

## زیرخمینه‌های کنتاکت CR با بعد CR ماکسیمال کنتاکت از فضا فرم

## ساساکی

محمد المکچی\*، اسمعیل عابدی

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

پذیرش ۹۷/۰۶/۲۶

دریافت ۹۶/۰۴/۱۴

## چکیده

در این مقاله زیرخمینه‌های کنتاکت CR با بعد ماکسیمال کنتاکت در فضا فرم ساساکی را در نظر می‌گیریم و ساختار

کلی این زیرخمینه‌ها را بررسی کرده سپس ساختار این زیرخمینه‌ها را با شرط

$$h(FX, Y) + h(X, FY) = g(FX, Y)\zeta$$

برای میدان برداری قائم  $\zeta$ ، که مخالف صفر است، را بررسی شده است و در حالت کلی این زیرخمینه‌ها را رده‌بندی

می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: فضا فرم ساساکی، زیرخمینه کنتاکت CR با بعد ماکسیمال کنتاکت، زیرخمینه.

## مقدمه

فرض کنید  $M$  زیرخمینه‌ای (هم‌بند) از بعد  $n+1$  از فضا فرم ساساکی  $(\overline{M}(c), \phi, \zeta, \eta, g)$  باشد. هم‌چنین اگر زیرفضاهای ماکسیمال  $\phi$ -پایای  $M$  از بعد  $n-1$  باشند آن‌گاه یک ساختار به‌طور طبیعی با متر القایی می‌پذیرد [۹]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۳]، [۱۴] که زیرخمینه‌های کنتاکت CR با بعد ماکسیمال نامیده می‌شوند. در حالتی که  $M$  ابررویه باشد آن‌گاه زیرفضاهای ماکسیمال  $\phi$ -پایای  $M$  لزوماً از بعد  $n-1$  است. اما در حالتی که  $M$  از نقص بعد بالاتر باشد نتایج کم‌تر شناخته شده‌ای از زیرخمینه را می‌دانیم.

کیم<sup>۱</sup> و پاک<sup>۲</sup> زیرخمینه‌های کنتاکت CR با بعد ماکسیمال در کره واحد را که در شرط

$$h(FX, Y) + h(X, FY) = 0$$

صدق می‌کرد را بررسی کردند [۹]، [۱۴] و این زیرخمینه‌ها را مشخص کردند که در آن  $F$  نشان‌گر درون‌ریختی پاد متقارن القایی از  $\phi$  بوده است که روی کلاف مماس  $TM$  اثر می‌کند و  $h$  دومین فرم اساسی روی  $M$  است. هم‌چنین اوکومورا<sup>۳</sup> و دجوریک<sup>۴</sup> زیرخمینه‌های کنتاکت CR با بعد ماکسیمال با همین شرط را در فضا فرم مختلط را بررسی و مطالعه کردند [۴]، [۵].

بعد از آن، کیم، چوی و پاک [۱۰] و اوکومورا و دجوریک [۶]، [۷]، این زیرخمینه‌ها را به‌ترتیب در کره واحد و فضا فرم مختلط بررسی کردند که در شرط

$$h(FX, Y) + h(X, FY) = g(FX, Y) \zeta$$

صدق می‌کنند که در آن  $\zeta$  میدان برداری قائم مخالف صفر بر  $M$  است.

هم‌چنین، کیم، چوی و پاک این زیرخمینه‌ها را در فضا فرم ساساکی با شرط

$$h(FX, Y) + h(X, FY) = 0$$

بررسی کرده و این زیرخمینه‌ها را مشخص کردند [۱۰].

در این مقاله زیرخمینه‌های کنتاکت CR با بعد ماکسیمال در فضا فرم ساساکی با شرط

$$h(FX, Y) + h(X, FY) = g(FX, Y) \zeta$$

را مطالعه و بررسی می‌کنیم.

### تعاریف و مفاهیم مقدماتی

خمینه دیفرانسیل پذیر  $M^{2n+1}$  دارای یک ساختار تقریباً کنتاکت نامیده می‌شود اگر میدان برداری همیشه ناصفر

$\xi$ ، یک فرم  $\eta$  و میدان تانسور  $\phi$  از نوع  $(1,1)$  وجود داشته باشند به طوری که در روابط

$$\eta(\xi) = 1, \quad \phi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \quad (1)$$

که  $I$  نشان‌دهنده میدان انتقال همانی روی فضای مماس در همه نقاط است، صدق کند. میدان برداری  $\xi$  میدان برداری مشخصه نامیده می‌شود. این شرایط روی خمینه ایجاب می‌کنند که  $\phi\xi = 0$  و  $\eta \circ \phi = 0$  است. هم‌چنین

نشان می‌دهد اندومورفیسم  $\phi$  در هر نقطه روی  $M^{2n+1}$  دارای رتبه  $2n$  است. خمینه  $M^{2n+1}$  همراه با ساختار تقریباً کنتاکت  $(\phi, \xi, \eta)$ ، خمینه تقریباً کنتاکت نامیده می‌شود و به صورت  $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta)$  نمایش داده می‌شود [۳].

اگر خمینه تقریباً کنتاکت  $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta)$  مجهز به متر ریمانی  $g$  باشد به طوری که در رابطه

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

برای همه میدان‌های برداری  $X$  و  $Y$  صدق کند، در این صورت متر ریمانی  $g$ ، متر سازگار نامیده می‌شود و ساختار

$(\phi, \xi, \eta, g)$  یک ساختار متری تقریباً کنتاکت و خمینه  $M^{2n+1}$  با این ساختار، خمینه تقریباً کنتاکت ریمانی نامیده

می‌شود و به صورت  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$  نشان داده می‌شود [۳].

توجه داشته باشید که برای همه میدان‌های برداری  $X$  مماس بر  $M^{2n+1}$ ،

$$\eta(X) = g(X, \xi),$$

است. بنابراین  $\eta$  متریک دوگان برای میدان برداری مشخصه  $\xi$  است [۳].

خمینه  $M^{2n+1}$  کنتاکت نامیده می‌شود اگر به یک فرم سراسری  $\eta$  روی هر نقطه  $M^{2n+1}$  مجهز باشد

به طوری که در رابطه

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0,$$

صدق کند. یک فرم  $\eta$  فرم کنتاکت نامیده می‌شود [۳].

زیرخمینه  $M$  از خمینه کنتاکت  $M^{2n+1}$  مماس بر میدان برداری  $\xi$  زیرخمینه پایا نامید می‌شود اگر برای هر نقطه

$\phi(T_p M) \subset T_p M$ ،  $p \in M$  باشد. هم‌چنین اگر برای هر نقطه  $\phi(T_p M) \subset T_p^\perp M$ ،  $p \in M$  باشد زیرخمینه

را ناپایا می‌نامند [۳].

زیرخمینه  $M$  از خمینه کنتاکت  $M^{2n+1}$  مماس بر میدان برداری  $\xi$  را زیرخمینه CR می‌نامند هرگاه یک جفت توزیع متمم متعامد  $D$  و  $D^\perp$  روی  $M$  موجود باشد به طوری که

$$1. \quad TM = D \oplus D^\perp \oplus \mathbb{R}\xi, \quad \text{که } \mathbb{R}\xi \text{ توزیع یک بعدی تولید شده به وسیله } \xi \text{ است؛}$$

$$2. \quad \text{تحت } D \text{ تحت } \phi \text{ پایا باشد یعنی برای هر } p \in M, \phi(D_p) \subset D_p \text{ برقرار باشد؛}$$

$$3. \quad \text{تحت } D^\perp \text{ ناپایا باشد یعنی برای هر } p \in M, \phi(D_p^\perp) \subset T_p^\perp M, \text{ برقرار باشد [۳].}$$

فرض کنید  $(M, \phi, \xi, \eta, g)$  خمینه کنتاکت  $(2n+1)$  بعدی باشد به طوری که

$$(2) \quad \nabla_X \xi = \phi X, \quad (\nabla_X \phi)Y = -g(X, Y)\xi + \eta(Y)X,$$

که  $\nabla$  التصاق لوی-چویتا نسبت به متر  $g$  را نشان می‌دهد، در این صورت  $M$  یک خمینه ساساکی نامیده می‌شود [۳].

صفحه برشی  $\pi$  از  $TM$  برای هر  $x \in M$ ، اگر در رابطه  $\phi\pi_x \subseteq \pi_x$  صدق کند یک  $\phi$ -برش نامیده می‌شود.

$M$  با خمیدگی  $\phi$ -برشی ثابت نامیده می‌شود اگر خمیدگی برشی همه  $\phi$ -برش‌ها ثابت باشند. فضا فرم ساساکی

یک خمینه ساساکی با خمیدگی  $\phi$ -برشی ثابت است. اگر این مقدار ثابت برابر  $4c$  باشد در این صورت فضا فرم

ساساکی را به صورت  $M(c)$  نشان می‌دهند. در این حالت خمیدگی ریمانی میدان تانسوری  $R$  برای هر

$$X, Y, Z \in \chi(M) \text{ بدین صورت است [۱۵].}$$

$$R(X, Y)Z = \frac{c+3}{4} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} - \frac{c-1}{4} \{ \eta(Z)[\eta(Y)X - \eta(X)Y] + [g(Y, Z)\eta(X) - g(X, Z)\eta(Y)]\xi - g(\phi Y, Z)\phi X + g(\phi X, Z)\phi Y + 2g(\phi X, Y)\phi Z \}. \quad (3)$$

### مفاهیم اصلی

فرض کنید  $\overline{M}(c)$  فضا فرم ساساکی با بعد  $(2m+1)$  با ساختار  $(\phi, \xi, \eta, g)$  باشد. فرض کنید  $M$  زیرخمینه

CR با بعد  $(n+1)$  و مماس بر میدان برداری ساختاری  $\xi$  از  $\overline{M}(c)$  باشد و  $D_x$  برای هر  $x \in M$  زیرفضای  $\phi$ -

پایا با بعد ثابت در  $T_x M$  باشد. بنابراین برای هر  $x \in M$ ،  $D_x$  نمی‌تواند شامل  $\xi$  باشد. همچنین فرض کنید برای

هر  $x \in M$ ، بعد  $D_x^\perp$  ثابت و برابر مقدار ۱ باشد یعنی  $\dim D_x^\perp = 1$ . در حقیقت میدان برداری ناصفر  $U$  در  $D_x^\perp$

وجود دارد به طوری که  $D^\perp = \text{Span} U$ . بنابراین

$$(4) \quad N := \phi U$$

باید بر  $M$  عمود باشد. بنابراین  $\phi TM \subseteq TM \oplus \text{Span} N$ . حال با در نظر گرفتن میدان‌های برداری یکه متعامد

$$N_i, i = 1, \dots, p; N_1 := N, p := 2m - n$$

برای فضای متعامد بر  $M$ ، برای هر میدان برداری مماس  $X$ ، داریم:

$$(5) \quad \phi X = FX + u(X)N.$$

با توجه به ساختار القایی  $F$  از  $\phi$  به آسانی نتیجه می‌شود که  $F$  اندومورفیسم پادمتقارن روی  $T_x M$  است.

همچنین با توجه به ساختار  $T_x^\perp M$ ، ضرایب  $P_{ij}$  موجودند به طوری که برای  $i = 2, \dots, p$  داریم:

$$(6) \quad \phi N_i = \sum_{j=2}^p P_{ij} N_j,$$

و  $P_{ij} = -P_{ji}$ . چون میدان برداری ساختاری  $\xi$  مماس بر  $M$  است و با توجه به (۲)، (۴) و (۵) داریم:

$$F\xi = 0, \quad FU = 0, \quad u(X) = g(U, X), \quad u(\xi) = \eta(U) = 0. \quad (7)$$

حال با اثر دادن  $\phi$  بر (۵) و استفاده از (۲)، (۴)، (۵) و (۷) داریم:

$$F^2X = -X + u(X)U + \eta(X)\xi, \quad u(FX) = 0. \quad (8)$$

هم‌چنین از (۲) و (۷) داریم:

$$\phi N = -U. \quad (9)$$

با توجه به (۶) پایه موضعی یکه عمود  $\{N, N_a, N_{a^*}\}_{a=1, \dots, q}$  از بردارهای قائم بر  $M$  چنان وجود دارد که

$$N_{a^*} := \phi N_a, \quad a = 1, \dots, q := \frac{(p-1)}{2}. \quad (10)$$

اگر التصاق لوی-چویتا روی  $\bar{M}(c)$  و  $M$  را به ترتیب با  $\bar{\nabla}$  و  $\nabla$  نشان دهیم و  $\nabla^\perp$  بیان‌گر التصاق قائم‌القایی از  $\bar{\nabla}$  روی کلاف قائم  $TM^\perp$  باشد بنا بر فرمول وینگارتن و گاوس برای میدان‌های برداری  $X, Y$  روی  $M$  داریم:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \quad (11)$$

$$\bar{\nabla}_X N = -AX + \nabla_X^\perp N = -AX + \sum_{a=1}^q \{s_a(X)N_a + s_{a^*}(X)N_{a^*}\}, \quad (12)$$

$$\bar{\nabla}_X N_a = -A_a X - s_a(X)N + \sum_{b=1}^q \{s_{ab}(X)N_b + s_{ab^*}(X)N_{b^*}\}, \quad (13)$$

$$\bar{\nabla}_X N_{a^*} = -A_{a^*} X - s_{a^*}(X)N + \sum_{b=1}^q \{s_{a^*b}(X)N_b + s_{a^*b^*}(X)N_{b^*}\}, \quad (14)$$

که  $s_a, s_{a^*}, s_{ab}, s_{ab^*}, s_{a^*b}, s_{a^*b^*}$  ضرایب التصاق قائم  $\nabla^\perp$  و  $h$  نشان‌گر دومین فرم اساسی و  $A, A_a, A_{a^*}$  عملگرهای شکل متناظر میدان‌های برداری قائم  $N, N_a, N_{a^*}$  هستند. هم‌چنین با توجه به تعریف دومین فرم اساسی داریم:

$$h(X, Y) = g(AX, Y)N + \sum_{a=1}^q \{g(A_a X, Y)N_a + g(A_{a^*} X, Y)N_{a^*}\}. \quad (15)$$

چون میدان برداری  $\xi$  روی  $M$  مماس است بنا بر (۲)، (۴)، (۹)، (۱۰)، (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) داریم:

$$A_a X = -FA_{a^*} X + s_{a^*}(X)U, \quad A_{a^*} X = FA_a X - s_a(X)U, \quad (16)$$

$$s_a(X) = -u(A_{a^*} X), \quad s_{a^*}(X) = u(A_a X). \quad (17)$$

به‌علاوه، چون  $F$  پاد متقارن است با توجه به معادله (۱۵) داریم:

$$g((FA_a + A_a F)X, Y) = s_a(X)u(Y) - s_a(Y)u(X), \quad (18)$$

$$g((FA_{a^*} + A_{a^*} F)X, Y) = s_{a^*}(X)u(Y) - s_{a^*}(Y)u(X). \quad (19)$$

با مشتق‌گیری از معادلات (۴) و (۹) و مقایسه قسمت‌های مماس و قائم و استفاده از معادلات (۲)، (۴)، (۹)، (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) و (۱۵) داریم:

$$(\nabla_Y F)X = -g(Y, X)\xi + \eta(X)Y - g(AY, X)U + u(X)AY, \quad (20)$$

$$\nabla_X U = FAX, \quad (\nabla_Y u)X = g(FAY, X), \quad (21)$$

هم‌چنین چون میدان برداری  $\xi$  مماس بر خمینه  $M$  بود با استفاده از روابط (۲)، (۱۱)، (۱۵) داریم:

$$\nabla_X \xi = FX, \quad (\nabla_X \eta)Y = g(FX, Y), \quad (22)$$

$$\eta(AX) = g(A\xi, X) = u(X), \quad A\xi = U, \quad (23)$$

$$A_a \xi = 0, \quad A_{a^*} \xi = 0, \quad a = 2, \dots, q. \quad (24)$$

هم‌چنین بنابر رابطه (۳)، (۵) و (۶) بنابر معادله کودازی برای میدان‌های برداری  $X, Y$  مماس بر  $M$  داریم:

$$\begin{aligned} (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X &= \frac{c-1}{4} \{u(X)FY - u(Y)FX - 2g(FX, Y)U\} \\ &+ \sum_{a=1}^q \left\{ s_a(X)A_a Y - s_a(Y)A_a X + s_{a^*}(X)A_{a^*} Y - s_{a^*}(Y)A_{a^*} X \right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} (\nabla_X A_a)Y - (\nabla_Y A_a)X &= s_a(Y)AX - s_a(X)AY \\ &+ \sum_{b=1}^q \{s_{ab}(X)AbY - s_{ab}(Y)A_b X + s_{ab^*}(X)A_{b^*} Y - s_{ab^*}(Y)A_{b^*} X\}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} (\nabla_X A_{a^*})Y - (\nabla_Y A_{a^*})X &= s_{a^*}(Y)AX - s_{a^*}(X)AY \\ &+ \sum_{b=1}^q \{s_{a^*b}(X)AbY - s_{a^*b}(Y)AbX + s_{a^*b^*}(X)A_{b^*} Y - s_{a^*b^*}(Y)A_{b^*} X\}, \end{aligned} \quad (27)$$

که  $R$  و  $R^\perp$  به ترتیب بیان گر تانسور خمیدگی و تانسور خمیدگی قائم بر  $M$  هستند.

### نتایج اولیه

فرض کنیم برای زیرخمینه  $M$  با بعد CR ماکسیمال، میدان برداری قائم مخالف صفر چون  $\zeta$  موجود باشد به طوری که در معادله (۴.۱) صدق کند

$$h(FX, Y) - h(X, FY) = g(FX, Y)\zeta, \quad (28)$$

که میدان‌های برداری  $X, Y$  مماس بر  $M$  هستند. از طرفی بنابر رابطه (۱۰) داریم:

$$\zeta = \rho N + \sum_{a=1}^q (\rho_a N_a + \rho_{a^*} N_{a^*}).$$

بنابر روابط (۱۵) و (۲۸) برای هر  $a = 1, \dots, q$  داریم:

$$(AF + FA)X = \rho FX, \quad (29)$$

$$(A_a F + FA_a)X = \rho_a FX, \quad (A_{a^*} F + FA_{a^*})X = \rho_{a^*} FX. \quad (30)$$

هم‌چنین از معادلات (۱۸) و (۱۹) داریم:

$$s_a(X)u(Y) - s_a(Y)u(X) = \rho_a g(FX, Y), \quad (31)$$

$$s_{a^*}(X)u(Y) - s_{a^*}(Y)u(X) = \rho_{a^*} g(FX, Y). \quad (32)$$

با قرار دادن  $Y = U$  در (۳۱) و (۳۲) و استفاده از رابطه (۷) برای هر  $a = 1, \dots, q$  داریم:

$$s_a(X) = s_a(U)u(X), \quad s_{a^*}(X) = s_{a^*}(U)u(X), \quad (33)$$

و با قرار دادن  $Y = \xi$  در (۳۱) و (۳۲) و استفاده از رابطه (۷) برای هر  $a = 1, \dots, q$  داریم:

$$s_a(\xi) = 0, s_{a^*}(\xi) = 0. \quad (34)$$

با جای گذاری روابط (۳۳) و (۳۴) در روابط (۳۱) و (۳۲) برای هر  $a = 1, \dots, q$  داریم:

$$\rho_a = 0, \rho_{a^*} = 0. \quad (35)$$

بنابراین با توجه به رابطه (۳۰) برای هر  $a = 1, \dots, q$  داریم:

$$FA_a + A_a F = 0, FA_{a^*} + A_{a^*} F = 0. \quad (36)$$

لم ۱. زیرفضای  $D$  و  $span\{\xi, U\}$  تحت عملگر  $A$  پایا هستند.

برهان. از معادلات (۷)، (۸)، (۱۷)، (۲۳)، (۲۴) و (۲۹) داریم:

$$AU = \lambda U + \xi, \lambda := u(AU) \quad (37)$$

و برای هر  $a = 1, \dots, q$  داریم:

$$A_a U = u(A_a U)U = s_{a^*}(U)U, A_{a^*} U = u(A_{a^*} U)U = -s_a(U)U. \quad (38)$$

با جای گذاری  $FX$  به جای  $X$  در معادله (۲۹) و استفاده از روابط (۹)، (۲۶) و (۳۷) داریم:

$$AX = \{(\lambda - \rho)u(X) + \eta(X)\}U + \{u(X) - \rho\eta(X)\}\xi + FAFX + \rho X. \quad (39)$$

معادله (۳۷) نشان می‌دهد که زیرفضای  $D$  و  $span\{\xi, U\}$  تحت عملگر  $A$  پایا هستند.

بنابر لم مذکور برداری ویژه  $W_1$  و  $W_2$  در زیرفضای  $span\{\xi, U\}$  وجود دارند به طوری که

$$AW_1 = \gamma_1 W_1, AW_2 = \gamma_2 W_2. \quad (40)$$

لم ۲. برای مقادیر ویژه  $\gamma_1, \gamma_2$  داریم  $\gamma_1 = -\tan \theta, \gamma_2 = \cot \theta$  و  $\gamma_2 + \gamma_1 = \lambda$ .

برهان. بنابر (۳۷) و (۳۸) چون  $\xi$  و  $U$  بردار ویژه برای عملگر  $A$  نیستند بنابراین  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  موجود است که

$$W_1 = \xi \cos \theta - U \sin \theta, W_2 = \xi \sin \theta + U \cos \theta. \quad (41)$$

بنابراین داریم

$$U = -W_1 \sin \theta + W_2 \cos \theta,$$

از طرفی بنابر (۳۷)، (۳۹)، (۴۰) و (۴۱) داریم

$$U = \gamma_1 W_1 \cos \theta + \gamma_2 W_2 \sin \theta,$$

از این رو داریم:

$$\gamma_2 = \cot \theta, \gamma_1 = -\tan \theta. \quad (42)$$

هم‌چنین بنابر روابط (۳۷)، (۳۹)، (۴۰)، (۴۱) و (۴۲) داریم:

$$\gamma_2 + \gamma_1 = \lambda. \quad (43)$$

هم‌چنین چون زیرفضای  $D$  تحت عملگر  $A$  پایا بود پایه یک متعامد  $X_1, \dots, X_{2n-2}$  موجود است به طوری که

$$AX_i = \alpha_i X_i, i = 1, \dots, 2n-2.$$

لم ۳. برای بردار ویژه  $X_i$  از  $D$  با مقدار ویژه  $\alpha_i$  داریم  $\alpha_i^2 - \rho\alpha_i + \frac{\rho\lambda}{2} + \frac{c+3}{4} = 0$ .

برهان. با جای گذاری (۳۲) و (۳۴) در (۲۶) برای میدان‌های برداری  $X, Y$  مماس بر  $M$  داریم:

$$(\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X = \frac{c-1}{4} \{u(X)FY - u(Y)FX - 2g(FX, Y)U\}. \quad (44)$$

حال با مشتق‌گیری از معادله (۳۷) و استفاده از متقارن بودن عملگر  $A$  و رابطه (۴۴) داریم:

$$X(\lambda)u(Y) - Y(\lambda)u(X) + (\rho\lambda + 2)g(FX, Y) - 2g(FAX, AY) = -\frac{c-1}{2}g(FX, Y). \quad (45)$$

با قرار دادن  $Y = U$  در معادله (۴۵) داریم:

$$X(\lambda) = U(\lambda)u(X). \quad (46)$$

با جای‌گذاری (۴۶) در معادله (۴۵) و با استفاده از معادله (۲۹) داریم:

$$(\rho\lambda + 2)FX - 2AFAX = -\frac{c-1}{2}FX. \quad (47)$$

با جای‌گذاری  $X$  از  $D$  با مقدار ویژه  $\alpha_i$  یعنی  $AX = \alpha_i X$  و بنابر معادله (۲۹) داریم:

$$\alpha_i^2 - \rho\alpha_i + \frac{\rho\lambda}{2} + \frac{c+3}{4} = 0.$$

گزاره ۴. فرض کنید  $M$  زیرخمینه با بعد CR ماکسیمال از فضا فرم ساساکی  $\overline{M}(c)$  باشد که در رابطه (۲۸) صدق می‌کند آن‌گاه مقادیر ویژه عملگر شکل  $A$  ثابت هستند.

برهان. با انتخاب  $Y = W_1$  و  $X \in D$  در معادله (۴۴) و ضرب با  $W_1$  با توجه به معادلات (۲۱)، (۲۲)، (۳۷)، (۴۰)، (۴۱) و (۴۲) داریم:

$$\left(\frac{1}{\sin\theta \cos^2\theta}\right)X(\cos\theta) = 0$$

اما چون  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  از این‌رو،  $X(\cos\theta) = 0$  لذا  $X(\sin\theta) = 0$  در نتیجه داریم:

$$X(\gamma_1) = 0, \quad \forall X \in D. \quad (48)$$

هم‌چنین با انتخاب  $Y = W_1$  و  $X \in D$  در معادله (۴۴) و ضرب با  $\xi$  با توجه به معادلات (۲۱)، (۲۲)، (۳۷)، (۴۰)، (۴۱) و (۴۲) داریم:

$$\cos\theta X(\gamma_1) + \xi(\cos\theta) + X(\sin\theta) = 0$$

از این‌رو، بنابر (۴۸) داریم  $\xi(\cos\theta) = 0$  پس  $\xi(\sin\theta) = 0$  و در نتیجه داریم:

$$\xi(\gamma_1) = \xi(\gamma_2) = 0. \quad (49)$$

حال با انتخاب  $Y = W_1$  و  $X = \xi$  در معادله (۴۴) و ضرب با  $\xi$  با توجه به معادلات (۲۱)، (۲۲)، (۳۷)، (۴۰)، (۴۱) و (۴۲) داریم:

$$\cos\theta \xi(\gamma_1) + \xi(\cos\theta) + \xi(\sin\theta) - U(\cos\theta) = 0$$

از این‌رو، بنابر (۴۹) داریم  $U(\cos\theta) = 0$  لذا  $U(\sin\theta) = 0$  و در نتیجه داریم:

$$U(\gamma_1) = U(\gamma_2) = 0. \quad (50)$$

روابط (۴۸)، (۴۹) و (۵۰) نتیجه می‌دهند که مقادیر ویژه  $\gamma_1, \gamma_2$  مقادیر ثابتی هستند. بنابراین بنابر رابطه (۴۳)،  $\lambda$  مقدار ثابتی است.

حال با انتخاب  $Y \in D$  و  $X = \xi$  در معادله (۴۴) و با ضرب در  $Y$  با توجه به معادلات (۲۱)، (۲۲) و (۲۳) داریم:

$$\xi(\alpha_i) = 0. \quad (51)$$

دوباره با جای‌گذاری  $FY \in D$  و  $X = \xi$  در معادله (۴۴) و با ضرب در  $FY$  با توجه به معادلات (۲۱)، (۲۲)، (۲۳) و (۲۹) داریم:

$$\xi(\rho - \alpha_i) = 0,$$

از این‌رو، بنابر (۵۱) داریم:

$$\xi(\rho) = 0. \quad (52)$$

حال با انتخاب  $Y \in D$  و  $X = U$  در معادله (۴۴) و با ضرب در  $Y$  با توجه به معادلات (۲۱)، (۲۲)، (۲۳)، (۳۷) و ثابت بودن  $\lambda$  داریم:

$$U(\alpha_i) = 0. \quad (53)$$

دوباره با جای‌گذاری  $FY \in D$  و  $X = U$  در معادله (۴۴) و با ضرب در  $FY$  با توجه به معادلات (۲۱)، (۲۲)، (۲۳)، (۲۹)، (۳۷) و ثابت بودن  $\lambda$  داریم:

$$U(\rho - \alpha_i) = 0,$$

از این‌رو بنابر (۵۳) داریم:

$$U(\rho) = 0. \quad (54)$$

حال با مشتق‌گیری از رابطه (۲۹) داریم:

$$\begin{aligned} & (\nabla_X A)FY + F(\nabla_X A)Y + u(Y)A^2X + \{(\lambda - \rho)u(Y) + 2\eta(Y)\}AX \\ & + \{u(Y) + \rho\eta(Y)\}X - \{2g(AX, Y) - \rho g(X, Y)\}\xi \\ & - \{g(X, Y) + (\lambda - \rho)g(AX, Y) + g(AX, AY)\}U = X(\rho)FY. \end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از رابطه (۷) داریم:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n+1} g((\nabla_{E_i} A)FX, E_i) - \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} g((\nabla_{E_i} A)FE_i - (\nabla_{FE_i} A)E_i, X) + \text{tr} A^2 u(X) \\ & + \text{tr} A \{(\lambda - \rho)u(X) + 2\eta(X)\} + n \{u(X) - \rho\eta(X)\} \\ & + (\rho - \lambda)u(AX) - u(A^2X) - 2\eta(AX) = (FX)(\rho). \end{aligned} \quad (55)$$

از طرفی بنابر روابط (۷)، (۱۷)، (۲۵) و (۵۳) داریم:

$$\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} g((\nabla_{E_i} A)FE_i - (\nabla_{FE_i} A)E_i, X) = 0, \quad (56)$$

و همچنین از طرفی بنابر (۳۹) داریم:

$$\text{tr} A = \frac{\rho(n-1)}{2} + \lambda, \quad (57)$$

و با استفاده از رابطه (۲۹) و (۴۶) داریم:

$$\text{tr} A^2 = \frac{(n-1)\rho(\rho - \lambda)}{2} + \lambda^2 + 3 - n - \frac{(n-1)(c-1)}{4}. \quad (58)$$

حال با جای‌گذاری روابط (۵۶)، (۵۷) و (۵۸) در رابطه (۵۵) داریم:

$$(FX)(\rho) = 0. \quad (59)$$



در نتیجه بنابر روابط (۵۲)، (۵۴) و (۵۹)،  $\rho$  مقداری ثابت است. حال با مشتق‌گیری از رابطه (۵۷) داریم:

$$X(\alpha_i)(2\alpha_i - \rho) = 0.$$

بنابراین یا  $X(\alpha_i) = 0$  یا  $2\alpha_i = \rho$  یا  $2\alpha_i = \rho$  باشد آن‌گاه چون ثابت شد  $\rho$  مقداری ثابت است. از این‌رو،  $\alpha$  نیز مقداری ثابت است، اما اگر  $X(\alpha_i) = 0$  باشد بنابر روابط (۵۱) و (۵۳)، باز  $\alpha$  مقداری ثابت است. بنابراین تمام مقادیر ویژه عملگر شکل  $A$  ثابت هستند.

**نتیجه ۵.** فرض کنید  $M$  زیرخمینه با بعد CR ماکسیمال از فضا فرم ساساکی  $\overline{M}(c)$  باشد که در رابطه (۲۸) صدق می‌کند آن‌گاه  $\rho$  مقداری ثابت و ناصفر است.

**برهان.** روابط (۵۲)، (۵۴) و (۵۹) نشان می‌دهد که  $\rho$  مقداری ثابت است. از طرفی بنابر این‌که  $\mathbb{K}$  میدان برداری قائم مخالف صفر است و بنابر روابط (۲۹)، (۳۰) و (۳۵) نتیجه می‌دهند که  $\rho$  مخالف صفر است.

### نتایج اصلی

**گزاره ۶.** فرض کنید  $M$  زیرخمینه با بعد CR ماکسیمال از فضا فرم ساساکی  $\overline{M}(c)$  باشد که در رابطه (۲۸) صدق می‌کند آن‌گاه عملگر شکل  $A$  دقیقاً دو یا سه و یا چهار مقادیر ویژه متمایز ثابت دارد. اگر عملگر شکل  $A$  دقیقاً دو مقدار ویژه متمایز داشته باشد عبارتند از  $\gamma_1$  و  $\gamma_2$  با چندگانگی‌های ۱ و  $n-1$  و اگر عملگر مقدار ویژه متمایز داشته باشد عبارتند از  $\gamma_1$ ،  $\gamma_2$  و  $\frac{\rho}{2}$ ، به ترتیب، با چندگانگی‌های ۱، ۱ و  $n-1$ ، و اگر عملگر

شکل  $A$  دقیقاً چهار مقدار ویژه متمایز داشته باشد عبارتند از  $\gamma_1$ ،  $\gamma_2$  و  $\frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - 2\rho\lambda - c - 3}}{2}$  و  $\frac{\rho - \sqrt{\rho^2 - 2\rho\lambda - c - 3}}{2}$  به ترتیب با چندگانگی‌های ۱، ۱،  $\frac{n-1}{2}$  و  $\frac{n-1}{2}$ .

**برهان.** بنابر لم ۳ و حل معادله آن سه حالت داریم. در حالت اول معادله فقط یک جواب برابر با  $\frac{\rho}{2}$  دارد و  $c = 1$

است، در این صورت  $\gamma_1 = \frac{\rho}{2}$  یا  $\gamma_2 = \frac{\rho}{2}$ . بنابرین عملگر شکل روی  $D$  برابر با یکی از  $\gamma_1$  یا  $\gamma_2$  است از این‌رو، با

چندگانگی‌های ۱ و  $n$  هستند. در حالت دوم معادله فقط یک جواب برابر با  $\frac{\rho}{2}$  دارد و  $c \neq 1$  است که در این صورت

چندگانگی‌های ۱،  $\gamma_1 \neq \frac{\rho}{2}$  و  $\gamma_2 \neq \frac{\rho}{2}$  و در این صورت عملگر شکل  $A$  دقیقاً دارای سه مقدار ویژه متمایز  $\gamma_1$ ،  $\gamma_2$  و  $\frac{\rho}{2}$  به ترتیب با

چندگانگی‌های ۱، ۱ و  $n-1$  است. در حالت آخر معادله دو جواب متمایز  $\frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - 2\rho\lambda - c - 3}}{2}$  و  $\frac{\rho - \sqrt{\rho^2 - 2\rho\lambda - c - 3}}{2}$

را دارد که هر دو مخالف  $\gamma_1$  و  $\gamma_2$  هستند بنابراین عملگر شکل  $A$  دقیقاً دارای چهار

مقدار ویژه متمایز  $\gamma_1$ ،  $\gamma_2$  و  $\frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - 2\rho\lambda - c - 3}}{2}$  و  $\frac{\rho - \sqrt{\rho^2 - 2\rho\lambda - c - 3}}{2}$  به ترتیب با چندگانگی‌های

۱، ۱،  $\frac{n-1}{2}$  و  $\frac{n-1}{2}$  است. هم‌چنین بنابر گزاره ۶ همه مقادیر ویژه ثابت هستند.

در حالتی که عملگر شکل دو مقدار ویژه متمایز داشته باشد در این صورت  $c = 1$  از این رو  $\overline{M}(c)$  کره با بعد  $2m + 1$  است که این زیرخمینه‌ها در مرجع [۶] بررسی شده است.

**قضیه ۷.** فرض کنید  $M$  زیرخمینه با بعد CR ماکسیمال از  $S^{2m+1}$  باشد که در رابطه (۲۸) صدق می‌کند و عملگر شکل  $A$  دقیقاً دو مقدار ویژه داشته باشد آن‌گاه  $M$  به صورت موضعی برابر با  $S^1 \times M'$  است که  $M'$  در یک کره با بعد فرد قرار دارد.

در حالتی که عملگر شکل سه مقدار ویژه متمایز داشته باشد در این صورت:

**قضیه ۸.** فرض کنید  $M$  زیرخمینه با بعد CR ماکسیمال از فضا فرم ساساکی  $\overline{M}(c)$  باشد که در رابطه (۲۸) صدق می‌کند و عملگر شکل  $A$  دقیقاً سه مقدار ویژه داشته باشد آن‌گاه  $M$  به صورت موضعی برابر با  $M' \times C$  است که  $C$  خم ژئودزی و  $M'$  ابررویه ای تماماً ژئودزیک در  $M$  هستند.

**برهان.** میدان برداری  $Z = \lambda\xi + U$  را در  $span\{\xi, U\}$  در نظر می‌گیریم. فرض کنیم  $Z_{\perp}$  نماد عمود  $Z$  در  $span\{\xi, U\}$  باشد بنابراین  $Z_{\perp} = \xi - \lambda U$ . ابتدا نشان می‌دهیم زیرفضای  $D \oplus Z_{\perp}$  پایاست. میدان‌های برداری  $X$  و  $Y$  دلخواه را از  $D$  در نظر می‌گیریم. ابتدا توجه کنیم که

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= g(\nabla_X Y, \lambda\xi + U) = \lambda g(\nabla_X Y, \xi) + g(\nabla_X Y, U) \\ &= -\lambda g(Y, \nabla_X \xi) - g(Y, \nabla_X U) = \lambda g(Y, \phi X) - g(Y, \phi AX) \\ &= \lambda g(Y, \phi X) - \lambda g(Y, \phi X) = 0. \end{aligned}$$

و به‌طور مشابه  $g(\nabla_Y X, Z) = 0$ . بنابراین داریم  $g([X, Y], Z) = 0$ . هم‌چنین به‌طریق مشابه

$$g(\nabla_X Z_{\perp}, Z) = 0, \quad g(\nabla_{Z_{\perp}} X, Z) = 0.$$

پس داریم  $g([X, Z_{\perp}], Z) = 0$ . بنابراین برای میدان‌های برداری دلخواه  $X$  و  $Y$  عضو  $D \oplus Z_{\perp}$  است یعنی این زیر فضا پایاست. حال فرض کنیم  $M'$  زیر خمینه انتگرال زیرفضای  $D \oplus Z_{\perp}$  باشد. بنابراین  $M'$  یک ابررویه در داخل  $M$  با میدان برداری قائم  $Z$  است. هم‌چنین فرض کنیم  $C$  خم انتگرال میدان برداری  $Z$  باشد. هم‌چنین نشان داده شد که  $C'' = \nabla_Z Z = 0$ ، یعنی  $C$  یک خم ژئودزیک در  $M$  است. هم‌چنین چون  $M'$  ابررویه‌ای از  $M$  با میدان برداری قائم  $Z$  است فرض کنیم  $A'$  عملگر شکل  $M'$  در  $M$  باشد. میدان برداری دلخواه مماسی  $X$  در  $M'$  را در نظر می‌گیریم. بنابر تعریف عملگر شکل داریم:

$$\begin{aligned} A'X &= -\nabla_X Z = -\overline{\nabla}_X Z + g(AX, Z)N \\ &= -\lambda \overline{\nabla}_X \xi - \overline{\nabla}_X U + g(AX, \lambda\xi + U)N \\ &= \lambda\phi X - \phi AU + g(AX, \lambda\xi + U)N \end{aligned}$$

اما چون  $A'X \in TM'$  است بنابراین باید سمت راست معادله نیز عضو  $TM'$  باشند از این‌رو،  $g(AX, \lambda\xi + U) = 0$ . پس داریم  $A'X = \lambda\phi X - \phi AU$ . لذا به‌ازای هر میدان برداری روی  $D$  برابر صفر است و هم‌چنین  $AZ_{\perp} = 0$  است. از این‌رو، به‌ازای هر میدان برداری مماس بر  $M'$  مانند  $X$  داریم  $AX = 0$ . بنابراین  $M'$  ابررویه ای تماماً ژئودزیک در  $M$  است.

برای اتمام اثبات کافی است نشان دهیم

$$\nabla_{TM'} TM' \subseteq TM', \quad \nabla_Z Z = 0, \quad \nabla_Z TM' \subseteq TM', \quad \nabla_{TM'} Z = 0$$

چون  $C$  خمی ژئودزی است بنابراین  $\nabla_Z Z = 0$ . همچنین چون  $M'$  ابررویه تماماً ژئودزیک در  $M$  است بنابراین  $\nabla_{TM'} Z = 0$ . همچنین برای میدان‌های برداری  $X$  و  $Y$  در  $TM'$ ،  $g(\nabla_X Y, Z) = 0$ . از این‌رو،  $\nabla_{TM} TM' \subseteq TM'$  همچنین از طرفی چون

$$g(\nabla_{Z_\perp} Z_\perp, Z) = g(\nabla_{\xi - \lambda U} (\xi - \lambda U), \lambda \xi + U) = 0$$

و

$$g(\nabla_Z X, Z) = -g(X, \nabla_Z Z) = 0$$

پس  $\nabla_Z TM' \subseteq TM'$ . بنابراین  $M$  به صورت موضعی با حاصل ضرب ریمانی خمینه انتگرال تماماً ژئودزیک  $M'$  و خم ژئودزی  $C$  است.

و در حالت آخر که عملگر شکل چهار مقدار ویژه متمایز داشته باشد در این صورت:

**قضیه ۹.** فرض کنید  $M$  زیرخمینه با بعد CR ماکسیمال از فضا فرم ساساکی  $\overline{M}(c)$  باشد که در رابطه (۲۸) صدق می‌کند و عملگر شکل  $A$  دقیقاً چهار مقدار ویژه داشته باشد آن‌گاه  $M$  به صورت موضعی برابر با  $M_1 \times M_2$  است که  $M_1$  و  $M_2$  زیرخمینه‌هایی در  $M$  هستند.

**برهان.** توزیع‌های زیر (فضاهای ویژه مقادیر ویژه) را در نظر می‌گیریم

$$D_i = \{X \in D \mid AX = \beta_i X\}, \quad i = 1, 2, \quad \beta_i = \frac{\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 2\rho\lambda - c - 3}}{2}.$$

مثل برهان قضیه ۹ میدان برداری  $Z = \lambda \xi + U$  را در  $\text{span}\{\xi, U\}$  در نظر می‌گیریم. زیرفضاهای  $D_1 \oplus Z$  و  $D_2 \oplus Z_\perp$  را در نظر می‌گیریم. شبیه اثبات قضیه قبل ثابت می‌شود هر دو زیر فضا پایا هستند. حال فرض کنیم  $M_1$  و  $M_2$  زیرخمینه‌های انتگرال توزیع‌های مذکور باشند. برای اتمام اثبات کافی است نشان دهیم

$$\nabla_{TM_1} TM_1 \subseteq TM_1, \quad \nabla_{TM_2} TM_2 \subseteq TM_2, \quad \nabla_{TM_1} TM_2 \subseteq TM_1, \quad \nabla_{TM_2} TM_1 \subseteq TM_2.$$

مشابه استدلال آخر قضیه ۹ روابط مذکور نیز حاصل می‌شوند. از این‌رو،  $M$  به صورت موضعی برابر با  $M_1 \times M_2$  است.

بنابراین در حالت کلی نشان دادیم:

**قضیه ۱۰.** فرض کنید  $M$  زیرخمینه با بعد CR ماکسیمال از فضا فرم ساساکی  $\overline{M}(c)$  باشد که در رابطه (۲۸) صدق می‌کند آن‌گاه  $M$  به صورت موضعی برابر با یکی از این حالات است:

(الف) برابر با  $S^1 \times M'$  که  $M'$  در یک کره با بعد فرد قرار دارد.

(ب) برابر با  $M' \times C$  که  $C$  خم ژئودزی و  $M'$  ابررویه‌ای تماماً ژئودزیک در  $M$  است.

(ج) برابر با  $M_1 \times M_2$  که  $M_1$  و  $M_2$  زیرخمینه‌هایی در  $M$  است.

### منابع

1. Bejancu A., "CR-submanifolds of Kaehler Manifold", Proc. Amer. Math. Soc. 69, No.1 (1978) 135-142.
2. Bejancu A., "Geometry of CR-submanifolds", D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, Lancaster, Tokyo (1986).

3. Blair D. E., "Contact manifolds in Riemannian geometry", Lecture Notes in Mathematics, Vol. 509, Springer-Verlag, Berlin (1976).
4. Djoric M., Okumura M., "Certain CR submanifolds of maximal CR dimension of complex space forms", Differential Geometry and its Applications, 26 (2) (2008) 208-217.
5. Djoric M., Okumura M., "CR submanifolds of maximal CR dimension in complex space forms and second fundamental form", in: Proceedings of the Workshop Contemporary Geometry and Related Topics, Belgrade, May 15-21, (2002) (2004) 105-116.
6. Djoric M., Okumura M., "Certain CR submanifolds of maximal CR dimension of complex space forms", Differential Geom. Appl. 26 (2) (2008) 208-217.
7. Djoric M., Okumura M., "CR submanifolds of maximal CR dimension of complex projective space", Arch. Math. 71 (1998) 148-158.
8. de Rham G., Sur la réductibilité d'un espace de Riemann, Comment. Math. Helv. 268, 328-344 (1952).
9. Kim H. S., Pak J. S., "Certain contact CR-submanifolds of an odd-dimensional unit sphere", Bull. Korean Math. Soc. 44. 1 (2007) 109-116.
10. Kim H. S., Pak J. S., "Certain class of contact CR-submanifolds of an odd-dimensional unit sphere", Taiwanese J. Math. 14, 2 (2010) 629-646.
11. Kim H. S., Pak J. S., Certain class of contact CR-submanifolds of a Sasakian space form, Commun. Korean Math. Soc. 29, 1 (2014) 131-140.
12. Kobayashi S., Nomizu K., "Foundations of Differential Geometry I", Wiley and Sons Inc. New York-London (1963).
13. Kwon J. H., Pak J. S., "On some contact CR-submanifolds of an odd-dimensional unit sphere", Soochow J. Math. 26, 4 (2000) 427-439.
14. Pak J. S., Kwon J. H., Kim H. S., Kim Y. M., "Contact CR-submanifolds of an odd-dimensional unit sphere", Geom. Dedicata 114 (2005) 1-11.
15. Yano K., Kon M., "Structure on Manifold, World Scientific", World Scientific, Singapore, (1984).