k$ که $k \geq ۱$. در این صورت $\phi_{\sigma_n} = F_{\lambda_m}^k o(\phi_{\sigma_m})$ قرار می‌دهیم $a = \phi_{\sigma_m}(0)$. بنابر قضیهٔ ۵.۲ حد $\lim_{k\to\infty} \frac{F_{\lambda_m}^k(a)}{k}$ موجود و مساوی $\rho(F_{\lambda_m})$ است. پس

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi_{\sigma_n}(0)}{n} = \lim_{k\to\infty} \frac{F_{\lambda_m}^k(a)}{m+k} = \lim_{k\to\infty} \frac{F_{\lambda_m}^k(a)}{k} = \rho(F_{\lambda_m}).$$

مشابه قضیهٔ قبل برای حالتی که دنباله σ از یک مرحله به بعد متناوب باشد هم برقرار است.

ملاحظه ۱۸.۳. فرض کنیم $\mathcal{F} = \{S^1; f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ یک سیستم توابع تکرارشونده روی دایرهٔ یکه است و $\phi = \{R; F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ یک بالابر برای آن است که در آن به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$، F_λ یک تابع صعودی است و $0 \leq F_\lambda(0) < 1$. گیریم $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_m$ یک دنباله متناهی از اعضای Λ است و σ از اعضای Λ است که از مرحله‌ای به بعد تکرار دنباله $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_m$ است؛ به‌عبارت دیگر وجود دار د $j \geq 1$ ای که $\sigma = \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_j, \eta_1, \eta_2, \cdots \eta_m, \cdots, \eta_1, \eta_2, \cdots \eta_m, \cdots$. با استدلال‌های مشابه قضیه‌های ۱۵.۳ و ۱۷.۳ ثابت می‌شود که $\rho(\phi_\sigma)$ موجود و مساوی $\frac{1}{m}\rho(F)$ است که در آن $F = F_{\eta_m} o F_{\eta_{m-1}} o \cdots o F_{\eta_1}$.

۴. عدد چرخش و خاصیت سایه‌زنی

در این بخش بازه‌های چرخش را که کلی‌تر از عدد چرخش است بررسی می‌کنیم. سپس به بررسی مجموعهٔ شبه‌چرخش و خاصیت سایه‌زنی چرخشی برای سیستم‌های غیرخودگردان می‌پردازیم. در این قسمت توابع روی دایره یکه لزوماً حافظ جهت نیستند.

فرض کنیم $\mathcal{F} = \{S^1; f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ یک سیستم توابع تکرارشونده روی دایرهٔ یکه است و $\phi = \{R; F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ یک بالابر برای آن است.

تعریف ۱.۴. فرض کنیم $\sigma \in \Lambda^N$ و $x \in R$، بازهٔ بسته

$$\rho_I(\phi_\sigma, x) = [\liminf_{n\to\infty} \frac{\phi_{\sigma_n}(x)}{n}, \limsup_{n\to\infty} \frac{\phi_{\sigma_n}(x)}{n}].$$

را بازه چرخش ϕ_σ نسبت به نقطه x گوییم.

در صورتی که $\rho(\phi_\sigma)$ وجود باشد آن‌گاه $\rho_I(\phi_\sigma, x)$ تنها یک نقطه یعنی همان $\rho(\phi_\sigma)$ است.

دنبالهٔ $\sigma = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$ و عدد $\delta > ۰$ را در نظر می‌گیریم. دنبالهٔ $x = \{x_i\}_{i\geq 1}$ را یک $\delta-$شبه مدار برای ϕ_σ گوییم هرگاه به‌ازای هر $i \geq 1$، $|F_{\lambda_i}(x_i) - x_{i+1}| < \delta$.

گوییم ϕ_σ دارای خاصیت سایه‌زنی است، اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta > 0$ای که برای هر $\delta-$ شبه مدار مانند $x = \{x_i\}_{i\geq 1}$ نقطه‌ای مانند y یافت شود که به‌ازای هر $i \geq 1$، $|y_i - x_i| < \varepsilon$ که در آن $y_1 = y$ و $y_{i+1} = F_{\lambda_i}(y_i)$.

تعریف ۲.۴. فرض کنیم $\delta > 0$ و $x = \{x_i\}_{i \geq 1}$ یک $\delta-$ شبه مدار برای ϕ_σ است. بازه بسته

$$\rho_p(\phi_\sigma, x, \delta) = [\liminf_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}, \limsup_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}]$$

را یک بازه $\delta-$چرخش می‌نامیم.

تعریف ۳.۴. فرض کنیم $\rho_p(\phi_\sigma, \delta)$ اجتماع همهٔ بازه‌های $\delta-$چرخش باشد. مجموعهٔ $\rho_p(\phi_\sigma) = \bigcap_\delta I_\rho(\phi_\sigma, \delta)$ را مجموعهٔ شبه‌چرخش ϕ_σ می‌نامیم.

تعریف ۴.۴. گوییم ϕ_σ دارای خاصیت سایه‌زنی چرخشی است اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta > 0$ای که برای هر $\delta-$شبه مدار مانند $x = \{x_i\}_{i\geq 1}$ یک مدار برای ϕ_σمانند $y = \{y_i\}_{i\geq 1}$ را پیدا کرد که

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|y_n - x_n|}{n} \leq \varepsilon .$$

قضیهٔ **۵.۴**. یکی از نتایج اصلی این مقاله است و ایده اولیه اثبات آن برگرفته از [1] است.

قضیه ۵.۴. فرض کنیم $\mathcal{F} = \{S^1; f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ یک سیستم توابع تکرارشونده روی دایره یکه است و $\phi = \{R; F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ یک بالابر برای آن است که به‌ازای هر λ، $F_\lambda(x+1) = F_\lambda(x) + 1$. هم‌چنین فرض کنید $\sigma = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$ یک دنبالهٔ دلخواه در Λ^N است. در این صورت ϕ_σ دارای خاصیت سایه‌زنی چرخشی است.

برای اثبات قضیه به لم‌های زیر نیاز داریم.

لم ۶.۴. فرض کنیم $I \subset R$ یک بازهٔ بسته به‌طول یک و L یک عدد صحیح مثبت است. به‌ازای هر $p \in I$ یک زیربازهٔ بسته $J \subseteq I$ وجود دارد که $p \in J$ و طول بازه $\phi_{\sigma_L}(J)$ مساوی یک باشد.

اثبات. فرض کنیم $I = [c, d]$. به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$، $F_\lambda(d) = F_\lambda(c+1) = F_\lambda(c) + 1$؛ بنا براین طول بازهٔ $\phi_{\sigma_L}(I)$بزرگتر یا مساوی یک است. با توجه به پیوستگی توابع F_λ ادامه اثبات بدیهی است.

لم ۷.۴. فرض کنیم $\delta > 0$. گیریم $N(\delta)$ بزرگ‌ترین عدد طبیعی k است که اگر $x = \{x_i\}_{i\geq 1}$ یک $\delta-$شبه مدار برای ϕ_σ باشد آن‌گاه به‌ازای هر $0 \leq i \leq k$، $|\phi^n_{\sigma_m}(x_m) - x_{n+m}| \leq 1$. در این صورت $N(\delta)$ نسبت به کاهش δ به سمت صفر، یک دنباله صعودی و بیکران است.

اثبات. به‌ازای هر λ تابع F_λ روی بازهٔ $[0,1]$ پیوسته یک‌نواخت است. از طرفی به‌ازای هر λ و هر $x \in R$، $F_\lambda(x+1) = F_\lambda(x) + 1$. با توجه به متناهی بودن مجموعه اندیس‌گذار Λ و این نکته که به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$، F_λ یک تابع پیوستهٔ یک‌نواخت است، اثبات لم بدیهی است.

لم ۸.۴. فرض کنیم L و k دو عدد صحیح مثبت دلخواه هستند. عدد ثابت C که وابسته به k نیست وجود دارد که

$$\sup\{|\phi_{\sigma_r}(p) - \phi_{\sigma_r}(q)| : 0 \leq r \leq L-1, |p-q| \leq k\} \leq C + k.$$

اثبات. فرض کنیم p و q دو نقطه در R هستند که $|p-q| \leq k$. با توجه به این که به‌ازای هر λ و هر $x \in R$، $F_\lambda(x+1) = F_\lambda(x) + 1$، به‌ازای هر $n \geq 1$ داریم $\phi_{\sigma_n}(x+k) = \phi_{\sigma_n}(x) + k$. در نتیجه به‌ازای هر $n \geq 1$داریم:

$$|\phi_{\sigma_n}(p)-\phi_{\sigma_n}(q)|\leq|\phi_{\sigma_n}(p)-p|+|\phi_{\sigma_n}(q)-q|+|p-q|\leq 2+k.$$

حال به اثبات قضیه می‌پردازیم.

اثبات. عدد ثابت $\delta>0$ را در نظر بگیرید. فرض کنیم t همان $N(\delta)$ در لم ۷.۴ است. دنبالهٔ $\delta-$شبه مدار $x=\{x_i\}_{i\geq1}$ را در نظر بگیرید و فرض کنیم که I یک بازه به طول یک است که $x_0\in I$. بنابر لم ۶.۴ بازهٔ J_1 وجود دارد که $x_0\in J_1$ و $\phi_{\sigma_t}(J_1)$ یک بازه به طول یک است. با توجه به اتنخاب t، وجود دارد $s_1\in\{-1,0,1\}$ که $z_1=x_t+s_1$ در بازه $\phi_{\sigma_t}(J_1)$ قرار می‌گیرد.

باتوجه به فرض قضیه، به‌ازای هر $\lambda\in\Lambda$، هر عدد صحیح s و هر $i\geq1$ داریم $F_\lambda(x_i+s)=F_\lambda(x_i)+s$ و درنتیجه به‌ازای هر $n\geq1$، $\phi_{\sigma_n}(x_i+s)=\phi_{\sigma_n}(x_i)+s$؛ بنا براین $\{x_i+s\}$ هم یک $-\delta$ شبه مدار است.

حال با استفاده از استقرا دنباله $\{J_k\}$ از بازه‌ها و دنباله $\{s_k\}$ از اعضای مجموعه $\{-1,0,1\}$ را به‌صورت زیر می‌سازیم:

بازهٔ $J_2\subseteq\phi_{\sigma_t}(J_1)$ شامل $z_1=x_t+s_1$ وجود دارد که $\phi^{2t}_{\sigma_t}(J_2)$ یک بازه به طول یک است. با توجه به لم ۶.۴، عدد $s_2\in\{-1,0,1\}$ چنان وجود دارد که $z_2=(x_{2t}+s_1)+s_2$ در $\phi^{2t}_{\sigma_t}(J_2)$ قرار دارد.

فرض کنیم J_k، s_k و $z_k=x_{2t}+(s_1+s_2+\cdots+s_k)\in J_k$ مانند بالا ساخته شده‌اند که

$$J_k\subseteq\phi^{(k-1)t}_{\sigma\ (k-2)t}(J_{k-1}).$$

بنابر لم ۶.۴، زیربازهٔ $J_{k+1}\subseteq\phi^{(k)t}_{\sigma\ (k-1)t}(J_k)$ وجود دارد که $z_k\in J_{k+1}$ و $\phi^{(k+1)t}_{\sigma\ (k)t}(J_{k+1})$ یک بازه به طول یک است. بنا بر لم ۴،۷، عدد $s_2\in\{-1,0,1\}$ وجود دارد که

$$z_{k+1}=x_{(k+1)2t}+(s_1+s_2+\cdots+s_k)+s_{k+1}\in\phi^{(k+1)t}_{\sigma\ (k)t}(J_{k+1}).$$

با توجه به‌نحوهٔ ساخت J_kها، به‌ازای هر k، $J_{k+1}\subseteq\phi_{\sigma(k)t(k-1)t}(J_k)$ بنا براین وجود دارد:

$$y\in\bigcap_{k\geq1}(\phi^{(k)t}_{\sigma\ (k-1)t})^{-1}(J_{k+1}).$$

حال نشان می‌دهیم که

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|\phi_\sigma(y)-x_n|}{n}=0.$$

فرض کنیم $n=kt+r$ که $0\leq r<t$. حال با استفاده از لم‌های ۷.۴ و ۸.۴ این عبارت را داریم:

$$\begin{aligned}
&|\phi_{\sigma_n}(y)-x_n|<\\
&|F_{\lambda_{kt+r}}o\cdots oF_{\lambda_{kt+1}}(\phi_{\sigma_n}(y)-F_{\lambda_{kt+r}}o\cdots oF_{\lambda_{kt+1}}(x_{kt})|+\\
&|F_{\lambda_{kt+r}}o\cdots oF_{\lambda_{kt+1}}(x_{kt})-x_{kt+r}|<\\
&|F_{\lambda_{kt+r}}o\cdots oF_{\lambda_{kt+1}}(\phi_{\sigma_n}(y)-F_{\lambda_{kt+r}}o\cdots oF_{\lambda_{kt+1}}(x_{kt})|+1<\\
&|F_{\lambda_{kt+r}}o\cdots oF_{\lambda_{kt+1}}(\phi_{\sigma_n}(y)-F_{\lambda_{kt+r}}o\cdots oF_{\lambda_{kt+1}}(z_k)|+(c+k)<\\
&(c+1)+(c+k)+1.
\end{aligned}$$

بنا براین

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|\phi_\sigma(y)-x_n|}{n}\leq\limsup_{k\to\infty}\frac{|2c+k+1|}{kt}\leq\frac{1}{t}=\frac{1}{N(\delta)}.$$

بنابر لم ۷.۴ می‌توان δ را آن‌قدر کوچک در نظر گرفت که $\frac{1}{N(\delta)} \le \varepsilon$ و در نتیجه اثبات قضیه کامل است.

نتیجه ۹.۴. فرض کنیم $\mathcal{F} = \{S^1; f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ یک سیستم توابع تکرارشونده روی دایرهٔ یکه است و $\phi = \{R; F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ یک بالابر برای آن است و $\sigma = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$ یک دنبالهٔ دلخواه در Λ^N است. در این صورت $\rho_I(\phi_\sigma)$ در $\rho_p(\phi_\sigma)$ چگال است.

اثبات. با توجه به قضیه قبل به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ وجود دارد که هر $\delta-$شبه مدار در همسایگی به شعاع $\varepsilon > ۰$ از یک مدار می‌افتد و در نتیجه $\rho_I(\phi_\sigma)$ در $\rho_p(\phi_\sigma)$ چگال است.

تعریف ۱۰.۴. [17] فرض کنیم X یک فضای متریک، $\mathcal{F} = \{X; f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ یک سیستم توابع تکرارشونده روی دایره یکه است و $\sigma = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$ یک دنبالهٔ دلخواه در Λ^N است. عدد $\delta > 0$ را ثابت در نظر می‌گیریم، دنبالهٔ متناهی $x_1, x_2, \cdots x_n$ را یک $\delta-$ زنجیر متناهی از x_1 به x_n به‌طول n گوییم هرگاه، عددی مانند $m > 1$ وجود داشته باشد که به‌ازای هر $1 \le i \le n-1$ رابطهٔ $d(f_{\lambda_{m+i-1}}(x_i), x_{i+1}) < \delta$ برقرار باشد. در این حالت گوییم $\{x_i\}_{i=1}^n$ یک $\delta-$زنجیر با شروع از λ_m است.

تعریف ۱۱.۴. مجموعهٔ $E \subseteq X$ را یک مجموعهٔ متعدی زنجیری برای ϕ_σ گوییم هرگاه برای هر $\delta > 0$ و هر $x, y \in E$ یک $\delta-$شبه مدار از x به y تحت ϕ_σ وجود داشته باشد.

قضیه ۱۲.۴. فرض کنیم $E \subseteq R$ یک مجموعه ترایایی زنجیری و پایا برای ϕ_σ باشد و ϕ_σ روی E دارای خاصیت سایه‌زنی است. در این صورت نقطه $z \in E$ وجود دارد که $\rho_I(\phi_\sigma, z) = \rho_I(\phi_\sigma, E)$.

اثبات. فرض کنیم $a = \inf \rho_I(\phi_\sigma, E)$ و $b = \sup \rho_I(\phi_\sigma, E)$. در این صورت نقاط $x, y \in E$ و دنباله‌های $\{n_i\}$ و $\{k_j\}$ وجود دارند که $\lim_{j\to\infty} \frac{\phi_{\sigma_{k_j}}(y)}{k_j} = b$ و $\lim_{i\to\infty} \frac{\phi_{\sigma_{n_i}}(x)}{n_i} = a$.

عدد مثبت و دلخواه ε را در نظر بگیرید و فرض کنید $\delta > 0$ عدد وابسته به ε در خاصیت سایه‌زنی ϕ_σ است. از آن‌جا که E یک مجموعهٔ ترایایی زنجیری برای ϕ_σ است پس به‌ازای هر n وجود دارد $n_0 > n$ که یک $\delta-$ زنجیر U_{n_0} از na به nb (و یا یک $\delta-$ زنجیر V_{n_0} از nb به na) با شروع از λ_{n_0} برای ϕ_σ وجود دارد. پس می‌توان یک $\delta-$ زنجیر نامتناهی مانند $\{z_n\}$ برای ϕ_σ ساخت که شامل تعداد نامتناهی نقطه از هر کدام از مجموعه‌های $\{\phi_{\sigma_{k_j}}(y)\}$، $\{\phi_{\sigma_{n_i}}(x)\}$، $V_{n_۰}$ و U_{n_0} باشد. حال بنا بر خاصیت سایه‌زنی نقطهٔ $z \in E$ وجود دارد که به‌ازای هر n، $|\phi_{\sigma_n}(z) - z_n| < \varepsilon$ و در نتیجه $|\frac{\phi_{\sigma_n}(z) - z_n}{n}| < \frac{\varepsilon}{n}$. با توجه به انتخاب اعضای دنبالهٔ $\{z_n\}$ داریم $a = \liminf \frac{z_n}{n}$ و $b = \limsup \frac{z_n}{n}$؛ بنابراین $a = \liminf \frac{\phi_{\sigma_n}(z)}{n}$ و $b = \limsup \frac{\phi_{\sigma_n}(z)}{n}$. به‌عبارتی دیگر، $\rho_p(\phi_\sigma, z) = [a,b] = \rho_I(\phi_\sigma, E)$.

۵. آنتروپی چرخشی

در این بخش آنتروپی چرخشی برای سیستم‌های غیرخودگردان را تعریف می‌کنیم و شرایط صفر شدن آنتروپی چرخشی را بررسی می‌کنیم.

فرض کنیم $\mathcal{F}=\{S^1; f_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ یک سیستم توابع تکرارشونده روی دایرهٔ یکه است و $\phi=\{R;F_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ یک بالابر برای آن است که به‌ازای هر $\lambda\in\Lambda$، $F_\lambda(0)\in[0,1)$ و $\sigma=\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots$ یک دنبالهٔ دلخواه در Λ^N است.

تعریف ۱.۵. یک مجموعه E از بازهٔ $[0,1)$ را یک $(n,\varepsilon,\phi_\sigma)$–مولد چرخشی گوییم اگر برای هر $x\in[0,1)$ یک $y\in E$ پیدا شود که $|x-y|<\varepsilon$ و به‌ازای هر $1\le i\le n$، $\frac{|\phi_{\sigma_i}(x)-\phi_{\sigma_i}(y)|}{i}<\varepsilon$.

فرض کنیم $s(n,\varepsilon,\phi_\sigma)$ کوچک‌ترین عدد اصلی یک مجموعه $(n,\varepsilon,\phi_\sigma)$–مولد چرخشی است.

با توجه به پیوستگی یک‌نواخت F_λها و این که به‌ازای هر x و هر $\lambda\in\Lambda$، $F_\lambda(x+1)=F_\lambda(x)+1$ این عدد وجود دارد و متناهی است.

لم ۲.۵. عدد $s(n,\varepsilon,\phi_\sigma)$ به انتخاب بالابر وابسته نیست.

اثبات. فرض کنیم $\phi=\{R;F_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ و $\psi=\{R;G_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ دو بالابر برای $\mathcal{F}$ هستند. در این‌صورت برای هر $\lambda\in\Lambda$ وجود دارد عدد صحیح k_λ که $G_\lambda\equiv F_\lambda+k_\lambda$. پس به‌ازای هر x و y و هر $i\in N$ داریم $|\phi_{\sigma_i}(x)-\phi_{\sigma_i}(y)|=|\psi_{\sigma_i}(x)-\psi_{\sigma_i}(y)|$؛ بنا براین برای هر n و هر $\varepsilon>0$، مجموعه $E\subseteq[0,1)$ یک $(n,\varepsilon,\phi_\sigma)$–مولد چرخشی است اگر و تنها اگر یک $(n,\varepsilon,\psi_\sigma)$–مولد چرخشی باشد.

تعریف ۳.۵. مقدار حد $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log s(n,\varepsilon,\phi_\sigma)}{n}$ را آنتروپی چرخشی ϕ_σ می‌نامیم و آن را با $h_r(\phi_\sigma)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۴.۵. در صورتی که عدد چرخش $\rho(\phi_\sigma)$ وجود داشته باشد آن‌گاه $h_r(\phi_\sigma)=0$.

اثبات. فرض کنیم $\rho(\phi_\sigma)=\rho_\circ$. در این صورت به‌ازای هر $x\in[0,1]$ داریم $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\phi_{\sigma_n}(x)}{n}=\rho_0$ (در نظر داشته باشید که $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\phi_{\sigma_n}(1)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\phi_{\sigma_n}(0)}{n}$)؛ بنابراین دنباله توابع $\{\frac{\phi_{\sigma_n}}{n}\}$ همگرای یک‌نواخت به تابع ثابت $f(x)=\rho_0$ است. پس به‌ازای هر $\varepsilon>0$، n_0ای وجود دارد که به‌ازای هر $n\ge n_0$ و هر $x\in[0,1]$ ، $|\frac{\phi_{\sigma_n}(x)}{n}-\rho_0|<\frac{\varepsilon}{4}$.

از طرفی برای هر $x\in[0,1]$ $0<\delta_x<\varepsilon$ وجود دارد که اگر $y\in B_{\delta_x}(x)$ آن‌گاه به‌ازای هر $1\le i\le n_0-1$ ، $|\frac{\phi_{\sigma_i}(x)-\phi_{\sigma_i}(y)}{i}|<\frac{\varepsilon}{4}$.

از آن‌جا که $[0,1]$ فشرده است نقاط $a_1,\ldots,a_k$ و اعداد $\delta_{a_1},\ldots,\delta_{a_k}$ وجود دارد که در نامساوی بالا صدق کنند و $[0,1]\subseteq\bigcup B_{\delta_{a_i}}(a_i)$.

در نتیجه برای هر $x\in[0,1]$ وجود دارد $1\le i\le k$ که $x\in B_{\delta_{a_i}}(a_i)$ و برای هر $n>n_0$ داریم $|\frac{\phi_{\sigma_n}(x)}{n}-\rho_0|<\frac{\varepsilon}{4}$ و $|\frac{\phi_{\sigma_n}(a_i)}{n}-\rho_0|<\frac{\varepsilon}{4}$. پس برای $n>n_\circ$ ،

$$|\frac{\phi_{\sigma_n}(x)-\phi_{\sigma_n}(a_i)}{n}|\le|\frac{\phi_{\sigma_n}(a_i)}{n}-\rho_0|+|\frac{\phi_{\sigma_n}(a_i)}{n}-\rho_0|<\frac{\varepsilon}{2}$$

بنا براین به‌ازای هر $n>n_0$، $s(n,\varepsilon,\phi_\sigma)\le k$ و در نتیجه $h_r(\phi_\sigma)=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\frac{\log s(n,\varepsilon,\phi_\sigma)}{n}=0$

فرض کنیم $X=R\times[0,1]$ و $\overline{X}=S^1\times[0,1]$. مجموعه اندیس‌گذار متناهی Λ را در نظر می‌گیریم و فرض کنیم به‌ازای هر $\lambda\in\Lambda$، تابع $f_\lambda:\overline{X}\to\overline{X}$ یک تابع پیوسته و هموتوپ با همانی باشد. تابع پوشای $\pi:X\to\overline{X}$ با ضابطه $\pi(x,t)=(e^{i2\pi x},t)$ را در نظر بگیرید. تابع $F_\lambda:X\to X$ را یک بالابر f_λ گوییم اگر به‌ازای هر $(x,t)\in X$ داشته باشیم $\pi(F_\lambda(x,t))=f_\lambda(\pi(x,t))$. در [1] و [15] ثابت شده است که تابع بالابر $F_\lambda:X\to X$ چنان وجود دارد که به‌ازای هر $(a,t)\in X$ $F_\lambda(a+1,t)=F_\lambda(a,t)+(1,0)$، $F_\lambda(0,0)\in[0,1]$.

سیستم توابع تکرارشونده $\mathcal{F}=\{\overline{X};f_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ و بالابر متناظر با آن $\phi=\{X;F_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\sigma=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots\}\in\Lambda^N$ و به‌ازای هر $x\in X$ و هر i قرار می‌دهیم $(\phi_{\sigma_i}(x))_1$ مؤلفه اول $(\phi_{\sigma_i}(x))$ باشد و به‌ازای هر $\overline{x}\in\overline{X}$ قرار می‌دهیم $x=\pi^{-1}(\overline{x})\cap[0,1)\times[0,1]$.

تعریف ۵.۵. مجموعهٔ $A\subset\overline{X}$ را یک $(n,\varepsilon,\phi_\sigma)-$ مولد چرخشی گوییم، اگر به‌ازای هر $\overline{x}\in\overline{X}$ وجود داشته باشد $\overline{y}\in A$ که $\|\overline{x}-\overline{y}\|<\varepsilon$ و به‌ازای هر $1\le i\le n-1$، $\frac{|(\phi_{\sigma_i}(x))_1-(\phi_{\sigma_i}(y))_1|}{i}<\varepsilon$.

عدد $s(n,\varepsilon,\phi_\sigma)$ و آنتروپی چرخشی، $h_r(\phi_\sigma)$ همان کمیت‌های بیان شده در تعریف ۳.۵ هستند.

ملاحظه ۶.۵. در [10] آنتروپی توپولوژیک برای سیستم‌های غیرخودگردان تعریف شده و ویژگی‌های اساسی آن بررسی شده و با به تعریف‌ها به‌راحتی می‌توان نشان داد که اگر $h(\phi_\sigma)$ آنتروپی توپولوژیک سیستم غیرخودگردان ϕ_σ باشد آن‌گاه $h_r(\phi_\sigma)\le h(\phi_\sigma)$.

به‌ازای هر $l\in N$ هر $\overline{x}\in\overline{X}$، فرض کنیم $T^l(x)=(\phi_{\sigma_l}(x)-x)_1$ با توجه به قضیهٔ ۳.۲ به‌ازای هر $l\in N$ و هر $\overline{x}\in\overline{X}$ ، $|T^l(x)|\le l$.

حال برای مقادیر ثابت δ، N و m مجموعه $k-$ کوچک را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

تعریف ۷.۵. مجموعهٔ $A\subseteq\overline{X}$ را $k-$ کوچک گوییم اگر برای هر $\overline{x},\overline{y}\in A$ شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $\|\overline{x}-\overline{y}\|<\delta$،

۲. برای هر $1\le j\le N$، $\frac{|(\phi_{\sigma_j}(x))_1-(\phi_{\sigma_j}(y))_1|}{j}<\delta$،

۳. برای هر $\circ\le i\le k$، $\frac{|(T^m(\phi_{\sigma_{N+im}}(x))_1-T^m(\phi_{\sigma_{N+im}}(y))_1|}{m}<\delta$.

لم ۸.۵. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ ثابت است. برای هر $\varepsilon > \delta > 0$ و هر m وجود دارد Nای که اگر $\mathcal{A}$ یک افراز از مجموعه‌های $k-$ کوچک برای $\overline{X}$ باشد و E یک مجموعه باشد که با انتخاب یک عضو از هر جزء افراز $\mathcal{A}$ ایجاد شده است، آن‌گاه E یک مجموعه $(n,\varepsilon,\phi_\sigma)-$مولد چرخشی است که در آن $n = N+km+m-1$.

اثبات. نقطه دلخواه $\overline{x} \in \overline{X}$ را در نظر می‌گیریم. وجود دارد $\overline{y} \in E$ که $\overline{x}$ و $\overline{y}$ در یک جزء افراز $\mathcal{A}$ هستند؛ بنا براین $\|\overline{x}-\overline{y}\| < \delta$ و برای هر $1 \le j \le N$،

$$\frac{|(\phi_{\sigma_j}(x))_1-(\phi_{\sigma_j}(y))_1|}{j} < \delta < \varepsilon. \tag{۵-۱}$$

بنا براین کافی است که نشان دهیم برای هر $N+1 \le j \le n$ نامساوی (۱-۵) برقرار است.

فرض کنیم $j = N+im+s$ که $0 \le i \le k$ و $0 \le s \le m-1$، در این صورت

$$\begin{aligned}&\phi_{\sigma_j}(x))_1 = \\ &(\phi_{\sigma_N}(x))_1+((\phi_{\sigma_{N+m}}(x)-\phi_{\sigma_N}(x))_1+\cdots+ \\ &(\phi_{\sigma_{N+im}}(x)-\phi_{\sigma_{N+(i-1)m}}(x))_1)+(\phi_{\sigma_{N+im+s}}(x)-\phi_{\sigma_{N+im}}(x))_1\end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned}&|\phi_{\sigma_j}(x))_1-\phi_{\sigma_j}(y))_1| = \\ &[(\phi_{\sigma_N}(x)-\phi_{\sigma_N}(y))_1]+ \\ &\sum_{t=0}^{i-1}[T^m((\phi_{\sigma_{N+tm}}(x)_1)-T^m((\phi_{\sigma_{N+tm}}(y))_1))]+ \\ &[T^s(\phi_{\sigma_{N+im}}(x)_1)-T^s(\phi_{\sigma_{N+im}}(y))_1)].\end{aligned}$$

حال باتوجه به فرض‌ها و نکته‌های قبل از لم داریم

$$\begin{aligned}&\frac{|(\phi_{\sigma_j}(x))_1-(\phi_{\sigma_j}(y))_1|}{j} < \\ &\frac{N\delta+im\delta+2s}{j} < \delta+\frac{2s}{N} < \delta+\frac{2m}{N}.\end{aligned}$$

اگر عدد N را به قدر کافی بزرگ در نظر بگیریم اثبات لم تکمیل می‌شود.

لم ۹.۵. فرض کنیم δ، N و m داده شده‌اند. عدد ثابت M چنان وجود دارد که برای هر عدد k یک افراز $\mathcal{A}_k$ شامل مجموعه‌های $k-$ کوچک وجود دارد که تعداد اجزای آن کم‌تر یا مساوی $M\left(\frac{2}{\delta+1}\right)^k$ است.

اثبات. با استفاده از استقرا روی k لم را اثبات می‌کنیم.

فرض کنیم $k=0$. در این صورت باتوجه به پیوستگی توابع تشکیل‌دهندهٔ سیستم و فشردگی $\overline{X}$، می‌توان اعداد r و M را به گونه‌ای پیدا کرد که یک افراز شامل M مجموعه با قطر کم‌تر از r برای $\overline{X}$ وجود دارد و هر مجموعه به قطر r یک مجموعه $0-$کوچک است. حال فرض کنیم افراز $\mathcal{A}_k$ شامل مجموعه‌های $k-$کوچک داده شده است و با استفاده از آن افراز $\mathcal{A}_{k+1}$ را می‌سازیم.

فرض کنیم $A \in \mathcal{A}_k$ و $g^m(x) = (\phi_{\sigma_{N+(k+2)m}}(x)-\phi_{\sigma_{N+(k+1)m}}(x))_1$ در این صورت

$$g^m(A) \subset [-m,m]$$؛

بنا براین می‌توان $g^m(A)$ را به تعدادی کم‌تر از $\frac{2}{\delta+1}$ زیرمجموعه‌هایی با قطر حداکثر $m\delta$ افراز کرد؛ بنا براین تصویر وارون این افراز تحت تابع g^m یک افراز شامل حداکثر $M(\frac{2}{\delta+1})^k(\frac{2}{\delta+1}) = M(\frac{2}{\delta+1})^{k+1}$ مجموعه $(k+1)$–کوچک است.

قضیه ۱۰.۵. فرض کنیم $X = R\times[0,1]$ و $\overline{X} = S^1\times[0,1]$. مجموعهٔ اندیس‌گذار متناهی Λ را در نظر می‌گیریم و فرض کنیم به‌ازای هر $\lambda\in\Lambda$، تابع $f_\lambda : \overline{X} \to \overline{X}$ یک تابع پیوسته و هموتوپ با همانی باشد. سیستم توابع تکرارشونده $\mathcal{F} = \{\overline{X}; f_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ و بالابر متناظر با آن $\phi = \{X; F_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ را در نظر می‌گیریم. به‌ازای هر $\sigma\in\Lambda^N$، $h_r(\phi_\sigma) = 0$.

اثبات. عدد مثبت ε را درنظر گرفته و قرار می‌دهیم $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. بنابر لم‌های ۸.۵ و ۹.۵ برای هر m وجود دارد N و M که برای هر k یک مجموعه $(n,\varepsilon,\phi_\sigma)$–مولد چرخشی با عدد اصلی کم‌تر از وجود دارد که

$$n = N + km + m - 1.$$

در نتیجه

$$h_r(\phi_\sigma) \le \limsup \frac{log(M(\frac{2}{\delta+1})^k)}{N+km} = \frac{1}{m} log(M(\frac{2}{\delta+1})).$$

با توجه به دلخواه بودن m نتیجه می‌گیریم که $h_r(\phi_\sigma) = 0$.

نتیجه‌گیری

در این مقاله توابع بالابر و عدد چرخش برای سیستم‌های توابع تکرار شونده و غیرخودگردان معرفی و ویژگی‌های اساسی آن بررسی شد. در این زمینه دو سؤال مهم پیش می‌آید که می‌تواند موضوع جذابی برای کارهای تحقیقاتی در آینده باشد:

آ. آیا قضیهٔ پوانکاره در مورد مزدوج بودن هر تابع حافظ جهت با عدد چرخش گنگ با یک دوران گنگ، برای سیستم‌های غیرخودگردان هم برقرار است؟

ب. با توجه به قضیه ۱۲.۳ اگر سیستم $\mathcal{F}$ شامل دو دوران به اندازهٔ $\alpha < \beta \in [0,1)$ باشد آن‌گاه به‌ازای هر عدد $\alpha < r < \beta$ یک دنباله σ وجود دارد که $\rho(\phi_\sigma) = r$. سوالی که پیش می‌آید این است که برای چه رده‌های از سیستم‌های توابع تکرار شونده می‌توان به نتیجه مشابه رسید؟

در [12] ارتباط بین پایداری ساختاری یک تابع حافظ جهت روی دایره یکه و گویا بودن عدد چرخش بیان شده است. هم‌چنین در [18] پایداری توپولوژیک و خاصیت سایه‌زنی در سیستم‌های غیرخودگردان تعریف شده و ثابت شده است که هر سیستم غیرخودگردان گسترشی و دارای خاصیت سایه‌زنی به‌طور توپولوژیک پایدار است. بنابراین تعریف

پایداری ساختاری در سیستم‌های غیرخودگردان روی دایره یکه و بررسی ارتباط آن با عدد چرخش و خاصیت سایه‌زنی و هم‌چنین آنتروپی چرخشی یک موضوع بسیار جذاب و در عین حال پرکاری است که می‌تواند در کارهای علمی بعد مورد توجه قرار گیرد.

منابع

1. Barge M., Swanson R., "Rotation shadowing properties of circle and annulus maps", Ergod. Th. Dynam. Sys., 8 (1988) 509-521.
2. Boscaggin A., Garrione M., "Resonance and rotation numbers for planar Hamiltonian systems: multiplicity results via the Poincaré-Birkhoff theorem", Nonlinear Anal., 74 (2011) 4166-4185.
3. Botelho F., "Rotational entropy for annulus endomorphisms", Pacific J. Math., 151 (1991) 1-19.
4. Canovas J. S., "Recent results on non-autonomous discrete systems", Bol. Soc. Esp. Mat. Apl., 51 (2010) 33-40.
5. Fatehi Nia M., "Parameterized IFS with the Asymptotic Average Shadowing Property", Qual. Theory Dyn. Syst.. 15 (2016) 367-381.
6. Fatehi Nia M., "Iterated function systems with the average shadowing property", Topology Proc., 48 (2016) 261-275.
7. Franks J., "Recurrence and fixed points of surface homeomorphisms", Ergodic Theory Dynam. Systems, 8 (1988) 99-107.
8. Geller W., Misiurewicz M., "Rotation and entropy", Trans. Amer. Math. Soc., 351 (1999) 2927-2948.
9. Herman M. R., "Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations", Publ. Math. IHES, 49 (1979) 234-239.
10. Kolyada S., Snoha L., "Topological entropy of nonautonomous dynamical system", Random Comput. Dynam., 4 (1996) 205-233.
11. Li W., Lu K., "Rotation numbers for random dynamical systems on the circle", Trans. Amer. Math. Soc. 360, no. 10 (2008) 5509-5528.
12. Robinson C., "Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos", CRC Press, (1994).
13. Rodrigues C. S., Paulo Ruffino R. C., "A family of rotation numbers for discrete random dynamics on the circle", Stoch. Dyn. 15 (2015) 1550021-36.
14. Shi Y., "Chaos in nonautonomous discrete dynamical systems approached by their induced systems", Int. J. Bifurcat. Chaos, 22 (2012) 1250284-96.

15. Shvetsov Y. B., "Rotation of flows on generalized solenoids", Thesis (Ph.D.), Montana State University. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI (2003).

16. Swanson R., "Periodic orbits and the continuity of rotation numbers", Proc. Amer. Math. Soc. 117 (1993) 269-273.

17. Thakkar D., Das R., "Some properties of chain recurrent sets in a nonautonomous discrete dynamical system", Adv. Pure Appl. Math. 6 (2015) 173-178.

18 Thakkar D., Das R., "Topological stability of a sequence of maps on a compact metric space", Bull. Math. Sci. 4 (2014) 99-111.

19. Thakkar D., Das R., "A note on non-wandering set of a nonautonomous discrete dynamical system", Appl. Math. Sci. 138 (2013) 6849-6854.