

## آنالیز انشعاب و دینامیک یک دستگاه دینامیکی از نوع لورنز

بهناز رحمانی، رضا خوش‌سیر\*، محمد شفیع دهاقین، ندا آهنجیده؛  
دانشگاه شهرکرد، دانشکده علوم ریاضی

دریافت ۹۴/۰۶/۰۴ پذیرش ۹۶/۰۷/۱۷

### چکیده

در این مقاله دستگاه دینامیکی پیوسته از نوع لورنز را در نظر می‌گیریم. رفتار دینامیکی این دستگاه از قبیل محاسبه نقاط انشعاب، انواع خم‌های انشعاب و محاسبه ضرایب فرم‌های نرمال متناظر با هر نقطه انشعاب را به‌طور تحلیلی و عددی محاسبه می‌کنیم. به‌خصوص شرایط کافی برای وجود انشعاب هوف و چنگال را بررسی و خاصیت زیر یا زبرجرانی بودن این انشعاب‌ها را به‌طور تحلیلی مشخص می‌کنیم. با استفاده از تکنیک شبیه‌سازی عددی نشان می‌دهیم که این دستگاه تحت شرایطی می‌تواند رفتار آشوب‌ناک داشته باشد. با استفاده از تکنیک امتداد عددی ابتدا خم‌های انشعاب محاسبه می‌شود و سپس تمام نقاط انشعاب هم‌بعد یک و هم‌بعد دو روی این خم‌ها محاسبه و ضرایب فرم نرمال آن‌ها تعیین می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** دستگاه تی، انشعاب هوف، انشعاب چنگال، فرم نرمال، ضریب اول لیاپونوف.

### مقدمه

در این مقاله دستگاه دینامیکی از نوع لورنز<sup>۱</sup> معرفی می‌شود که با وجود شباهت زیاد به دستگاه لورنز، پیچیدگی بیش‌تری نسبت به آن نشان می‌دهد [5]، [7]، [8]، [11]. این دستگاه کاربردهای زیادی در ارتباطات امن دارد [10]. ارتباطات امن باید اطمینان طرف‌های درگیر در یک رابطه را حاصل کند. به‌عبارت دیگر باید از کاربران مخرب که سعی در جا زدن به‌جای دیگر احزاب، در گفتگو را دارند، محافظت شود. بسیاری از الگوریتم‌های رمزنگاری مدرن از این حملات محافظت می‌کند [3]. این دستگاه را اولین بار یانگ<sup>۲</sup> معرفی کرد که به دستگاه تی معروف شد [8]. این دستگاه است از جنبه‌های مختلف بررسی شده است و دارای خواص پیچیده دینامیکی شامل انواع نقاط انشعاب از قبیل انشعاب چنگال، انشعاب هوف، مدارهای هموکلینیک و هتروکلینیک و نیز رفتارهای آشوبی [7]، [8]. در این مقاله تمرکز روی محاسبه عددی خم‌های انشعاب و دوره‌های حدی آن است به‌طوری که این خم‌ها در پژوهش‌های پیشین محاسبه نشده‌اند، که در ادامه مختصری از این روش را بیان می‌کنیم [1]. دستگاه دینامیکی زمان-پیوسته وابسته به پارامتر (۱) را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x, \alpha) \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

که در آن  $f$  یک تابع هموار وابسته به  $(x, \alpha)$  است. آنالیز انشعاب این دستگاه به بررسی تغییر خم نقاط تعادل و دوره‌های حدی تحت تغییر یک یا دو پارامتر و محاسبه ضرایب صورت‌های نرمال متناظر به هر نقطه انشعاب است.

امتداد عددی نقاط تعادل و دوره‌های حدی. نقاط تعادل دستگاه (۱) در رابطه زیر با  $n$  هم‌ارزه اسکالر صدق می‌کند که در آن  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  بردار متغیرهای حالت و  $\alpha \in \mathbb{R}^p$  بردار پارامترها است.

$$f(x, \alpha) = 0,$$

چنین دستگاهی به‌طور معمول یک خم یک بعدی در  $\mathbb{R}^{n+1}$  را تشکیل می‌دهد که آن را با  $M$  نشان می‌دهیم که یک خم نقاط تعادل وابسته به پارامتر را مشخص می‌کند. مسئله یافتن خم  $M$  یک حالت خاص از مسئله عمومی‌تر امتداد، به‌معنای به‌دست آوردن یک خم در  $\mathbb{R}^{n+1}$  تعریف شده با  $n$  هم‌ارزه:

$$F(y) = 0, F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

است. تعاریف و قضایای زیر را می‌توان در [6] یافت.

**تعریف ۱.** نقطه  $y_0 \in M$  را یک نقطه منظم گوئیم هرگاه  $\text{rank}(F_y(y_0)) = n$  باشد.

**قضیه ۱.** فرض کنید  $y_0$  یک نقطه منظم از  $F(y) = 0$  باشد. در این صورت در یک همسایگی  $y_0$ ، خم جواب یک بعدی یکتای  $y(s)$  به‌طوری که  $y(0) = y_0$  وجود دارد.

جواب عددی مسئله امتداد به‌معنای پیدا کردن یک دنباله از نقاط:

$$y_1, y_2, y_3, \dots$$

است به‌طوری که خم  $M$  را با دقت مورد نظر تخمین می‌زنند. نقطه اولیه  $y_0$  به اندازه کافی نزدیک به خم  $M$  (یا روی خم) است و از این نقطه دنباله مورد نظر تولید می‌شود. در حالت نقطه تعادل، این نقطه معمولاً یکی از نقاط تعادل دستگاه در نظر گرفته می‌شود.

**قضیه ۲ (خمینه مرکز):** فرض کنیم  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  یک میدان برداری در  $C^{k+1}$  ( $k \geq 1$ ) با  $f(0) = 0$  باشد ماتریس  $A = Df(0)$  را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم  $V^u, V^s$  و  $V^c$  به ترتیب زیرفضاهای پایدار، ناپایدار و مرکز باشند. در این صورت  $\delta > 0$  و یک مانیفولد مرکز موضعی  $\mathcal{M}$  با این خواص وجود دارد:

۱. یک تابع متعلق به  $C^k$  به صورت  $\Phi: V^c \rightarrow \mathbb{R}^n$  با  $\Phi(x_c) = x_c$  وجود دارد به‌طوری که:

$$\mathcal{M} = \{ \Phi(x_c) : x_c \in V^c, |x_c| < \delta \}$$

۲. خمینه  $\mathcal{M}$  به‌طور موضعی پایا است یعنی برای  $x \in \mathcal{M}$  و  $|t|$  کوچک داریم  $\tilde{x}(t, x) \in \mathcal{M}$ .

۳.  $\mathcal{M}$  در مبدا بر  $V^c$  مماس است.

۴. هر مدار کراندار سراسری که در یک همسایگی کوچک مناسبی از مبدا قرار داشته باشد به‌طور کامل در درون  $\mathcal{M}$  قرار می‌گیرد.

۵. بر هر مسیر داده شده به‌طوری که  $x(t) \rightarrow 0$  وقتی  $t \rightarrow +\infty$ ،  $\eta > 0$  و یک مسیر  $t \rightarrow y(t) \in \mathcal{M}$  روی خمینه مرکز وجود دارد به‌طوری که:

$$e^{\eta t} |x(t) - y(t)| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

**تعریف ۲.** انشعاب متناظر با ظهور یک جفت مقدار ویژه موهومی محض را انشعاب هوپف می‌نامند.

**تعریف ۳.** انشعاب چنگال زمانی رخ می‌دهد که مدار پایدار به ناپایدار تبدیل شود و در عوض یک جفت مدار پایدار ظاهر شود یا برعکس. این انشعاب دو نوع زیربحرانی و زیربحرانی دارد.

امتداد انشعاب‌های هم بعد ۱ نقاط تعادل. دستگاه دینامیکی زمان-پیوسته

$$\dot{x}=f(x, \alpha) \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^2$$

را در نظر بگیرید. از دستگاه هم‌ارزات

$$\begin{cases} f(x, \alpha) = 0 \\ \det(2A(x, \alpha) \odot I_n) = 0 \end{cases}$$

می‌توان برای امتداد انشعاب هوفیف استفاده کرد. دستگاه مذکور شامل  $n+1$  هم‌ارزه و  $n+2$  مجهول‌اند. این دستگاه‌های حداقل توسعه داده شده می‌نامیم زیرا بعد مسئله امتداد نقطه تعادل، یک واحد بیش‌تر است.

امتداد انشعاب‌های هم بعد ۱ یک دور حدی [2]. از گسسته‌سازی دستگاه

$$\begin{cases} x(t) - T f(x(t), \alpha) = 0, & t \in [0, 1] \\ x(0) - x(1) = 0, \\ \int_0^1 \langle x(t), \dot{x}_{old}(t) \rangle dt = 0, \end{cases} \quad (2)$$

که در آن  $x_{old}$  یک جواب دوره‌ای معلوم با دوره تناوب ۱ است، برای پیدا کردن و امتداد دور حدی مسئله (۱) استفاده می‌شود. هم‌ارزه تغییر اساسی

$$\dot{X} - T f_x(x(t), \alpha) X = 0, \quad (3)$$

و هم‌ارزه الحاقی

$$\dot{X} - T f_x^T(x(t), \alpha) X = 0, \quad (4)$$

را در نظر بگیریم. جواب ماتریسی اساسی هم‌ارزه (۳) را با  $\phi(t) = I_n$  به طوری که  $\phi(t) = I_n$  نشان می‌دهیم که در آن  $I_n$  ماتریس همانی است. در این صورت  $\phi(1)$  ماتریس تک مداری از جواب دوره‌ای است و همواره دارای یک مقدار ویژه ۱ است. بردار ویژه نظیر این مقدار ویژه را با  $q_0$  یعنی  $(\phi(1) - I_n)q_0 = 0$  در نظر می‌گیریم. به طور مشابه جواب ماتریس اساسی (۴) را با  $\psi$  نشان می‌دهیم به طوری که  $\psi(0) = I_n$  است، و بردار ویژه نظیر مقدار ویژه ۱ آن را با  $p_0$ ،  $p_0 = 0$  ( $\psi(0) = I_n$ ) نمایش می‌دهیم. این بردارها را می‌توان به صورت نرمال در نظر گرفت یعنی  $\langle p_0, p_0 \rangle = \langle q_0, q_0 \rangle = 1$ ، به طوری که  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ضرب داخلی اسکالر معمولی در  $\mathbb{R}^n$  است.

انشعاب فلد دوره‌های حدی [2]. به طور کلی نقطه حدی دورها متناظر با نقطه عطف خم‌های دوره‌های حدی است که

با اضافه کردن محدودیت  $G=0$  به رابطه (۲) مشخص می‌شود. مسئله مقدار مرزی<sup>۲</sup> یک نقطه دوره‌های حدی با استفاده

از دستگاه بسط داده شده مینیمم بدین صورت است:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - T f(x, \alpha) & = 0 \\ x(0) - x(1) & = 0 \\ \int_0^1 \langle x(t), \dot{x}_{old}(t) \rangle dt & = 0 \\ G[x, T, \alpha] & = 0 \end{cases}$$

تعریف می‌شود که در آن  $G$  تابع آزمون مشخص شده بدین صورت است:

1. Limit Point Cycle (LPC)  
2. Boundary Value Problem (BVP)

$$N_2 \begin{pmatrix} v \\ S \\ G \\ 1 \end{pmatrix}$$

که در این جا  $v$  یک تابع،  $S$  و  $G$  دو بردار هستند و نیز داریم:

$$N_2 = \begin{bmatrix} D-Tf_x(x(0), \alpha) & -f(x(0), \alpha) & w_{01} \\ \delta_1 - \delta_0 & 0 & w_{02} \\ \text{Int}_{f(x(0), \alpha)} & 0 & w_{03} \\ \text{Int}_{v_{01}} & v_{02} & 0 \end{bmatrix}$$

توابع مرزی  $v_{01}$ ،  $w_{01}$  و بردارهای  $w_{02}$  و اسکالرهای  $v_{02}$  و  $w_{03}$  به گونه‌ای انتخاب شدند که  $N_2$  نامنفرد باشد. در ماتریس فوق  $\text{Int}$  تابع جزء صحیح است.

### معرفی دستگاه از نوع لورنز و محاسبه نقاط تعادل آن

دستگاه از نوع لورنز یک دستگاه دینامیکی خودگردان سه‌بعدی بدین صورت است:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) \\ \dot{y} = (c-a)x - axz \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (5)$$

که در آن  $a$ ،  $b$  و  $c$  پارامترهای حقیقی‌اند و  $a \neq 0$ .

نتایج زیر که عموماً بدون اثبات در [3] آمده است با اثبات و جزئیات بیشتر، یادآوری می‌کنیم. در لم ۱ به بررسی نقاط تعادل دستگاه می‌پردازیم.

لم ۱. اگر  $b \neq 0$  و  $\frac{b}{a}(c-a) < 0$ ، آن‌گاه دستگاه (۵) تنها دارای یک نقطه تعادل  $O = (0, 0, 0)$  است. همچنین اگر

$\frac{b}{a}(c-a) > 0$ ، آن‌گاه این دستگاه دارای سه نقطه تعادل  $O = (0, 0, 0)$ ،  $E_1 = (x_0, y_0, z_0)$ ،

$E_2 = (-x_0, -y_0, z_0)$  است که در آن  $x_0 = y_0 = \sqrt{\frac{b}{a}(c-a)}$ ،  $z_0 = \frac{c-a}{a}$

اثبات. نقاط تعادل دستگاه (۵) عبارتند از جواب دستگاه زیر:

$$\begin{cases} a(y-x) = 0 \\ (c-a)x - axz = 0 \\ xy - bz = 0 \end{cases}$$

با ضرب طرفین رابطه دوم در  $b \neq 0$  و جای‌گذاری  $b = \frac{xy}{z}$  از هم‌ارزه سوم، در طرف راست رابطه داریم:

$$\frac{b}{a}(c-a)x = x^2y$$

از رابطه  $y = x$  داریم:

$$x[x^2 - \frac{b}{a}(c-a)] = 0$$

اگر  $\frac{b}{a}(c-a) < 0$  آن‌گاه  $x = 0$  و در نتیجه  $y = z = 0$  پس  $O = (0, 0, 0)$  یک نقطه تعادل است.

حال اگر  $\frac{b}{a}(c-a) > 0$  آن‌گاه دو نقطه تعادل دیگر بدین صورت هستند:

$$x = y = \pm \sqrt{\frac{b}{a}(c-a)}, z = \frac{c-a}{a}$$

لم ۲. آ) اگر  $a > 0$ ،  $b > 0$  و  $c < a$ ، آن گاه  $O = (0, 0, 0)$  به طور مجانبی پایدار است.

ب) اگر  $b < 0$  یا  $a < 0$  یا  $(c > a, a > 0)$ ، آن گاه  $O = (0, 0, 0)$  ناپایدار است.

اثبات. آ) با خطی سازی دستگاه (۵) حول نقطه  $O$  داریم:

$$J_0 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$$

چند جمله ای مشخصه متناظر با  $J_0$  بدین صورت به دست می آید:

$$f(\lambda) = -(\lambda + b)(\lambda^2 + a\lambda + a(a - c))$$

که دارای این ریشه ها است:

$$\lambda_1 = -b, \lambda_{2,3} = \frac{-a \pm \sqrt{4ac - 3a^2}}{2}$$

طبق فرض  $b > 0$ ، پس  $\lambda_1 < 0$ . برای بحث روی علامت قسمت حقیقی مقادیر ویژه  $\lambda_{2,3}$  حالات زیر را در نظر می گیریم:

۱) اگر  $4ac - 3a^2 < 0$ ، آنگاه  $\sqrt{4ac - 3a^2}$  به صورت مختلط در می آید. از این رو، قسمت حقیقی  $\lambda_{2,3}$ ،  $-a$  می شود که طبق فرض منفی است.

۲) اگر  $4ac - 3a^2 > 0$ ، آنگاه با توجه به  $c < a$  داریم:

$$a^2 < 4ac - 3a^2$$

یا به طور هم ارز

$$\sqrt{4ac - 3a^2} < |a| = a$$

به این ترتیب با توجه به

$$\sqrt{4ac - 3a^2} < a$$

نتیجه می شود  $\lambda_2 < 0$  و برای رابطه

$$-\sqrt{4ac - 3a^2} < a$$

نتیجه می شود  $\lambda_3 < 0$ .

ب) یادآوری می کنیم اگر یکی از مقادیر ویژه حاصل از خطی سازی در مبدأ مثبت باشد، آن گاه مبدأ نقطه تعادل ناپایدار می شود. با توجه به این نکته، چون طبق فرض  $b < 0$  پس  $\lambda_1 = -b > 0$ ، برای  $a < 0$ ، مجدداً به بررسی مثبت یا منفی بودن زیر رادیکال می پردازیم. اگر عبارت زیر رادیکال مثبت باشد و با توجه به منفی بودن  $a$ ، آن گاه  $\lambda_2 = \frac{-a + \sqrt{4ac - 3a^2}}{2}$  مثبت می شود و اگر عبارت زیر رادیکال منفی باشد، پس  $\lambda_2$  و  $\lambda_3$  دارای قسمت های حقیقی مثبت می شوند.

و برای  $a > 0$  و  $c > a$  داریم  $4ac - 3a^2 > a^2$  یا به طور هم ارز  $\sqrt{4ac - 3a^2} > |a| = a$ ، که در این صورت  $\lambda_2 > 0$

قضیه ۳.

$$a + b > 0, ab(c - a) > 0, b(2a^2 + bc - ac) > 0$$

آن‌گاه  $E_{1,2}$  به‌طور مجانبی پایدار می‌شوند.

اثبات. هم‌ارزه مشخصه ماتریس ژاکوبی

$$J_0 = \left[ \begin{array}{ccc} -a & a & 0 \\ 0 & 0 & -a\sqrt{\frac{b}{a}(c-a)} \\ \sqrt{\frac{b}{a}(c-a)} & \sqrt{\frac{b}{a}(c-a)} & -b \end{array} \right]$$

حول نقطه  $E_1(E_2)$  به‌صورت

$$f(\lambda) = \lambda^3 + (a+b)\lambda^2 + bc\lambda + 2ab(c-a)$$

است. اگر

$$A=a+b, B=bc, C=2ab(c-a)$$

آن‌گاه طبق معیار راث-هورویتس [4]، بخش حقیقی همه ریشه‌های هم‌ارزه مشخصه منفی است اگر و تنها اگر  $A > 0$ ،

$C > 0$  و  $AB - C > 0$ . بنا براین

$$a+b > 0, ab(c-a) > 0, b(2a^2+bc-ac) > 0 \quad (۶)$$

و اثبات کامل می‌شود.

با فرض  $a > b > 0$  و رابطه (۶) می‌توان نتیجه گرفت:

$$a > 0, b > 0, a < c < \frac{2a^2}{a-b}$$

با توجه به مثبت بودن همه ضرایب هم‌ارزه مشخصه حول  $E_{1,2}$  رابطه  $f(\lambda)$  برای هر  $\lambda > 0$  برقرار است. بنا براین  $E_{1,2}$

تنها در صورتی ناپایدار است که ریشه‌های  $f(\lambda)$  مزدوج مختلط باشند. فرض کنیم این ریشه‌ها  $\lambda_1 = +i\omega$  و  $\lambda_2 = +i\omega$

باشند که در آن  $\omega$  عددی حقیقی است. از آن‌جاکه

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -(a+b)$$

از این رو،  $\lambda_3 = -(a+b)$  در این صورت داریم

$$f(\lambda) = f(-(a+b)) = b(ac - bc - 2a^2) = 0$$

یعنی

$$c = c_0 = \frac{2a^2}{a-b}$$

از این رو انشعاب هوپف در نقاط  $E_{1,2}$  اتفاق می‌افتد. با توجه به متقارن بودن  $E_1$  و  $E_2$ ، کافی است پایداری را روی

نقطه  $E_1$  بررسی کنیم. با استفاده از تغییر متغیر

$$\begin{aligned} x_1 &= x - x_0, \\ y_1 &= y - y_0, \\ z_1 &= z - z_0 \end{aligned}$$

دستگاه (۵) به‌صورت (۷) تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = -ax_0 z_1 - ax_1 z_1 \\ \dot{z}_1 = y_0 x_1 + x_0 y_1 - bz_1 + x_1 y_1, \end{cases} \quad (7)$$

ماتریس ژاکوبی دستگاه (7) در مبدا عبارت است از:

$$J_0 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & 0 & -ax_0 \\ y_0 & x_0 & -b \end{bmatrix}$$

و هم‌ارز مشخصه متناظر، برابر است با:

$$f(\lambda) = \lambda^3 + (a+b)\lambda^2 + bc\lambda + 2ab(c-a) \quad (8)$$

در ادامه ثابت می‌کنیم که نقطه تعادل  $E_1$  پایداریش را  $c=c_0$  از دست می‌دهد.

### ضریب لیاپونوف

فرض کنید  $\mathbb{C}^n$  یک فضای مختلط  $n$  بعدی با حاصل ضرب داخلی  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$ ، برای بردارهای  $x = (x_1, \dots, x_n)$  و  $y = (y_1, \dots, y_n)$  باشد. اگر نرم را به صورت  $\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{1/2}$  معرفی کنیم، آن‌گاه  $\mathbb{C}^n$  یک فضای هیلبرت است. دستگاه خطی (9) را در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x} = Ax + F(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (9)$$

که  $F(x) = O(\|x\|^2)$  یک تابع یک‌نواخت است و به صورت

$$F(x) = \frac{1}{2} B(x, x) + \frac{1}{6} C(x, x, x) + O(\|x\|^2)$$

بسط داده می‌شود که در آن  $B(x, x)$  و  $C(x, x, x)$  به ترتیب توابع دو خطی و سه خطی هستند و به صورت

$$B_i(x, y) = \sum_{j, k=1}^n \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} x_j y_k,$$

$$C_i(x, y, z) = \sum_{j, k, l=1}^n \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_j y_k z_l$$

به دست می‌آیند. در رابطه (9)، ماتریس  $A$  دارای یک جفت مزدوج مختلط محض  $\omega > 0$ ،  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$  است. فرض کنید

$q \in \mathbb{C}^n$  بردار ویژه مختلط متناظر با مقدار ویژه  $\lambda_1$  باشد، بنا براین

$$Aq = i\omega q, \quad A\bar{q} = -i\omega \bar{q}.$$

هم‌چنین بردار ویژه الحاقی  $p \in \mathbb{C}^n$  نیز در رابطه

$$A^T p = i\omega p, \quad A^T \bar{p} = -i\omega \bar{p}$$

صدق کند.

اولین ضریب لیاپونوف از دستگاه (9) در مبدأ بدین صورت است:

$$I_1(0) = \frac{1}{2\omega} R[\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2 \langle p, B(q, A^{-1} B(q, \bar{q})) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega I - A)^{-1} B(q, q)) \rangle].$$

این ضریب برای مشخص کردن زیر یا زیر بحرانی بودن انشعاب هوفف در دستگاه‌های  $n-1$  بعدی ( $n \geq 2$ ) به کار می‌رود.

اگر  $I_1(0) > 0$  آن‌گاه انشعاب هوفف زیر بحرانی و اگر  $I_1(0) < 0$  آن‌گاه انشعاب هوفف زبر بحرانی است. در صورت

زیربهرانی بودن انشعاب هویف یک دور حدی پایدار از نقطه هویف منشعب می‌شود و در صورت زیربهرانی بودن انشعاب دور حدی منشعب ناپایدار خواهد بود.

### انشعاب هویف در دستگاه از نوع لورنز

#### انشعاب هویف با پارامتر انشعاب $c$

**قضیه ۴.** اگر  $c=c_0=\frac{2a^2}{a-b}$  و  $a \neq b$  آن‌گاه هم‌ارزه  $(\lambda)$  دارای ریشه منفی  $\lambda=-(a+b)$  و نیز دو ریشه موهومی محض  $\omega=\sqrt{\frac{2a^2b}{a-b}}$  و  $\lambda_{2,3}=\pm i\omega$  است، به طوری که

$$R \square R \left( \frac{d\lambda(c)}{dc} \Big|_{c=c_0, \lambda=i\omega} \right) \neq 0$$

به عبارت دیگر دستگاه  $(Y)$  در مبدأ یک انشعاب هویف دارد.

**اثبات.** اگر  $c=c_0$ ، آن‌گاه هم‌ارزه  $(\lambda)$  بدین صورت می‌شود:

$$(\lambda+a+b) \left( \lambda^2 + \frac{2a^2b}{a-b} \right) = 0$$

واضح است که ریشه‌های موهومی محض به صورت  $\lambda_{1,2}=\pm i\sqrt{\frac{2a^2b}{a-b}}$  و ریشه حقیقی آن  $\lambda_3=-(a+b)$  است. با مشتق‌گیری از رابطه بالا نسبت به  $c$  داریم:

$$\lambda'(c) = \frac{b(\lambda+2a)}{3\lambda^2+2(a+b)\lambda+bc}$$

که به این ترتیب

$$R(\lambda'(c_0)) = \frac{b(a-b)^2}{4a^2b+2(a-b)(a+b)^2} \neq 0.$$

بنا بر این اگر  $c=c_0$ ، آن‌گاه دستگاه  $(Y)$  انشعاب هویف دارد.

حال ضریب اول لیاپونوف را برای دستگاه  $(Y)$  حساب می‌کنیم. با توجه به این که  $X_0=Y_0$  ماتریس ژاکوبی دستگاه  $(Y)$  در مبدأ عبارت است از:

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & 0 & -ax_0 \\ y_0 & x_0 & -b \end{bmatrix}.$$

می‌توان بردارهای  $q$  و  $p$  متناظر با  $A$  را بدین صورت به دست آورد:

$$q = \begin{bmatrix} \frac{a^2x_0}{\omega} \\ \frac{\omega+ia}{\omega^2+a^2} \\ \frac{iax_0}{\omega} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} \frac{x_0}{\omega^2+a^2} \\ \frac{a+i\omega}{\omega^2+a^2} \\ \frac{-b}{ax_0} + i\frac{2ax_0}{(a+b)\omega} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

که بردارهای  $p$  و  $q$  در  $Aq=i\omega q$  و  $A^T q = -i\omega q$  صدق می‌کنند. برای دستگاه  $(Y)$  توابع دوخطی و سه خطی به صورت

$$B(X, Y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -ax_1y_3 - ax_3y_1 \\ x_1y_4 + x_2y_1 \end{bmatrix} \quad (10)$$



$$C(X, Y, Z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

هستند که در آن‌ها  $X=(x_1, x_2, x_3)$  و  $Y=(y_1, y_2, y_3)$ . بر طبق روابط (۱۰) و (۱۱) داریم:

$$B(q, q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2a^3 x_0 (\omega + ia)}{\omega(\omega^2 + a^2)} \\ \frac{2ia^3 x_0^2 (\omega + ia)}{\omega^2(\omega^2 + a^2)} \end{bmatrix}, B(q, \bar{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2a^3 x_0}{\omega^2 + a^2} \\ \frac{2a^4 x_0^2}{\omega^2(\omega^2 + a^2)} \end{bmatrix}.$$

ماتریس وارون  $A$  بدین صورت است:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2} \frac{b}{ax_0^2} & \frac{1}{2x_0} \\ \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2} \frac{b}{ax_0^2} & \frac{1}{2x_0} \\ 0 & -\frac{1}{ax_0} & 0 \end{bmatrix}$$

که با جای گذاری  $s = A^{-1}B(q, \bar{q})$

$$B(q, s) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a^3(3a^2 x_0^2 \omega^2 + 2ia^3 x_0^2 \omega + \omega^4 b + \omega^2 ba^2 + x_0^2 a^4)}{\omega^2(\omega^2 + a^2)^2 x_0} \\ \frac{a^3(\omega^2 b + x_0^2 a^2)(\omega a + 2ia^2 + i\omega^2)}{\omega^3(\omega^2 + a^2)^2} \end{bmatrix}$$

به دست می‌آید. بنا براین

$$\langle p, B(q, s) \rangle = \frac{-2ba^2(3a^2 x_0^2 \omega^2 + \omega^4 b + \omega^2 ba^2 + x_0^2 a^4)}{x_0 \omega^2 x_0 (\omega^2 + a^2)^2} + \frac{8a^7 x_0^3}{(a+b)} - \frac{2a^4(\omega^2 b + x_0^2 a^2)}{\omega^2(\omega^2 + a^2)^2} + i \left( \frac{-\frac{4a^4 x_0(3a^2 x_0^2 \omega^2 + \omega^4 b + \omega^2 ba^2 + x_0^2 a^4)}{\omega(a+b)} - 4ba^5 x_0 \omega}{\omega^2(\omega^2 + a^2)^2} - \frac{2a^3(\omega^2 b + x_0^2 a^2)(2a^2 + \omega^2)}{\omega^3(\omega^2 + a^2)^2} \right) \quad (12)$$

با قراردادن  $s' = (2i\omega I - A)^{-1}B(q, q)$  در  $B(\bar{q}, s')$  رابطه

$$B(\bar{q}, s') = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a^5 x_0 (\omega + ia)(-7iax_0^2 \omega^2 - 10a^2 x_0^2 \omega + 3ia^3 x_0^2 - 2i\omega^4 - 2i\omega^2 a^2 - \omega^3 b - \omega ba^2)}{\omega^2(\omega^2 + a^2)^2 (x_0^2 a^2 - 4i\omega^3 - 2\omega^2 b + i\omega a x_0^2 - 2a\omega^2 + ia\omega b)} \\ \frac{a^5 x_0^2 (\omega + ia)(2i\omega^2 + \omega b + ix_0^2 a)(-3\omega a - i\omega^2 + 2ia^2)}{\omega^3(\omega^2 + a^2)^2 (x_0^2 a^2 - 4i\omega^3 - 2\omega^2 b + i\omega a x_0^2 - 2a\omega^2 + ia\omega b)} \end{bmatrix}$$

را به دست می‌آوریم. در این صورت  $\langle p, B(\bar{q}, s') \rangle$  به صورت (۱۳) به دست می‌آید:

$$\langle p, B(\bar{q}, s') \rangle = \frac{1}{\omega^3(\omega^2 + a^2)^2 (x_0^2 a^2 - 4i\omega^3 - 2\omega^2 b + i\omega a x_0^2 - 2a\omega^2 + ia\omega b)} \times \left[ \left( \frac{b}{ax_0} + \frac{2iax_0}{\omega(a+b)} \right) a^5 \omega x_0 (\omega + ia)(-7iax_0^2 \omega^2 - 10a^2 x_0^2 \omega + 3ia^3 x_0^2 - 2i\omega^4 - 2i\omega^2 a^2 - \omega^3 b - \omega ba^2) + a^5 x_0^2 (\omega + ia)(2i\omega^2 + \omega b + ia x_0^2 a)(-i\omega^2 - 3\omega a + 2ia^2) \right] \quad (13)$$

اولین ضریب لیاپونوف را با جای‌گذاری (۱۱)، (۱۲) و (۱۳) در رابطه

$$I_1(0) = \frac{1}{2\omega} R[\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2 \langle p, B(q, s) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, s') \rangle]$$

و در نهایت با جای‌گذاری  $\omega = \sqrt{\frac{2ba^2}{a-b}}$  و  $x_0 = \sqrt{\frac{b(a+b)}{a-b}}$  در آن داریم:

$$I_1(0) = \frac{1}{6} \frac{\sqrt{2}(a-b)^2 (23a^3 - 121ba^2 + 13b^2a + 13b^3)b}{\sqrt{\frac{ba^2}{(a-b)}} (a^3 + 9ba^2 - b^2a - b^3)(b+a)^2} \quad (14)$$

با توجه به مقدار  $I_1(0)$  به‌دست آمده در (۱۴) لم ۳ را داریم:

لم ۳. اگر  $\frac{a}{b} \in (5/13, +\infty)$ ، آن‌گاه انشعاب هویف در مبدأ زیر بحرانی است.

اثبات. با توجه به این‌که  $\frac{a}{b} > 1$  و با تعیین علامت  $I_1(0)$  می‌توان نتیجه گرفت که اگر  $\frac{a}{b} \in (5/13, +\infty)$  آن‌گاه  $I_1(0) > 0$  و بنابراین انشعاب هویف در مبدأ زیر بحرانی است.

### انشعاب هویف با پارامتر انشعاب a

در بخش قبل C را به‌عنوان پارامتر در نظر گرفتیم، در ادامه a را به‌عنوان پارامتر انشعاب در نظر می‌گیریم [9]. با

استفاده از

$$f(\lambda_3) = f(-(a+b)) = b(ac - bc - 2a^2) = 0$$

رابطه

$$a = a_s = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 8bc}}{4}$$

به‌دست می‌آید. از رابطه (۸) اگر  $c \neq 8b$  آن‌گاه

$$R \left( \frac{d\lambda(a)}{da} \Big|_{a=a_s, \lambda=i\sqrt{bc}} \right) = R \left( \frac{bc - 4ab}{2bc - 2i\sqrt{bc}(a+b)} \right) = \frac{bc - 4ab}{2bc + 2(a+b)^2} \neq 0.$$

با استفاده از تغییر متغیر  $(x, y, z) \mapsto (X_1, Y_1, Z_1)$

$$x = X_1 + x_0, \quad y = Y_1 + x_0, \quad z = Z_1 + \frac{c}{a} + 1$$

دستگاه (۵) به‌صورت

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = a(Y_1 - X_1) \\ \dot{Y}_1 = -ax_0 Z_1 - aX_1 Z_1 \\ \dot{Z}_1 = x_0(X_1 + Y_1) - bZ_1 + X_1 Y_1 \end{cases}$$

یا

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{Y}_1 \\ \dot{Z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & 0 & -ax_0 \\ x_0 & x_0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -aX_1 Z_1 \\ X_1 Y_1 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

در می‌آید. مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبی

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & 0 & -ax_0 \\ x_0 & x_0 & -b \end{bmatrix}$$

عبارتنداز  $\lambda_1 = -a-b < 0$  و  $\lambda_{2,3} = \pm i\omega = \pm\sqrt{bc}$  که در آن  $c > 0$ ،  $b > 0$  و بردارهای ویژه متناظر برابرند با

$$v_1 = \left(1, \frac{-c+2a}{c}, \frac{-2}{c}\sqrt{c-2a-b}\right)$$

$$v_2 = \left(-\frac{a}{\omega}qx_0 + iqx_0, -\frac{a}{\omega}x_0, i\right)$$

$$v_3 = \left(-\frac{a}{\omega}qx_0 - iqx_0, -\frac{a}{\omega}x_0, -i\right)$$

که در آن  $q = \frac{a^2}{\omega^2+a^2}$ . با استفاده از بردارهای

$$v'_2 = \frac{v_2+v_3}{2} = \left(-\frac{a}{\omega}qx_0, \frac{-a}{\omega}x_0, 0\right), v'_3 = \frac{v_2-v_3}{2i} = (qx_0, 0, 1)$$

و

$$v_1 = \left(1, \frac{-c+2a}{c}, \frac{-2}{c}\sqrt{c-2a-b}\right)$$

تبدیل

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

را که در آن

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a}{\omega}qx_0 & qx_0 \\ \frac{-c+2a}{c} & -\frac{a}{\omega}x_0 & 0 \\ \frac{-2}{c}\sqrt{c-2a-b} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اعمال می‌کنیم. دستگاه بالا به‌طور هم‌ارز به‌صورت

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

نوشته می‌شود که در آن

$$P^{-1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} c & -qc & -qx_0c \\ \frac{-c+2a}{ax_0}\omega & -\frac{c+2\sqrt{c-2a-b}qx_0}{ax_0}\omega & \frac{c-2a}{a}q\omega \\ -2\sqrt{c-2a-b} & -2q\sqrt{c-2a-b} & c+qc-2qa \end{bmatrix}$$

و  $d = c+qc-2qa+2\sqrt{c-2a-b}qx_0$  آن‌گاه رابطه (۱۵) به

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = P^{-1}JP \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -aX_1Z_1 \\ X_1Z_1 \end{bmatrix}$$

یا به‌طور هم‌ارز

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a\frac{-c+2a}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \quad (16)$$

تبدیل می‌شود که در آن

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -a(X - \frac{a}{\omega}qx_0Y + qx_0Z)(Z - \frac{2}{c}\sqrt{c-2a-bX}) \\ (X - \frac{a}{\omega}qx_0Y + qx_0Z)(\frac{-c+2a}{c}X - \frac{a}{\omega}x_0Y) \end{bmatrix}$$

می‌توان نشان داد که  $g_1, g_2$  و  $g_3$  به صورت

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{d}qca \left(X - \frac{a}{\omega}qx_0Y + qx_0Z\right) \left(\frac{-2}{c}\sqrt{c-2a-bX} + Z\right) \\ &\quad - \frac{1}{d}qx_0c \left(aX - \frac{a}{\omega}qx_0Y + qx_0Z\right) \left(\frac{-c+2a}{c}X - \frac{a}{\omega}x_0Y\right) \\ g_2 &= \frac{\omega}{d} \frac{c+2\sqrt{c-2a-b}qx_0}{x_0} \left(X - \frac{a}{\omega}qx_0Y + qx_0Z\right) \left(\frac{-2}{c}\sqrt{c-2a-bX} + Z\right) \\ &\quad - \frac{q\omega}{ad}(c-2a) \left(aX - \frac{a}{\omega}qx_0Y + qx_0Z\right) \left(\frac{-c+2a}{c}X - \frac{a}{\omega}x_0Y\right) \\ g_3 &= \frac{2aq}{d}\sqrt{c-2a-b} \left(X - \frac{a}{\omega}qx_0Y + qx_0Z\right) \left(\frac{-2}{c}\sqrt{c-2a-bX} + Z\right) \\ &\quad - \frac{1}{d}(c+qc-2aq) \left(aX - \frac{a}{\omega}qx_0Y + qx_0Z\right) \left(\frac{-c+2a}{c}X - \frac{a}{\omega}x_0Y\right). \end{aligned}$$

هستند. حال خمینه مرکز

$$X=h(Y,Z)=KY^2+BYZ+CZ^2+\dots, \tag{17}$$

را در مبدأ در نظر بگیرید. با جای‌گذاری (۱۷) در (۱۶) و در نظر گرفتن این مشتق

$$\dot{X}=2KY\dot{Y}+B\dot{Y}Z+BY\dot{Z}+2CZ\dot{Z}+\dots,$$

از (۱۷) رابطه (۱۸) به دست می‌آید:

$$\dot{X}=BZ^2\omega-BY^2\omega-2C\omega YZ+2K\omega ZY+\dots, \tag{18}$$

از طرف دیگر، از (۱۶) داریم:

$$\dot{X}=\alpha_1 Y^2+\alpha_2 YZ+\alpha_3 Z^2+\dots \tag{19}$$

که در آن  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  و  $\alpha_3$  بدین صورت هستند:

$$\alpha_1 = -2\alpha K + 2K \frac{a^2}{c} - \frac{a^2}{d\omega^2} q^2 x_0^3 c$$

$$\alpha_2 = \frac{a}{\omega d} q^2 x_0^3 c - \frac{1}{\omega d} q^2 c a^2 x_0 - 2aB + 2 \frac{a^2 B}{c}$$

$$\alpha_3 = 2 \frac{a^2}{c} C + \frac{1}{d} q^2 c a x_0 - 2aC$$

در این صورت با مقایسه روابط (۱۸) و (۱۹) می‌توان ضرایب  $YZ, Y^2$  و  $Z^2$  را بدین صورت به دست آورد:

$$Y^2 : -\omega B = -2\alpha K + 2K \frac{a^2}{c} - \frac{a^2}{d\omega^2} q^2 x_0^3 c$$

$$YZ : 2\omega K - 2C\omega = \frac{a}{d\omega} q^2 x_0^3 c - \frac{a^2}{d\omega} q^2 x_0 c - 2aB + 2B \frac{a^2}{c}$$

$$Z^2 : B\omega = 2 \frac{a^2 C}{c} + \frac{1}{d} q^2 c a x_0 - 2aC$$

که در آن

$$K = \frac{-q^2 c^2 x_0 (-\omega^2 ca^3 + \omega^2 c^2 a^2 - \omega^4 c^2 + \omega^2 c x_0^2 a^2 - 4x_0^2 a^4 c + 2x_0^2 a^3 c^2 + 2x_0^2 a^5)}{4d\omega^2(c-a)(\omega^2 c^2 - 2ca^3 - c^2 a^2 + a^4)},$$

$$B = \frac{aq^2 x_0 c^2 (2x_0^2 ca + a^3 - ca^2 + \omega^2 c - x_0^2 a^2)}{2\omega d(\omega^2 c^2 - 2ca^3 - c^2 a^2 + a^4)},$$

$$C = \frac{-q^2 c^2 x_0 (2x_0^2 c^2 a + 5ca^3 - 3c^2 a^2 - \omega^2 c^2 - cx_0^2 a^2 - 2a^4)}{4d(c-a)(\omega^2 c^2 - 2ca^3 - c^2 a^2 + a^4)}.$$

بنا براین دستگاه (۱۶) به خمینه مرکز

$$\begin{pmatrix} \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g^2(Y,Z) \\ g^3(Y,Z) \end{pmatrix},$$

کاهش می‌یابد که در آن

$$g^2(Y,Z) = g_2(h(Y,Z), Y, Z), \quad g^3(Y,Z) = g_3(h(Y,Z), Y, Z).$$

عبارت A نیز بدین صورت به دست می‌آید:

$$A = -\frac{1}{8} x_0 caqC + \frac{1}{4d} x_0 a^2 qC - \frac{1}{4d} x_0 cq^2 C + \frac{1}{d} aCq\sqrt{c-2a-b} + \frac{x_0}{dc} aCq^2 b$$

$$- \frac{1}{8d} cKqx_0 - \frac{1}{4d\omega} a^2 Bqx_0 + \frac{1}{8} caBq^2 x_0 + \frac{1}{4d\omega} a^3 Bqx_0 - \frac{1}{2d\omega c} q^2 a^2 Bbx_0$$

$$- \frac{1}{2dc\omega} q^2 a^3 Bx_0 - \frac{1}{8d\omega} ca^2 Bx_0 - \frac{1}{8d\omega} ca^2 Bqx_0 - \frac{3C}{8D} cqx_0 + \frac{3C}{4d} aqx_0$$

$$- \frac{1}{8d^2\omega^4} c^2 q^4 x_0^4 a^3 - \frac{1}{2d^2\omega^4} q^4 a^5 x_0^4 - \frac{q^4 a^5 x_0^3}{2d^2\omega^4} \sqrt{c-2a-b} + \frac{cq^4 a^4 x_0^3}{4d^2\omega^4} \sqrt{c-2a-b}$$

$$+ \frac{cq^3 a^4 x_0^3}{4d^2\omega^4} \sqrt{c-2a-b} + \frac{1}{2d^2\omega^2} cq^4 a^3 x_0^2 - \frac{1}{d^2\omega^2} q^4 a^4 x_0^2 - \frac{1}{2d^2\omega^2} q^4 a^3 x_0^2 b$$

$$+ \frac{1}{2d^2} cq^4 ax_0^2 - \frac{1}{d^2} q^4 a^2 x_0^2 - \frac{1}{2d^2} q^4 ax_0^2 b - \frac{1}{8d^2\omega^2} c^2 q^3 a^2 x_0^2 + \frac{1}{4d^2\omega^2} cq^3 a^3 x_0^2$$

$$+ \frac{cq^3 a^4 x_0^3}{4d^2\omega^4} \sqrt{c-2a-b} + \frac{1}{2d^2\omega^2} cq^4 a^3 x_0^2 - \frac{1}{d^2\omega^2} q^4 a^4 x_0^2 - \frac{1}{2d^2\omega^2} q^4 a^3 x_0^2 b$$

$$+ \frac{1}{2d^2} cq^4 ax_0^2 - \frac{1}{d^2} q^4 a^2 x_0^2 - \frac{1}{2d^2} q^4 ax_0^2 b - \frac{1}{8d^2\omega^2} c^2 q^3 a^2 x_0^2 + \frac{1}{4d^2\omega^2} cq^3 a^3 x_0^2$$

$$- \frac{1}{8d^2} c^2 q^2 a - \frac{1}{8d^2\omega^2} c^2 q^4 ax_0^2 + \frac{1}{2d^2\omega^2} cq^4 a^2 x_0^4 - \frac{cq^4 x_0^3}{4d^2} \sqrt{c-2a-b} - \frac{1}{8d^2} c^2 q^3 x_0^2$$

$$- \frac{1}{2d^2\omega^2} q^4 a^3 x_0^4 + \frac{aq^4 x_0^3}{2d^2} \sqrt{c-2a-b} + \frac{1}{4d^2} q^3 cax_0^2 + \frac{1}{2d^2\omega^2} cq^4 a^4 x_0^4$$

$$+ \frac{ca^2 q^3 x_0^3}{4d^2\omega^2} \sqrt{c-2a-b} + \frac{1}{8d^2\omega^2} c^2 q^2 a^3 x_0^4 + \frac{Kaq}{d} \sqrt{c-2a-b}$$

$$+ \frac{1}{8dx_0} c\omega B + \frac{1}{dc} x_0 q^2 a^2 C + \frac{1}{8da} cq^2 x_0 \omega B - \frac{K}{dc} q^2 a^2 x_0 - \frac{3K}{8d} cqax_0$$

$$+ \frac{3K}{4d} qa^2 x_0 + \frac{K}{4d} cq^2 x_0 + \frac{1}{2d} q^2 ax_0 \omega B + \frac{1}{2dc} q^2 bx_0 \omega b + \frac{K}{4d} qax_0 + \frac{1}{8d\omega} cqax_0 B.$$

بنا براین قضیه ۵ برقرار است.

**قضیه ۵.** اگر  $a = a_s = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 8bc}}{4}$  و  $c \neq 8b$ ، آن‌گاه هم‌ارز (λ) دارای یک ریشه منفی  $\lambda_1 = -a - b < 0$  و با دو ریشه موهومی

محض  $\lambda_{2,3} = \pm i\omega = \pm \sqrt{bc}$  است به طوری که

$$R := R \left( \frac{d\lambda(a)}{da} \Big|_{a=a_s, \lambda=i\sqrt{bc}} \right) \neq 0.$$

در نتیجه اگر  $A \neq 0$ ، نقطه تعادل  $E_1$  از دستگاه از نوع لورنز یک انشعاب هوفیف دارد. به علاوه مدارهای متناوب منشعب

شده از نقطه تعادل  $E_1$  برای  $a$ ها در همسایگی  $a_s$  پایدارند اگر  $A < 0$  و ناپایدارند اگر  $A > 0$ .

### آنالیز عددی انشعاب دستگاه از نوع لورنز

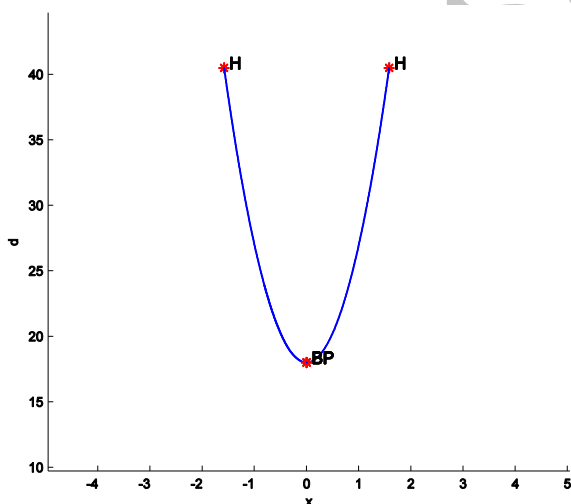
در این بخش با استفاده از تکنیک امتداد عددی [1]. خم‌های مختلف انشعاب را به همراه ضرایب فرم نرمال آن‌ها برای مجموعه مختلف از پارامترهای دستگاه (۵) محاسبه می‌کنیم. ابتدا نقطه تعادل  $E_1$  را در نظر می‌گیریم. برای این منظور پارامترهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  را طوری انتخاب می‌کنیم که با توجه به لم و قضیه بیان شده در انشعاب هوپف با پارامتر انشعاب  $c$  نقطه تعادل متناظر ناپایدار باشد. سپس با تغییر پارامترها، پایداری این نقطه تعادل را بررسی می‌کنیم. بنابراین با توجه به موارد بیان شده داریم:

$$a=18, b=2, c=40.5$$

برای این مقادیر نقطه تعادل  $E_1$  عبارت است از:

$$E_1 = \left( \sqrt{\frac{b}{a}(c-a)}, \sqrt{\frac{b}{a}(c-a)}, \frac{c-a}{a} \right) = (1.58, 1.58, 1.25).$$

حال خم نقطه ثابت با شروع از  $E_1$  و پارامتر آزاد  $c$  را با استفاده از روش امتداد عددی محاسبه می‌کنیم.



شکل ۱. انشعاب هوپف از نوع لورنز با پارامتر  $c$

با قرار دادن  $a=18$ ،  $b=2$  و  $c=40.5$  انشعاب هوپف را در شکل ۱ و دایره‌های حدی منشعب شده از آن، در شکل ۲ دیده می‌شود. هم‌زمان با رسم خم نقاط انشعاب به همراه ضرایب صورت نرمال متناظر بدین صورت محاسبه می‌شود:

label = H , x = ( 1.581139 1.581139 1.250000 40.500000 )

First Lyapunov coefficient = 1.034367e-001

tangent vector to first point found

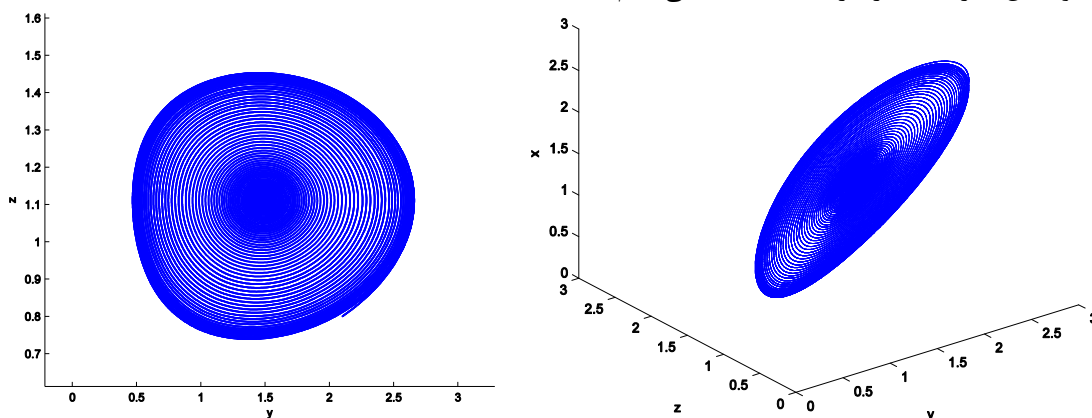
label = BP, x = ( 0.000000 0.000000 -0.000000 18.000000 )

label = H , x = ( -1.581139 -1.581139 1.250000 40.500000 )

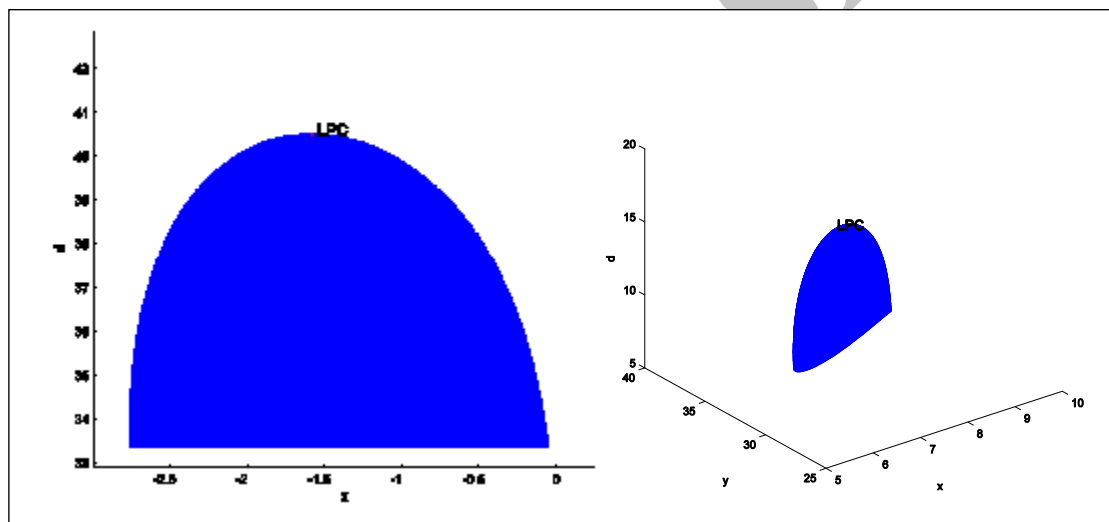
First Lyapunov coefficient = 1.034367e-001

در نقطه  $x$  با برچسب هوپف (H) سه مؤلفه اول به ترتیب مقادیر  $x$ ،  $y$ ،  $z$  و مؤلفه آخر مقدار پارامتر  $c$  در نقطه انشعاب را مشخص می‌کند. اولین ضریب لیاپونوف متناظر با  $H$  مثبت است پس نقطه انشعاب زیر بحرانی است که به

معنی ناپایدار بودن دایره حدی منشعب شده حول نقطه انشعاب  $X$  است و نقطه تعادل اولیه بعد از انشعاب هویف پایدار می‌شود. این دایره حدی را در ادامه محاسبه می‌کنیم.



شکل ۲. تصاویر ۲-بعدی و ۳-بعدی با شروع از نقطه‌ای درون دایره حدی و با پارامترهای  $a=18$ ,  $b=2$  و  $c=40.5$



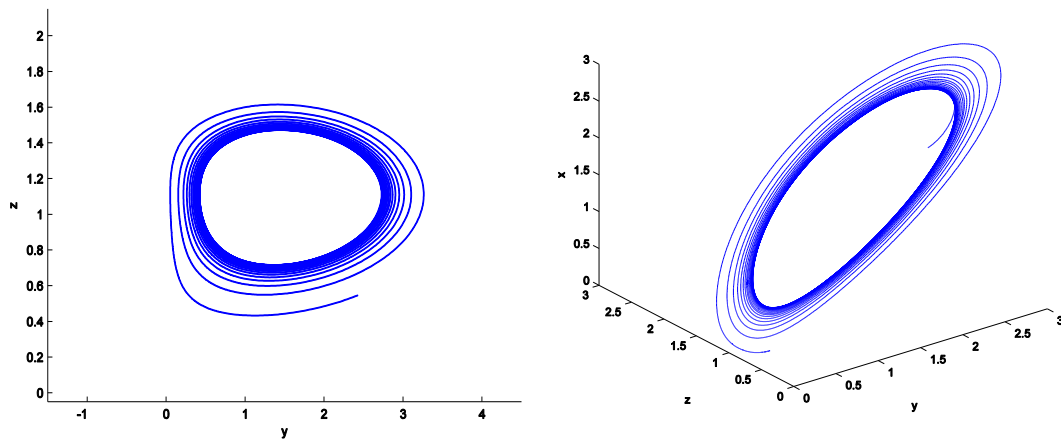
شکل ۳. خانواده‌ای از دایره‌های منشعب شده به ازای پارامترهای  $a=18$ ,  $b=2$  و  $c=40.5$

یک خانواده از دوره‌های حدی بیان شده در مقدمه که در شکل ۳ نمایش داده شده، در مقدار پارامتر  $c=40.5$  تولید می‌شود. برای نقطه LPC به دست آمده، این محاسبات متناظر را داریم:

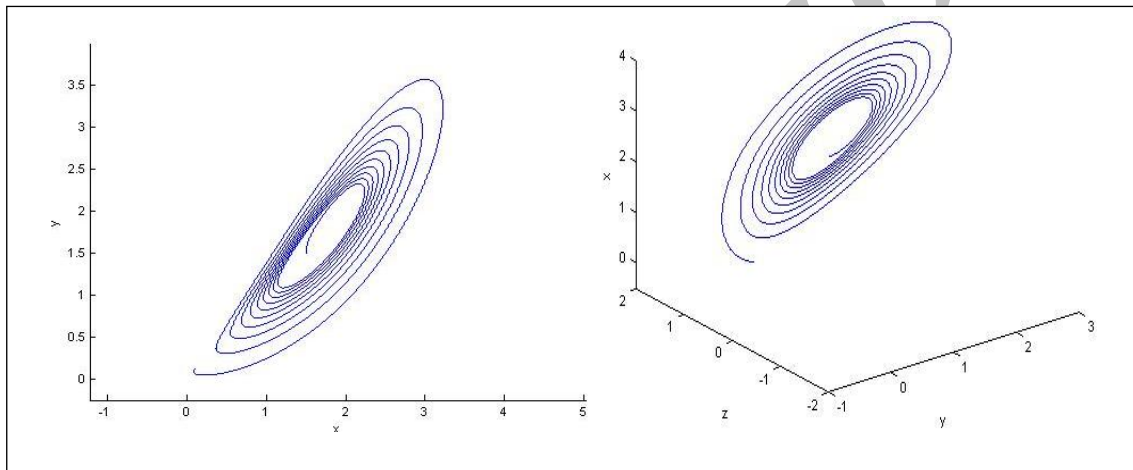
Limit point cycle (period = 6.981317e-001, parameter = 4.050000e+001)

Normal form coefficient = 9.145341e-001

در ادامه ابتدا  $c=38$  را در نظر می‌گیریم، که این حالت قبل از انشعاب هویف است. با نقطه  $(2/1, 2/1, 0/8)$  شروع کرده، چنان‌که در شکل ۲ دیده می‌شود مدار از دایره حدی دور شد و به نقطه تعادل جذب می‌شود. در این حالت اگر نقطه‌ای در خارج از دایره حدی در نظر بگیریم هم‌چنان که در شکل ۴ مشخص است از دایره حدی دور می‌شود. حال قرار می‌دهیم  $c=44$  که پس از انشعاب هویف است. در این حالت از نقطه تعادل دور می‌شود، که توصیف انشعاب هویف از نوع زیربحرانی است.

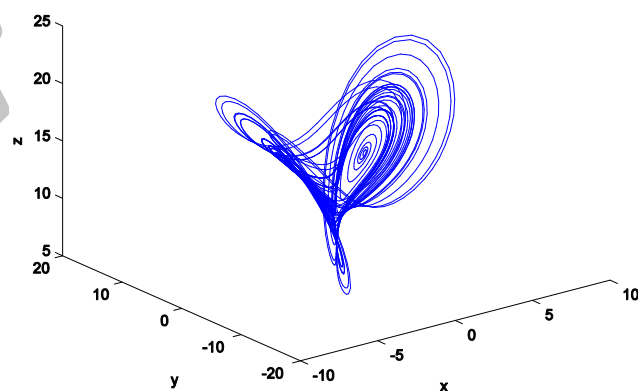


شکل ۴. تصاویر ۲-بعدی و ۳-بعدی با شروع از نقطه‌ای بیرون از دایره حدی و با پارامترهای  $a=18$ ،  $b=2$  و  $c=38$



شکل ۵. بعد از انشعاب هیف با پارامترهای  $a=18$ ،  $b=2$  و  $c=38$

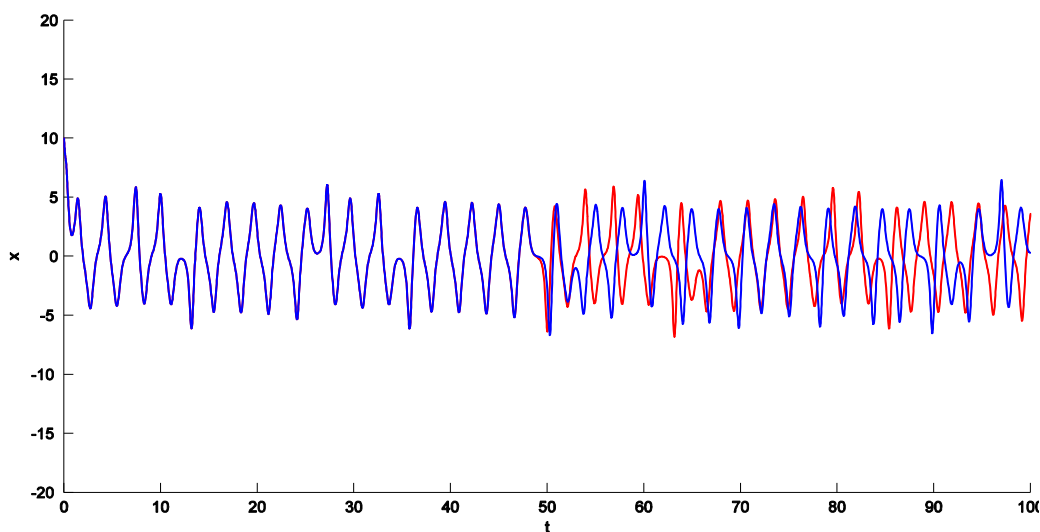
در حالت خاص  $a=2.1$ ،  $b=0.6$  و  $c=30$  آشوب در شکل ۶ نشان داده شده است.



شکل ۶. رفتار آشوبی دستگاه از نوع لورنز،  $a=2.1$ ،  $b=0.6$  و  $c=30$

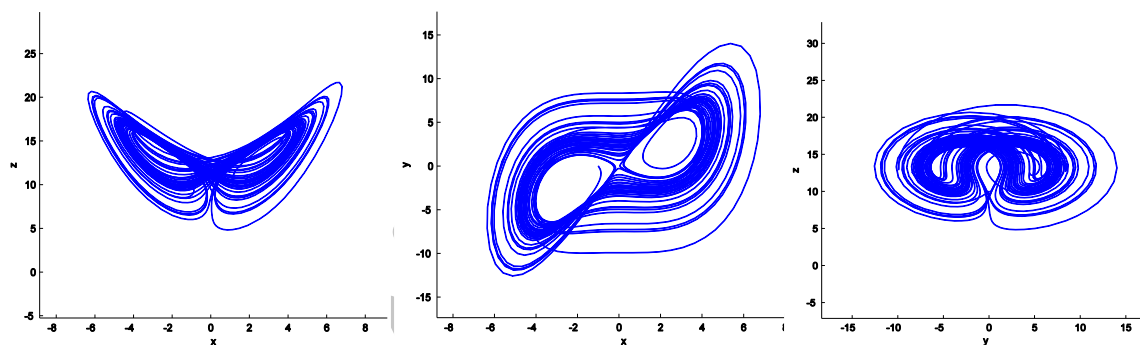
نمایش بهتر آشوب در این دستگاه، در شکل ۷ مشخص می‌شود. چنان‌که دیده می‌شود با تغییر اندکی در مقدار  $z$ ، تغییر محسوسی قابل مشاهده است.





شکل ۷. با تفاوت در  $10^{-6}$  مقدار اولیه  $z$

حالت‌های مختلف این آشوب در نمودارهای ۲-بعدی نشان داده شده است. شکل ۸، دستگاه از نوع لورنز را در صفحات  $X-Z$ ،  $X-Y$  و  $Y-Z$  نشان می‌دهد.



شکل ۸. حالت‌های مختلف آشوب در دستگاه از نوع لورنز

### انشعاب چنگال در دستگاه از نوع لورنز

هم‌ارزه مشخصه ماتریس ژاکوبی دستگاه در مبدأ به صورت  $f(\lambda) = -(\lambda+b)[\lambda^2+a\lambda+a(a-c)]$  است. اگر  $a=c$ ، آن‌گاه مقادیر ویژه آن  $0$ ،  $-b$ ،  $-c$  هستند. بنا براین نقطه  $(0,0,0)$  یک نقطه هذلولوی نیست. برای بررسی رفتار دینامیکی دستگاه در این حالت از قضیه خمینه مرکز استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم  $\beta = a - a_0$  که در آن  $a_0 = c$ . بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه  $-b$ ،  $-c$  و  $0$ ، به ترتیب برابر است با  $(1,0,0)$ ،  $(0,0,1)$  و  $(1,1,0)$  هستند. از

تغییرمتغیر خطی

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

استفاده می‌کنیم. در این صورت دستگاه (۵) به دستگاه

$$\begin{cases} \dot{u} = -bu + vw + w^2 \\ \dot{v} = -cv + \beta v + \beta w + cuv + cuw \\ \dot{w} = -\beta v - \beta w - cuv - cuw \end{cases} \quad (20)$$

یا به صورت

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

تبدیل می‌شود. که در آن

$$\begin{aligned} f_1 &= vw + w^2 \\ f_2 &= \beta v + \beta w + cuv + cuw \\ f_3 &= -\beta v - \beta w - cuv - cuw \end{aligned}$$

فرض کنید پارامتر وابسته  $\beta$  باشد و این پارامتر را به عنوان یک متغیر جدید در نظر می‌گیریم. بنا بر این رابطه (۲۱)

به صورت

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

تبدیل می‌شود. طبق قضیهٔ خمینهٔ مرکز، یک خمینهٔ مرکز برای (۲۱) حول مبدا بدین صورت وجود دارد:

$$\begin{aligned} W^c(0) &= \{(u, v, w, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid u = f(w, \beta), v = g(w, \beta), |w| < \delta, |\beta| < \bar{\delta}, \\ & f(0, 0) = g(0, 0) = 0, f'_w(0, 0) = g'_w(0, 0) = 0\} \end{aligned} \quad (23)$$

قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} u &= f(w, \beta) = a_1 w^2 + a_2 w \beta + a_3 \beta^2 + \dots \\ v &= g(w, \beta) = b_1 w^2 + b_2 w \beta + b_3 \beta^2 + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

طبق شرایط گفته شده در (۲۳) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f'_w \dot{w} = 2a_1 w \dot{w} + a_2 \dot{w} \beta \\ \dot{v} &= g'_w \dot{w} = 2b_1 w \dot{w} + b_2 \dot{w} \beta \end{aligned} \quad (25)$$

و

$$\dot{w} = -\beta v - \beta w - cuv - cuw = -\beta w + \dots \quad (26)$$

با جای گذاری (۲۶) در (۲۵) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 2\beta a_1 w^2 + a_2 w \beta^2 + \dots \\ \dot{v} &= 2\beta b_1 w^2 + b_2 w \beta^2 + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

از طرف دیگر، از روابط (۲۰) و (۲۴) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -ba_1 w^2 + w^2 - ba_2 w \beta - ba_3 \beta^2 + b_1 w^3 + b_2 w^2 \beta + wb_3 \beta^2 + \dots \\ \dot{v} &= -cb_1 w^2 + \beta w - cb_2 w \beta - cb_3 \beta^2 + \beta b_1 w^2 + b_2 w \beta^2 + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

با مقایسهٔ روابط (۲۷) و (۲۸)، ضرایب  $w^2$ ،  $w\beta$  و  $\beta^2$  بدین صورت به دست می‌آیند:

$$a_1 = \frac{1}{b}, a_2 = a_3 = 0, b_2 = \frac{1}{c}, b_1 = b_3 = 0$$

بدین ترتیب

$$f(w, \beta) = \frac{1}{b} w^2 + \dots$$

$$g(w, \beta) = \frac{1}{c} w \beta + \dots$$

از این رو، میدان برداری به خمینه مرکزی

$$\dot{w} = -\beta w - \frac{c}{b} w^3 - \frac{1}{c} w \beta^2 - \frac{1}{b} w^3 \beta + \dots$$

$$\dot{\beta} = 0 \tag{۲۹}$$

کاهش می‌یابد. می‌توان براحتی شرایطی را تعیین کرد که طبق آن برای  $(w, \beta) = (0, 0)$  از رابطه (۲۹) انشعاب چنگال داشته باشد. با توجه به

$$F(w, \beta) = -\beta w - \frac{c}{b} w^3 - \frac{1}{c} w \beta^2 - \frac{1}{b} w^3 \beta + \dots$$

داریم:

$$F(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial w} \Big|_{(0,0)} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \beta} \Big|_{(0,0)} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial w^2} \Big|_{(0,0)} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial w \partial \beta} \Big|_{(0,0)} = -1 \neq 0,$$

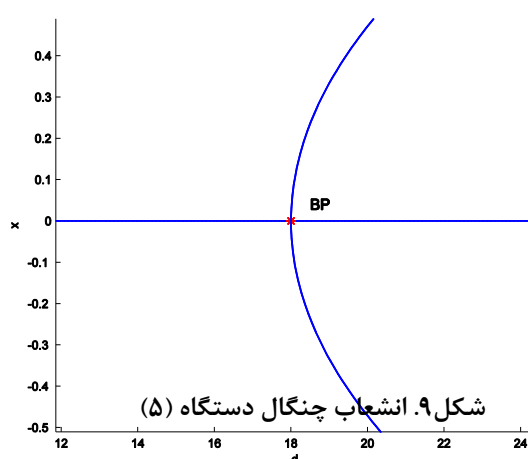
$$\frac{\partial^3 F}{\partial w^3} \Big|_{(0,0)} = -\frac{c}{b} \neq 0.$$

بنا بر این لم ۴ را داریم:

لم ۴. اگر  $\beta = a - a_0 = 0$  نقطه تعادل  $(0, 0, 0)$  از دستگاه از نوع لورنز یک انشعاب چنگال دارد. اگر  $a > a_0$  آن‌گاه نقطه تعادل  $O$  به‌طور مجانبی پایدار است و برای  $a < a_0$  سه نقطه تعادل  $O$  (ناپایدار) و  $E_{1,2}$  (پایدار) وجود دارد. همچنین این انشعاب را به‌صورت عددی در شکل ۹ می‌توان دید:

### نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از روش امتداد عددی خم‌های مختلف انشعاب برای دستگاه از نوع لورنز محاسبه شد. به‌طور تحلیلی انشعاب‌های هم بعد ۱ را برای این دستگاه به‌دست آمد و همچنین با استفاده از شبیه‌سازی عددی رفتارهای پیچیده دستگاه را از قبیل دایره حدی و رفتارهای آشوب‌ناک بررسی شد.



## منابع

1. Allgower E. L., George K., "Numerical continuation methods: An introduction", spring-verlag, berlin, (1990).
2. Doedel E. J., Govaerts W., Kuznetsov YU. A., "Computation of periodic solution bifurcations in ODE using bordered systems", SIAM Journal on Numerical Analysis, 1-33.
3. Bi Q., Jiang B., Han X., "Hopf Bifurcation analysis in T system, nonlinear analysis: Real World Application", 11 (2010) 522-527.
4. Gantmacher F.R., "Theory of Matrices", Volume 2, Chelsea, New York (1989).
5. Li C., Sprott J. C., Thio W., "Linearization of the Lorenz system", Physics Letters A, 379 (2015) 888-893.
6. Kuznetsov Y. A., "Elements of Applied Bifurcation Theory", New York, Springer-Verlag, Third edition (2004).
7. Tigan G., "Analysis of a 3D chaotic system", Chaos Soliton Fractals 36 (2008) 1315-1319.
8. Tigan G., "Bifurcation and stability in a system derived from the Lorenz system", Sci. Bull. Politehnica Univ. Timisoara Tomal 50(64) (Fascicola 1) (2005) 61-72.
9. Tigan G., "Hopf Bifurcation in the T system", Mathematical Bulletin 30 (2006) 9-16.
10. Yang T., "A Survey of chaotic secure communication system", International Journal of Computational Cognition", 2 (2004) 81-130.
11. Yang Q., Chen Y., "Complex Dynamics in the Unified Lorenz-Type System", International Journal of Bifurcation and Chaos, 24(4) (2014) 1450055.