

## کاربرد توزیع گمپرتز-پواسن در نظریه طول عمر

شهرام یعقوبزاده شهرستانی؛ دانشگاه پیام نور، ایران

پذیرش ۹۵/۰۸/۰۹

دریافت ۹۴/۰۹/۰۱

### چکیده

توزیع گمپرتز-پواسن یک توزیع طول عمر سه پارامتری با تابع نرخ خطر افزایشی، کاهش‌ی، افزایشی-کاهش‌ی و تک‌مدی شکل<sup>۱</sup> و ترکیبی از توزیع‌های گمپرتز و پواسن بریده شده در نقطه صفر است که در این مقاله پارامترهای این توزیع را به روش ماکسیمم درست‌نمایی برآورد کرده و به منظور تأیید برآوردهای محاسبه شده، براساس نمونه تصادفی با حجم‌های ۱۰۰، ۲۰۰، ۳۰۰، ۴۰۰ و ۵۰۰ از توزیع گمپرتز-پواسن شبیه‌سازی بررسی می‌شود. هم‌چنین به کمک دو مجموعه داده‌های واقعی و با مقایسه توزیع گمپرتز-پواسن با چند توزیع دیگر طول عمر نشان می‌دهیم این توزیع مدلی مناسب برای برازش به داده‌های مربوط به طول عمر است.

واژه‌های کلیدی: توزیع گمپرتز، توزیع پواسن، توزیع گمپرتز - پواسن، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی.

### مقدمه

توزیع گمپرتز نقش مهمی در الگوسازی نرخ مرگ و میر و آزمون‌های مربوط به طول عمر دارد، اسپیکلمن [2]، وترستند [3]. اما چون تابع نرخ خطر آن افزایشی، کاهش‌ی یا ثابت است برای مدل‌بندی پدیده‌هایی که تابع نرخ خطر آن‌ها افزایشی-کاهش‌ی و تک‌مدی شکل باشد مناسب نیست. بنا براین توزیع‌هایی بر اساس توزیع گمپرتز مانند توزیع گمپرتز تعمیم یافته با تابع نرخ خطر کاهش‌ی و تک‌مدی شکل (ال-گوهری) [4] و توزیع گمپرتز-پواسن با تابع نرخ خطر افزایشی، کاهش‌ی، افزایشی-کاهش‌ی و تک‌مدی شکل (یعقوبزاده و همکاران) [1] ارائه شد. در این مقاله در بخش دوم برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع گمپرتز-پواسن را ارائه کرده و در بخش سوم یک بررسی شبیه‌سازی از توزیع گمپرتز-پواسن انجام می‌دهیم، و هم‌چنین به کمک دو مجموعه داده‌های واقعی، توزیع گمپرتز-پواسن را با چند توزیع دیگر طول عمر مقایسه می‌کنیم.

### برآورد و استنباط

تابع چگالی احتمال توزیع گمپرتز - پواسن به صورت (۱) است:

$$f(x; \alpha, \beta, \lambda) = \frac{\lambda \alpha e^{\beta x} e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x} - 1)} e^{-\lambda e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x} - 1)}}}{1 - e^{-\lambda}}, \quad x > 0, \alpha, \lambda > 0, \beta \neq 0 \quad (1)$$

که بر اساس نمونه تصادفی  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\lambda$  [1] به ترتیب

$$\hat{\alpha} = \beta \cdot \left[ \sum_{i=1}^n (e^{\beta \cdot x_i} - 1) A(\alpha, \beta, \lambda, x_i) \right]^{-1} \tag{۲}$$

$$\hat{\beta} = \left\{ \alpha \cdot \left[ \sum_{i=1}^n (1 - (1 - \beta x_i) e^{\beta \cdot x_i}) A(\alpha, \beta, \lambda, x_i) \right] / \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{۳}$$

$$\hat{\lambda} = \left\{ [(e^\lambda - 1) \sum_{i=1}^n A(\alpha, \beta, \lambda, x_i)] / n \right\} \tag{۴}$$

است که در آن  $(\alpha, \beta, \lambda)$  به صورت مقادیر اولیه پارامترهای  $(\alpha, \beta, \lambda)$  است و

$$A(\alpha, \beta, \lambda, x_i) = 1 - \lambda e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}$$

که به راحتی به روش نیوتن-رافسون  $\hat{\alpha}$ ،  $\hat{\beta}$  و  $\hat{\lambda}$  به دست می‌آید.

وقتی که حجم نمونه بزرگ باشد برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها، یعنی  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})$  توزیع نرمال سه متغیره با میانگین  $(\alpha, \beta, \lambda)$  و ماتریس کوواریانس  $I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})$  دارد [5]. بنا براین داریم:

$$\left( (\hat{\alpha} - \alpha), (\hat{\beta} - \beta), (\hat{\lambda} - \lambda) \right) \rightarrow N_{\nu} \left( 0, I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}) \right)$$

که  $I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})$  به صورت (۵) به دست می‌آید:

$$I^{-1} = \begin{bmatrix} -I_{\alpha\alpha} & -I_{\alpha\beta} & -I_{\alpha\lambda} \\ -I_{\beta\alpha} & -I_{\beta\beta} & -I_{\beta\lambda} \\ -I_{\lambda\alpha} & -I_{\lambda\beta} & -I_{\lambda\lambda} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Var(\hat{\alpha}) & Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) & Cov(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) \\ Cov(\hat{\beta}, \hat{\alpha}) & Var(\hat{\beta}) & Cov(\hat{\beta}, \hat{\lambda}) \\ Cov(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}) & Cov(\hat{\lambda}, \hat{\beta}) & Var(\hat{\lambda}) \end{bmatrix} \tag{۵}$$

به طوری که :

$$I_{\alpha\alpha} = \frac{\partial^2 l_n}{\partial \alpha^2} = -\frac{n}{\alpha^2} - \frac{\lambda}{\beta^2} \sum_{i=1}^n (e^{\beta x_i} - 1)^2 e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)},$$

$$I_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 l_n}{(\partial \alpha)(\partial \beta)} = \frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^n [(1 - \beta x_i) e^{\beta x_i} - 1]$$

$$- \frac{\lambda}{\beta^2} \sum_{i=1}^n [(1 - \beta x_i) e^{\beta x_i} - 1] e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}$$

$$+ \frac{\lambda \alpha}{\beta^2} \sum_{i=1}^n [(1 - \beta x_i) e^{\beta x_i} - 1] (e^{\beta x_i} - 1) e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)},$$

$$I_{\alpha\lambda} = \frac{\partial^2 l_n}{(\partial \alpha)(\partial \lambda)} = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n (e^{\beta x_i} - 1) e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)},$$

$$I_{\beta\alpha} = \frac{\partial^2 l_n}{(\partial \beta)(\partial \alpha)} = \frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^n [(1 - \beta x_i) e^{\beta x_i} - 1]$$

$$- \frac{\lambda}{\beta^2} \sum_{i=1}^n [(1 - \beta x_i) e^{\beta x_i} - 1] e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}$$

$$+ \frac{\lambda \alpha}{\beta^2} \sum_{i=1}^n [(1 - \beta x_i) e^{\beta x_i} - 1] (e^{\beta x_i} - 1) e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)},$$

$$I_{\beta\beta} = \frac{\partial^2 l_n}{\partial \beta^2} = \frac{-2\alpha}{\beta^3} \sum_{i=1}^n [(1 - \beta x_i) e^{\beta x_i} - 1] - \frac{\alpha}{\beta^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 e^{\beta x_i}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda\alpha}{\beta^2} \sum_{i=1}^n [\beta^2 x_i - \alpha + (1 - \beta^2)e^{\beta x_i}] e^{\beta x_i - \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)} \\
I_{\beta\lambda} &= \frac{\partial^2 l_n}{(\partial\beta)(\partial\lambda)} = \frac{-\alpha}{\beta^2} \sum_{i=1}^n (1 - \beta x_i) e^{\beta x_i - 1} e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}, \\
I_{\lambda\alpha} &= \frac{\partial^2 l_n}{(\partial\lambda)(\partial\alpha)} = \frac{\partial^2 l_n}{(\partial\alpha)(\partial\lambda)} = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n (e^{\beta x_i} - 1) e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}, \\
I_{\lambda\beta} &= \frac{\partial^2 l_n}{(\partial\lambda)(\partial\beta)} = \frac{-\alpha}{\beta^2} \sum_{i=1}^n [(1 - \beta x_i) e^{\beta x_i} - 1] e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}, \\
I_{\lambda\lambda} &= \frac{\partial^2 l_n}{\partial\lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} + \frac{ne^\lambda}{(e^\lambda - 1)^2}.
\end{aligned}$$

در نتیجه فواصل اطمینان دو طرفه ی  $(1 - \delta)$  درصدی پارامترهای  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\lambda$  عبارتند از:

$$\hat{\alpha} \pm z_{\frac{\delta}{2}} \sqrt{\text{Var}(\hat{\alpha})}, \quad \hat{\beta} \pm z_{\frac{\delta}{2}} \sqrt{\text{Var}(\hat{\beta})}, \quad \hat{\lambda} \pm z_{\frac{\delta}{2}} \sqrt{\text{Var}(\hat{\lambda})}.$$

که  $z_{\frac{\delta}{2}}$  صدک بالای  $\frac{\delta}{2}$  درصدی توزیع نرمال استاندارد است.

## کاربرد با داده‌ها

### ۱. بررسی شبیه‌سازی

در این بخش به کمک روابط (۲) تا (۴) بخش قبل و بر اساس نمونه‌های شبیه‌سازی شده از توزیع گمپرتز-پواسن و به روش نیوتن-رافسون، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای آن را به دست می‌آوریم که مراحل شبیه‌سازی عبارت است از:

**گام اول:** از توزیع یک‌نواخت  $U(0,1)$  نمونه‌های تصادفی ۱۰۰، ۲۰۰، ۳۰۰، ۴۰۰ و ۵۰۰ تایی تولید می‌کنیم.

**گام دوم:** به کمک گام اول و با توجه به رابطه زیر نمونه‌های تصادفی ۱۰۰ تا ۵۰۰ تایی از توزیع گمپرتز-پواسن با پارامترهای  $\alpha = \beta = \lambda = 1$  تولید می‌کنیم که  $U$  دارای توزیع  $U(0,1)$  است.

$$X = \frac{1}{\beta} \log \left\{ 1 - \frac{\beta}{\alpha} \log \left[ -\frac{1}{\lambda} \log(U + (1 - U)e^{-\lambda}) \right] \right\}$$

**گام سوم:** به کمک روابط (۲) تا (۴) و به روش نیوتن-رافسون برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\lambda$  را به دست می‌آوریم.

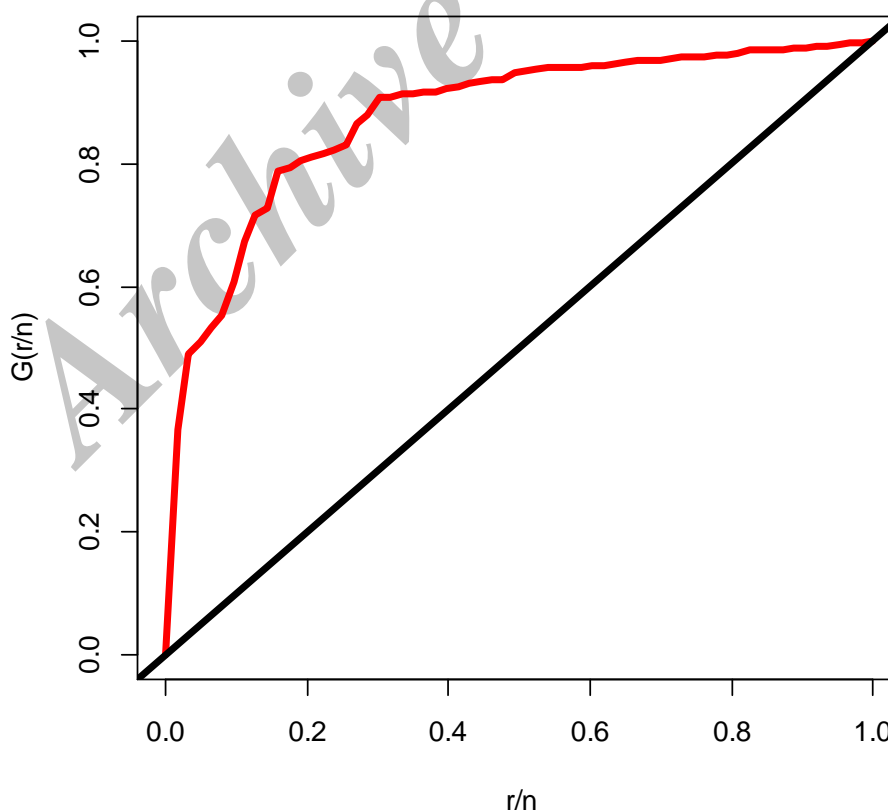
**گام چهارم:** گام‌های اول تا سوم را ۵۰۰۰ بار تکرار کرده و سپس میانگین برآوردهای پارامترها و میانگین مربعات خطای آن‌ها را به دست می‌آوریم که نتایج در جدول ۱ آمده است.

با توجه به جدول ۱ نتیجه می‌گیریم که با افزایش حجم نمونه میانگین مربع خطای میانگین برآوردهای ماکسیمم

درست‌نمایی پارامترهای  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\lambda$  کاهش می‌یابد؛ به عبارت دیگر دقت برآوردها زیاد می‌شود که دلیل خوبی برای معتبر بودن روابط (۲) تا (۴) است.

جدول ۱. میانگین برآورد پارامترهای توزیع گمپرتز-پواسن و میانگین مربعات خطای آن‌ها به کمک شبیه‌سازی

میانگین مربعات خطا	میانگین	پارامترها	حجم نمونه
$3/749 \times 10^{-7}$	۰/۰۰۹۶۵۸۷	$\hat{\alpha}$	۱۰۰
۰/۰۰۱۴۶۱۱	۱/۶۳۴۶۷۱	$\hat{\beta}$	
۰/۰۰۲۱۶۸۷۵	۲/۰۵۴۹۹۵	$\hat{\lambda}$	
$2/342 \times 10^{-8}$	۰/۰۰۴۹۲۸۱	$\hat{\alpha}$	۲۰۰
$3/493 \times 10^{-4}$	۱/۶۱۳۶۲۴	$\hat{\beta}$	
۰/۰۰۳۶۸۳۵	۲/۳۴۲۵۵۸	$\hat{\lambda}$	
$4/0.8 \times 10^{-9}$	۰/۰۰۳۴۱۲۲	$\hat{\alpha}$	۳۰۰
$1/629 \times 10^{-4}$	۱/۵۹۳۹۶۵	$\hat{\beta}$	
۰/۰۰۲۰۴۰۴	۱/۹۶۷۷۵۴	$\hat{\lambda}$	
$4/477 \times 10^{-10}$	۰/۰۰۲۴۴۳۲	$\hat{\alpha}$	۴۰۰
$2/317 \times 10^{-5}$	۱/۶۱۳۵۵۱	$\hat{\beta}$	
۰/۰۰۱۰۴۸۹	۲/۰۵۹۷۸۶	$\hat{\lambda}$	
$5/8.0 \times 10^{-10}$	۰/۰۰۱۹۶۰۵	$\hat{\alpha}$	۵۰۰
$4/127 \times 10^{-5}$	۱/۶۱۷۴۸۳	$\hat{\beta}$	
۰/۰۰۱۱۹۶۷	۲/۰۴۶۳۶۷	$\hat{\lambda}$	



شکل ۱. نمودار TTT-Plot برای داده‌های مربوط به مقاومت الیاف شیشه‌های ۱/۵ سانتی‌متری

## ۲. تحلیل داده‌های واقعی

در این بخش با استفاده از دو مجموعه داده‌های واقعی توزیع گمپرتز-پواسن را با چند توزیع دیگر طول عمر مقایسه می‌کنیم. اولین مجموعه داده‌ها شامل ۶۳ مقدار از مقاومت الیاف شیشه‌های ۱/۵ سانتی‌متری است که در یک آزمایشگاه فیزیک در انگلستان اندازه‌گیری شده که این داده‌ها در اسمیت و ناپلور [6] گزارش شده است. همچنین بارتو-سوزا و همکاران [7] از این داده‌ها برای برازش توزیع بتا نمایی تعمیم یافته و محمودی و سپهدار [8] برای برازش توزیع وایبول پواسن توانی استفاده کردند. ابتدا به کمک نمودار TTT-Plot (آرست [9]) شکل تابع نرخ خطر مربوط به داده‌ها را تشخیص می‌دهیم. این نمودار در شکل ۱ نشان داده شده و بیان‌گر افزایشی بودن تابع نرخ خطر این مجموعه داده‌ها است بنابراین می‌توان توزیع گمپرتز-پواسن را به این مجموعه از داده‌ها برآورد.

اکنون به کمک این داده‌ها توزیع گمپرتز-پواسن<sup>۱</sup> را با توزیع‌های بتا نمایی تعمیم یافته<sup>۲</sup>، وایبول پواسن توانی<sup>۳</sup> و گمپرتز-لگاریتمی<sup>۴</sup> با تابع‌های چگالی زیر

$$f_{BGE}(x; \alpha, \lambda, a, b) = \frac{\alpha\lambda}{B(a, b)} e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{a\alpha-1} [1 - (1 - e^{-\lambda x})^\alpha]^{b-1}, x > 0$$

با

$$\alpha, \lambda, a, b > 0$$

و

$$f_{EWP}(x; \alpha, \beta, \lambda, \theta) = \frac{\alpha\lambda\theta}{(e^\theta - 1)} \beta^\lambda x^{\lambda-1} e^{-(\beta x)^\lambda} (1 - e^{-(\beta x)^\lambda})^{\alpha-1} e^{\theta(1 - e^{-(\beta x)^\lambda})^\alpha}, x > 0$$

با

$$\alpha, \beta, \lambda, \theta > 0$$

و

$$f_{GL}(x; \alpha, \beta, \lambda) = \alpha\lambda e^{\beta x} e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)} (-\log(1-\lambda))^{-1} \left\{ 1 - \lambda \left[ 1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)} \right] \right\}^{-1}$$

با  $\alpha > 0, \beta \neq 0, 0 < \lambda < 1$  مقایسه می‌کنیم که نتایج در جدول ۲ شامل برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع‌ها ی مقایسه شده به همراه معیارهای اطلاع آکائیک<sup>۵</sup>، اطلاع بی‌زی<sup>۶</sup>، اطلاع آکائیک سازگار<sup>۷</sup> و اطلاع هانان-کوئین<sup>۸</sup> که در زیر تعریف می‌شوند آمده است و آن مدلی انتخاب می‌شود که دارای معیارهای کوچک‌تری باشد.

$$AIC = -2l(\hat{\Theta}) + 2k,$$

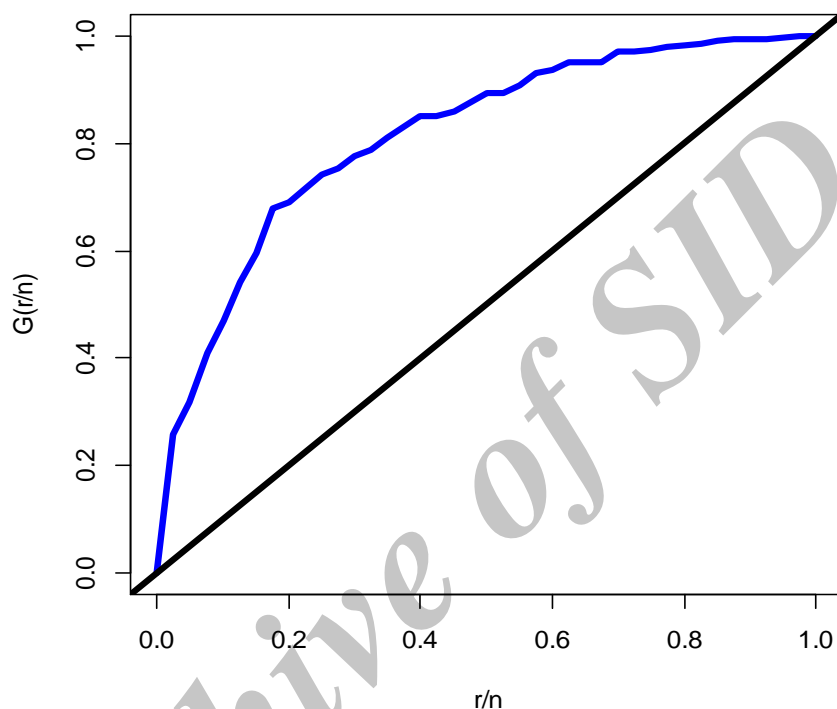
$$BIC = -2l(\hat{\Theta}) + 2k \log(n),$$

$$HQIC = -2l(\hat{\Theta}) + 2k \log(\log(n)),$$

$$CAIC = -2l(\hat{\Theta}) + \frac{2kn}{n-k-1}.$$

1. Gompertz-Poisson (GP)
2. Beta Generalized Exponential (BGE)
3. Exponentiated Weibull-Poisson (EWP)
4. Gompertz-Logarithmic (GL)
5. Akaike information criterion (AIC)
6. Bayesian information criterion (BIC)
7. Consistent Akaike information criterion (CAIC)
8. Hannan-Quinn information criterion (HQIC)

به طوری که  $l(\hat{\theta})$  مقدار عددی لگاریتم تابع درست‌نمایی به‌زای برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها،  $k$  تعداد پارامترها،  $n$  حجم نمونه است. نتایج جدول ۲ نشان می‌دهد که توزیع گمپرتز-پواسن برازش بهتری به داده‌ها در مقایسه با توزیع‌های مقایسه شده دارد که شکل ۳ نیز این مطلب را تأیید می‌کند. دومین مجموعه داده‌ها مربوط به مدت زمان از کار افتادگی ( $10^3$ h) توربوشارژهای یک نوع موتور است که داده‌ها در ایکسو و همکاران [10] گزارش شده است. چنان‌که مشخص است به کمک نمودار TTT-Plot (شکل ۲) تابع نرخ خطر مربوط به داده‌ها افزایشی است. بنا براین برازش توزیع گمپرتز-پواسن به این مجموعه داده‌ها پیشنهاد می‌شود.



شکل ۲. نمودار TTT-Plot برای داده‌های مربوط به زمان خرابی توربوشارژهای یک نوع موتور

اکنون با استفاده از این داده‌ها به مقایسه توزیع گمپرتز-پواسن با توزیع‌های بتا نمایی تعمیم یافته، توزیع بتا

گمپرتز<sup>۱</sup> [11] با تابع چگالی احتمال

$$f_{BG}(x; \theta, \gamma, \alpha, \beta) = \frac{\theta e^{\gamma x}}{B(\alpha, \beta)} e^{-\frac{\beta \theta}{\gamma}(e^{\gamma x} - 1)} \left[ 1 - e^{-\frac{\theta}{\gamma}(e^{\gamma x} - 1)} \right]^{\alpha - 1}, x > 0, \theta, \gamma, \alpha, \beta > 0$$

و توزیع گمپرتز تعمیم یافته<sup>۲</sup> با تابع چگالی احتمال

$$f_{GG}(x; \lambda, c, \theta) = \lambda \theta e^{cx} e^{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx} - 1)} \left( 1 - e^{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx} - 1)} \right)^{\theta - 1}, x > 0, \lambda, c, \theta > 0$$

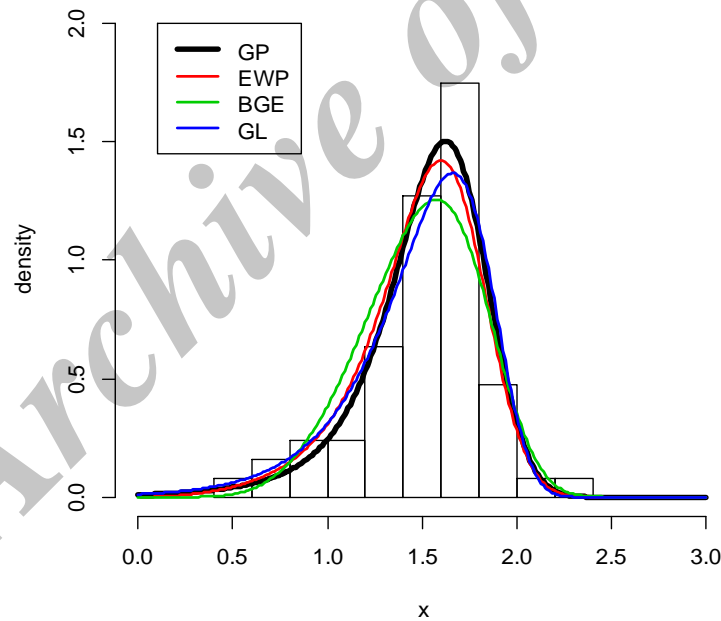
به کمک برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها مقایسه می‌کنیم. جدول ۳ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها و مقادیر اطلاع‌های اشاره شده در جدول ۲ را برای این دسته از توزیع‌ها نشان می‌دهد با توجه به این نتایج نیز مشخص می‌شود که توزیع بتا گمپرتز-پواسن نسبت به سایر توزیع‌ها برازش بهتری دارد که شکل ۴ نیز این مطلب را تأیید می‌کند.

1. Beta Gompertz (BG)

2. Generalized Gompertz (GG)

جدول ۲. برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها و مقادیر اطلاع‌های مقایسه‌توزیع‌ها برای داده‌های مربوط به مقاومت الیاف شیشه‌ها

HQIC	CAIC	BIC	AIC	برآورد ماکسیمم درست‌نمایی	پارامتر	توزیع‌ها
				۰/۱۰۲۱۱۵۸	$\alpha$	
۳۵/۲۴	۳۳/۱۲	۵۱/۵۷	۳۲/۷۱	۲/۳۷۳۰۴۳	$\beta$	GP
				۳/۶۶۷۸۷۶	$\lambda$	
				۰/۵۷۹۰۲۵۷	$\alpha$	
۳۴/۷۹	۳۴/۸۱	۵۹/۲۷	۳۴/۲	۰/۶۴۶۶۸۲۶	$\beta$	EWP
				۵/۴۹۹۵۸۵	$\lambda$	
				۲/۴۶۵۳۰۷	$\theta$	
				۲۴/۲۳۴۲۳	$\alpha$	
۴۲/۶۲	۳۹/۹۴	۶۴/۳۹	۳۹/۲۵	۰/۹۴۹۹۱۵۹	$\lambda$	BGE
				۰/۳۷۸۶۲۱۳	$a$	
				۹۱/۵۴۴۷۶	$b$	
				۰/۱۶۴۶۷۲	$\alpha$	
۳۸/۱۱	۳۵/۹۹	۵۴/۴۴	۳۵/۵۸	۳/۳۶۳۹۱۹	$\beta$	GL
				۰/۵۳۳۰۱۸۲	$\lambda$	



شکل ۳. نمودار تابع‌های احتمال توزیع‌های مقایسه شده بر اساس نتایج جدول ۱

هم‌چنین به کمک آماره‌های آزمون نیکویی برازش کرامر-ون میس<sup>۱</sup>، آندرسن و دارلینگ<sup>۲</sup>، واتسن<sup>۳</sup>، کولموگوروف-اسمیرنوف<sup>۴</sup> و لیانو-شیموکاوا<sup>۵</sup> که در ادامه تعریف می‌شوند با توجه به دو مجموعه داده‌های اشاره شده به مقایسه توزیع گمپرتز-پواسن با سایر توزیع‌های ذکر شده می‌پردازیم که نتایج در جدول ۴ آمده است. با توجه به جدول ۴ مقادیر

1. Crame'r-VonMisses (CM)  
 2. Anderson and Darling (AD)  
 3. Watson (W)  
 4. Kolmogorov-Smirnov (K-S)  
 5. Lio-Shimokava (L-S)

آماره‌های آزمون نیکویی برازش برای توزیع گمپرتز - پواسن براساس هر دو مجموعه از داده‌ها نسبت به سایر مدل‌ها کوچک‌تر است. بنا براین توزیع گمپرتز - پواسن برازش بهتری به داده‌ها در مقایسه با توزیع‌های دیگر دارد.

$$W_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[ F(x_i; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2$$

$$U_n^2 = W_n^2 + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{F(x_i; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})}{n} - \frac{1}{2} \right]^2$$

$$A_n^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) [\log(F(x_i; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})) + \log(1 - F(x_{n+1-i}; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}))]$$

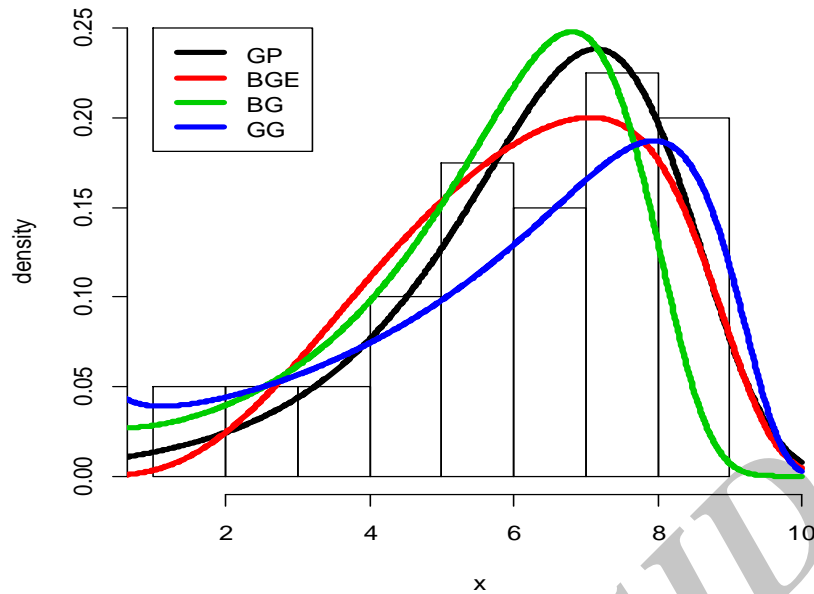
$$D_n = \max_i \left[ \frac{i}{n} - F(x_i; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}), F(x_i; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}) - \frac{i-1}{n} \right]$$

$$L_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{\max_i \left[ \frac{i}{n} - F(x_i; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}), F(x_i; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}) - \frac{i-1}{n} \right]}{\sqrt{F(x_i; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}) [1 - F(x_i; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})]}}$$

جدول ۳. برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها و مقادیر اطلاع‌های مقایسه‌توزیع‌ها برای دومین مجموعه داده‌ها

HQIC	CAIC	BIC	AIC	برآورد ماکسیمم درست‌نمایی	پارامتر	توزیع‌ها
۱۶۷/۶۹	۱۶۶/۵۳	۱۸۱/۹۹	۱۶۵/۸۶	۰/۰۰۸۵۹۵۳	$\alpha$	GP
				۰/۶۱۲۶۳۸۳	$\beta$	
				۰/۳۱۳۳۰۹۸	$\lambda$	
۱۷۰/۰۶	۱۶۸/۵۰	۱۸۹/۱۳	۱۶۷/۶۲	۳۶/۱۷۶۸۲	$\alpha$	BGE
				۰/۱۸۹۱۳۸۳	$\beta$	
				۰/۱۲۸۰۹۷۷	$a$	
				۱۴۱۵/۳۷۵	$b$	
۱۶۹/۷۴	۱۶۸/۴۴	۱۸۸/۸۰	۱۶۷/۲۹	۰/۰۰۲۱۳۲۱	$\theta$	BG
				۰/۹۴۹۰۷۵۸	$\gamma$	
				۰/۵۴۳۷۰۹۱	$\alpha$	
				۰/۵۴۷۷۶۵۸	$\beta$	
۱۷۵/۲۷	۱۷۴/۱۱	۱۸۹/۵۸	۱۷۳/۴۴	$۳/۳۵ \times 10^{-6}$	$\lambda$	GG
				۱/۴۸۸۵۱۰	$c$	
				۰/۱۸۹۳۱۶۳	$\theta$	





شکل ۴. نمودار تابع چگالی احتمال توزیع‌های مقایسه شده بر اساس نتایج جدول ۳ جدول ۴. مقادیر آمارهای آزمون نیکویی برازش برای مجموعه داده‌های اول و دوم

توزیع‌ها	آماره‌ها				
	CM	W	AD	K-S (p-value)	L-S
GP	۰/۱۰۱۳۰۳۶	۱۵/۳۶۱۰۶	۰/۶۳۲۸۹۲۰	۰/۱۰۳۲ (۰/۵۱۳)	۰/۲۹۹۰۲۴۶
EWP	۰/۱۱۴۱۱۲۵	۱۵/۳۶۷۱۰	۰/۶۹۰۸۵۳۸	۰/۱۱۶۶ (۰/۳۵۹)	۰/۳۹۷۰۱۵۱
BGE	۰/۲۸۸۲۵۶۸	۱۵/۵۱۵۸۱	۱/۴۹۳۳۶۹	۰/۱۷۲۵ (۰/۰۴۷)	۰/۵۳۹۹۵۷۴
GL	۰/۱۵۶۷۶۱۸	۱۵/۴۰۶۲۸	۰/۸۷۸۶۸۳۶	۰/۱۲۷۵ (۰/۲۵۷)	۰/۴۰۹۵۴۸۴
		دوم	داده‌های	مجموعه	
GP	۰/۰۳۸۴۳۶۱	۹/۵۴۵۵۳	۰/۲۶۷۱۵۳۵	۰/۰۸۷۱ (۰/۹۲۲)	۰/۳۲۱۴۸۹۸
BGE	۰/۰۸۱۱۷۶۶	۳۰/۷۳۰۳۷	۰/۵۱۴۰۶۱۹	۰/۱۰۳۹ (۰/۷۸۱)	۰/۶۵۱۲۳۱۹
BG	۰/۴۹۷۴۷۶۰	۹/۹۱۱۶۹۱	۴/۳۹۶۶۰۲	۰/۳۱۶۲ (۰/۰۰۰)	۲/۵۶۰۹۷۰
GG	۰/۲۰۵۰۱۲۷۰	۹/۶۶۵۰۱۷	۱/۳۷۶۵۰	۰/۱۵۲۹ (۰/۳۰۷)	۰/۸۵۴۴۸۲۵

هم‌چنین ماتریس کوواریانس مجانبی (۵) بر اساس هر دو مجموعه داده‌ها که در محاسبه فواصل اطمینان مجانبی

و انجام آزمون فرض پارامترهای توزیع گمپرتز-پواسن نقش عمده‌ای دارد به ترتیب بدین صورت است:

$$I^{-1} = \begin{bmatrix} 14938 & 3503.2 & -157.08 \\ 3503.2 & 14.060 & -17.573 \\ -157.08 & -17.573 & 2.9890 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.000012 & 0.000356 & 0.002739 \\ 0.000356 & 0.000922 & 0.013277 \\ 0.002739 & 0.013277 & 0.556562 \end{bmatrix}$$

$$I^{-1} = \begin{bmatrix} 8.52 \times 10^5 & 104.82 & -156.89 \\ 104.82 & 0.04632 & 0.01256 \\ -156.89 & 0.01256 & 0.05224 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.82 \times 10^{-6} & -0.00430 & 0.00065 \\ -0.00430 & 31.881 & -2.0581 \\ 0.00065 & -2.0581 & 2.1592 \end{bmatrix}$$

بنا بر این فاصله اطمینان مجانبی نود و پنج درصدی پارامترهای  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\lambda$  بر اساس مجموعه داده‌های اول به ترتیب

برابر (۰/۱۰۸۹، ۰/۰۹۵۳)، (۲/۴۳۲۶، ۲/۳۱۳۵) و (۵/۱۳۰۱، ۲/۲۰۵۷) و بر اساس مجموعه داده‌های دوم به ترتیب

برابر (۰/۰۰۸۸، ۰/۰۰۸۳)، (۰/۶۵۱۲، ۰/۵۴۷۸) و (۳/۱۹۳۴، ۲/۵۶۶۷) است.

### بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله به کمک روش ماکسیمم درست‌نمایی، پارامترهای توزیع گمپرتز-پواسن که یکی از توزیع‌های متعلق به خانواده توزیع‌های سری توانی گمپرتز است برآورد شده و با استفاده از معیارهای اطلاع مختلف و آماره‌های آزمون نیکویی برازش و به کمک دو مجموعه داده‌های واقعی و مقایسه با چند توزیع دیگر طول عمر، نشان دادیم که مدلی مناسب برای برازش به داده‌ها است. بنا براین به نظر می‌رسد که توزیع گمپرتز-پواسن می‌تواند مدلی مناسب برای طول عمر باشد. هم‌چنین با برآورد ماتریس کوواریانس مجانبی پارامترها، فاصله اطمینان مجانبی پارامترها را بر اساس مجموعه داده‌های واقعی به دست آوردیم.

### تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از زحمات سردبیر و داوران مجله برای بررسی مقاله نهایت تشکر را دارند.

### منابع

1. یعقوب‌زاده ش.، شادرخ ع.، یارمحمدی مسعود، "معرفی یک توزیع جدید طول عمر از خانواده توزیع‌های سری توانی گمپرتز"، نشریه علوم دانشگاه خوارزمی، دوره ۱۷، شماره ۲ (۱۳۹۴).
2. Spiegelman M., "Introduction to Demography", Rev. ed. Cambridge, Mass.: Harvard University Press (1968).
3. Wetterstrand W. W. H., "Recent Mortality Experience Described by Gompertz's and Makeham's Laws--Including a Generalization", Paper presented at Actuarial Research Conference at Ball State University, August. (1978) ARCH.
4. El-Gohary A., Alshamrani A., Al-Otaibi A. N., "The generalized Gompertz", Applied Mathematical Modelling, 37(2013) 13-24.
5. Gupta R. D., Kundu D., "Generalized exponential distributions", Aust. N. Z. J. Stat. 41 (1999) 173-188.
6. Smit R. L., Nalor J. C., "A comparison of maximum likelihood Bayesian estimators for the three-parameter Weibull distribution", Applied Statistics, 36(1987) 358-369.
7. Barreto-Souza W., "The beta Generalized exponential distribution", Journal of statistical Computation and Simulation. 2 (2010) 159-172.
8. Mahmoudi E., Sepahdar A., "Exponentiated Weibull-Poission distribution: Model, properties and applications Lifetime distribution", Mathematics and Computers in. 92 (2013) 76-97.
9. Aarset M. V., "How to identify bathtub hazard rate", IEEE Transactions Reliability, 36 (1987) 106-108.
10. Xu K., Xie M., Tang L. C., Ho S. L., "Application of neural networks in forecasting engine systems reliability", Applied Soft Computing, 2 (4) (2003) 255-268.
11. Jafari A., Tahmasebi S., Alizadeh M., "The Beta-Gompertz distribution", Revista Colombiana de Estadística. 37 (2014) 136-156.