

## حلقه‌های گروهی که در شرط اینگِل تعمیم یافته صدق می‌کنند

مجتبی رمضان نسب

دانشگاه خوارزمی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پذیرش ۹۷/۰۹/۰۷

دریافت ۹۶/۰۴/۱۰

### چکیده

فرض کنیم  $R$  حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار از مشخصه  $r \geq 0$  و  $G$  یک گروه متناهی موضعی باشد. به‌ازای هر  $x$  و  $y$  در حلقه گروهی  $RG$  تعریف می‌کنیم  $[x, y] = xy - yx$  و استفرایی  $[x, y], y = [[x, n, y], y]$  در این مقاله نشان می‌دهیم که شرط لازم و کافی برای آن که  $RG$  در شرط  $[x^{m(x,y)}, n(x,y), y] = 0$  صدق کند آن است که: (۱) اگر  $r$  توانی از عددی اول مثل  $p$  باشد، آن‌گاه  $G$  گروهی پوچ‌توان موضعی و  $G'$  یک  $p$ -گروه است، (۲) اگر  $r = 0$  یا  $r$  توانی از یک عدد اول نباشد، آن‌گاه  $G$  آبدی است. در بخش دیگری از مقاله تعمیمی از گروه‌های اینگِل ارائه می‌دهیم، سپس حکمی در مورد گروه یک‌ه‌های جبرهای گروهی که در این شرط اینگِل تعمیم یافته صدق می‌کنند بیان می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: حلقه‌های گروهی، گروه اینگِل، حلقه‌های اینگِل لی تعمیم یافته

### مقدمه

فرض کنیم  $R$  یک حلقه و  $x_1$  و  $x_2$  اعضای از آن باشند. قرار می‌دهیم  $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$  و به‌صورت استقرایی تعریف می‌کنیم  $[x_1, \dots, x_{n+1}] = [[x_1, \dots, x_n], x_{n+1}]$ . گوییم حلقه  $R$  پوچ‌توان لی است هرگاه عدد طبیعی‌ای مثل  $n$  موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر  $a_1, a_2, \dots, a_n$  در  $R$  داشته باشیم  $[a_1, \dots, a_n] = 0$ . هم‌چنین  $R$  را اینگِل لی نامیم هرگاه به‌ازای هر  $a, b \in R$  عدد طبیعی  $n = n(a, b)$  موجود باشد به‌طوری که

$$[a, n, b] := [a, \underbrace{b, \dots, b}_n] = 0.$$

اگر عدد  $n$  مستقل از انتخاب  $a$  و  $b$  باشد و رابطه  $[a, n, b] = 0$  در  $R$  برقرار باشد، آن‌گاه این حلقه را اینگِل لی کران‌دار می‌نامیم. واضح است که هر حلقه پوچ‌توان لی، یک حلقه اینگِل لی (کران‌دار) است ولی عکس این مطلب لزوماً برقرار نیست [۱].

حال می‌خواهیم تعمیمی از حلقه‌های اینگِل لی ارائه دهیم: حلقه  $R$  را اینگِل لی تعمیم یافته گوییم هرگاه به‌ازای هر  $a, b \in R$  اعداد طبیعی  $m = m(a, b)$  و  $n = n(a, b)$  موجود باشند به‌طوری که  $[a^m, n, b] = 0$ . برخی از خواص چنین حلقه‌هایی در [۹] بررسی شده است.

اکنون فرض کنیم  $R$  حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار از مشخصه  $r \geq 0$  و  $G$  گروهی دلخواه باشد. در [۱۰، قضیه ۶.۱۲ (ص. ۱۶۰)] نشان داده شده است که شرط لازم و کافی برای این‌که حلقه گروهی  $RG$  اینگِل لی کران‌دار باشد آن است که: الف) اگر  $r$  توانی از عددی اول باشد، آن‌گاه  $G$  پوچ‌توان است و شامل یک زیرگروه نرمال  $A$  است به طوری که  $G/A$  و  $A'$  هر دو  $p$ -گروه‌هایی متناهی هستند، ب) اگر  $r = 0$  یا  $r$  توانی از عددی اول نباشد، آن‌گاه  $G$  آبلی است. ما در بخش ۲، حکم مشابهی را برای وقتی که  $RG$  اینگِل لی تعمیم یافته باشد ارائه می‌دهیم مشروط به این‌که  $G$  گروهی متناهی موضعی باشد (قضیه ۲.۷).

در بخش ۳، گروه یک‌های یک جبر گروهی که در شرط نوع تعمیم یافته‌ای از گروه‌های اینگِل صدق می‌کنند را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم  $G$  یک گروه باشد. به‌ازای هر  $x$  و  $y$  در  $G$  قرار می‌دهیم  $(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$  و استقرایی به‌ازای هر عدد طبیعی  $n \geq 2$ ،  $(x, n, y) = ((x, n-1, y), y)$ ، به یاد آورید که گروه  $G$  اینگِل نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر  $x$  و  $y$  در  $G$  عدد طبیعی  $n = n(x, y)$  موجود باشد به طوری که  $(x, n, y) = 1$ . اگر عدد  $n$  مستقل از انتخاب  $x$  و  $y$  باشد،  $G$  را اینگِل کران‌دار می‌نامیم. بدیهی است که هر گروه پوچ‌توان، اینگِل کران‌دار است و هر گروه پوچ‌توان موضعی، اینگِل است. حال اجازه دهید که تعمیمی از گروه‌های اینگِل ارائه دهیم:

**تعریف ۱.** می‌گوییم  $G$  یک گروه اینگِل تعمیم یافته چپ است هرگاه به‌ازای هر  $x$  و  $y$  از  $G$ ، عددهای طبیعی  $m = m(x)$  و  $n = n(x, y)$  موجود باشند به طوری که  $(x^m, n, y) = 1$ . گروه  $G$  را اینگِل تعمیم یافته راست می‌گوییم هرگاه به‌ازای هر  $x$  و  $y$  از  $G$ ، عددهای  $k = k(y)$  و  $n = n(x, y)$  موجود باشند که  $(x, n, y^k) = 1$ . با توجه به تعریف، هر گروه متناهی، اینگِل تعمیم یافته چپ (راست) است. از طرفی، بنا به قضیه معروفی از زرن، هر گروه اینگِل متناهی، پوچ‌توان است. بنابراین خانواده همه گروه‌های اینگِل، به‌طور سره، زیرمجموعه خانواده همه گروه‌های اینگِل تعمیم یافته چپ (راست) است.

فرض کنیم  $G$  یک گروه متناهی موضعی و  $F$  یک میدان از مشخصه  $p \geq 0$  باشد. گروه یک‌های جبر گروهی  $FG$  را با نماد  $\mathcal{U}(FG)$  نشان می‌دهیم. در [۷، قضیه ۱.۱] نشان داده شده است که  $\mathcal{U}(FG)$  یک گروه اینگِل است اگر و تنها اگر  $G$  پوچ‌توان موضعی و  $G'$  یک  $p$ -گروه باشد (در این‌جا  $G' = 1$ ، یعنی  $G$  آبلی است، هرگاه  $p = 0$ ). ما در قضیه ۳.۳ نشان خواهیم داد که اگر  $p = 0$ ، آنگاه  $\mathcal{U}(FG)$  یک گروه اینگِل تعمیم یافته چپ (راست) است اگر و تنها اگر  $G$  آبلی باشد.

### شرط اینگِل لی تعمیم یافته برای حلقه‌های گروهی

فرض کنیم  $G$  یک گروه متناهی موضعی و  $R$  حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار باشد. در این بخش یک شرط لازم و کافی برای این‌که حلقه گروهی  $RG$  در شرط اینگِل لی تعمیم یافته صدق کند ارائه می‌دهیم. برای این منظور ابتدا به چند لم نیاز داریم.

**لم ۲.** فرض کنیم  $R$  یک حلقه باشد و به‌ازای هر جفت  $x$  و  $y$  از عناصر  $R$  اعداد طبیعی  $m = m(x, y)$  و  $n = n(x, y)$  موجود باشند به طوری که داشته باشیم  $x^m y^n = y^n x^m$  اگر  $R$  فاقد ایده‌آل پوچ ناصفر باشد، آن‌گاه  $R$  حلقه‌ای جابه‌جایی است.

اثبات. رجوع کنید به [۳].

برای اثبات لم بعدی به روابط زیر نیاز داریم. این روابط به راحتی با استقرا روی  $n$  ثابت می‌شوند.

$$[x, n, y] = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} y^i x y^{n-i}, \quad (*)$$

$$[xy, n, z] = \sum_{i=0}^n (-1)^i [x, i, y][y, n-i, z], \quad (**)$$

لم ۳. اگر  $R$  یک حلقه  $J$ -نیم‌ساده باشد و به ازای هر  $x$  و  $y$  از  $R$  داشته باشیم  $[x^{m(x,y)}, n(x,y), y] = 0$ ، آن‌گاه  $R$  حلقه‌ای جابه‌جایی است.

اثبات. از آن‌جا که هر حلقه  $J$ -نیم‌ساده، حاصل ضرب نیم‌مستقیمی از حلقه‌های ابتدایی است [۵، قضیه ۱۲.۵] و هر تصویر همریخت  $R$  نیز در شرط داده شده صدق می‌کند، از این‌رو، از ابتدا می‌توانیم فرض کنیم که  $R$  حلقه‌ای است ابتدایی. در نتیجه، طبق قضیه چگالی جیکوبسن،  $R$  یا یک حلقه تقسیم است یا به‌ازای حلقه تقسیمی مثل  $D$ ،  $M_2(D)$  یک تصویر همریخت زیرحلقه‌ای از  $R$  است. نشان می‌دهیم که حالت دوم نمی‌تواند روی دهد، زیرا با در نظر گرفتن ماتریس‌های

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

درمی‌یابیم که به‌ازای هیچ یک از اعداد طبیعی  $m$  و  $n$ ، رابطه  $[x^m, n, y] = 0$  برقرار نیست.

بنابراین فرض کنیم  $R$  یک حلقه تقسیم باشد. از این‌رو، به‌ازای هر  $x$  و  $y$  از  $R$ ، اعداد طبیعی  $m = m(x, y)$  و  $n = n(x, y)$  موجودند به طوری که  $[x^m, n, y] = 0$ . اگر مشخصه  $R$  عدد اولی مثل  $p$  باشد، آن‌گاه عدد طبیعی  $s = s(x, y)$  را به‌گونه‌ای اختیار می‌کنیم که  $p^s \geq n$  در این صورت از تساوی (\*) داریم

$$\begin{aligned} 0 &= [x^m, p^s, y] = \sum_{i=0}^{p^s} (-1)^i \binom{p^s}{i} y^i x^m y^{p^s-i} \\ &= x^m y^{p^s} - y^{p^s} x^m. \end{aligned}$$

اکنون لم ۲ نتیجه می‌دهد که  $R$  حلقه‌ای جابه‌جایی باشد.

حال فرض کنیم که مشخصه  $R$  صفر است. مطابق لم ۲ کافی است نشان دهیم که  $n = 1$ . فرض کنیم که این طور نباشد. با فرض  $a = [x^m, n-1, y] \neq 0$ ،  $b = [x^m, n-2, y]$  و  $c = -a^{-1}b$  داریم

$$[y, c] = a^{-1}[b, y] = 1,$$

زیرا  $a$ ، و در نتیجه  $a^{-1}$ ، با  $y$  جابه‌جا می‌شود. حال اگر قرار دهیم  $d = yc$  آن‌گاه  $[y, d] = y$

حال نشان می‌دهیم که برای هر عدد طبیعی  $m_1$  و  $n_1$  داریم  $[y^{m_1}, n_1, d] = uy^{m_1}$ ، که در آن  $u \neq 0$  یک عددی صحیح است. این کار را با استفاده از استقرا روی  $m_1$  انجام می‌دهیم. طبق تساوی (\*\*\*)، رابطه  $[y, d] = y$  ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned} [y^{m_1+1}, n_1 d] &= [y^{m_1} y, n_1 d] = \sum_{i=0}^{n_1} \binom{n_1}{i} [y^{m_1, i} d][y, n_1-i d] \\ &= \sum_{i=0}^{n_1} \binom{n_1}{i} u_i y^{m_1} y \\ &= U y^{m_1+1}. \end{aligned}$$

بنابراین ادعا ثابت شد. حال چون  $R$  یک حلقه تقسیم از مشخصه صفر است،  $0 = [y^{m_1}, n_1 d] = u y^{m_1}$  نتیجه می‌دهد که  $y = 0$ ، که این یک تناقض است. پس  $n = 1$  و ادعا ثابت شده است. بنابراین  $R$  جابه‌جایی است. قضیه ۴. فرض کنیم  $F$  یک میدان و  $G$  یک گروه متناهی باشد. اگر حلقه گروهی  $FG$  در شرط انگل لی تعمیم یافته صدق کند، آن‌گاه  $FG$  یک حلقه پوچ‌توان لی است.

اثبات. فرض کنیم  $J = J(FG)$  رادیکال جیکوبسن حلقه  $FG$  باشد. طبق لم قبل،  $FG/J$  حلقه‌ای جابه‌جایی است. چون  $G$  گروهی متناهی است، پس  $FG$  حلقه‌ای آرتینی است، از این‌رو، دارای ایده‌آل مینیمالی چون  $M$  است. در این صورت داریم  $MJ = JM = 0$ ، زیرا  $J$  یک ایده‌آل پوچ‌توان است. حال نشان می‌دهیم که به‌ازای هر عضو  $r \in FG$  مرکزساز  $C_M(r)$  ایده‌آلی از  $FG$  است. برای این منظور فرض کنیم  $a \in C_M(r)$  و  $s \in FG$  داریم

$$(as)r = a(sr - rs) + ars = ars = r(as),$$

که این رابطه ایجاب می‌کند  $C_M(r)FG \subseteq C_M(r)$ . به‌طور مشابه داریم  $FGC_M(r) \subseteq C_M(r)$ . پس  $C_M(r)$  ایده‌آلی از  $FG$  است. از طرفی به‌ازای هر  $s \in M$  کوچک‌ترین عدد طبیعی‌ای مثل  $n = n(s, r)$  موجود است که  $[s^{m(s,r)}, n r] \in C_M(r)$ ، لذا  $0 \neq [s^{m(s,r)}, n-1 r] \in C_M(r)$  (توجه داریم که اگر  $M$  یک ایده‌آل پوچ باشد، آن‌گاه  $M \subseteq J$ ، در نتیجه  $1 + s$  وارون‌پذیر است. پس اگر داشته باشیم  $[s^{m(s,r)}, n r] = 0$ ، آن‌گاه  $0 \neq [(1+s)^m, n-1 r] \in C_M(r)$ ، از این‌رو،  $C_M(r) \neq \{0\}$  و چون  $M$  یک ایده‌آل مینیمال بود داریم  $M = C_M(r)$  بنابراین نشان داده‌ایم که هر ایده‌آل مینیمال  $FG$  در مرکز  $FG$  قرار دارد. حال برای حلقه  $FG$  سری ترکیبی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$0 = L_k \subset L_{k-1} \subset \dots \subset L_1 \subset L_0 = FG,$$

که در آن به‌ازای هر  $i$ ،  $0 \leq i \leq k-1$ ، ایده‌آل  $L_{i+1}$  یک ایده‌آل ماکسیمال  $L_i$  است. یعنی  $L_i/L_{i+1}$  یک ایده‌آل مینیمال حلقه آرتینی  $FG/L_{i+1}$  است. حال مشابه آن‌چه که در بند قبل نشان دادیم،  $L_i/L_{i+1}$  مشمول در مرکز  $FG/L_{i+1}$  است. یعنی برای هر  $i$  داریم  $[L_i, FG] \subseteq L_{i+1}$ . این رابطه نشان می‌دهد که  $FG$  یک حلقه پوچ‌توان لی است.

لم ۵. فرض کنیم  $F$  میدانی از مشخصه  $p \geq 0$  و  $G$  گروهی تابدار باشد. در این صورت  $\mathfrak{A}(FG)$  پوچ‌توان است اگر و تنها اگر  $FG$  پوچ‌توان لی باشد، اگر و تنها اگر  $G$  گروهی پوچ‌توان باشد و گروه مشتق آن  $G'$  یک  $p$ -گروه متناهی باشد.

اثبات. رجوع کنید به نتایج ۶،۲،۴ و ۷،۲،۴ از [۵].

قضیه ۶. فرض کنیم  $F$  میدانی از مشخصه  $p \geq 0$  و  $G$  یک گروه متناهی موضعی باشد. اگر  $FG$  در شرط اینگِل لی تعمیم یافته صدق کند، آن‌گاه  $G$  گروهی پوچ‌توان موضعی و  $G'$  یک  $p$ -گروه است.

اثبات. فرض کنیم  $x_1, x_2, \dots, x_t$  عناصری دلخواه از  $G$  باشند. قرار می‌دهیم  $H = \langle x_1, x_2, \dots, x_t \rangle$ . در این صورت  $H$  گروهی متناهی است و  $FH$  در شرط اینگِل لی تعمیم یافته صدق می‌کند. در نتیجه، بنا به قضیه ۴،  $FH$  پوچ‌توان لی است. حال لم ۵ ایجاب می‌کند که  $H$  یک گروه پوچ‌توان باشد. بنابراین  $G$  گروهی پوچ‌توان موضعی است. حال نشان می‌دهیم که  $G'$  یک  $p$ -گروه است. برای این منظور فرض کنیم که  $g \in G'$ . در این صورت می‌توان نوشت  $g = (x_1, y_1)^{n_1} \dots (x_s, y_s)^{n_s}$  که در آن  $x_i$ ها و  $y_i$ ها در  $G$  اند و  $n_i \in \mathbb{Z}$ . اگر  $G_1$  زیرگروه  $G$  تولید شده به وسیله تمام این  $x_i$ ها و  $y_i$ ها باشد، آن‌گاه  $G_1$  گروهی متناهی است و  $FG_1$  در شرط اینگِل لی تعمیم یافته صدق می‌کند. باز هم از لم ۵ نتیجه می‌گیریم که  $G'_1$  یک  $p$ -گروه است. از آن جایی که  $g \in G'_1$ ، از این‌رو،  $g$  یک  $p$ -عنصر است و این اثبات را کامل می‌کند.

با ادغام قضیه‌های ۶ و [۸، قضیه ۱.۴] داریم:

نتیجه ۷. فرض کنیم  $F$  میدانی از مشخصه  $p \geq 0$  و  $G$  یک گروه متناهی موضعی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱.  $FG$  در شرط اینگِل لی تعمیم یافته صدق می‌کند.

۲.  $G$  گروهی پوچ‌توان موضعی و  $G'$  یک  $p$ -گروه است.

۳.  $FG$  اینگِل لی است.

۴.  $\mathcal{A}(FG)$  پوچ‌توان موضعی است.

اکنون آماده‌ایم که قضیه اصلی این بخش را بیان کنیم:

قضیه ۸. فرض کنیم  $R$  حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار از مشخصه  $n \geq 0$  و  $G$  یک گروه متناهی موضعی باشد. شرط لازم و کافی برای آن‌که  $RG$  در شرط اینگِل لی تعمیم یافته صدق کند آن است که:

۱. اگر  $n$  توانی از عددی اول مثل  $p$  باشد، آن‌گاه  $G$  گروهی پوچ‌توان موضعی و  $G'$  یک  $p$ -گروه است.

۲. اگر  $n = 0$  یا  $n$  توانی از یک عدد اول نباشد، آن‌گاه  $G$  گروهی آبلی است.

اثبات. ( $\Leftarrow$ ) ابتدا فرض کنیم  $RG$  در شرط اینگِل لی تعمیم یافته صدق کند. اگر  $n = p^s$ ، با فرض  $\bar{R} = R/p^{s-1}R$ ، به‌وضوح حلقه  $\bar{R}G$  در شرط اینگِل لی تعمیم یافته صدق می‌کند. از آن‌جا که میدان  $\mathbb{Z}_p$  در حلقه  $\bar{R}$  می‌نشیند، از این‌رو، حلقه  $\mathbb{Z}_p G$  در شرط اینگِل لی تعمیم یافته صدق می‌کند. حال از قضیه ۶ می‌توان نتیجه گرفت که  $G$  گروهی پوچ‌توان موضعی و  $G'$  یک  $p$ -گروه است.

حال فرض کنیم  $n = 0$  (برای زمانی که  $n = p^s q^r k$  که در آن  $p$  و  $q$  دو عدد اول متمایزند، استدلال مشابه است). در این صورت حلقه  $\mathbb{Z}G$  (به عنوان زیرحلقه‌ای از  $RG$ ) در شرط اینگِل لی تعمیم یافته صدق می‌کند. حال اگر  $p$  و  $q$  دو عدد اول متمایز باشند، آن‌گاه هر دو حلقه  $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}G$  و  $\frac{\mathbb{Z}}{q\mathbb{Z}}G$  در شرط اینگِل لی تعمیم یافته صدق می‌کنند. از

این‌رو، قضیه ۶ ایجاب می‌کند که  $G'$  هم یک  $p$ -گروه و هم یک  $q$ -گروه باشد. در نتیجه  $G' = 1$ ، یعنی  $G$  گروهی آبله است.

( $\Rightarrow$ ) گیریم شرط (۱) یا شرط (۲) برقرار باشد. به‌ازای  $\alpha$  و  $\beta$  در  $RG$ ، فرض کنیم  $H$  زیر گروه  $G$  تولید شده به‌وسیلهٔ محمل این عناصر باشد، یعنی  $H = \langle \text{supp}(\alpha), \text{supp}(\beta) \rangle$ . چون  $G$  متناهی موضعی است از این‌رو،  $H$  گروهی پوچ‌توان و متناهی است. اکنون [۹، قضیه ۴.۹] (ص. ۱۵۳) نتیجه می‌دهد که  $RH$  یک حلقه پوچ‌توان لی است. پس به‌ازای عدد طبیعی‌ای مثل  $m$  داریم  $[\alpha, m, \beta] = 0$ . بنابراین  $RG$  یک حلقه انگل لی است.

### جبرهای گروهی با گروه یک‌های انگل تعمیم یافته

عنصر  $x$  از گروه  $G$  را انگل راست (چپ) گوئیم هرگاه به‌ازای هر  $g \in G$  عدد طبیعی  $n = n(x, g)$  موجود باشد به‌طوری‌که  $(x, n, g) = 1$  و  $(g, n, x) = 1$ . فرض کنیم  $R(G)$  و  $L(G)$  مجموعه همه عناصر به‌ترتیب انگل راست و انگل چپ گروه  $G$  باشند. توجه کنید که به‌طور دقیق هنوز معلوم نیست که این دو مجموعه زیرگروه‌های  $G$  هستند یا خیر.

فرض کنیم  $\eta(G)$  رادیکال هایش-پلاتکین و  $\zeta(G)$  ابرمرکز  $G$  باشند. تأکید می‌کنیم که هر دوی اینها زیرگروه‌های نرمال پوچ‌توان موضعی  $G$  هستند.

لم ۹. فرض کنیم  $G$  یک گروه خطی باشد. در این صورت،  $L(G) = \eta(G)$  و  $R(G) = \zeta(G)$  اثبات. رجوع کنید به [۲].

لم ۱۰. فرض کنیم  $D$  یک حلقه تقسیم از مشخصه صفر باشد و  $\dim_{Z(D)} D < \infty$  اگر به‌ازای عدد طبیعی‌ای مانند  $r$   $GL_r(D)$  یک گروه انگل تعمیم یافته چپ (راست) باشد، آن‌گاه  $D$  یک میدان است و  $r = 1$  اثبات. فرض کنیم  $D^* = D \setminus \{0\}$  یک گروه انگل تعمیم یافته چپ باشد و  $x \in D^*$  بنا به فرض  $m = m(x)$  موجود است به‌طوری‌که به‌ازای هر  $y \in D^*$  داریم  $(x^m, n, y) = 1$  که در آن  $n = n(x, y)$  در نتیجه  $x^m \in R(D^*)$  از آن‌جاکه  $\dim_{Z(D)} D < \infty$ ، می‌توان  $D^*$  را به‌عنوان یک گروه خطی در نظر گرفت. در این صورت مطابق لم ۹ داریم  $R(D^*) = \zeta(D^*)$ . از طرفی، بنا به حکمی در [۴]، هر زیرگروه نرمال و پوچ‌توان موضعی  $D^*$  مشمول در مرکز  $D^*$  است. در نتیجه

$$x^m \in R(D^*) = \zeta(D^*) \subseteq Z(D).$$

از این‌رو،  $D$  روی مرکزش رادیکال است. در نتیجه طبق قضیه‌ای از کاپلانسکی [۵، قضیه ۱۵.۱۵]،  $D$  یک میدان است. اگر  $D^*$  یک گروه انگل تعمیم یافته چپ باشد، با استدلالی مشابه  $D$  یک میدان است.

حال نشان می‌دهیم که برای هر میدان از مشخصه صفر مانند  $D$  گروه  $GL_2(D)$  نمی‌تواند یک گروه انگل تعمیم یافته چپ (راست) باشد (که در این صورت نتیجه می‌شود  $r = 1$ ). ابتدا توجه کنید که با محاسباتی ساده می‌توان

نتیجه گرفت که به‌ازای هر ماتریس  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  که دارای دترمینان ۱ باشد داریم

$$\left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & b^2 s \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

که در آن  $a_{11}$ ,  $a_{21}$  و  $a_{22}$  اعضای  $D$  هستند. به علاوه به ازای هر عدد طبیعی  $m$  و  $k$  داریم

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}.$$

حال با در نظر گرفتن  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  و  $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ، با توجه به تساوی‌های فوق و استقرای ریاضی می‌توان دید

که به ازای هر عدد طبیعی  $m$  و  $n$  داریم  $(\alpha^m, n \beta) \neq 1$  و  $(\alpha, n \beta^k) \neq 1$ .

**قضیه ۱۱.** فرض کنیم  $F$  یک میدان از مشخصه صفر و  $G$  یک گروه متناهی موضعی باشد.  $\mathcal{U}(FG)$  یک گروه اینگِل تعمیم یافته چپ (راست) است اگر و تنها اگر  $G$  آبله باشد.

**اثبات.** فرض کنیم  $\mathcal{U}(FG)$  یک گروه اینگِل تعمیم یافته چپ (راست) باشد و  $g \in G'$  در این صورت می‌توان نوشت  $g = (x_1, y_1)^{n_1} \cdots (x_s, y_s)^{n_s}$  که در آن  $x_i$ ها و  $y_i$ ها در  $G$  اند و  $n_i \in \mathbb{Z}$ . اگر  $H$  زیرگروه  $G$  تولید شده به وسیله تمام این  $x_i$ ها و  $y_i$ ها باشد، آن گاه  $H$  گروهی متناهی است. حال طبق قضیه و دربرن-آرتین داریم

$$\mathcal{U}(FH) \simeq \bigoplus_{i=1}^r GL_{n_i}(D_i),$$

که در آن، هر  $n_i$  عددی طبیعی و هر  $D_i$  یک جبر تقسیم با بعد متناهی روی  $F$  است. از آن جاکه  $\mathcal{U}(FH)$  یک گروه اینگِل تعمیم یافته چپ (راست) است، از این رو، مطابق لم ۱۰، به ازای هر  $i$  ای،  $D_i$  یک میدان است و  $n_i = 1$  پس  $\mathcal{U}(FH)$  یک گروه آبله است. در نتیجه  $g = 1$ ، یعنی  $G$  گروهی آبله است.

### منابع

1. Cohn P. M., "A non-nilpotent Lie ring satisfying the Engel condition and a non-nilpotent Engel group", Proc. Cambridge Philos. Soc., 51 (1955) 401-405.
2. Gruenberg K. W., "The Engel structure of linear groups", J. Algebra, 3 (1966) 291-303.
3. Herstein I. N., "A commutativity theorem", J. Algebra, 38 (1976) 112-118.
4. Huzurbazar M. S., "The multiplicative group of a division ring", Soviet Math. Dokl., 1 (1960) 433-435.
5. Lam T. Y., "A First Course in Noncommutative Rings", Second Edition, Springer-Verlag, New York (2001).
6. Lee G. T., "Group identities on units and symmetric units of group rings", Algebra and applications 12, Springer-Verlag, London (2010).
7. Ramezan-Nassab M., "Group algebras with Engel unit groups", J. Aust. Math. Soc., 101 (2016) 244-252.

8. Ramezan-Nassab M., "Group algebras with locally nilpotent unit groups", *Comm. Algebra*, 44 (2016) 604-612.
9. Ramezan-Nassab M., Kiani D., "Rings satisfying generalized Engel conditions, *J. Algebra Appl.*, 11 (2012) 1250121 (8 pages).
10. Sehgal S. K., "Topics in Group Rings", Dekker, New York (1978).