جلد ۵، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۳۹۸

پژوهش‌های ریاضی

(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

دو نمایش معادل برای نرم فضاهای وزن‌دار از توابع تمام‌ریخت روی نیم‌صفحه بالایی

محمدعلی اردلانی؛ دانشگاه کردستان، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی

دریافت ۹۷/۰۲/۲۱ پذیرش ۹۷/۰۶/۲۶

چکیده

هدف مقاله این است که نشان دهیم بدون این‌که لازم باشد تابع وزن در شرایط رشدی خاصی صدق کند همواره نرم سوپریمم وزنی روی نیم‌صفحهٔ بالایی را می‌توان برحسب نرم سوپریمم وزنی روی گوی یکه باز و هم‌چنین برحسب سوپریمم مقادیر تابع تمام‌ریخت روی خط‌های خاصی در نیم‌صفحهٔ بالایی نمایش داد.

واژه‌های کلیدی: تابع تمام‌ریخت، وزن استاندارد، فضاهای وزن‌دار، نیم‌صفحه بالایی.

مقدمه

فرض کنید Ω یک زیر مجموعهٔ باز از صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$ باشد. یک تابع پیوسته و مثبت $\upsilon:\Omega\to(0.\infty)$را یک تابع وزن می‌نامیم. برای هرتابع تمام‌ریخت $f:\Omega\to\mathbb{C}$ نرم سوپریمم وزنی f، $\|f\|_\upsilon$ و فضای وزن‌دار از توابع تمام‌ریخت روی Ω،$H_\upsilon(\Omega)$ را به‌ترتیب چنین تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_\upsilon=\operatorname*{Sup}_{Z\in\Omega}|f(z)|\upsilon(z)$$

و

$$H_\upsilon(\Omega)=\left\{f:\Omega\to\mathbb{C}\ \text{تمام‌ریخت است}\ f\ ،\|f\|_\upsilon<\infty\right\}.$$

تعریف ۱: در حالتی که $\Omega=D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ گوی یکه باز باشد، تابع وزن $\upsilon:D\to(0.\infty)$ را که در شرایط زیر صدق می‌کند را یک وزن استاندارد روی D می‌نامیم.

۱. $\upsilon(z)=\upsilon(|z|)$ یعنی υ شعاعی باشد.

۲. تابع $\upsilon(z)$ نسبت به $|z|$ نزولی باشد.

۳. $\lim_{|z|\to1^-}\upsilon(z)=0$

فضاهای وزن‌دار از توابع تمام‌ریخت روی گوی یکه‌باز، $H_\upsilon(D)$ (υ وزن استاندارد روی D)، را اولین بار شیلدز[۱] و ویلیامز[۲] در سال ۱۹۷۲معرفی کردند. آن‌ها در سری مقالات خود با این فرض که وزن υ در شرایط خاصی صدق می‌کند، به بررسی این فضاها از جنبه‌های گوناگون پرداختند [۱]، [۲]، [۳].

پس از باز شدن این زمینهٔ تحقیقاتی جدید، تحقیقات زیادی از جنبه‌های گوناگون روی این فضاها به‌وسیلهٔ ریاضی‌دان‌های متعددی انجام گرفت، که از جمله کارهای برجسته در این زمینه می‌توان به مقاله‌های لوسکی[۱] [۴]، [۵]، [۶]، بونت[۲]، دومانسکی[۳] و لیندشتروم[۴] [۷]، [۸]، اشاره کرد.

---

*نویسنده مسئول m.ardalani@uok.ac.ir

1. Shields
2. Willams

تعریف ۲: در حالتی‌که $\Omega = G = \{\omega \in \mathbb{C}: Im\ \omega > 0\}$ نیم‌صفحهٔ بالایی باشد تابع وزن $\upsilon: G \to (0.\infty)$ را که در این شرایط صدق می‌کند را یک وزن استاندارد روی G می‌نامیم:

۱. $\upsilon(\omega) = \upsilon(\ Im\ \omega\ i)$ یعنی مقادیر وزن υ فقط به قسمت موهومی نقاط بستگی دارد.

۲. $\exists\ c > 0, \forall\ \omega_1, \omega_2\ \in G\ s\cdot t\ 0 < Im\ \omega_1 < Im\ \omega_2 \qquad \upsilon(\omega_1) \leq c\upsilon(\omega_2)$

یعنی υ روی محور موهومی تقریبا صعودی باشد.

۳. $\lim_{t\to 0^+} \upsilon(ti) = 0$

فضاهای وزن‌دار از توابع تمام‌ریخت روی نیم‌صفحهٔ بالایی، $H_\upsilon(G)$ (υ وزن استاندارد روی G) حالت مهم دیگر از فضاهای وزن‌دار است که تعیین رده یک‌ریختی این فضاها و کران‌داری عملگر ترکیب و مشتق بین این فضاها، در حالتی‌که وزن υ در شرایط رشدی خاصی صدق می‌کند به‌وسیلهٔ لوسکی و مؤلف انجام شد [۹]، [۱۰]، [۱۱].

تذکر ۱: بدیهی است که اگر در تعریف ۲ قسمت ۲، $c = 1$ آن‌گاه υ روی محور موهومی صعودی می‌شود.

در این مقاله می‌خواهیم برای نرم سوپریمم وزنی بدون این‌که لازم باشد υ در شرایط رشدی خاصی مشابه آن‌چه در [۹]، [۱۰]، [۱۱] بیان شده است صدق کند دو نمایش معادل بیابیم. قبل از ورود به نتایج اصلی این مقاله به این مطالب نیاز داریم:

تعریف ۳: به‌ازای هر $\delta > 0$ مجموعه‌های L_δ، G_δ را به‌ترتیب چنین تعریف می‌کنیم:

$$G_\delta = \{\omega \in \mathbb{C}: Im\ \omega \geq \delta\}$$

و

$$L_\delta = \{\omega \in \mathbb{C}: Im\ \omega = \delta\}$$

تعریف ۴: فرض کنید $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ($\Omega \subseteq \mathbb{C}$ باز) یک تابع تمام‌ریخت و $A \subseteq \Omega$. $M_\infty(f, A)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$M_\infty(f, A) = \sup_{\omega\in A} |f(\omega)|$$

تعریف ۵: فرض کنیم $x \in \mathbb{C}$ و $r > 0$، منظور از $x + r\sigma D$ دایره‌ای به مرکز x و شعاع r در صفحه مختلط است.

تعریف ۶: نگاشت $\alpha: D \to \mathbb{C}$ را با ضابطه $\alpha(z) = \frac{1+z}{1-z} i$ تعریف می‌کنیم.

تذکر ۲: برای $z \in D$ ، به سادگی می‌توان نشان داد

$$\alpha(z) = -2\frac{Im\ z}{1 + |z|^2 - 2\ Re\ z} + \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2 - 2\ Re\ z} i$$

از رابطهٔ مذکور نتیجه می‌شود که $\alpha(D) \subseteq G$ ، حال اگر نگاشت $\beta: G \to \mathbb{C}$ را با ضابطهٔ $\beta(\omega) = \frac{\omega - i}{\omega + i}$ تعریف کنیم داریم:

$\alpha o\beta = I_{|G}$. $\beta o\alpha = I_{|D}$ بنابراین $\beta = \alpha^{-1}$. $\alpha(D) = G$. هم‌چنین

$$\alpha^{-1}(\omega) = \beta(\omega) = \frac{|\omega|^2 - 1}{|\omega|^2 + 1 + 2\ Im\ \omega} - \frac{2\ Re\ \omega}{|\omega|^2 + 1 + 2\ Im\ \omega} i$$

تعریف ۷: الف) منظور از $L^\infty(D)$ فضای تمام توابع اساساً کران‌دار روی $\sigma D = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ است. نرم این فضا را با $\|\cdot\|_\infty$ نشان می‌دهیم.

---

1. Lusky
2. Bonet
3. Domonski
4. Lindstrom

ب) هم‌چنین

$$H_\infty(D) = \{g | g: D \to \mathbb{C} \ \text{تمامریخت است} \ g، M_\infty(g, D) < \infty\}$$

نتایج اصلی

لم ۱: فرض کنید υ یک وزن استاندارد روی G باشد. در این صورت یک ثابت مثبت C وجود دارد به‌طوری‌که

$$\frac{1}{C}\upsilon(\omega_1) \leq \upsilon(\omega_2) \leq C\upsilon(\omega_1) \quad \forall\ \omega_1, \omega_2 \in L_\delta$$

اثبات: چون $\omega_1, \omega_2 \in L_\delta$ پس $Im\ \omega_1 = Im\ \omega_2 = \delta$. یعنی

$$Im\ \omega_2 \leq Im\ \omega_1 \qquad . \qquad Im\ \omega_1 \leq Im\ \omega_2.$$

از روابط مذکور و این‌که وزن υ روی محور موهومی تقریباً صعودی است نتیجه می‌شود که

$$\upsilon(\omega_1) \leq C\ \upsilon(\omega_2) \tag{۱}$$

$$\upsilon(\omega_2) \leq C\ \upsilon(\omega_1) \tag{۲}$$

حال بر اساس روابط (۱) و (۲) حکم ثابت می‌شود.

لم ۲: فرض کنید υ یک وزن استاندارد روی G و $a \in \mathbb{R}$ دلخواه باشد. در این‌صورت عملگر انتقال T_a، $T_a: H_\upsilon(G) \to H_\upsilon(G)$ تعریف شده با ضابطهٔ $(T_a f)(\omega) = f(\omega + a)$ کران‌دار است.

اثبات: به‌وضوح $(T_a f)$ یک تابع تمامریخت روی G است . چون به‌ازای هر $\omega \in G$ ، $Im\ \omega = Im(\omega + a)$ از به کار بردن لم (۱) نتیجه می‌شود که ثابت مثبت C وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\frac{1}{C}\upsilon(\omega) \leq \upsilon(\omega + a) \leq C\ \upsilon(\omega)$$

بنابراین

$$\frac{1}{C}|f(\omega + a)|\upsilon(\omega) \leq |f(\omega + a)|\upsilon(\omega + a) \leq C\ |f(\omega + a)|\ \upsilon(\omega)$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} \|T_a f\|_\upsilon &= \operatorname*{Sup}_{\omega \in G}|f(\omega + a)|\upsilon(\omega) \\ &\leq C \operatorname*{Sup}_{\omega \in G}|f(\omega + a)|\upsilon(\omega + a) \\ &= C \operatorname*{Sup}_{\omega' \in G}|f(\omega')|\upsilon(\omega') \\ &= C\ \|f\|_\upsilon \end{aligned}$$

هم اکنون به یادآوری دو قضیه می‌پردازیم که نقش مهمی در اثبات نتایج اصلی این مقاله دارند.

قضیهٔ ۱: (قضیهٔ فراگمن- لیندلف[1]) : فرض کنید $S = \{x + iy: a < x < b\}$ و $\bar{S} = \{x + iy: a \leq x \leq b\}$ و f روی $\bar{S}$ پیوسته و $f \in H(S)$. هم‌چنین فرض کنید $B > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$|f(z)| < B \qquad \forall\ z \in S$$

اگر $(a \leq x \leq b)$ $M(x) = Sup\{|f(x + iy)|: -\infty < y < \infty\}$ آن‌گاه

$$M(x)^{b-a} \leq M(a)^{b-x} M(b)^{x-a} \qquad (a < x < b)$$

هم‌چنین از رابطهٔ مذکور می‌توان نتیجه گرفت:

$$|f| \leq max(M(a). M(b)).$$

---

1. Phragmen-Lindelof

اثبات: قضیهٔ ۱۲.۸ از [۱۲] را ببینید.

قضیهٔ ۲: به هر تابع $g \in H_\infty(D)$ یک تابع $g^* \in L^\infty(\sigma D)$ تعریف شده با ضابطهٔ

$$g^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1} g(re^{it})$$

نظیر می‌شود. هم‌چنین $\|g^*\|_\infty = M_\infty(g,D)$

اثبات: قضیهٔ ۱۱.۳۲ از [۱۲] را ببینید.

تذکر۳: به‌وضوح قضیهٔ ۲ برای هر انتقالی از گوی یکه باز D درست است.

لم ۳: فرض کنید $\delta > 0$. در این‌صورت $\alpha(\frac{\delta}{1+\delta} + \frac{1}{1+\delta}\sigma D \setminus \{(1,0)\}) = L_\delta$. یعنی تحت نگاشت α تصویر دایره به مرکز $\frac{\delta}{1+\delta}$ و شعاع $\frac{1}{1+\delta}$ که نقطه $(1,0)$ از آن برداشته شده باشد برابر است با خط L_δ.

اثبات: ابتدا توجه کنید که دایره با مرکز $\frac{\delta}{1+\delta}$ و شعاع $\frac{1}{1+\delta}$ همواره از نقطه $(1,0)$ می‌گذرد و نگاشت α در نقطهٔ $z = (1,0)$ تعریف نشده است. فرض کنید $\alpha(z) = \omega$، اگر $Im\, \alpha(z) = Im\, \omega = \delta$ آن‌گاه

$$\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2 - 2\,Re\, z} = \delta \iff \frac{1}{1+\delta} = |z|^2 + \frac{\delta}{1+\delta} - \frac{2\delta}{1+\delta} Re\, z$$

$$\iff \frac{1}{1+\delta} - \frac{\delta}{1+\delta} + \frac{\delta^2}{1+\delta^2} = \left|z - \frac{\delta}{1+\delta}\right|^2$$

$$\iff \frac{1}{(1+\delta)^2} = \left|z - \frac{\delta}{1+\delta}\right|^2$$

$$\iff \left|\alpha^{-1}(\omega) - \frac{\delta}{1+\delta}\right| = \frac{1}{1+\delta}$$

یعنی α^{-1} خط L_δ را به دایره $\frac{\delta}{1+\delta} + \frac{1}{1+\delta}\sigma D \setminus \{(1,0)\}$ تصویر می‌کند که معادل حکم است.

لم ۴: فرض کنید $0 < \delta < \tau$ و $f: G \to \mathbb{C}$ تمام‌ریخت باشد به‌طوری‌که $f_{|G_\delta}$ کران‌دار باشد در این‌صورت:

$$M_\infty(f, L_\tau) \le M_\infty(f, L_\delta).$$

اثبات: فرض کنید $D_1 = \alpha^{-1}(G_\delta)$ و $D_2 = \alpha^{-1}(G_2)$ در این‌صورت:

$$\alpha^{-1}(L_\delta) = \sigma D_1 \setminus \{(1,0)\}$$

و

$$\alpha^{-1}(L_\tau) = \sigma D_2 \setminus \{(1,0)\}$$

$\tilde{f}(z) = f(\alpha(z))$ قرار می‌دهیم. چون $f_{|G_\delta}$ کران‌دار است پس $\tilde{f}$ نیز روی D_1 کران‌دار است و در نتیجه $\tilde{f} \in H_\infty(D_1)$. حال از به‌کار بردن قضیه ۲ نتیجه می‌شود که $\widetilde{f^*} \in L^\infty(\sigma D_1)$ وجود دارد. به‌طوری‌که $M_\infty(\tilde{f}, D) = \left\|\widetilde{f_{|\delta D_1}}^*\right\|_\infty$. چون اندازهٔ لبگ مجموعه تک نقطه ای برابر صفر است بنابراین:

$$\left\|\widetilde{f^*}\cdot \chi_{\sigma D_1 \setminus \{(1,0)\}}\right\|_\infty = \left\|\widetilde{f_{|\delta D_1}}^*\right\|_\infty$$

و

$$M_\infty(\tilde{f}, D_1) = \left\|\widetilde{f^*}\cdot \chi_{\delta D_1 \setminus \{1,0\}}\right\|_\infty \tag{۳}$$

که در آن χ تابع مشخصه است. به‌طور مشابه

$$M_\infty(\tilde{f}, D_2) = \left\|\widetilde{f^*}\cdot \chi_{\delta D_2 \setminus \{1,0\}}\right\|_\infty \tag{۴}$$

چون $D_2 \subseteq D_1$ پس $M_\infty(\tilde{f}, D_2) \le M_\infty(\tilde{f}, D_1)$.

حال از روابط (۳) و (۴) و قضیهٔ ۲ نتیجه می‌شود.

$$M_\infty(f,L_\tau)=\left\|f^*{}_{|\delta D_2}\right\|_\infty=M_\infty(\tilde f,D_2)\le M_\infty(\tilde f,D_1)=\left\|f^*{}_{|\delta D_1}\right\|_\infty=M_\infty(f,L_\delta)$$

تذکر۴: فرض کران‌دار بودن f روی G_δ در لم ۴ ضروری است . در واقع لم ۴ اگر f فقط روی L_δ و L_τ کران‌دار باشد درست نیست.

مثال ۱: فرض کنید $f:G\to\mathbb{C}$ با ضابطG $f(\omega)=e^{-i\omega}$ تعریف شده باشد. در این‌صورت $\left|f_{|L_\tau}\right|=e^\tau$ و $\left|f_{|L_\delta}\right|=e^\delta$ اما

$$M_\infty(f,L_\delta)<M_\infty(f,L_\tau)\quad \tau>\delta>0.$$

هم اکنون می‌توان اولین نمایش معادل برای نرم سوپریمم وزنی را به‌دست آورد.

قضیه ۳: فرض کنید υ یک وزن استاندارد روی G باشد.

الف) برای هر $\delta_0>0$ یک ثابت مثبت C وابسته به δ_0 وجود دارد .به‌طوری‌که به‌ازای هر $f\in H_\upsilon(G)$

$$\frac{1}{C}Sup\left\{M_\infty(f,L_\delta)\upsilon(\delta i):0<\delta<\delta_0 \text{ یا } \delta\ge\frac{1}{\delta_0}\right\}\le\|f\|_\upsilon\le CSup\left\{M_\infty(f,L_\delta)\upsilon(\delta i):0<\delta\le\delta_0 \text{ یا } \delta\ge\frac{1}{\delta_0}\right\} \quad (۵)$$

ب) اگر υ یک وزن استاندارد و کران‌دار روی G باشد، آن‌گاه یک ثابت مثبت d وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $f\in H_\upsilon(G)$ و هر $\delta_0>0$

$$\frac{1}{d}Sup\{M_\infty(f,L_\delta)\upsilon(\delta i):0<\delta<\delta_0\}\le\|f\|_\upsilon\le dSup\{M_\infty(f,L_\delta)\upsilon(\delta i):0<\delta\le\delta_0\}$$

اثبات: الف) از لم ۱ نتیجه می‌شود که $C'>0$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\frac{1}{C'}\upsilon(\omega_1)\le\upsilon(\omega_2)\le C'\upsilon(\omega_2)\qquad\qquad \forall\,\omega_1,\omega_2\in L_\delta$$

چون $\|f\|_\upsilon=\mathrm{Sup}_{\omega\in G}|f(\omega)|\,\upsilon(\omega)$ بنابراین

$$\frac{1}{C'}Sup\{M_\infty(f,L_\delta)\upsilon(\delta i):0<\delta\}\le\|f\|_\upsilon\le C'Sup\{M_\infty(f,L_\delta)\upsilon(\delta i):0<\delta\}\qquad (۶)$$

بدیهی است که برای هر $\delta_0>0$

$$\frac{1}{C'}Sup\left\{M_\infty(f,L_\delta)\upsilon(\delta i):0<\delta<\delta_0 \text{ یا } \delta\ge\frac{1}{\delta_0}\right\}\le\|f\|_\upsilon\qquad (۷)$$

اگر $\delta_0\ge1$ آن‌گاه به‌وضوح

$$.\|f\|_\upsilon\le C'Sup\{M_\infty(f,L_\delta)\upsilon(\delta i):0<\delta\le\delta_0 \text{ یا } \delta\ge\frac{1}{\delta_0}\}$$

حال فرض کنید $0<\delta_0<1$ چون $\delta_0<1$ می‌توان نیم‌صفحهٔ بالایی را به سه قسمت G_1، G_2 و G_3 به‌صورت زیر تقسیم کرد

$$G_1=\{\omega\in G:0<Im\,\omega\le\delta_0\},G_2=\left\{\omega\in G:\delta_0\le Im\,\omega\le\frac{1}{\delta_0}\right\},G_3=\{\omega\in G:Im\,\omega\ge\frac{1}{\delta_0}\}$$

به‌وضوح

$$\|f\|_\upsilon=\max\left\{\left\|f_{|G_1}\right\|_\upsilon,\left\|f_{|G_2}\right\|_\upsilon,\left\|f_{|G_3}\right\|_\upsilon\right\}\qquad (۸)$$

با توجه به رابطهٔ (۷) کافی است که $M_\infty(f,L_\delta)\upsilon(\delta i)$ را فقط روی مجموعهٔ G_2 تقریب بزنیم. حال فرض کنید $(0<\delta_0<1)\delta_0\le\delta\le\frac{1}{\delta_0}$ چون توابع $\frac{\upsilon(\delta i)}{\upsilon(\delta_0 i)}$ و $\frac{\upsilon(\delta i)}{\upsilon(\frac{1}{\delta_0}i)}$ روی مجموعهٔ فشرده $[\delta_0,\frac{1}{\delta_0}]$ پیوسته هستند بنابراین ثابت‌های مثبت C_1 و C_2 وجود دارند به‌طوری‌که

$$\upsilon(\delta i)\le C_1\upsilon(\delta_0 i)\ ,\quad \upsilon(\delta i)\le C_2\upsilon\left(\frac{1}{\delta_0}i\right)\qquad (۹)$$

حال از به‌کار بردن قضیه ۱ نتیجه می‌شود

$$M_\infty(f,L_\delta) \le M_\infty(f,L_{\delta_0})^{\frac{\frac{1}{\delta_0}-\delta}{\frac{1}{\delta_0}-\delta_0}} M_\infty(f,L_\delta)^{\frac{\delta-\delta_0}{\frac{1}{\delta_0}-\delta_0}}$$

$$\le \max\left(M_\infty(f,L_\delta), M_\infty\left(f,L_{\frac{1}{\delta_0}}\right)\right)^{\frac{\frac{1}{\delta_0}-\delta}{\frac{1}{\delta_0}-\delta_0}} \max\left(M_\infty(f,L_\delta), M_\infty\left(f,L_{\frac{1}{\delta_0}}\right)\right)^{\frac{\delta-\delta_0}{\frac{1}{\delta_0}-\delta_0}}$$

$$\le \max\left(M_\infty(f,L_\delta), M_\infty\left(f,L_{\frac{1}{\delta_0}}\right)\right) \qquad (۱۰)$$

اگر $\max\left(M_\infty\left(f,L_{\delta_0}\right), M_\infty\left(f,L_{\frac{1}{\delta_0}}\right)\right) = M_\infty\left(f,L_{\delta_0}\right)$ آن‌گاه از روابط (۹) و (۱۰) نتیجه می‌شود:

$$M_\infty(f,L_\delta)\upsilon(\delta i) \le C_1 M_\infty(f,L_\delta)\upsilon(\delta i) \qquad (۱۱)$$

اگر $\max\left(M_\infty\left(f,L_{\delta_0}\right), M_\infty\left(f,L_{\frac{1}{\delta_0}}\right)\right) = M_\infty\left(f,L_{\frac{1}{\delta_0}}\right)$ آن‌گاه از روابط (۹) و (۱۰) نتیجه می‌شود که

$$M_\infty(f,L_\delta)\upsilon(\delta i) \le C_2 M_\infty\left(f,L_{\frac{1}{\delta_0}}\right)\upsilon\left(\frac{1}{\delta_0}i\right) \qquad (۱۲)$$

روابط (۱۱) و (۱۲) نیز ایجاب می‌کنند که

$$M_\infty(f,L_\delta)\upsilon(\delta i) \le C_3 Sup\left\{M_\infty(f,L_\tau)\upsilon(\tau i): 0<\tau<\delta_0 \text{ یا } \tau \ge \frac{1}{\delta_0}\right\} \qquad (۱۳)$$

که $C_3 = \max\{C_1, C_2\}$. حال اگر روابط (۶) ، (۸) و (۱۳) را در نظر بگیریم و $C = \max\{C', C_3\}$ قرار دهیم قسمت (الف) ثابت می‌شود.

اثبات ب): فرض کنید $\delta_0 > 0$ داده شده باشد. از رابطهٔ (۵) نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{C} Sup\{M_\infty(f,L_\delta)\upsilon(\delta i): 0<\delta\le\delta_0\} \le \|f\|_\upsilon.$$

چون $f \in H_\upsilon(G)$ و υ کران‌دار است از لم ۴ نتیجه می‌شود:

$$M_\infty(f,L_\delta) \le M_\infty(f,L_{\delta_0})$$

و در نتیجه

$$M_\infty(f,L_\delta)\upsilon(\delta i) \le M_\infty\left(f,L_{\delta_0}\right)\upsilon(\delta_0 i)\frac{\upsilon(\delta i)}{\upsilon(\delta_0 i)}.$$

چون υ کران‌دار و تقریباً صعودی است از این رو، $C' > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\frac{\upsilon(\delta i)}{\upsilon(\delta_0 i)} \le C' \qquad \forall\, \delta \ge \delta_0$$

بنابراین

$$Sup\{M_\infty(f,L_\delta)\upsilon(\delta i): \delta>\delta_0\} \le C' M_\infty(f,L_\delta)\upsilon(\delta i)$$

حال اگر $d = \max\{C, C'\}$ اختیار شود حکم ثابت می‌شود.

برای به‌دست آوردن دومین نمایش معادل برای نرم سوپریمم وزنی به لم (۵) نیاز داریم.

لم ۵: اگر υ یک وزن استاندارد روی G و $\tilde{\upsilon}: D \to (0,\infty)$ را با ضابطهٔ

$$\tilde{\upsilon}(z) = \upsilon\big(\alpha(-|z|)\big) = \upsilon\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}i\right)$$

تعریف کنیم، آن‌گاه $\tilde{\upsilon}$ یک وزن استاندارد روی D است.

اثبات : به‌وضوح $\tilde{\upsilon}$ شعاعی و پیوسته است. هم‌چنین اگر

$$|z_1| < |z_2| \Rightarrow \frac{1-|z_2|}{1+|z_2|} < \frac{1-|z_1|}{1+|z_1|}$$

و چون υ تقریباً صعودی روی محور موهومی است از این رو، $\tilde{\upsilon}$ روی D (نسبت به $|z|$) تقریباً نزولی می‌شود (در واقع $\tilde{\upsilon}$ نیز روی D وزن استاندارد است)

هم‌چنین

$$\lim_{|z|\to 1^-} \tilde{\upsilon}(z) = \lim_{|z|\to 1^-} \upsilon\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}i\right) = 0.$$

قضیهٔ ۴: فرض کنید υ یک وزن استاندارد روی G و $\tilde{\upsilon}: D \to (0.\infty)$ مانند لم ۵ تعریف شده باشد. در این صورت ثابت‌های مثبت C_1وC_2 وجود دارند به‌طوری‌که

$$C_1\|f\|_\upsilon \le \mathrm{Sup}_{a\in\mathbb{R}}\|(T_a f)\mathrm{o}\alpha\|_{\tilde{\upsilon}} \le C_2\|f\|_\upsilon.$$

در واقع برای نرم سوپریمم وزنی $\|\cdot\|_\upsilon$ و υ وزن استاندارد روی G، یک نرم سوپریمم وزنی معادل $\|\cdot\|_{\tilde{\upsilon}}$، ($\tilde{\upsilon}$ وزن استاندارد روی D) یافته‌ایم.

اثبات: با توجه به قسمت (ب) قضیهٔ ۳، ثابت مثبت d وجود دارد به طوری‌که

$$\frac{1}{d}\mathrm{Sup}_{0<\delta<1} M_\infty(f, L_\delta)\upsilon(\delta i) \le \|f\|_\upsilon \le d\,\mathrm{Sup}_{0<\delta<1} M_\infty(f, L_\delta)\upsilon(\delta i) \qquad (۱۴)$$

فرض کنید $\omega \in G$ دل‌خواه پس از انتخاب ثابت و $d = Im\,\omega < 1$.

هم‌چنین فرض کنید $a = Re\,\omega$. با توجه به لم ۱ ثابتی مانند $d_1 > 1$ وجود دارد بهطوری‌که

$$|f(\omega)|\upsilon(\omega) \le d_1|(T_a f)(i\delta)|\upsilon(\delta i)$$

اگر $z = \alpha^{-1}(i\delta) = \frac{\delta-1}{\delta+1}$ قرار دهیم آن‌گاه $|z| = -Re\,z = \frac{1-\delta}{1+\delta}$ (توجه کنید که $\delta < 1$) و در نتیجه $\delta = \frac{1-|z|}{1+|z|}$. بنابراین

$$|f(\omega)|\upsilon(\omega) \le d_1|(T_a f)(\frac{1-|z|}{1+|z|}i)|\upsilon(\frac{1-|z|}{1+|z|}i)$$

یا به‌طور معادل

$$|f(\omega)|\upsilon(\omega) \le d_1|(T_a f)(\alpha(-|z|))|\upsilon(\alpha(-|z|))$$

چون $Re\,z = z = -|z|$، پس از رابطهٔ مذکور نتیجه می‌شود

$$|f(\omega)|\upsilon(\omega) \le d_1 \underset{z\in D}{Sup}|(T_a f)\mathrm{o}\alpha(z)|\tilde{\upsilon}(z) \ = d_1\|(T_a f)\mathrm{o}\alpha\|_{\tilde{\upsilon}}$$

بنابراین

$$Sup\{|f(\omega)|\upsilon(\omega): \omega \in G, Im\,\omega < 1\} \le d_1 \underset{a\in\mathbb{R}}{Sup}\|(T_a f)\mathrm{o}\alpha\|_{\tilde{\upsilon}} \qquad (۱۵)$$

از روابط (۱۴) و (۱۵) نتیجه می‌شود که $C_1 > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$C_1\|f\|_\upsilon \le \underset{a\in\mathbb{R}}{Sup}\|(T_a f)\mathrm{o}\alpha\|_\upsilon$$

حال فرض کنید $z \in D$ دلخواه پس از انتخاب ثابت باشد. هم‌چنین $a \in \mathbb{R}$ ثابت را در نظر بگیرید. با توجه به این‌که

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \le \frac{1-|z|^2}{|1+z|^2} = Im\,(\alpha(z))$$

و این‌که υ روی G استاندارد است نتیجه می‌شود که $d_2 > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\upsilon(\frac{1-|z|}{1+|z|}i) \le d_2\upsilon(\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}i)$$

بنابراین

$$|(T_a f)\mathrm{o}\alpha(z)|\tilde{v}(z) \leq d_2|(T_a f)\mathrm{o}\alpha(z)|v(Im\left(\alpha(z)\right)i)$$

حال اگر $\alpha(z) = \omega$ آن‌گاه

$$|(T_a f)\mathrm{o}\alpha(z)|\tilde{v}(z) \leq d_2|(T_a f)(\omega)|v(\omega) \leq d_2\|T_a f\|_v \leq d_3\|f\|_v$$

که نامساوی آخر در رابطهٔ مذکور از لم ۲ نتیجه شده است. نهایتاً

$$\operatorname*{Sup}_{a\in\mathbb{R}}\operatorname*{Sup}_{z\in D}|(T_a f)\mathrm{o}\alpha(z)|\tilde{v}(z) = \operatorname*{Sup}_{a\in\mathbb{R}}\|(T_a f)\mathrm{o}\alpha\|_{\tilde{v}} \leq d_3\|f\|_v$$

حال کافی است $C_2 = d_3$ اختیار شود.

منابع

1. Shields A. L., Willams D. L., "Bounded projections and the growth of harmonic conjugates in the disc", Michigan Math. J. 3 (1982) 3-25.
2. Shields A. L., Willams D. L., "Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of harmonic functions", J. Reine, Angew Math. 299/300 (1978) 265-279.
3. Shields A. L., Willams D. L., "Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of analytic functions", Trans, Amer. Math. Soc. 162 (1971) 287-302.
4. Lusky W., "On the isomorphism classes of weighted spaces of harmonic and holomorphic functions", studia Math. 1(2006) 19-45.
5. Lusky W., "On weighted spaces of harmonic and holomorphic functions", J. Lond. Math Soc. 51(1995) 309-320.
6. Lusky W., "Growth conditions for harmonic and holomorphic functions", Functional Analysis (Trier,1994), S. Dierolfetal (ends), de Gruyter (1996) 281-291.
7. Bonet J., Domanski P., Lindstrom M., "Pointwise multiplication operators on weighted Banach spaces of analytic functions", studia math. 137(1999) 177-194.
8. Bonet J., Domanski P., Lindstrom M., "Essential norm and weak compactness of composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions", Canad. Math. Bull. 42 (1999) 139-148.
9. Ardalani M. A., Lusky W., "Bounded operators on weightedspaces of holomorphic functions on upper half plane", studia math. 209 (2012) 225-234.
10. Ardalani M. A., Lusky W., "Weighted spaces of holomorphic functions on the upper half-planes math", scandinavica, 111 (2012) 244-260.
11. Ardalani M.A., "Boundedness of composition operator between weighted spaces of holomorphic functions on the upper half-plane", Taiwanese journal of mathematics, 18, No.1 (2014) 277-283.
12. Rudin W., "Real and complex analysis", Mc. Grawhill book company (1966).