چند نامساوی میانگین هندسی وزن دار عملگری

عالمه شیخ حسینی*؛ دانشگاه شهید باهنر، بخش ریاضی محض
اسما ایلخانی‌زاده منش؛ دانشگاه ولی عصر، بخش ریاضی محض
مریم خسروی؛ دانشگاه شهید باهنر، بخش ریاضی محض

دریافت ۹۵/۰۹/۰۳ پذیرش ۹۶/۰۶/۲۷

چکیده

در این مقاله، با استفاده از نامساوی توسعه یافته هولدر- مک کارتی، چندین نامساوی در زمینه میانگین هندسی α-وزن دار $(0 \le \alpha \le 1)$ دو عملگر مثبت بیان شده است. به‌ویژه ثابت شده است که اگر $A, B, X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ به‌طوری‌که A و B دو عملگر مثبت وارون‌پذیر باشند، آن‌گاه به‌ازای هر $r \ge 1$،

$$\|X^*(A \sharp_\alpha B)Y\| \le \|X^*AX\|^{\frac{1-\alpha}{2}}\|Y^*AY\|^{\frac{1-\alpha}{2}}\|X^*BX\|^{\frac{\alpha}{2}}\|Y^*BY\|^{\frac{\alpha}{2}}$$

و

$$\|X^*(A \sharp_\alpha B)X\|^r \le \|\alpha(X^*BX)^r + (1-\alpha)(X^*AX)^r\| - \Omega(X)$$

که در آن $\sharp_\alpha$ نمایانگر میانگین هندسی α-وزن دار است و

$$\Omega(X) = \inf_{\|x\|=1}\left(\sqrt{\langle (X^*BX)^r x, x\rangle} - \sqrt{\langle (X^*AX)^r x, x\rangle}\right)^2 . \min\{\alpha, 1-\alpha\}.$$

واژه‌های کلیدی: نامساوی هولدر- مک کارتی، برد عددی، نرم عملگری، عملگر مثبت وارون‌پذیر

Mathematics Subject Classification [2010]: 15A60, 47A12, 47A63.

مقدمه و پیشنیازها

فرض کنیم $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ فضای همهٔ عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت مختلط $\mathcal{H}$ با ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ باشد. عملگر A را مثبت گوییم و می‌نویسیم $A \ge 0$ اگر $A = A^*$ (که در آن A^* عملگر الحاقی است) و برای هر $x \in \mathcal{H}$، $\langle Ax, x\rangle \ge 0$. میانگین هندسی α-وزن‌دار $\sharp_\alpha$ برای $\alpha \in [0,1]$ و عملگرهای مثبت وارون‌پذیر A و B بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$A \sharp_\alpha B = A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}}.$$

به‌راحتی دیده می‌شود که $A \sharp_\alpha B = B \sharp_{1-\alpha} A$. در حالت $\alpha = \frac{1}{2}$، این تعریف همان میانگین هندسی معمول است. به‌علاوه اگر A و B وارون‌پذیر نباشند، می‌توان $A \sharp_\alpha B$ را بدین‌صورت

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \quad (A + \varepsilon I) \sharp_\alpha (B + \varepsilon I)$$

در توپولوژی قوی در نظر گرفت. مقالات زیادی به میانگین هندسی وزن‌دار در عملگرها و نامساوی‌های نرمی آن پرداخته‌اند [1]، [2]، [6]، [7]، [9]، [12]، [13].

*نویسنده مسئول sheikhhosseini@uk.ac.ir

اگر T یک عملگر خطی کراندار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آن‌گاه برد عددی $W(T)$ عبارت است از تصویر دایره واحد تحت نگاشت $x \to \langle Tx, x\rangle$. به‌بیان دیگر

$$W(T) = \{\langle Tx, x\rangle : x \in \mathcal{H}, \| x \| = 1\}.$$

در [4] و [5] و مراجع آن‌ها بعضی ویژگی‌های $W(T)$ بیان شده است.

اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، شکل معمول نامساوی یانگ بیان می‌کندکه برای هر $v \in [0,1]$،

$$a^v b^{1-v} \le va + (1-v)b. \qquad (۱)$$

در [8] کیتانه و ماناسرا نامساوی (۱،۱) را به‌صورت (۲) بهبود بخشیده‌اند:

$$a^v b^{1-v} + r_0(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \le va + (1-v)b, \qquad (۲)$$

که در آن $r_0 = min\,\{v, 1-v\}$.

اخیرا نیز ماناسرا و کیتانه [11] نامساوی (۲) را به‌صورت (۳) برای $m = 1,2,\cdots$ تعمیم دادند.

$$(a^v b^{1-v})^m + r_0^m(a^{\frac{m}{2}} - b^{\frac{m}{2}})^2 \le (va + (1-v)b)^m, \qquad (۳)$$

هدف از این مقاله ارائه کران بالا برای نرم عملگری میانگین هندسی وزن‌دار برای دو عملگر است.

نتایج اصلی

برای به‌دست آوردن نتیجه اصلی به لم مشهور ۱ نیاز داریم:

لم ۱. (نامساوی توسعهٔ یافته هولدر- مک‌کارتی [10]) فرض کنید $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ یک عملگر مثبت باشد. در این صورت برای هر $x, y \in \mathcal{H}$ و هر عدد حقیقی مثبت γ، داریم

آ) اگر $\gamma \ge 1$، آن‌گاه $|\langle Ax, y\rangle|^\gamma \le \langle A^\gamma x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \langle A^\gamma y, y\rangle^{\frac{1}{2}} \|x\|^{\gamma-1}\|y\|^{\gamma-1}$،

ب) اگر $1 \ge \gamma > 0$، آن‌گاه $|\langle A^\gamma x, y\rangle| \le \langle Ax, x\rangle^{\frac{\gamma}{2}} \langle Ay, y\rangle^{\frac{\gamma}{2}} \|x\|^{1-\gamma}\|y\|^{1-\gamma}$.

قضیه ۲. فرض کنید $A, B, X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ به‌طوری‌که A و B دو عملگر مثبت وارون‌پذیر باشند. در این صورت برای هر $1 \le \alpha \le 0$،

$$\|X^*(A \,\#_\alpha\, B)Y\| \le \|X^*AX\|^{\frac{1-\alpha}{2}} \|Y^*AY\|^{\frac{1-\alpha}{2}} \|X^*BX\|^{\frac{\alpha}{2}} \|Y^*BY\|^{\frac{\alpha}{2}}.$$

برهان. برای هر دو بردار واحد $x, y \in \mathcal{H}$ با استفاده از لم ۱ قسمت ب داریم:

$$\begin{aligned}
|\langle X^*(A \,\#_\alpha\, B)Yy, x\rangle| &= |\langle (A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}} Yy, A^{\frac{1}{2}} Xx\rangle| \\
&\le \langle (A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}}) A^{\frac{1}{2}} Yy, A^{\frac{1}{2}} Yy\rangle^{\frac{\alpha}{2}} \langle (A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}}) A^{\frac{1}{2}} Xx, A^{\frac{1}{2}} Xx\rangle^{\frac{\alpha}{2}} \left\|A^{\frac{1}{2}} Yy\right\|^{1-\alpha} \left\|A^{\frac{1}{2}} Xx\right\|^{1-\alpha} \\
&= \langle Y^*BYy, y\rangle^{\frac{\alpha}{2}} \langle X^*BXx, x\rangle^{\frac{\alpha}{2}} \langle Y^*AYy, y\rangle^{\frac{1-\alpha}{2}} \langle X^*AXx, x\rangle^{\frac{1-\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

حال اگر از طرفین نسبت به همهٔ بردارهای واحد $\mathcal{H}$ سوپرمم بگیریم، نتیجه مورد نظر حاصل می شود.

با قرار دادن $X = Y = I$ در نامساوی قضیه ۲، نتیجهٔ ۳ به‌دست می‌آید:

نتیجه ۳. فرض کنید $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ دو عملگر مثبت وارون‌پذیر باشند. در این صورت برای هر $1 \le \alpha \le 0$،

$$\|A \,\#_\alpha\, B\| \le \|A\|^{(1-\alpha)} \|B\|^\alpha.$$

هم‌چنین با فرض $\alpha = \frac{1}{2}$ در نامساوی قضیه ۲، نتیجه می‌شود:

نتیجه ۴. فرض کنید $A, B, X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ به‌طوری‌که A و B دو عملگر مثبت وارون‌پذیر باشند. در این صورت

$$\|X^*(A \# B)Y\|^4 \leq \|X^*AX\|\|Y^*AY\|\|X^*BX\|\|Y^*BY\|.$$

به‌ازای $X = Y$، در نامساوی قضیهٔ ۲، داریم:

نتیجه ۵. اگر $A, B, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ به‌طوری‌که A و B دو عملگر مثبت وارون‌پذیر باشند، آن‌گاه به‌ازای هر $0 \leq \alpha \leq 1$،

$$\|X^*(A \#_\alpha B)X\| \leq \|X^*AX\|^{1-\alpha}\|X^*BX\|^{\alpha}. \qquad (۴)$$

همچنین شکل وارونه ای برای نامساوی (۴) می‌توان به‌دست آورد. برای این منظور، به عکس قضیهٔ هولدر- مک‌کارتی (قضیهٔ ۵) به‌صورت قضیهٔ ۶ نیاز داریم.

قضیهٔ ۶. فرض کنید A یک عملگر مثبت روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد به‌طوری‌که $0 \leq mI \leq A \leq MI$. در این صورت برای هر $0 < p < 1$ و $x \in \mathcal{H}$ داریم

$$\langle A^p x, x\rangle \geq K\left(\frac{M}{m}, p\right)\langle Ax, x\rangle^p \|x\|^{2-2p},$$

که در آن $K(h,p) = \frac{1}{h-1}.\frac{h^p-h}{p-1}(\frac{p-1}{h^p-h}.\frac{h^p-1}{p})^p$.

با روشی مشابه قضیهٔ ۲ و به‌کار بردن این قضیه، شکل وارونه‌ای برای نامساوی (۱) به‌صورت قضیهٔ ۷ حاصل می‌شود.

قضیه ۷. اگر A و B دو عملگر مثبت روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند و m و M دو عدد مثبت حقیقی باشند که $0 < mA \leq B \leq MA$، آن‌گاه برای هر عملگر دلخواه X و $0 \leq \alpha \leq 1$ داریم:

$$\|X^*(A \#_\alpha B)X\| \geq K\left(\frac{M}{m}, \alpha\right)\|X^*AX\|^{1-\alpha}\|X^*BX\|^{\alpha}.$$

در قضیهٔ ۸ تعمیمی از صورت عملگری نامساوی یانگ با استفاده از نرم عملگری داده می‌شود.

قضیهٔ ۸. فرض کنید $A, B, X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ به‌طوری‌که A و B دو عملگر مثبت وارون‌پذیر باشند. در این صورت برای هر $m = 1,2,\cdots$، هر $r \geq 1$ و هر $0 \leq \alpha \leq 1$،

$$\begin{aligned}\|X^*(A \#_\alpha B)Y\|^{rm} \leq &(\|\alpha(X^*BX)^r + (1-\alpha)(X^*AX)^r\|^m - \Omega(X))^{\frac{1}{2}}\\ &\times (\|\alpha(Y^*BY)^r + (1-\alpha)(Y^*AY)^r\|^m - \Omega(Y))^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

که در آن

$$\Omega(X) = \inf_{\|x\|=1}(\langle (X^*BX)^r x, x\rangle^{\frac{m}{2}} - \langle (X^*AX)^r x, x\rangle^{\frac{m}{2}})^2 . \min\{\alpha^m, (1-\alpha)^m\}.$$

برهان. بدون آن که به کلیت استدلال خللی وارد شود، فرض می کنیم $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$. به‌ترتیب با استفاده از لم ۱ قسمت‌های ب و الف و با نامساوی (۳)، برای هر بردار یکه $x, y \in \mathcal{H}$، داریم:

$$\begin{aligned}|\langle X^*(A \#_\alpha B)Yy, x\rangle^{2rm}| &= \left|\langle (A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}}Yy, A^{\frac{1}{2}}Xx\rangle^{2rm}\right|\\ &\leq \langle (A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}}) \quad A^{\frac{1}{2}}Xx, A^{\frac{1}{2}}Xx\rangle^{rm\alpha}\left\|A^{\frac{1}{2}}Xx\right\|^{2rm(1-\alpha)}\\ &\times \langle (A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}}) \quad A^{\frac{1}{2}}Yy, A^{\frac{1}{2}}Yy\rangle^{rm\alpha}\left\|A^{\frac{1}{2}}Yy\right\|^{2rm(1-\alpha)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle X^*AXx,x\rangle^{rm(1-\alpha)}\langle X^*BXx,x\rangle^{rm\alpha} \times \langle Y^*BYy,y\rangle^{rm\alpha}\langle Y^*AYy,y\rangle^{rm(1-\alpha)}\\
&\le (\langle (X^*AX)^r x,x\rangle^{1-\alpha}\langle (X^*BX)^r x,x\rangle^{\alpha})^m \times (\langle (Y^*BY)^r y,y\rangle^{\alpha}\langle (Y^*AY)^r y,y\rangle^{1-\alpha})^m\\
&\le ([\alpha\,\langle (X^*BX)^r x,x\rangle + (1-\alpha)\langle (X^*AX)^r x,x\rangle]^m\\
&\quad -\alpha^m(\langle (X^*BX)^r x,x\rangle^{\frac{m}{2}} - \langle (X^*AX)^r x,x\rangle^{\frac{m}{2}})^2)\\
&\quad \times ([\alpha\langle (Y^*BY)^r y,y\rangle + (1-\alpha)\langle (Y^*AY)^r y,y\rangle]^m\\
&\quad -\alpha^m(\langle (Y^*BY)^r y,y\rangle^{\frac{m}{2}} - \langle (Y^*AY)^r y,y\rangle^{\frac{m}{2}})^2)\\
&= [\langle [\alpha(X^*BX)^r + (1-\alpha)(X^*AX)^r]x,x\rangle^m\\
&\quad -\alpha^m(\langle (X^*BX)^r x,x\rangle^{\frac{m}{2}} - \langle (X^*AX)^r x,x\rangle^{\frac{m}{2}})^2]\\
&\quad \times [\langle [\alpha(Y^*BY)^r + (1-\alpha)(Y^*AY)^r]y,y\rangle^m\\
&\quad -\alpha^m(\langle (Y^*BY)^r y,y\rangle^{\frac{m}{2}} - \langle (Y^*AY)^r y,y\rangle^{\frac{m}{2}})^2].
\end{aligned}$$

حال با سوپرمم گرفتن از طرفین نامساوی نسبت به همهٔ بردارهای واحد $\mathcal{H}$، نتیجهٔ مورد نظر به‌دست می‌آید.

نتیجه ۹. فرض کنید $A,B,X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ به‌طوری‌که A و B دو عملگر مثبت وارون‌پذیر باشند. در این صورت برای هر $m = 1,2,\cdots$ و هر $r \ge 1$،

$$\|X^*(A\ \#_\alpha\ B)X\|^{rm} \le \|\alpha(X^*BX)^r + (1-\alpha)(X^*AX)^r\|^m - \Omega(X)$$

که در آن

$$\Omega(X) = \inf_{\|x\|=1}(\langle (X^*BX)^r x,x\rangle^{\frac{m}{2}} - \langle (X^*AX)^r x,x\rangle^{\frac{m}{2}})^2\,.\min\{\alpha^m,(1-\alpha)^m\}.$$

نتیجهٔ ۱۰. فرض کنید $A,B,X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ به‌طوری‌که A و B دو عملگر مثبت وارون‌پذیر باشند، $r \ge 1$ و $0 \le \alpha \le 1$. در این صورت

$$\|X^*(A\ \#_\alpha\ B)X\|^{r} \le \|\alpha(X^*BX)^r + (1-\alpha)(X^*AX)^r\| - \Omega(X)$$

که در آن

$$\Omega(X) = \inf_{\|x\|=1}\left(\sqrt{\langle (X^*BX)^r x,x\rangle} - \sqrt{\langle (X^*AX)^r x,x\rangle}\right)^2.\min\{\alpha,1-\alpha\}.$$

با قرار دادن $X = I$ داریم:

نتیجه ۱۱. فرض کنید $A,B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ دو عملگر مثبت وارون‌پذیر باشند و $0 \le \alpha \le 1$ در این صورت

$$\|A\ \#_\alpha\ B\| \le \|\alpha B + (1-\alpha)A\| - \Omega$$

که در آن

$$\Omega = \inf_{\|x\|=1}(\sqrt{\langle Bx,x\rangle} - \sqrt{\langle Ax,x\rangle})^2\,.\min\{\alpha,1-\alpha\}.$$

در گزارهٔ ۱۲ شرطی لازم و کافی برای آن که در نتیجه ۱۰، $\Omega(X) > 0$ ارائه می‌دهیم:

گزاره ۱۲. فرض کنید $A,B,X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ به‌طوری‌که A و B دو عملگر مثبت وارون‌پذیر باشند، $r \ge 1$، $\alpha \in [0,1]$ و

$$\Omega(X) = \inf_{\|x\|=1}(\sqrt{\langle (X^*BX)^r x,x\rangle} - \sqrt{\langle (X^*AX)^r x,x\rangle})^2\,.\min\{\alpha,1-\alpha\}.$$

در این‌صورت

$$\Omega(X) > 0 \Leftrightarrow 0 \notin \overline{W((X^*BX)^r - (X^*AX)^r)}.$$

برهان. از آن‌جاکه بزرگ‌ترین کران پایین یک مجموعه نقطه حدی آن نیز هست، بنا براین واضح است که $\Omega(X) = 0$ اگر و تنها اگر دنباله $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ موجود باشد که

$$\xi_n = (\sqrt{\langle (X^*BX)^r x_n, x_n\rangle} - \sqrt{\langle (X^*AX)^r x_n, x_n\rangle})^2$$

در آن x_nها بردارهایی یکه در $\mathcal{H}$ هستند و $\xi_n \to 0$. این معادل است با این‌که

$$\lim_{n\to\infty}\langle ((X^*BX)^r - (X^*AX)^r)x_n, x_n\rangle = 0.$$

یا به‌عبارت دیگر

$$0 \in \overline{W((X^*BX)^r - (X^*AX)^r)}.$$

در مثال ۱۳ نشان می‌دهیم $\Omega(X) > 0$.

مثال ۱۳. فرض کنیم $r = 1$، $X = I$، $A = diag(1,2)$ و $B = diag(6,7)$. در این صورت

$$W(B - A) = [5,6].$$

پس بنا به گزارهٔ ۱۲ داریم $\Omega(X) > 0$.

منابع

1. Ando T., Li C.-K., Mathias R., "Geometric means", Linear Algebra Appl., 385 (2004) 305-334.
2. Fujii J. I., Fujii M., Nakamura M., Pecaric J., Seo Y., "A reverse inequality for the weightedgeometric mean due to Lawson-Lim", Linear Algebra Appl., 427 (2007) 272-284.
3. Furuta T., "Operator inequalities associated with Hölder-McCarthy and Kantorovich inequalities", J. Inequal. Appl., 2 (1998) 137-148.
4. Gustafson K. E., Rao D. K. M, "Numerical Range: The Field of values of linear operators and matrices", Springer- Verlag, New York (1997).
5. Horn R. A., Johnson C. R., "Topics in Matrix Analysis", Cambridge Univ. Press, Cambridge (1991).
6. Izumino S., Nakamura N., "Geometric means of positive operators II", Sci. Math. Japan., 69 (2009) 35-44.
7. Kim S., Lim Y., "A converse inequality of higher order weighted arithmetic and geometric means of positive definite operators", Linear Algebra Appl., 426 (2007) 490-496.
8. Kittaneh F., Manasrah Y., "Improved Young and Heinz inequalities for matrices", J. Math. Anal. Appl., 361 (2010) 262-269.

9. Kubo F., Ando T., "Means of positive linear operators", Math. Ann., 246 (1980) 205-224.
10. Lin C.S., ChoY.J., "On Hölder-McCarthy-type inequalities with powers", J. Koren. Math. Soc., 39 (2002) 351-361.
11. Manasrah Y., Kittaneh F., "A generalization of two refined Young inequalities", Positivity, 19 (2015) 757-786.
12. Sheikhhosseini A., "A numerical radius version of the arithmetic-geometric mean of operators", Filomat, 30 (2016) 2139-2145.
13. Yamazaki T., "An extension of Kantorovich inequality to n-operators via the geometric mean by Ando-Li-Mathias", Linear Algebra Appl., 416 (2006) 688-695.