جلد ۶، شماره ۱، بهار ۱۳۹۹

پژوهش‌های ریاضی
(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

رابطۀ بین عدد و شاخص متمایزکننده با عدد قابل شناسایی یک گراف

سعید علیخانی، سمانه سلطانی
دانشگاه یزد، دانشکدۀ ریاضی

دریافت ۹۶/۰۳/۰۲ پذیرش ۹۷/۰۶/۲۶

چکیده

عدد متمایز کننده $D(G)$، گراف G عبارت است از کوچک‌ترین عدد صحیح d به‌طوری‌که گراف G دارای رنگ‌آمیزی رأسی با d رنگ است که تنها تحت خودریختی همانی حفظ می‌شود. به‌صورت مشابه، شاخص متمایزکننده $D'(G)$ از گراف G، کوچک‌ترین عدد صحیح d است که برای آن گراف G دارای یک رنگ‌آمیزی یالی با d رنگ باشد که تنها تحت خودریختی همانی حفظ می‌شود. فرض کنیم G گراف همبند از مرتبۀ $n \geq 3$ و $c: E(G) \rightarrow \{1,2,\ldots,k\}$ یک رنگ‌آمیزی از یال‌های G است (ممکن است یال‌های مجاور، رنگ‌های یک‌سانی داشته باشند). برای هر رأس v از G، کد رنگی v با توجه به رنگ‌آمیزی c،k-تایی مرتب $c(v) = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ است که در آن a_i تعداد یال‌های به رنگ i، $1 \leq i \leq k$، واقع بر v است. رنگ‌آمیزی c قابل شناسایی است اگر رئوس مختلف، کدهای رنگی متفاوتی داشته باشند. عدد شناسایی $\det(G)$ گراف G، کوچک‌ترین عدد صحیح و مثبت k است که برای آن گراف G یک رنگ‌آمیزی قابل شناسایی با k رنگ داشته باشد. در این مقاله، رابطۀ بین عدد و شاخص متمایزکننده با عدد شناسایی یک گراف بررسی می‌شود. به‌ویژه، نشان می‌دهیم شاخص متمایز کننده هر گراف همبند حداکثر با عدد شناسایی آن برابر است، یعنی، $D'(G) \leq \det(G)$ است.

واژه‌های کلیدی: عدد متمایز کننده، شاخص متمایز کننده، عدد شناسایی.

مقدمه

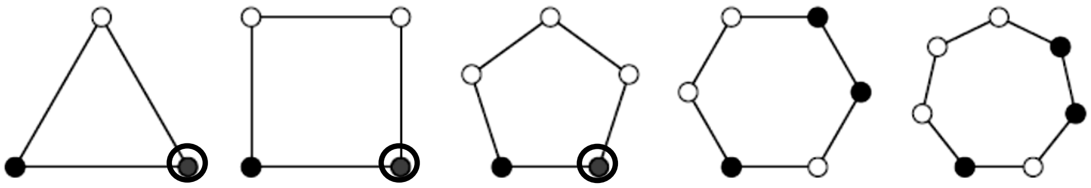
گراف در واقع مدلی ریاضی برای یک مجموعه گسسته است که اعضای آن به‌طریقی به‌هم مرتبط هستند. اعضا می‌توانند قسمت‌های مختلف زمین و ارتباط بین آنها پل‌هایی باشد که آنها را به‌هم مرتبط می‌کند (همانند مسئله کونیگسبرگ). تعریف دقیق‌تر گراف به این صورت است، که گراف مجموعه‌ای از رأس‌ها است، که به‌وسیلۀ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های دوعضوی رئوس که همان یال‌ها هستند به‌هم مربوط (وصل) شده‌اند. نظریه گراف یکی از موضوع‌های مهم در ریاضیات گسسته است که به بررسی گراف‌ها و مدل‌بندی مسائل به‌وسیلۀ آنها می‌پردازد. لئونارد اویلر در سال ۱۷۳۶ با حل مسئله پل‌های کونیگسبرگ نظریه گراف‌ها را بنیان گذاشت. اما جیمز جوزف سیلوستر نخستین کسی بود که در سال ۱۸۷۸ از واژه گراف برای نامیدن این مدل‌های ریاضی استفاده کرد. در نظریه گراف، رنگ‌آمیزی گراف یکی از حالت‌های خاص مسئله‌های برچسب‌گذاری گراف است. رویکرد کلی آن استفاده از نظیر کردن رنگ‌هایی به یال‌ها یا رأس‌ها است که این رنگ‌آمیزی محدودیت خاصی را رعایت کند. در ساده‌ترین حالت، رنگ‌آمیزی‌ای مورد نظر است که در آن هیچ دو رأس (یال) مجاوری هم‌رنگ نباشند. رنگ‌آمیزی گراف کاربردهای زیادی در زمینه‌های عملی و تئوری

*نویسنده مسئول alikhani@yazd.ac.ir

گوناگون دارد. علاوه بر مسئله‌های کلاسیک تعریف شده در این زمینه، با در نظر گرفتن محدودیت‌های مختلفی روی نوع گراف‌ها، روی روش رنگ‌آمیزی و حتی تعداد و رنگ عناصر گراف مسئله‌های متنوعی با کاربردهای وسیع در صنعت و علوم تعریف و حل می‌شود. با این وجود، این مسئله از نظر علمی هنوز در حال رشد و بررسی بیش‌تر است. در این مقاله با رنگ‌آمیزی خاصی از گراف‌ها موسوم به رنگ‌آمیزی متمایز کننده سروکار داریم. ایده اصلی تعریف این رنگ‌آمیزی از مسئله "دسته کلید فرانک رابینز" [۱]، که اولین بار در ستون مجلهٔ دانشگاه ماکالستر[۱] و به‌وسیلهٔ ستان واگن[۲] منتشر شد، می‌آید. این مسئله بدین‌شرح است:

آقای X که فردی نابینا است دسته کلید حلقوی شامل چند کلید دارد. فرض کنید دست‌گیره‌هایی برای کلیدها وجود دارند که به‌وسیلهٔ لمس قابل تشخیص‌اند. برای تمایز n کلید در این دسته کلید، آقای X می‌تواند از این دست‌گیره‌ها برای کلیدها استفاده کند. آقای X حداقل به چند دست‌گیره متفاوت نیاز دارد؟

پاسخ تعجب‌آور این است که اگر شش کلید یا بیش‌تر در دسته کلید وجود داشته باشد آن‌گاه تنها با دو دست‌گیره متفاوت می‌توان این کار را کرد. اما اگر سه، چهار یا پنج کلید در دسته کلید باشد آن‌گاه حداقل به سه دست‌گیره نیازمندیم. اگر کلیدها را به‌عنوان رئوس یک گراف و حلقه دسته کلید را به‌عنوان یال‌ها در نظر بگیریم، آن‌گاه پاسخ مسئلهٔ دسته کلید فرانک رابینز با استفاده از شکل ۱ قابل بیان است.



شکل ۱. پاسخ مسئلهٔ دسته کلید با استفاده از مفهوم گراف.

جواب مسئلهٔ دسته کلید فرانک رابینز به شکل دسته کلید وابسته است. با در نظر گرفتن شکل‌های مختلف برای حلقه دسته کلید، می‌توانیم این مسئله را تعمیم دهیم. فرض کنیم $G = (V, E)$ گراف ساده است. ما از نمادهای استاندارد گراف استفاده می‌کنیم [۲]. به‌ویژه، گروه خودریختی‌های گراف G را با $\mathrm{Aut}(G)$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین فاصلهٔ بین دو رأس x و y در گراف G با $\mathrm{dist}_G(x, y)$ نشان داده می‌شود. منظور از درجه یک رأس، تعداد رئوس مجاور با آن رأس است. گراف G، k-منتظم نامیده می‌شود، اگر درجه هر رأس آن k باشد. رنگ‌آمیزی رأسی $\phi: V \to \{1, \dots, r\}$، r-متمایزکننده نامیده می‌شود، اگر هیچ خودریختی غیرهمانی از G برچسب‌های همه رئوس را حفظ نکند. به‌عبارت دیگر، ϕ یک رنگ‌آمیزی r-متمایز کننده است اگر برای هر خودریختی غیرهمانی σ در $\mathrm{Aut}(G)$، رأس x وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\phi(x) \neq \phi(\sigma(x))$ باشد. عدد متمایز کننده[۳] گراف G، $D(G)$، کوچک‌ترین عدد صحیح d است به‌طوری‌که گراف G دارای یک رنگ‌آمیزی رأسی متمایز کننده با d رنگ باشد. این عدد به‌وسیلهٔ آلبرتسون[۴] و کالینز[۵] معرفی شده است [۳]. به‌صورت مشابه، کالینوفسکی[۶] و پیلسنیاک[۷] [۴] شاخص

1. Macalester
2. Stan Wagon
3. Distinguishing number
4. Albertson
5. Collins
6. Kalinowski
7. Pilšniak

متمایز کننده[۱] $D'(G)$ از گراف G را کوچک‌ترین عدد صحیح d که برای آن گراف G دارای یک رنگ‌آمیزی یالی با d رنگ باشد که تنها تحت خودریختی همانی حفظ می‌شود، تعریف کرده‌اند. اگر گرافی دارای خودریختی غیرهمانی نباشد، آن‌گاه عدد متمایز کننده آن ۱ است. به‌عبارت دیگر برای گراف پادمتقارن G، $D(G)=1$ است. هم‌چنین، $D(G) = |V(G)|$ است اگر و فقط اگر $G = K_n$ باشد. عدد و شاخص متمایز کننده بعضی خانواده از گراف‌ها در [۳،۴] محاسبه شده است. برای مثال، اگر $m \geq 3$، آن‌گاه $D(P_m) = D'(P_m) = 2$، برای $n = 3,4,5$، $D(C_n) = D'(C_n) = 3$، و برای $n \geq 6$، $D(C_n) = D'(C_n) = 2$ هستند. به‌آسانی می‌توانیم مشاهده کنیم که مقدار $|D(G)-D'(G)|$ می‌تواند به‌دلخواه بزرگ باشد. برای نمونه، اگر $p \geq 4$، آن‌گاه $D'(K_{p,p}) = 2$ و $D(K_{p,p}) = p + 1$ است. قضیهٔ ۱ رابطه بین عدد و شاخص متمایزکننده را بیان می‌کند.

قضیهٔ ۱ [۴].

۱. فرض کنیم G گراف هم‌بند از مرتبه $n \geq 3$ است. آن‌گاه $D'(G) \leq D(G) + 1$ است.
۲. فرض کنیم T درخت از مرتبه $n \geq 3$ است. آن‌گاه $D'(T) = D(T)$ یا $D'(T) = D(T) + 1$ است.

فرض کنیم G گراف همبند از مرتبهٔ $n \geq 3$ است و $c: E(G) \to \{1,2,\dots,k\}$ یک رنگ‌آمیزی از یال‌های G است (ممکن است یال‌های مجاور، رنگ‌های یک‌سانی داشته باشند). برای هر رأس v از G ، کد رنگی v با توجه به رنگ‌آمیزی c، k-تایی مرتب $c(v) = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ است که در آن a_i تعداد یال‌های به‌رنگ i، $1 \leq i \leq k$، مجاور با v است. رنگ‌آمیزی c قابل شناسایی است اگر رئوس مختلف، کدهای رنگی متفاوتی داشته باشند. عدد شناسایی[۲] $\det(G)$ از گراف G، کوچک‌ترین عدد صحیح و مثبت k است که برای آن گراف G یک رنگ‌آمیزی قابل شناسایی با k رنگ داشته باشد، [۵]. چون هر گراف غیربدیهی، شامل دو رأس از درجه یک‌سان است پس $\det(G) \geq 2$ است. برای شرح بهتر این مفهوم، گراف G شکل ۲ قسمت (a) را ببینید. یک رنگ‌آمیزی از یال‌های G در شکل ۲ قسمت (b) نشان داده شده است. برای این ۳-رنگ‌آمیزی c، کدهای رنگی رئوس بدین‌صورت هستند:

$$c(u)=110,\ c(v)=021,\ c(w)=210,\ c(x)=201,\ c(y)=101,\ c(z)=001.$$

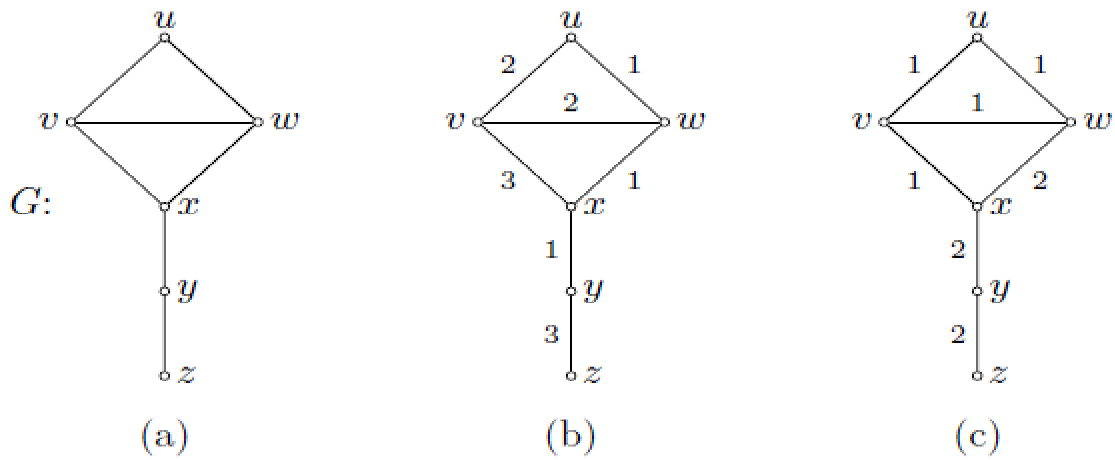
چون رئوس G کدهای رنگی متفاوتی دارند، c یک رنگ‌آمیزی قابل شناسایی است. شکل ۲ قسمت (c)، رنگ‌آمیزی قابل شناسایی دیگر c' از گراف G را نشان می‌دهد. برای این رنگ‌آمیزی کدهای رنگی رئوس بدین‌صورت هستند:

$$c'(u) = 20,\ c'(v) = 30, c'(w) = 21,\ c'(x) = 12,\ c'(y) = 02,\ c'(z) = 01.$$

در رنگ‌آمیزی c' فقط از دو رنگ استفاده شده است و از این رو $\det(G) = 2$ است.

منظور از k-رنگ‌آمیزی یالی، رنگ‌آمیزی یال‌ها با استفاده از k رنگ است و ممکن است یال‌های مجاور، رنگ‌های یک‌سانی داشته باشند.

1. Distinguishing index
2. Detection number



شکل ۲. رنگ‌آمیزی قابل شناسایی از گراف G

رابطهٔ عدد متمایزکننده و عدد شناسایی یک گراف

در این بخش با استفاده از عدد شناسایی و بیش‌ترین درجهٔ گراف، کران بالایی برای عدد متمایزکننده به‌دست می‌آوریم. سپس، به بیان رابطه‌ای بین عدد متمایزکننده یک گراف و عدد شناسایی درخت‌های فراگیر آن گراف می‌پردازیم. برای این منظور، ابتدا دو قضیهٔ ۲ و ۳ را بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۲ [۶]. فرض کنیم c یک k-رنگ‌آمیزی از یالی گراف G است. حداکثر تعداد کدهای رنگی برای رئوس از درجه r، $\binom{k+r-1}{r}$ است.

قضیهٔ ۳ [۷]. اگر c یک k-رنگ‌آمیزی قابل شناسایی از گراف همبند G از مرتبه $n \geq 3$ باشد آن‌گاه G شامل حداکثر $\binom{k+r-1}{r}$ رأس از درجه r است.

با استفاده از قضایای ۲ و ۳ می‌توان قضیهٔ ۴ را به‌دست آورد.

قضیهٔ ۴. فرض کنیم G گراف همبند از مرتبه $n \geq 3$ است.

۱. اگر Δ بزرگترین درجه گراف G باشد آن‌گاه $D(G) \leq \binom{\Delta + \det(G) - 1}{\Delta}$ است.

۲. اگر تعداد رئوس از درجه r در گراف G برابر n_r باشد به طوری‌که $n_r > \binom{k+r-1}{r}$ باشد، آن‌گاه $k < \det(G)$ است.

۳. اگر تعداد رئوس از درجه r در گراف G برابر n_r باشد به طوری‌که $n_r = \binom{k+r-1}{r}$ باشد، آن‌گاه $k \leq \det(G)$ است.

فرض کنیم G گراف همبند از مرتبهٔ n و اندازه m است. تعداد یال‌هایی که باید از G حذف شوند تا درخت فراگیری از G به‌دست آوریم، m-n+1 است. عدد m-n+1 رتبه دور (یا عدد بتی[۱]) گراف G نامیده می‌شود.

قضیهٔ ۵. اگر G گراف همبند از مرتبه $n \geq 3$ و رتبه دور $\psi \leq 1$ باشد، آن‌گاه $D(G) \leq \det(G)$ است.

1. Betti number

اثبات. برای اثبات این قضیه این دو حالت را در نظر می‌گیریم:

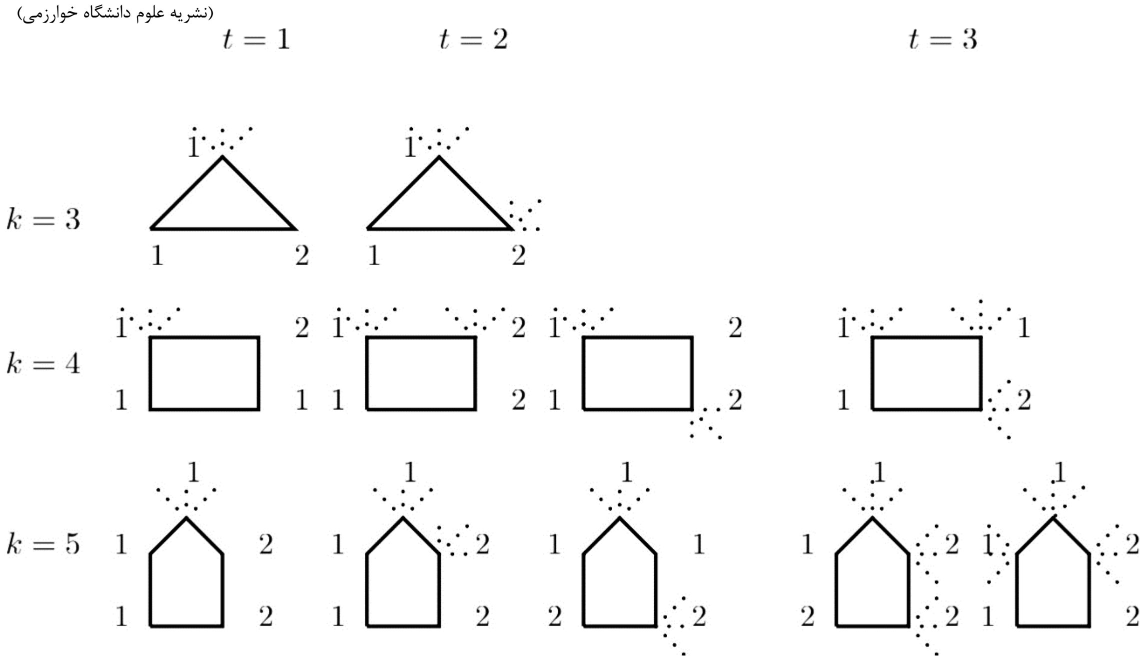
۱. اگر $\psi = 0$ باشد، آن‌گاه G یک درخت است و با استفاده از قضیه‌های ۱ و ۱۰ حکم ثابت می‌شود.

۲. اگر $\psi = 1$ باشد، آن‌گاه گراف G دور یکتای C دارد. فرض کنیم $x_1, \dots, x_k$ رئوس متوالی دور C است. بقیه رئوس G می‌توانند به k مجموعه $T'_1, \dots, T'_k$، متناظر با رئوس $x_1, \dots, x_k$ از دور C، افراز شوند به‌طوری‌که زیرگراف القا شده از G با استفاده از رئوس $T'_i \cup x_i$ یک درخت باشد. این درخت را با T_i نشان می‌دهیم. فرض کنیم $N^{(j)}_{T_i}(x_i)$ نمادی برای مجموعه رئوسی از T_i که در فاصله j از x_i هستند، باشد و $N^{(j)}_{T_i}(x_i) = \{v^{(j)}_{i1}, \dots, v^{(j)}_{it_{ij}}\}$ باشد. همچنین فرض کنیم نگاشت $c: E(G) \to \{1,2,\dots, \det(G)\}$ یک رنگ‌آمیزی قابل شناسایی از G است. در ادامه یک رنگ‌آمیزی متمایز کننده از G با $\det(G)$ رنگ ارائه می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا رئوس درخت‌های T_i را رنگ می‌کنیم. برای هر $j \geq 1$ و $1 \leq i \leq k$، اگر $\{v^{(j)}_{ip}, v^{(j+1)}_{iq}\}$، یالی از T_i باشد، آن‌گاه رأس $v^{(j+1)}_{iq}$ را با رنگ $c(\{v^{(j)}_{ip}, v^{(j+1)}_{iq}\})$ رنگ می‌کنیم. هم‌چنین، برای مقادیر s، $1 \leq s \leq t_{i1}$، رأس $v^{(1)}_{is}$ را با $c(\{x_i, v^{(1)}_{is}\})$ رنگ می‌کنیم. برای رنگ‌آمیزی رئوس دور C، مرتبهٔ آن یعنی k را در نظر می‌گیریم. اگر $k \geq 6$ باشد، آن‌گاه رئوس دور C را به‌طور متمایز کننده با دو رنگ ۱ و ۲ رنگ می‌کنیم. برای $3 \leq k \leq 5$ بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم t، $0 \leq t \leq k$، وجود دارد به‌طوری‌که $T'_{i1}, \dots, T'_{it} \neq \emptyset$ و $T'_{i(t+1)} = \dots = T'_{ik} = \emptyset$ است، جایی که $\{1,2,\dots,k\} = \{i_1, \dots, i_k\}$ است.

۲٫۱. اگر $t=k$، آن‌گاه همهٔ رئوس $x_{i1}, \dots, x_{it}$ را با ۱ رنگ می‌کنیم. با توجه به این‌که همه یال‌های منتهی به رئوس درجه یک درخت‌های $T'_{i1}, \dots, T'_{it}$ در رنگ‌آمیزی قابل شناسایی، رنگ‌های متفاوتی دارند و با توجه به شیوهٔ انتقال رنگ‌ها از یال‌ها به رئوس در این درختان، نتیجه می‌گیریم که همهٔ رئوس درجه یک در این درخت‌ها رنگ‌های متفاوتی دارند، از این‌رو، اگر f خودریختی حافظ این رنگ‌آمیزی از G باشد، آن‌گاه f رئوس دور C را ثابت نگه می‌دارد، از این رو رئوس در مجموعه $\cup_{i=1}^{k} T'_i$ را نیز مجموعه وار به خودش می‌نگارد.

۲٫۲. ا گر $t = 0$ باشد آن‌گاه چون $\det(C)=D(C)$، می‌توانیم رئوس C را با دقیقاً $\det(G)$ رنگ به‌طور متمایز کننده رنگ کنیم. پس اگر f خودریختی حافظ این رنگ‌آمیزی از G باشد، آن‌گاه f رئوس دور C را ثابت نگه می‌دارد و از این رو رئوس در مجموعه $\cup_{i=1}^{k} T'_i$ را نیز مجموعه وار به خودش می‌نگارد.

۲٫۳. اگر $t \neq k$ و $t \geq 1$ باشد آن‌گاه رئوس دور C را دقیقاً مانند شکل ۳ با حداکثر $\det(G)$ رنگ، رنگ‌آمیزی می‌کنیم. در این حالت با توجه به شکل ۳ نتیجه می‌گیریم که اگر f خودریختی حافظ این رنگ‌آمیزی از G باشد، آن‌گاه f رئوس دور C را ثابت نگه می‌دارد و از این رو رئوس در مجموعه $\cup_{i=1}^{k} T'_i$ را نیز مجموعه وار به خودش می‌نگارد.



شکل ۳. رنگ‌آمیزی رئوس دور C در قضیهٔ ۵ حالت ۲٫۳

در هر سه حالت، با توجه به‌روش رنگ‌آمیزی رئوس $\{x_1,\dots,x_k\} - V(G) \ni v, w$، می‌توانیم نتیجه بگیریم که برای هر دو رأس $v, w \in V(G) - \{x_1,\dots,x_k\}$ با درجهٔ یک‌سان، رنگی وجود دارد به‌طوری‌که تعداد به‌کار رفتن آن رنگ برای رئوس مجاور v و w متفاوت است. در نتیجه f همه رئوس T_i' را برای هر i ثابت نگه می‌دارد. بنابراین f خودریختی همانی است و رنگ‌آمیزی ما یک $\det(G)$-رنگ‌آمیزی متمایزکننده است.

قضیهٔ ۶ را می‌توانیم به‌عنوان تعمیمی از قضیهٔ ۵ بیان کرد.

قضیهٔ ۶. فرض کنیم G گراف همبند از مرتبهٔ $n \geq 3$ با رتبهٔ دور ψ، و $\mathcal{T}$ خانواده همه درختان فراگیر G است. آن‌گاه

$$D(G) \leq \min\{\det(T) : T \in \mathcal{T}\} + \psi .$$

اثبات. فرض کنیم T درخت فراگیر دلخواهی از G و متناظر با حذف یال‌های $e_1 = \{u_1, w_1\}, \dots, e_\psi = \{u_\psi, w_\psi\}$ از G است. درخت T را به‌عنوان درختی با ریشه u_1 در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $c: E(T) \to \{1, \dots, \det(T)\}$ رنگ‌آمیزی قابل شناسایی از T است. اگر $e = \{x, y\}$ یالی از T باشد به‌طوری‌که $\mathrm{dist}_T(x, u_1) < \mathrm{dist}_T(y, u_1)$، آن‌گاه رأس y را با رنگ $c(\{x, y\})$ رنگ‌آمیزی می‌کنیم. سپس رأس u_1 را با رنگ $\det(T) + 1$ رنگ‌آمیزی می‌کنیم. این رنگ‌آمیزی را برای رئوس G در نظر می‌گیریم و تغییرات زیر را اعمال می‌کنیم. برای هر i، $2 \leq i \leq \psi$، اگر $\mathrm{dist}_G(u_i, u_1) \neq \mathrm{dist}_G(w_i, u_1)$ باشد، آن‌گاه رنگ رئوس u_i و w_i را به‌رنگ جدید $\det(T) + i$ تغییر می‌دهیم. ادعا می‌کنیم این رنگ‌آمیزی یک رنگ‌آمیزی متمایز کننده از رئوس G است. اگر f خودریختی حافظ این رنگ‌آمیزی از G باشد، آن‌گاه $f(u_1) = u_1$ است، زیرا u_1 تنها رأس از G با رنگ $\det(T) + 1$ است. از این رو f مجموعه $N_G^{(j)}(u_1)$، مجموعهٔ همه رئوس G که در فاصله j از u_1 قرار دارند، را برای هر $j \geq 1$، به‌صورت مجموعه وار به خودش می‌نگارد. اگر f خودریختی غیر همانی حافظ رنگ‌آمیزی از G باشد، آن‌گاه رئوس x و y در $N_G^{(j)}(u_1)$، برای یک $j \geq 1$، وجود دارند به‌طوری‌که $f(x) = y$ است. با توجه به نحوهٔ رنگ‌آمیزی

نتیجه می‌گیریم رنگ رئوس x و y عضوی از مجموعه $\{1,\dots,\det(T)\}$ است. در ادامه دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

۱. اگر $\deg_T(x)=\deg_T(y)$ باشد، آن‌گاه چون رئوس x و y کدهای رنگی متفاوتی دارند، پس نتیجه می‌گیریم رنگی وجود دارد که تعداد دفعات به‌کار رفتن آن برای رئوس مجاور با x و y متفاوت است. اما این مطلب متناقض است با این‌که خودریختی f یک خودریختی حافظ رنگ‌آمیزی است.

۲. اگر $\deg_T(x)\neq\deg_T(y)$ باشد، آن‌گاه چون $f(x)=y$ است پس برای $i=j-1,j,j+1$،

$$|N_G^{(i)}(u_1)\cap N_G(x)|=|N_G^{(i)}(u_1)\cap N_G(y)|, \qquad (۱)$$

زیرا رنگ رئوس x و y عضوی از مجموعه $\{1,\dots,\det(T)\}$ است، بنابراین با توجه به‌روش رنگ‌آمیزی نتیجه می‌گیریم برای $i=j-1,j+1$،

$$\begin{gathered}|N_G^{(i)}(u_1)\cap N_T(x)|=|N_G^{(i)}(u_1)\cap N_G(x)|\\ \left|N_G^{(i)}(u_1)\cap N_T(y)\right|=\left|N_G^{(i)}(u_1)\cap N_G(y)\right|,\end{gathered} \qquad (۲)$$

حالا با استفاده از تساوی‌های (۱) و (۲)، نتیجه می‌گیریم برای $i=j-1,j+1$، $|N_G^{(i)}(u_1)\cap N_T(x)|=|N_G^{(i)}(u_1)\cap N_T(y)|$ است و این بدین معنی است که $\deg_T(x)=\deg_T(y)$ است. با توجه به فرض این یک تناقض است.

بنابراین خودریختی همانی تنها خودریختی حافظ رنگ‌آمیزی است و در نتیجه رنگ‌آمیزی متمایز کننده است و از این‌رو $D(G)\leq\det(T)+\psi$ است. چون T درخت فراگیر دلخواه در نظر گرفته شده است پس حکم ثابت می‌شود.

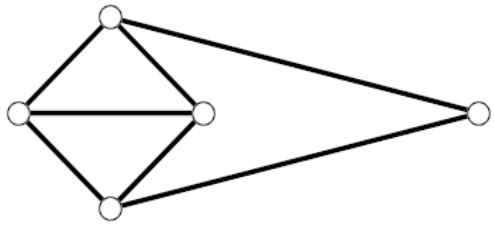
می‌توان مشاهده کرد که نامساوی قضیهٔ ۶، برای گراف‌های دور از مرتبهٔ حداکثر پنج به‌صورت تساوی درمی‌آید. با استفاده از قضیهٔ ۷ نشان می‌دهیم که مقدار $D(G)-\det(G)$ می‌تواند به‌دلخواه بزرگ باشد.

قضیهٔ ۷ [۶]. برای هر عدد صحیح $n\geq 3$، $\det(K_n)=3$ است.

قضیهٔ ۸. برای عدد صحیح و غیرمنفی k، گراف منتظم G وجود دارد که $D(G)-\det(G)=k$ است.

اثبات. اگر گراف G، گراف کامل K_{k+3} باشد، آن‌گاه با توجه به قضیهٔ ۴ و عدد متمایزکننده گراف کامل، $D(K_{k+3})=k+3$، داریم $D(K_{k+3})-\det(K_{k+3})=k$ و در این صورت حکم ثابت می‌شود.

این بخش را با بیان دو حدس زیر خاتمه می‌دهیم. گراف شکل ۳ را در نظر بگیرید. درجه رئوس این گراف ۲ و ۳ است و برای درجه‌های $r=2,3$، $n_r\leq\binom{D(G)+r-1}{r}$ است. با این وجود، $2=D(G)<۳=\det(G)$ است. با مقایسه این مطلب و قضیهٔ ۴ حدس ۱ را مطرح می‌کنیم. هم‌چنین با توجه به قضیهٔ ۵ و ۶ حدس ۲ را بیان می‌کنیم.



شکل ۳. مثالی از گرافی با خاصیت $\mathbf{D}(\mathbf{G}) < \ det(G)$

حدس. فرض کنیم G گراف همبند از مرتبه $\mathrm{n} \geq 3$ و رتبه دور ψ است.

۱. اگر برای هر درجهٔ r از گراف G، $\mathrm{n_r} < \binom{\mathrm{D(G)} + \mathrm{r} - 1}{\mathrm{r}}$ باشد، آن‌گاه $\det(\mathrm{G}) \leq \mathrm{D(G)}$ است.

۲. عدد متمایز کننده گراف G حداکثر $\det(\mathrm{G})+\psi$ است، یعنی $\mathrm{D(G)} \leq \det(\mathrm{G}) + \psi$ است.

رابطهٔ شاخص متمایزکننده و عدد شناسایی یک گراف

این بخش را با بیان رابطه‌ای بین شاخص مجزاکننده و عدد شناسایی یک گراف آغاز می‌کنیم. سپس با استفاده از آن، کران‌هایی برای شاخص متمایز کننده گراف به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۹ [۷]، [۸]. فرض کنیم $\mathrm{D}_\psi(\mathrm{n})$ و $\mathrm{d}_\psi(\mathrm{n})$ به‌ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد شناسایی در میان همه گراف‌های همبند از مرتبه n با رتبه دور ψ است.

۱. برای عدد طبیعی $\mathrm{n} \geq 3$ داریم $\mathrm{D}_0(\mathrm{n}) = \mathrm{n} - 1$ و $\mathrm{d}_0(\mathrm{n}) = \left\lfloor\frac{-5+\sqrt{8\mathrm{n}+41}}{2}\right\rfloor$.

۲. فرض کنیم $\mathrm{n} \geq 3$ عدد صحیح است. آن‌گاه برای $\mathrm{n} = 3,4,5$، $\mathrm{D}_1(\mathrm{n}) = 3$ و برای $\mathrm{n} \geq 6$، $\mathrm{D}_1(\mathrm{n}) = \mathrm{n} - 3$ می‌باشد. هم‌چنین $\mathrm{d}_1(\mathrm{n}) = \left\lfloor\frac{-5+\sqrt{8\mathrm{n}+25}}{2}\right\rfloor$ است.

۳. فرض کنیم $\mathrm{n} \geq 4$ عدد صحیح است. آن‌گاه $\mathrm{D}_2(4) = 2$، و برای $\mathrm{n} = 5,6,7$، $\mathrm{D}_2(\mathrm{n}) = 3$ و برای $\mathrm{n} \geq 8$، $\mathrm{D}_2(\mathrm{n}) = \mathrm{n} - 4$ است. هم‌چنین برای $4 \leq \mathrm{n} \leq 9$، $\mathrm{d}_2(\mathrm{n}) = 2$، و برای $\mathrm{n} \geq 10$، $\mathrm{d}_2(\mathrm{n}) = \left\lfloor\frac{-5+\sqrt{8\mathrm{n}+9}}{2}\right\rfloor$ است.

قضیهٔ ۱۰. فرض کنیم G گراف همبند از مرتبهٔ $\mathrm{n} \geq 3$ است.

۱. هر رنگ‌آمیزی قابل شناسایی از گراف G ، یک رنگ‌آمیزی یالی متمایزکننده است.

۲. برای گراف G همواره $\mathrm{D'(G)} \leq \det(\mathrm{G})$ است.

اثبات. ۱) فرض کنیم $\det(\mathrm{G}) = \mathrm{k}$ و $\mathrm{c}: \mathrm{E(G)} \to \{1,2,\ldots,\mathrm{k}\}$ یک رنگ‌آمیزی قابل شناسایی از گراف G است. نشان می‌دهیم c یک رنگ‌آمیزی متمایز کننده است. اگر f یک خودریختی از گراف G باشد به‌طوری‌که f رنگ‌آمیزی c را حفظ کند، آن‌گاه چون برای هر دو رأس دلخواه با درجه یک‌سان از G، رنگی وجود دارد که تعداد به‌کار رفتن آن در یال‌های مجاور با این دو رأس متفاوت است، نتیجه می‌گیریم که f هر دو رأس دلخواه از درجهٔ یک‌سان را ثابت نگه می‌دارد و از این‌رو f خودریختی همانی است. این بدین‌معنی است که رنگ‌آمیزی c متمایز کننده است. قسمت (۲) نتیجهٔ مستقیم از (۱) است.

به آسانی می‌توان مشاهده کرد که تساوی در قضیهٔ ۱۰ برای گراف‌های ستاره $K_{1,n}$ برقرار است. با استفاده از قضیه‌های ۹ و ۱۰، می‌توانیم کران‌های بالایی برای شاخص متمایزکننده یک گراف با توجه به مرتبهٔ آن گراف به‌دست آوریم.

قضیهٔ ۱۱. فرض کنیم G گراف همبند از مرتبهٔ n و اندازهٔ m است.

۱. اگر $m = n - 1$ باشد، آن‌گاه برای $n \geq 3$، $D'(G) \leq n - 1$ است.

۲. اگر $m = n$ باشد، آن‌گاه برای $n \geq 6$، $D'(G) \leq n - 3$ است. هم‌چنین اگر $n = 3,4,5$ باشد، آن‌گاه $D'(G) \leq 3$ است.

۳. اگر $m = n + 1$ باشد، آن‌گاه برای $n \geq 8$، $D'(G) \leq n - 4$ است. هم‌چنین اگر $n = 5,6,7$ باشد، آن‌گاه $D'(G) \leq 3$، و برای $n = 4$، $D'(G) \leq 2$ است.

با استفاده از قضیهٔ ۱۲ نشان می‌دهیم که فاصلهٔ بین $D'(G)$ و $\det(G)$ می‌تواند دلخواه باشد.

قضیهٔ ۱۲ [۷]. فرض کنیم $n \geq 3$ عدد صحیح و $l = \lfloor \sqrt{n/2} \rfloor$ است. آن‌گاه عدد قابل شناسایی گراف دور بدین‌صورت است:

$$\det(C_n) = \begin{cases} 2l, & 2l^2 - l + 1 \leq n \leq 2l^2 \\ 2l - 1, & 2(l-1)^2 + 1 \leq n \leq 2l^2 - 1. \end{cases}$$

قضیهٔ ۱۳. برای عدد صحیح و غیر منفی k، گراف منتظم G وجود دارد که $D'(G) - \det(G) = k$ است.

اثبات. اگر گراف G، گراف دور C_n باشد، آن‌گاه با استفاده از قضیهٔ ۱۲ و شاخص متمایزکننده گراف دور، $D'(C_3) = D'(C_4) = D'(C_5) = 3$، و برای $n \geq 6$ $D'(C_n) = 2$، حکم ثابت می‌شود.

منابع

1. Rubin F., "Problem 729 in Journal of Recreational Mathematics", 11 (1979) 128.
2. Hammack R., Imrich W., Kalavzar S., "Handbook of product graphs (second edition)", Taylor & Francis group (2011).
3. Albertson M. O., Collins K. L., "Symmetry breaking in graphs", Electron. J. Combin, 3 (1) (1996) R18.
4. Kalinowski R., Pilsniak M., "Distinguishing graphs by edge colourings", European J. Combin. 45 (2015) 124-131.
5. Escuadro H., Zhang P., "On detectable colorings of graphs", Mathematica Bohemica, 130 (4) (2005) 427-445.
6. Aigner M., Triesch E., Tuza Z., "Irregular assignments and vertex-distinguishing edge colorings of graphs", Combinatorics '90, Proc. Conf. Gaeta/Italy 1990, Elsevier Science Pub, (1992) 1-9.

7. Chartrand G., Escuadro H., Okamoto F., Zhang P., "Detectable colorings of graphs", Utilitas Mathematica, 69 (2006) 13-32.
8. Escuadro H., Zhang P., "Extremal problems on detectable colorings of connected graphs with cycle rank 2", AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, 2 (2005) 99-117.