

دوفصلنامه هیدروفیزیک

دوره پنجم، شماره اول (بهار و تابستان ۱۳۹۸)

مقاله پژوهشی

## حل تحلیلی معادله دوبعدی و غیرماندگار انتقال آلودگی برای شرایط اولیه و مرزی دلخواه

ندا مشهدگر<sup>۱</sup>، مهدی مظاهری<sup>۲\*</sup>، جمال محمد ولی سامانی<sup>۳</sup>

n.mashhadgar@modares.ac.ir

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری، گروه سازه‌های آبی- دانشگاه تربیت مدرس، تهران

m.mazaheri@modares.ac.ir

<sup>۲\*</sup> نویسنده مسئول، استادیار گروه سازه‌های آبی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

samani\_j@modares.ac.ir

<sup>۳</sup> استاد، گروه سازه‌های آبی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

تاریخ پذیرش: ۹۸/۰۷/۲۵

تاریخ دریافت: ۹۸/۰۷/۰۶

### چکیده

در این تحقیق حل تحلیلی صورت دوبعدی معادله جابه‌جایی-پراکنندگی-واکنش در دامنه محدود در رودخانه، با استفاده از روش تبدیل انتگرالی تعمیم یافته استخراج شده است. شرط مرزی بالادست دیریشلت، به همراه تابع غلظت ورودی با الگوی زمانی نامنظم و دلخواه، شرط مرزی پایین دست و سواحل رودخانه نیومن در نظر گرفته شد. همچنین شرط اولیه نیز به صورت تابع مکانی کلی در دامنه لحاظ شد. به منظور ارزیابی حل استخراج شده، نتایج حاصله از حل پیشنهادی با حل تحلیلی به دست آمده با استفاده از روش تابع گرین مقایسه شد. به این ترتیب که در دو مثال فرضی مجزا برای حالتی که آلاینده ورودی از مرز صفر و شرط اولیه به صورت تخلیه ناگهانی جرم مشخصی از یک ماده آلاینده در یک نقطه معین در دامنه باشد؛ نیز در حالتی که هم‌زمان شرط اولیه و شرط مرزی با الگوی زمانی نامنظم و دلخواه در دامنه فعال باشند، مقایسه انجام شده و شاخص‌های آماری محاسبه شد. مقدار شاخص آماری ضریب هم بستگی برابر با یک و میانگین خطای نسبی حدود ۰/۱ درصد به دست آمد. مقادیر شاخص‌های محاسبه شده بیانگر انطباق کامل نتایج حاصل از هر دو حل تحلیلی با یکدیگر است. حل تحلیلی پیشنهادی به دلیل انعطاف پذیری بالادر اتخاذ توابع گوناگون به عنوان شرط مرزی و اولیه، قابلیت بالایی به منظور کاربرد در صحت‌سنجی حل‌های عددی پیچیده معادله انتقال آلودگی در حالت‌های دوبعدی را دارد.

**واژه‌های کلیدی:** معادله انتقال آلودگی، شرط مرزی با الگوی زمانی نامنظم، دامنه محدود، روش تبدیل انتگرالی تعمیم یافته

### ۱. مقدمه

انتشار آلودگی در منابع آلاینده سطحی و زیرزمینی از مهم‌ترین مسائل و مشکلات موجود در محیط‌زیست است. با توجه به اینکه رودخانه یکی از مهم‌ترین منابع تأمین آب شرب جوامع بشری، آب لازم در بخش کشاورزی و صنعت

می‌باشد، لازم است بیشتر مورد توجه قرار گیرد. معادله حاکم بر انتقال آلودگی در رودخانه‌ها، معادله جابه‌جایی-پراکنندگی-واکنش<sup>۱</sup> (ADRE) است. این معادله یکی از مهم‌ترین معادله‌های دیفرانسیل جزئی بوده که از ترکیب معادله پیوستگی و قانون اول فیک به دست آمده و

آلاینده است. برای مدل سازی مستقیم انتقال یک آلاینده در رودخانه باید معادله‌های دیفرانسیلی جریان و انتقال حل شوند. در حالت یک بعدی فرض می‌شود که توزیع ماده آلاینده در مقطع یکنواخت است و تغییرات غلظت تنها در جهت طولی اتفاق می‌افتد. این فرض در شرایطی مثل عرض بودن مقطع رودخانه و ناچیز بودن دبی منبع آلاینده در مقایسه با دبی رودخانه، ممکن است صادق نباشد؛ بنابراین در چنین حالت‌هایی به منظور تخمین دقیق‌تر از رفتار و نحوه انتقال ماده آلاینده، مدل‌های دوبعدی مدل‌های کارآمدتری هستند. علاوه بر این، به طور خاص در رودخانه‌های طبیعی مقیاس عمق در قیاس با میزان عرض رودخانه ناچیز و قابل صرف نظر کردن است؛ بنابراین اختلاط کامل در راستای عمق بسیار زودتر از اختلاط عرضی صورت می‌گیرد و بر این اساس می‌توان معادله دوبعدی میانگین گیری شده در عمق را برای بررسی انتقال ماده حل شده در چنین محیط‌هایی به کار گرفت [۴]. شرط اولیه مروری بر تحقیقات انجام شده در زمینه حل‌های تحلیلی معادله ADRE در حالت دوبعدی نشان می‌دهد که اکثر تحقیقات انجام شده در محیط متخلخل و به ازای شرط مرزی با ورودی به صورت یک تابع زمانی مشخص (پیوسته، نمایی، پله‌ای یا سینوسی) بوده است. با توجه به حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی در حالت دوبعدی در دامنه محدود در محیط متخلخل به ازای شرط مرزی نوع سوم با الگوهای زمانی دلخواه با استفاده از ترکیب تبدیل لاپلاس و فوریه را به دست آورد. منبع آلاینده ورودی از شرط مرزی ورودی با الگوی زمانی بارگذاری نمایی در نظر گرفته شد و برای دو حالت خاص پاسخ معادله استخراج شده و با حل عددی قیاس شد. در حالت اول منبع آلاینده ورودی از مرز به صورت یکنواخت در بازه‌های مکانی متفاوت در عرض لحاظ شد و در حالت دوم منبع ورودی از مرز با شکل هندسی مثلثی در نظر گرفته شد [۵]. ماژومدر و ژیا، معادله دوبعدی انتقال آلودگی را برای جریان در یک رودخانه باز با توزیع سرعت غیریکنواخت و با لحاظ منبع آلاینده ورودی از مرز با دو الگوی زمانی متفاوت، با استفاده از روش گشتاور<sup>۲</sup> حل کردند. در این تحقیق در حالت اول منبع ناگهانی خطی یکنواخت و در حالت دوم منبع نوسانی در نظر گرفته شد [۶].

کاربردهای وسیعی در علوم آب، علوم جو، انتقال حرارت، مهندسی محیط زیست، مهندسی مکانیک، علوم خاک و مهندسی شیمی و نفت دارد [۱]. بنابراین راه حل تحلیلی یا عددی آن می‌تواند برای توضیح نحوه توزیع غلظت ماده آلوده کننده و رفتار آن در یک محیط باز مانند هوا، رودخانه و محیط متخلخل مؤثر واقع شود. به پاسخی از یک معادله دیفرانسیل که می‌توان آن را با هر درجه مطلوب از دقت، در هر مکان و زمان دلخواه، بدون تغییر در ساختار پاسخ تعیین کرد، حل تحلیلی گفته می‌شود [۲]. مدل‌های تحلیلی ابزارهای بسیار ارزشمندی برای بررسی نحوه انتقال املاح در محیط متخلخل یا جریانات سطحی هستند؛ اما به دلیل پیچیدگی رفتار واقعی یک سیستم در طبیعت و ورود پارامترهای بسیار زیادی که در حل مسئله دخیل هستند، ارائه یک راه حل تحلیلی بسیار پیچیده و دشوار بوده و در مواردی حتی غیرممکن می‌شود.

صورت معادله انتقال آلودگی یا معادله جابه جایی-پراکنندگی-واکنش در حالت دوبعدی با ضرایب متغیر و برای حالت غیر ماندگار و غیریکنواخت که در معرض پدیده‌های جابه جایی، پراکنندگی و واکنش قرار دارد، بدون هیچ فرض ساده کننده‌ای عبارت است از [۳]:

$$\frac{\partial(hc)}{\partial t} = -\frac{\partial(huc)}{\partial x} - \frac{\partial(hvc)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( hD_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( hD_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) - khc \quad (1)$$

رابطه ۱ از میانگین گیری شکل سه بعدی معادله انتقال جرم در امتداد عمق به دست آمده است؛ بنابراین به آن معادله متوسط گیری شده عمقی می‌گویند. در رابطه بالا  $x$  و  $y$  به ترتیب مختصات طولی و عرضی هر نقطه دلخواه از دامنه،  $t$  زمان،  $h$  عمق،  $u$  سرعت جریان در جهت  $x$ ،  $v$  سرعت جریان در جهت  $y$ ،  $D_x$  ضریب پراکنندگی در جهت  $x$ ،  $D_y$  ضریب پراکنندگی در جهت  $y$  و  $k$  ضریب واکنش و  $c=c(x,y,t)$  تابع توزیع غلظت در جهات طول و عرض هستند. در مدل سازی مستقیم پدیده انتقال یک آلاینده در رودخانه، هدف محاسبه توزیع مکانی و زمانی غلظت آلاینده در رودخانه با توجه به معلوم بودن مکان و شدت منابع

در حالت‌های یک، دو و سه‌بعدی را به دست آوردند [۱۰].

مشهدگره و همکاران، حل تحلیلی فرم یک‌بعدی و دوبعدی معادله انتقال آلودگی را با لحاظ منابع آلاینده نقطه‌ای با الگوهای زمانی بارگذاری به‌صورت دلخواه و نامنظم با استفاده از روش تابع گرین در رودخانه استخراج کردند [۱۱].

دیباروس و همکاران، فرم دو معادله جابه‌جایی پراکنندگی را در رودخانه در حالت ماندگار با استفاده از روش تبدیل انتگرالی تعمیم یافته<sup>۴</sup> (GITT) حل کردند. آن‌ها عامل پراکنندگی را در جهت  $y$  و عامل جابه‌جایی را در جهت  $x$  و  $y$  در نظر گرفتند. همچنین شرط مرزی بالادست را از نوع یک با ورودی به‌صورت غلظت ثابت در محدوده مشخصی از محور عرضی و شرط مرزی در سایر قسمت‌ها را از نوع گرادیان صفر لحاظ کردند [۱۲]. کاسول و همکاران، یک حل تحلیلی برای مسئله دوبعدی غیرماندگار انتشار آلودگی در جو، با استفاده از ترکیبی از دو روش GITT و تبدیل لاپلاس ارائه دادند. آن‌ها در این تحقیق شرط مرزی بالادست را دیریشلت و غلظت ورودی به جو را به‌صورت یک منبع آلاینده نقطه‌ای با بارگذاری پیوسته با زمان ورودی از مرز در نظر گرفتند. چن و همکاران حل تحلیلی فرم دوبعدی معادله انتقال آلودگی در سیستم مختصات استوانه‌ای را با استفاده از ترکیب تبدیل هنکل محدود و روش GITT به دست آوردند. شرط مرزی بالادست از نوع اول و سوم در نظر گرفته شد. به‌منظور بررسی میزان تأثیر شرط مرزی پایین دست بر نتایج غلظت، حل تحلیلی استخراج‌شده در دامنه محدود با حل تحلیلی متناظر در دامنه نیمه محدود مقایسه شد [۱۳].

ون گناختن و همکاران، فرم ماندگار و غیر ماندگار معادله انتقال آلودگی در حالت‌های ۱، ۲ و ۳ بعدی در دامنه نیمه محدود و محدود را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کردند. آن‌ها الگوی زمانی آلاینده ورودی از مرز بالادست را به‌صورت پیوسته، نمایی، پله‌ای و ضربه‌ای در نظر گرفتند و نتایج نهایی را در قالب یک نرم افزار به نام 3DADE ارائه دادند [۱۴]. چن و همکاران، با استفاده از ترکیب تبدیل‌های انتگرالی کسینوسی فوریه، لاپلاس با روش تبدیل انتگرالی تعمیم یافته حل تحلیلی فرم دوبعدی معادله انتقال آلودگی را در دامنه محدود به ازای شرط مرزی نوع سه در بالادست در

یه و همکاران، حل تحلیلی معادله ADRE را در حالت‌های یک، دو و سه‌بعدی با ضرایب ثابت در محیط متخلخل با استفاده از روش تابع گرین<sup>۳</sup> استخراج کردند. آن‌ها شرط مرزی در بالادست را از نوع یک، دو و سه و شرط مرزی در پایین دست را از نوع یک و دو در نظر گرفتند و حل را به ازای توابع زمانی ورودی از مرز بالادست با الگوهای ناگهانی، پیوسته و پله‌ای به دست آوردند [۷].

باشا، حل تحلیلی فرم یک، دو و سه‌بعدی معادله انتقال آلودگی را در یک رودخانه با سطح مقطع منشوری و دامنه نامحدود در امتداد طول و دامنه محدود در امتداد عرض و عمق آن با فرض ثابت بودن ضرایب پخش در جهت‌های  $x$  و  $y$  و متغیر بودن سرعت در جهت جریان با استفاده از ترکیب روش تابع گرین و روش تصویری به دست آوردند. در این تحقیق سرعت به‌صورت تابع مکانی در امتداد عرض با الگوی توانی در نظر گرفته شد [۸].

لیج و همکاران، از روش تابع گرین به منظور استخراج حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی در حالت‌های یک، دو و سه‌بعدی استفاده نمودند. آن‌ها در این تحقیق با فرض ماندگار و یکنواخت بودن جریان در محیط متخلخل، ضخامت سفره (راستای عمق) را به‌صورت نامحدود، نیمه محدود و محدود و جهت‌های طولی و عرضی را نامحدود فرض کردند. در ادامه با ارائه جدولی شامل توابع گرین در دامنه‌های نامحدود، نیمه محدود و محدود و محدود برای شرایط مرزی متفاوت یک چارچوب کلی به‌صورت یک رابطه انتگرالی کلی برای فرموله کردن حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی ارائه دادند. آن‌ها تأثیر شرط مرزی به‌صورت ورود یک غلظت ثابت نسبت به زمان ناشی از یک صفحه ماده آلاینده را برای سه نوع شرط مرزی نوع اول، دوم و سوم در جهت عمق (ضخامت سفره) در حالت سه‌بعدی تعیین کردند [۹].

پارک و ژان، حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی به ازای انتشار غلظت از یک منبع آلاینده خارجی مکعبی در یک سفره آب زیرزمینی با ضخامت محدود را با استفاده از روش تابع گرین تعیین کردند. آن‌ها توزیع زمانی و مکانی غلظت ناشی از یک منبع آلاینده مکعبی شکل با الگوی زمانی ضربه‌ای و پیوسته

**۲-۱. روش تبدیل انتگرالی تعمیم یافته (GITT)**

روش تبدیل انتگرالی کلاسیک (CITT) روشی معروف برای حل تحلیلی گروه خاصی از مسائل پخشیدگی خطی و مسائل مقدار مرزی خطی، بر مبنای بسط دادن تابع پتانسیل اصلی مبتنی بر مسئله مقدار ویژه است و قابلیت کاربرد برای عبارت منبع دلخواه و مسائل غیرخطی چندبعدی را ندارد [۱۹]. در سه دهه اخیر با ارتقای این روش‌ها و تکیه بر مفهوم حل‌های هیبریدی (تحلیلی- عددی)، روش جدیدی به نام روش تبدیل انتگرالی تعمیم یافته (GITT) به وجود آمد که استخراج حل تحلیلی تقریبی برای محدوده وسیعی از مسائل غیرقابل حل میسر شده و محدودیت‌های موجود در روش تبدیل انتگرالی کلاسیک برطرف شد [۲۰-۲۱]. از مزیت‌های این روش آن است که امکان کنترل خطا را برای کاربر فراهم آورده و در عین حال عملکرد محاسباتی بسیار خوبی در حل بسیاری از معادله‌های دیفرانسیل جزئی با شرایط اولیه و مرزی متنوع و ناهمگن و ضرایب ثابت و متغیر در دامنه‌های نیمه محدود و محدود، از خود نشان می‌دهد. علاوه بر این نتایج حاصل از روش GITT را می‌توان به‌عنوان ابزاری مفید در جهت ارزیابی صحت و دقت نتایج حاصل از مدل‌های عددی به کار گرفت. اساس روش GITT بر استفاده از توابع ویژه استوار است و برای حل یک معادله دیفرانسیل جزئی با استفاده از این روش مراحل زیر دنبال می‌شود [۲۱-۲۲]:

۱. همگن کردن شرط مرزی بالادست با استفاده از روش تابع فیلتر؛
۲. طرح یک مسئله مقادیر ویژه کمکی، حل آن و محاسبه مقادیر ویژه و توابع ویژه؛
۳. استخراج تبدیل‌های مستقیم و معکوس با استفاده از مفهوم سری فوریه تعمیم یافته؛
۴. اعمال تبدیل‌های مستقیم و معکوس بر معادله دیفرانسیل به دست آمده از مرحله اول و بهره‌گیری از خاصیت تعامد توابع ویژه و نرم توابع؛
۵. تشکیل دستگاه ODE نهایی و حل آن؛
۶. تعیین پاسخ مسئله اصلی با استفاده از تبدیل معکوس.

ایده اصلی روش GITT بعد از تعیین مسئله مقدار ویژه کمکی مناسب، تبدیل معادله دیفرانسیل جزئی اصلی به یک

محیط متخلخل تعیین کردند [۱۵]. کول و همکاران، حل تحلیلی فرم دوبعدی و ماندگار معادله ADRE با ضرایب ثابت را در دامنه نیمه محدود به ازای شرط مرزی دیریشلت در بالادست با الگوی زمانی پیوسته با زمان با استفاده از روش تغییر متغیر و انتگرال‌گیری مستقیم به دست آوردند [۱۶]. داس و همکاران، حل تحلیلی فرم ۱، ۲ و ۳ بعدی معادله انتقال آلودگی در دامنه نیمه محدود را به ازای شرط مرزی دیریشلت در بالادست با استفاده از تبدیل لاپلاس به دست آوردند. آن‌ها شرط مرزی ورودی را از نوع نمایی در نظر گرفته و نتایج حاصله را با حل‌های عددی مقایسه کردند [۱۷]. یاداو و کومار، حل تحلیلی فرم دوبعدی معادله انتقال آلودگی با ضرایب متغیر را در دامنه نیمه محدود در محیط متخلخل با استفاده از تبدیل لاپلاس به دست آوردند. آن‌ها شرط مرزی را از نوع سوم لحاظ کرده و الگوی زمانی آلاینده ورودی از شرط مرزی را از نوع پله‌ای در نظر گرفتند [۱۸].

هدف از این تحقیق استخراج راه حل تحلیلی معادله ADRE در حالت دوبعدی با ضرایب ثابت به ازای آلاینده ورودی از شرط مرزی با الگوی زمانی دلخواه و شرط اولیه در حالت کلی در دامنه محدود با استفاده از روش GITT است. یادآوری این نکته ضروری است که راه حل‌های ارائه شده برای معادله ADRE به خصوص در دامنه محدود، اغلب به ازای شرایط مرزی با الگوهای زمانی ساده اعم از پله‌ای، پیوسته و نمایی است؛ بنابراین استخراج حل تحلیلی برای معادله ADRE در دامنه محدود در حالت دوبعدی به ازای شرط مرزی با الگوی زمانی دلخواه و شرط اولیه کلی، اقدام بارز و کاربردی به حساب می‌آید.

**۲. مواد و روش‌ها**

در این بخش ابتدا به معرفی روش تبدیل انتگرالی تعمیم یافته (GITT) و خصوصیات و ویژگی‌های این روش در حل معادله‌های دیفرانسیل جزئی ناهمگن پرداخته می‌شود. سپس شرح کامل پیاده‌سازی روش یادشده برای حل فرم دوبعدی معادله انتقال آلودگی بر یک دامنه مستطیلی ارائه می‌شود.

دلخواهی از زمان  $(g(t))$  است. در ادامه مراحل حل معادله ADRE با استفاده از روش GITT به تفصیل تشریح خواهد شد.

### ۲-۱- معرفی و تعیین تابع فیلتر

برای استفاده از روش GITT، شرایط مرزی بایستی همگن باشند. به منظور همگن سازی شرط مرزی بالادست رابطه (۳) و تسریع در همگرایی راه حل نهایی از تابع فیلتر استفاده می شود. بنابراین اولین گام انتخاب یک تابع مناسب به عنوان تابع فیلتر برای همگن سازی شرایط مرزی است. تابع فیلتر F بایستی در رابطه زیر صدق کند [۲۱]:

$$c(x, y, t) = U(x, y, t) + F(x, y, t) \quad (۴)$$

که در آن  $U(x, y, t)$  تابع کمکی و  $F(x, y, t)$  تابع فیلتر است. در این تحقیق تابع فیلتر دقیقاً برابر با تابع ورودی از شرط مرزی در نظر گرفته شده است.

بنابراین:

$$F = g(t) \quad (۵)$$

به این ترتیب با جایگذاری تابع  $c$  از رابطه (۴) در رابطه (۲)، معادله اصلی عبارت خواهد بود از:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -u \frac{\partial U}{\partial x} - v \frac{\partial U}{\partial y} + D_x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - kU + D_y \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \underbrace{kg(t) - \frac{dg(t)}{dt}}_s \quad (۶)$$

که در رابطه (۶)،  $s$  عبارت منبع جدید ایجاد شده به علت حضور تابع فیلتر است. همچنین شرط اولیه و شرایط مرزی همگن مربوط به معادله جدید حاصله عبارت اند از:

$$IC : U(x, y, 0) = f(x, y) - F(0) \\ BC : \begin{cases} U(0, y, t) = 0, \left. \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \\ \left. \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \left. \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=W} = 0 \end{cases} \quad (۷)$$

به این ترتیب به منظور تعیین پاسخ معادله ADRE با ضرایب ثابت رابطه (۲) باید تابع کمکی  $U$  را از طریق حل معادله دیفرانسیل جزئی جدید رابطه (۶) با شرط اولیه و شرایط مرزی همگن حاصله رابطه (۷) تعیین کرده؛ سپس حاصل را

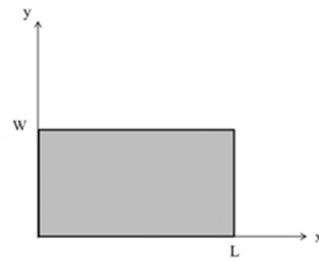
سیستم نامتناهی از معادله های دیفرانسیل معمولی است که حل آن ها نسبت به حل معادله دیفرانسیل ناهمگن اولیه با سهولت بیشتری همراه است [۲۰-۲۲]. در بخش بعد مراحل یاد شده در مورد معادله دوبعدی انتقال آلودگی به تفصیل بیان خواهد شد.

### ۲-۲. حل معادله دوبعدی جابه جایی-پراکندگی در دامنه

#### مستطیلی با استفاده از روش GITT

معادله انتقال آلودگی با ضرایب ثابت (سرعت و ضریب پراکندگی در جهات طولی و عرضی) در دامنه دوبعدی که از معادله (۱) قابل استخراج است، به همراه شکل شماتیک از دامنه حل عبارت است از:

شکل ۱: دامنه حل فرم دوبعدی معادله ADRE



$$\frac{\partial c}{\partial t} = -u \frac{\partial c}{\partial x} - v \frac{\partial c}{\partial y} + D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - kc \quad (۲)$$

در این تحقیق دامنهٔ محدود به طول  $L$  و عرض  $W$  در نظر گرفته شده و حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی با ضرایب ثابت به ازای شرط مرزی دیریشلت در بالادست و شرط مرزی نیومن با مقدار صفر در پایین دست و کرانه ها استخراج شده است. ترکیب شرط مرزی اتخاذ شده یکی از پرکاربردترین ترکیبات شرط مرزی در مجاری روباز است. شرط اولیه و شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای معادله (۲) عبارت اند از:

$$IC : c(x, y, 0) = f(x, y) \\ BC : \begin{cases} c(0, y, t) = g(t), \left. \frac{\partial c(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \\ \left. \frac{\partial c(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \left. \frac{\partial c(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=W} = 0 \end{cases} \quad (۳)$$

با توجه به معادله (۳)، شرط اولیه به صورت تابع دلخواه از مکان  $(f(x, y))$  و شرط مرزی در بالادست به صورت تابع

(۱۰)

که در رابطه (۱۰)،  $N_{m,n}$  نرم تابع ویژه و  $\tilde{\Omega}_{m,n}(x,y)$  فرم نرمال شده تابع ویژه است.

### ۲-۳-۲. معرفی تبدیل مستقیم و معکوس در روش GITT و استخراج حل تحلیلی

گام بعدی به منظور استخراج حل با استفاده از روش GITT، معرفی تبدیل های مستقیم و معکوس بر اساس تابع ویژه و اعمال آن ها در معادله (۶) است. پس با توجه به فرم نرمال شده تابع ویژه (رابطه ۱۰)، تبدیل مستقیم و معکوس انتگرالی تعریف شده در روش GITT به ترتیب مطابق رابطه (۱۱) و (۱۲) عبارت اند از [۲۲]:

$$\bar{U}_{m,n}(t) = \int_0^W \int_0^L U(x,y,t) \tilde{\Omega}_{m,n}(x,y) dx dy \quad (11)$$

$$U(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{U}_{m,n}(t) \tilde{\Omega}_{m,n}(x,y) \quad (12)$$

با جایگذاری  $U(x,y,t)$  از رابطه (۱۲) در معادله (۶) و ضرب طرفین معادله حاصله به ازای یک  $i$  و  $j$  مشخص در

$$\int_0^W \int_0^L (\cdot) \tilde{\Omega}_{i,j}(x,y) dx dy$$

تقدم و تأخر مشتق، انتگرال و سیگما، رابطه (۱۳) به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \bar{U}_{m,n}(t) \int_0^W \int_0^L \tilde{\Omega}_{m,n}(x,y) \tilde{\Omega}_{i,j}(x,y) dx dy = \\ & -u \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{U}_{m,n}(t) \int_0^W \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{\Omega}_{m,n}(x,y)) \tilde{\Omega}_{i,j}(x,y) dx dy \\ & -v \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{U}_{m,n}(t) \int_0^W \int_0^L \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{\Omega}_{m,n}(x,y)) \tilde{\Omega}_{i,j}(x,y) dx dy \\ & +D_x \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{U}_{m,n}(t) \int_0^W \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\tilde{\Omega}_{m,n}(x,y)) \tilde{\Omega}_{i,j}(x,y) dx dy \\ & +D_y \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{U}_{m,n}(t) \int_0^W \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\tilde{\Omega}_{m,n}(x,y)) \tilde{\Omega}_{i,j}(x,y) dx dy \\ & -k \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{U}_{m,n}(t) \int_0^W \int_0^L \tilde{\Omega}_{m,n}(x,y) \tilde{\Omega}_{i,j}(x,y) dx dy \\ & + \int_0^W \int_0^L \left( -kg(t) - \frac{dg(t)}{dt} \right) \tilde{\Omega}_{i,j}(x,y) dx dy \end{aligned} \quad (13)$$

با تابع فیلتر جمع کرد. برای حل معادله دیفرانسیل مربوط به تابع کمکی رابطه (۶)، از روش GITT استفاده می شود. همان طور که قبلاً گفته شد اساس روش GITT بر مبنای انتخاب مسئله مقدار ویژه استوار است؛ بنابراین گام بعدی معرفی یک مسئله مقدار ویژه مشخص و تعیین مقادیر ویژه، توابع ویژه و نرم آن ها است.

### ۲-۲-۲. معرفی و تعیین مسئله مقدار ویژه

گام بعدی برای حل معادله انتقال آلودگی با استفاده از روش GITT معرفی مسئله مقدار ویژه مناسب است که با حل آن، مقادیر ویژه و توابع ویژه مناسب استخراج شده و بر اساس آن تبدیل های مستقیم و معکوس مربوط به روش GITT تعریف می شود. لازم به یادآوری است که مسئله مقدار ویژه بایستی شامل اطلاعاتی در مورد محیط مورد مطالعه و رفتار متغیرهای مکانی مسئله اصلی باشد. همچنین باید بر اساس اپراتورهای خودالحاقی نوشته شود تا مجموعه توابع ویژه حاصله از آن یک مجموعه متعامد باشد [۲۱-۲۳]. بر این اساس مسئله مقدار ویژه انتخابی متناسب با معادله (۶) با شرایط مرزی همگن، عبارت است از:

$$\frac{\partial^2 \Omega_{m,n}(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega_{m,n}(x,y)}{\partial y^2} + \mu_{m,n}^2 \Omega_{m,n}(x,y) = 0$$

$$BCs : \begin{cases} \Omega_{m,n}(0,y) = 0, & \frac{\partial \Omega_{m,n}(L,y)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \Omega_{m,n}(x,0)}{\partial y} = 0, & \frac{\partial \Omega_{m,n}(x,W)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

که در رابطه (۸)،  $\Omega_{m,n}(x,y)$  تابع ویژه و  $\mu_{m,n}$  مقدار ویژه است. حل مسئله مقدار ویژه رابطه (۸) با استفاده از روش جداسازی متغیرها امکان پذیر است؛ بنابراین توابع ویژه عبارت خواهند بود از:

$$\Omega_{m,n}(x,y) = \sin\left(\frac{2m-1}{2L}\pi x\right) \cos\left(\frac{n-1}{W}\pi y\right) \quad (9)$$

$$\begin{cases} m = 1, \dots, M \\ n = 1, \dots, N \end{cases}$$

نرم تابع ویژه و تابع ویژه نرمال شده نیز به ترتیب عبارت اند از:

$$N_{m,n} = \frac{LW}{4}, \quad \tilde{\Omega}_{m,n}(x,y) = \frac{\tilde{\Omega}_{m,n}(x,y)}{\sqrt{N_{m,n}}}$$

$$\tilde{\Omega}_{m,n}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{LW}} \sin\left(\frac{2m-1}{2L}\pi x\right) \cos\left(\frac{n-1}{W}\pi y\right)$$

$$\begin{aligned}
 A_{i,j,m,n} &= \frac{4u}{LW} \left( \frac{2m-1}{2L} \pi \right) \\
 &\cdot \left( \int_0^W \int_0^L \cos\left(\frac{2m-1}{2L} \pi x\right) \cos\left(\frac{n-1}{W} \pi y\right) \sin\left(\frac{2i-1}{2L} \pi x\right) \cos\left(\frac{j-1}{W} \pi y\right) dx dy \right) \\
 B_{i,j,m,n} &= -\frac{4v}{LW} \left( \frac{n-1}{W} \pi \right) \\
 &\cdot \left( \int_0^W \int_0^L \sin\left(\frac{2m-1}{2L} \pi x\right) \sin\left(\frac{n-1}{W} \pi y\right) \sin\left(\frac{2i-1}{2L} \pi x\right) \cos\left(\frac{j-1}{W} \pi y\right) dx dy \right) \\
 C_{i,j,i,j} &= D_x \left( \frac{2i-1}{2L} \pi \right)^2 \\
 D_{i,j,i,j} &= D_y \left( \frac{j-1}{W} \pi \right)^2 \\
 K_{i,j,i,j} &= k \\
 G_{i,j}(t) &= \frac{2}{\sqrt{LW}} \left( -kg(t) - \frac{dg(t)}{dt} \right) \int_0^W \int_0^L \sin\left(\frac{2i-1}{2L} \pi x\right) \cos\left(\frac{j-1}{W} \pi y\right) dx dy \\
 &\begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, M \\ j = 1, 2, 3, \dots, N \end{cases}
 \end{aligned} \tag{۱۷}$$

با توجه به رابطه (۱۷)، ضرایب C و D با اعمال خاصیت تعامد به دست آمده‌اند. همچنین با دقت به فرم دستگاه ODE (رابطه ۱۶)، تعداد کل معادله‌های ODE برابر با  $M \times N$  خواهد بود که M و N حدود بالای سیگما هستند؛ زیرا به منظور حل دستگاه ODE یادشده بایستی با توجه به دقت موردنظر برای حل، تعداد متناهی از معادله‌های ODE در نظر گرفته شود. لازم به یادآوری است که محدوده انتخاب اندیس‌های  $i$  و  $j$  به ترتیب از یک تا  $M$  و از یک تا  $N$  است. به منظور حل دستگاه ODE بایستی شرط اولیه (معادله ۷) را با استفاده از تبدیل مستقیم GITT به فرم تبدیل شده درآورد. فرم تبدیل شده شرط اولیه به منظور حل دستگاه ODE عبارت است از:

$$\begin{aligned}
 U(x, y, 0) &= f(x, y) - F(x, y; 0) \\
 \bar{U}_{i,j}(0) &= \int_0^W \int_0^L U(x, y, 0) \tilde{\Omega}_{i,j}(x, y) dx dy
 \end{aligned} \tag{۱۸}$$

به این ترتیب با تعیین شرط اولیه تبدیل یافته، پاسخ دستگاه ODE نهایی با استفاده از روش‌های عددی تعیین شد. پاسخ دستگاه ODE حاصله به تعیین مقادیر  $\bar{U}_{m,n}(t)$  منجر می‌شود. در نهایت با اعمال معکوس تبدیل انتگرالی از رابطه (۱۲)،  $U(x, y, t)$  تعیین خواهد شد.

$$\begin{aligned}
 U(x, y, t) &= \frac{2}{\sqrt{LW}} \\
 &\cdot \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \bar{U}_{m,n}(t) \sin\left(\frac{2m-1}{2L} \pi x\right) \cos\left(\frac{n-1}{W} \pi y\right)
 \end{aligned} \tag{۱۹}$$

همان‌طور که گفته شد یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های توابع ویژه حاصله از مسئله مقدار ویژه موردنظر، بحث متعامد بودن است یعنی:

$$\int_0^W \int_0^L \Omega_{m,n}(x, y) \Omega_{i,j}(x, y) dx dy = \begin{cases} 0, & m, n \neq i, j \\ N_{m,n}, & m, n = i, j \end{cases} \tag{۱۴}$$

با باز کردن مشتقات در انتگرال، انجام عملیات جبری و استفاده از خاصیت تعامد می‌توان رابطه (۱۳) را به صورت رابطه (۱۵) نوشت:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \bar{U}_{m,n}(t) + \frac{4u}{LW} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{U}_{m,n}(t) \left( \frac{2m-1}{2L} \pi \right) \\
 \cdot \left( \int_0^W \int_0^L \cos\left(\frac{2m-1}{2L} \pi x\right) \cos\left(\frac{n-1}{W} \pi y\right) \sin\left(\frac{2i-1}{2L} \pi x\right) \cos\left(\frac{j-1}{W} \pi y\right) dx dy \right) \\
 - \frac{4v}{LW} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{U}_{m,n}(t) \left( \frac{n-1}{W} \pi \right) \\
 \cdot \left( \int_0^W \int_0^L \sin\left(\frac{2m-1}{2L} \pi x\right) \sin\left(\frac{n-1}{W} \pi y\right) \sin\left(\frac{2i-1}{2L} \pi x\right) \cos\left(\frac{j-1}{W} \pi y\right) dx dy \right) \\
 + D_x \left( \frac{2i-1}{2L} \pi \right)^2 \bar{U}_{m,n}(t) + D_y \left( \frac{j-1}{W} \pi \right)^2 \bar{U}_{m,n}(t) + k \bar{U}_{m,n}(t) \\
 = \frac{2}{\sqrt{LW}} \left( -kg(t) - \frac{dg(t)}{dt} \right) \int_0^W \int_0^L \sin\left(\frac{2i-1}{2L} \pi x\right) \cos\left(\frac{j-1}{W} \pi y\right) dx dy
 \end{aligned} \tag{۱۵}$$

به این ترتیب معادله دیفرانسیل جزئی ناهمگن (رابطه ۶) به یک دستگاه معادله‌های دیفرانسیل معمولی تبدیل خواهد شد که حل آن به مراتب ساده‌تر است. با مرتب‌سازی رابطه بالا دستگاه ODE نهایی عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{U}_{i,j}(t)}{dt} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_{i,j,m,n} \bar{U}_{m,n}(t) &= G_{i,j}(t) \\
 \Gamma_{i,j,m,n} &= A_{i,j,m,n} + B_{i,j,m,n} + C_{i,j,i,j} + D_{i,j,i,j} + K_{i,j,i,j}
 \end{aligned} \tag{۱۶}$$

که ضرایب دستگاه ODE مذکور عبارت‌اند از:

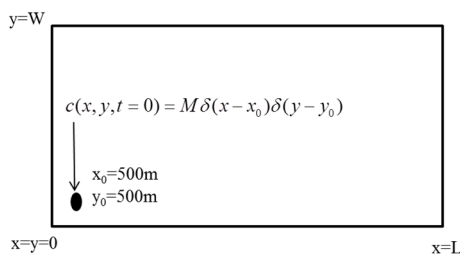
## ۳-۱. مثال اول: شرط اولیه به صورت تخلیه ناگهانی جرم

## معینی از ماده آلاینده در یک نقطه از دامنه

در این مثال به بررسی عملکرد حل تحلیلی به دست آمده با روش GITT به ازای غلظت ناشی از شرط اولیه در دامنه دوبعدی پرداخته می شود. در این مثال شرط اولیه به صورت تخلیه جرم مشخصی از ماده آلاینده در واحد عمق در نقطه ای با مختصات معین در دامنه در نظر گرفته شده است. فرم ریاضی تابع مربوط به شرط اولیه عبارت است از:

$$c(x, y, 0) = M\delta(x - x_0)\delta(y - y_0) \quad (21)$$

$x_0$  و  $y_0$  موقعیت مکانی مربوط به محل تخلیه آلاینده در زمان  $t=0$  هستند. مقدار جرم در واحد عمق ( $M$ ) در این مثال برابر یک تن بر متر لحاظ شده است. موقعیت مکانی منبع ورودی در دامنه در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲. شکل شماتیک مربوط به موقعیت مکانی غلظت ورودی از شرط اولیه

همچنین مقادیر پارامترهای مربوط به جریان و انتقال آلاینده در این مثال در جدول ۱ ارائه شده اند:

جدول ۱: مقادیر مربوط به پارامترهای جریان و انتقال آلاینده

L (km)	W (km)	T (hr)	u (m/s)	v (m/s)	h (m)	$D_x$ ( $m^2/s$ )	$D_y$ ( $m^2/s$ )
۸	۴	۱۰	۰/۳	۰/۱	۵	۱۰	۱

در جدول ۱،  $T$  کل زمان شبیه سازی است و  $h$  عمق است. لازم به یادآوری است که حل تحلیلی ارائه شده در این تحقیق با حل تحلیلی دوبعدی ارائه شده در دامنه نیمه محدود با روش تابع گرین مقایسه شده است [۱۱، ۲۴]. شکل ۳ شده با روش GITT و حل تحلیلی با روش GFM در زمان های ۲، ۴، ۶ و ۷/۵ ساعت در میدان سرعت را نشان می دهد. طبق شکل گفته شده، خطوط برداری بیانگر میدان

به این ترتیب با تعیین  $U$  و با توجه به مقدار تابع  $F$ ، پاسخ معادله (۲) در شرایط مرزی و شرط اولیه مشخص شده برابر خواهد بود از:

$$c(x, y, t) = g(t) + \frac{2}{\sqrt{LW}} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \bar{U}_{m,n}(t) \sin\left(\frac{2m-1}{2L} \pi x\right) \cos\left(\frac{n-1}{W} \pi y\right) \quad (20)$$

که  $\bar{U}_{m,n}(t)$  از حل دستگاه ODE (رابطه ۱۶) به دست خواهد آمد. در ادامه نتایج حاصله از حل تحلیلی معادله ADRE به ازای شرط اولیه و شرط مرزی با تابع ورودی با الگوی زمانی دلخواه، در قالب کانتورهای مناسب ارائه شده و نتایج با حل تحلیلی معادله بالا در حالت دوبعدی با استفاده از روش تابع گرین (GFM)، مقایسه خواهد شد.

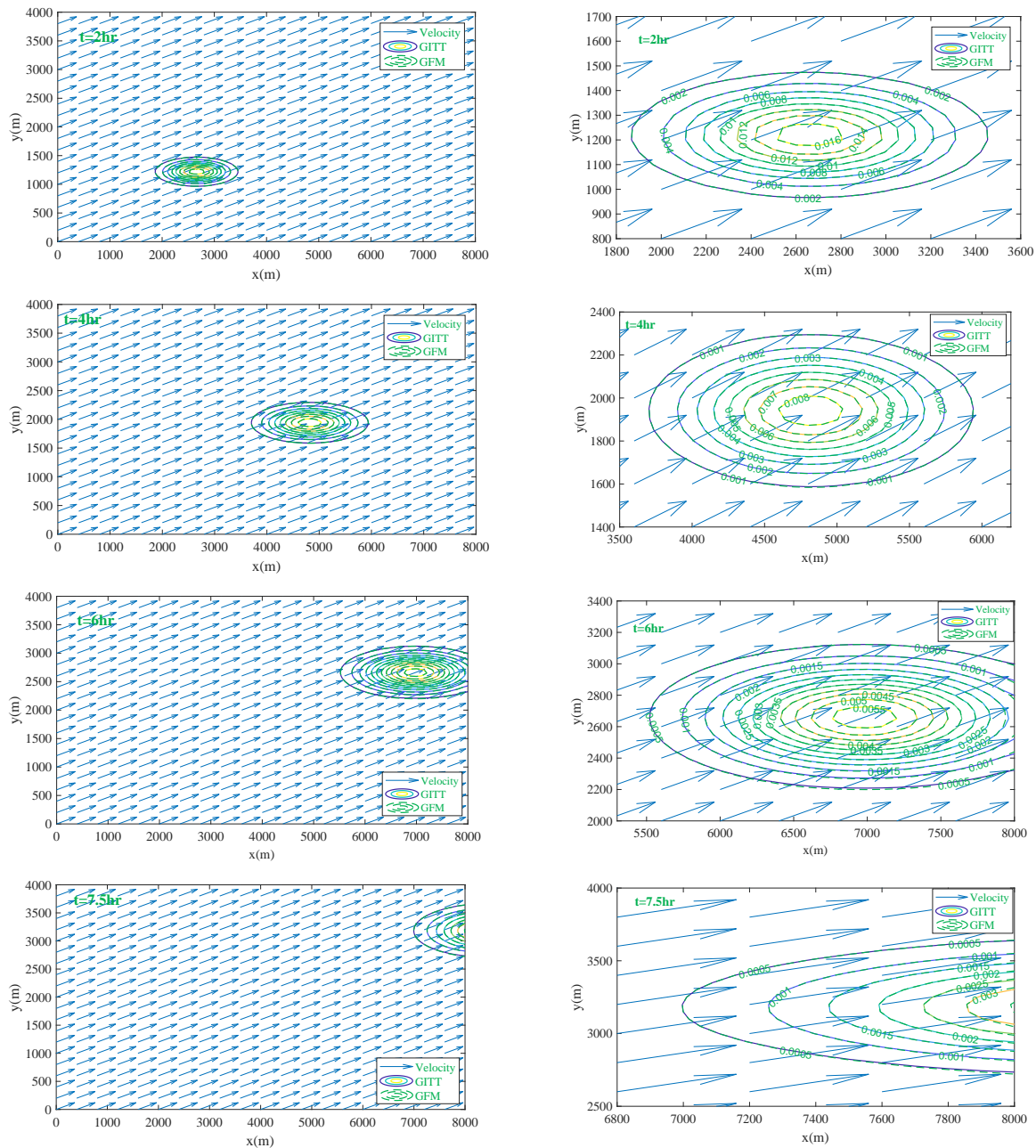
## ۳. نتایج و بحث

به منظور استخراج نتایج از حل تحلیلی پیشنهادی، کدنویسی حل مذکور در محیط نرم افزار متلب انجام شد. به این ترتیب در ابتدا بعد از معرفی ورودی های لازم، ضرایب معادله ODE نهایی و توابع ویژه و نرم آن ها محاسبه شده؛ سپس با استفاده از معکوس تبدیل انتگرالی GITT و رابطه مربوط به تابع فیلتر، حل نهایی به دست آمد. در ادامه به منظور ارزیابی راه حل استخراج شده برای فرم دوبعدی معادله انتقال آلودگی در دامنه محدود، در قالب دو مثال نتایج حاصله استخراج و مقایسه شده اند. در مثال اول مقدار غلظت ورودی از مرز بالادست برابر صفر و شرط اولیه به صورت بارگذاری جرم مشخصی از یک ماده آلاینده خشک در امتداد عمق در یک نقطه مشخص در دامنه در نظر گرفته شد. در مثال دوم علاوه بر شرط اولیه به صورت تخلیه آبی در یک نقطه، شرط مرزی بالادست به صورت بارگذاری یک ماده آلاینده با الگوی زمانی نامنظم نیز در نظر گرفته شده و توزیع و پخش ابر آلودگی با لحاظ تأثیر هم زمان شرط مرزی و شرط اولیه در دامنه مورد بررسی قرار گرفته و نتایج حاصله با حل تحلیلی ارائه شده برای فرم دوبعدی معادله ADRE در دامنه نیمه محدود با روش تابع گرین مقایسه شد. در ادامه خصوصیات جریان برای هر دو مثال به تفکیک بیان و نتایج ارائه می شود.



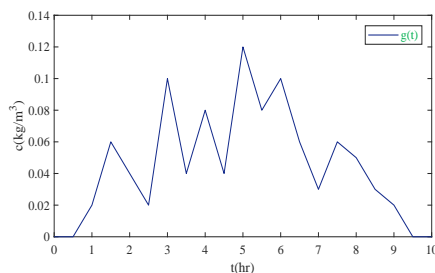
همان طور که در شکل ۳ نشان داده شده است، کانتورهای غلظت حاصله از هر دو حل تحلیلی GITT و GFM کاملاً بر یکدیگر منطبق هستند که این امر نشان دهنده عملکرد مناسب حل استخراجی با روش GITT است. لازم به بیان است که مقدار شاخص آماری ضریب هم بستگی ( $R^2$ ) برابر با یک و میانگین خطای نسبی ( $MRE$ ) نیز برابر ۰/۰۸ درصد به دست آمد. مقدار شاخص های محاسبه شده نیز بیانگر انطباق کامل نتایج حاصل از هر دو حل تحلیلی با یکدیگر است.

سرعت برآیند، خطوط رنگی نتایج حاصله از روش GITT و خطوط به صورت خط چین بیانگر نتایج حاصله از روش GFM است. شکل های سمت چپ مسیر حرکت ابر آلودگی و میزان باز شدن آن ها با گذشت زمان در کل دامنه را نشان داده و شکل های سمت راست متناظر با اشکال سمت چپ به منظور نمایش واضح تر مقادیر غلظت در روی کانتورها در سیستم SI (کیلوگرم بر مترمکعب) و نیز نمایش انطباق هر دو راه حل تحلیلی GITT و GFM به کار می روند.

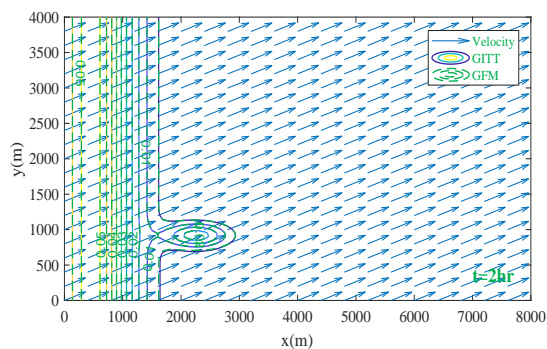


شکل ۳: مقایسه کانتورهای غلظت حاصله از حل تحلیلی GITT با حل تحلیلی GFM در میدان سرعت به ازای شرط مرزی صفر و شرط اولیه غیرصفر

اندازه گیری های مربوط به غلظت در دامنه دوبعدی نسبت به پارامتر زمان است؛ پس در این تحقیق شرط مرزی بالادست فقط تابعی از زمان در نظر گرفته شده است. علاوه بر شرط مرزی، در این مثال شرط اولیه نیز مشابه با مثال اول به صورت تخلیه ناگهانی جرم معینی از ماده آلاینده در مکان مشخصی در دامنه در نظر گرفته شده است؛ بنابراین هدف این مسئله بررسی عملکرد حل تحلیلی با روش GITT از طریق تعیین کانتورهای غلظت به ازای فعالیت هم زمان منبع ورودی از شرط اولیه و نیز غلظت ورودی با الگوی زمانی نامنظم از شرط مرزی بالادست در دامنه در حالت دوبعدی و مقایسه آن با حل تحلیلی با روش GFM می باشد. شرایط جریان و مقادیر پارامترهای مربوط به جریان و انتقال آلاینده نیز همانند مثال اول و طبق جدول ۱ است. مقدار جرم آلاینده ورودی از شرط اولیه در این مثال برابر با  $1/4$  تن بر متر بوده و محل تخلیه در فاصله ۱۰۰ متری از ابتدای دامنه در جهت طولی و ۲۰۰ متری از ابتدای دامنه در جهت عرضی قرار دارد. نمودار الگوی زمانی آلاینده ورودی از مرز نیز عبارت است از:



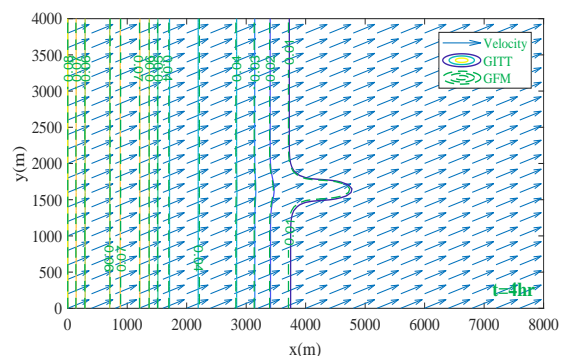
شکل ۴: الگوی زمانی بارگذاری نامنظم برای آلاینده ورودی از مرز مربوط به مثال دوم

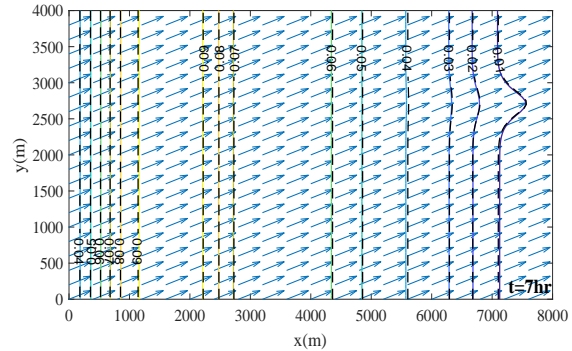
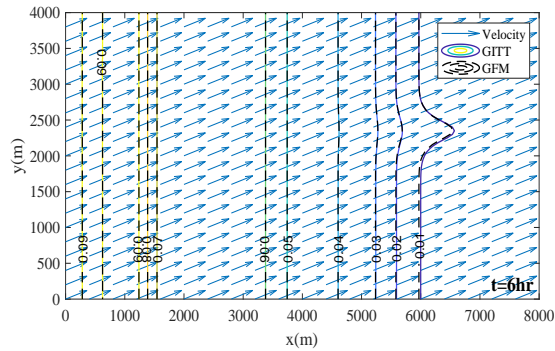


با توجه به این که هر دو روش GITT و GFM جزء روش های تحلیلی قدرتمند برای استخراج حل معادلات دیفرانسیل بوده و حل های استخراج شده با استفاده از آن ها حل های دقیق هستند؛ بنابراین به لحاظ ریاضی باید نتایج حاصله از حل های تحلیلی استخراج شده در شرایط مشابه برای یک معادله با استفاده از هر دو روش دقیقاً بر یکدیگر منطبق باشند که در این تحقیق نیز این انتظار به طور کامل برآورده شده است. مقدار خطای نسبی نیز بسیار ناچیز بوده و علت آن محدودیت نرم افزار محاسباتی در اتخاذ تعداد ارقام اعشاری (تا ۱۶ رقم اعشار) در فرایند محاسبات است. با دقت در کانتورهای غلظت شکل ۳، می توان دریافت که با گذشت زمان، ابر آلودگی در دامنه به علت تأثیر پدیده پراکندگی در جهت طولی و عرضی بازتر شده و میزان بازشدگی آن ها در جهت طولی به علت بیشتر بودن ضریب پراکندگی در جهت طولی، بیشتر است به این ترتیب گرادیان غلظت با گذشت زمان کاهش می یابد. همچنین با گذشت زمان از ۲ ساعت تا ۷/۵ ساعت مطابق با شکل ۳، به صورت بیضی های متحدالمرکز در جهت سرعت برابند در دامنه حرکت کرده و مستهلک می شود.

### ۲-۳. مثال دوم: شرط مرزی ورودی به صورت یک تابع زمانی نامنظم

در این مثال شرط مرزی با الگوی زمانی نامنظم و دلخواه در نظر گرفته شده است. به عبارت دیگر هیچ ضابطه مشخصی برای تابع  $g(t)$  وجود ندارد. با توجه به این که غالب





شکل ۵. مقایسه کانتورهای غلظت حاصله از حل با روش GITT و روش GFM، به ازای شرط مرزی ورودی با الگوی زمانی نامنظم

نتایج به صورت کانتورهای غلظت حاصله از حل تحلیلی با روش GITT و روش GFM در میدان سرعت در زمان‌های ۲، ۴، ۶ و ۷ ساعت در شکل ۵ نشان داده شده است. به طور مشابه، بردارها بیانگر میدان سرعت برابند، خطوط کانتور رنگی بیانگر حل تحلیلی به روش GITT و خطوط کانتور خط چین بیانگر حل تحلیلی با روش GFM هستند.

مطابق با شکل ۵، کانتورهای غلظت حاصله از حل تحلیلی با روش GITT و روش GFM به ازای تابع ورودی شرط مرزی با الگوی زمانی نامنظم توأم با شرط اولیه، کاملاً بر یکدیگر منطبق هستند. در این مثال نیز مقدار شاخص آماری ضریب هم‌بستگی ( $R^2$ ) برابر با یک و میانگین خطای نسبی ( $MRE$ ) نیز برابر ۰/۱ درصد به دست آمد که انطباق کامل نتایج را نشان می‌دهد. به این ترتیب حل تحلیلی پیشنهادی در مدل کردن غلظت ناشی از شرط مرزی نامنظم به همراه شرط اولیه در دامنه دو بعدی موفق بوده و عملکرد موفقی داشته است. در زمان صفر در نقطه با مختصات (۲۰۰ و ۱۰۰) جرم معینی از آلاینده تخلیه شده و با گذشت زمان تا ۱۸۰۰ ثانیه (مطابق شکل ۴) تنها غلظت ناشی از شرط اولیه در دامنه وجود داشته است که تحت تأثیر عامل پراکندگی در جهات طولی و عرضی در دامنه پخش شده و کانتورهای غلظت ناشی از آن در جهت بردار سرعت برابند حرکت می‌کنند. با گذشت زمان از ۱۸۰۰ ثانیه به بعد، مطابق با شکل ۴ و ۵ در زمان ۲ ساعت، غلظت ورودی از شرط مرزی با الگوی زمانی نامنظم وارد دامنه شده که به صورت خطوط کانتور مستقیم تا قبل از رسیدن به غلظت ناشی از شرط اولیه در دامنه دیده می‌شوند.

جهت جلوبی خطوط کانتور در شکل ۵ که به صورت خطوط منحنی است، ناشی از غلظت شرط اولیه است که با گذشت زمان از ۲ ساعت تا ۷ ساعت در جهت بردار برابند در دامنه حرکت کرده و از شدت آن تحت تأثیر پدیده پراکندگی کاسته می‌شود. به دنبال آن با گذشت زمان مقادیر غلظت ورودی از شرط مرزی بالادست با الگوی زمانی مطابق با شکل ۴ با شدت و ضعف در زمان‌های متفاوت وارد دامنه می‌شود که با توجه به این که تابع ورودی از مرز بالادست به علت محدودیت‌های نمونه برداری تنها تابعی از زمان در نظر گرفته می‌شود، پس کانتورهای حاصله از شرط مرزی به صورت خطوط مستقیم در جهت عرض دیده می‌شود که با گذشت زمان در دامنه دچار زوال می‌شود و در نهایت از مرز پایین دست خارج می‌شود. در رابطه با صحت مقایسه حل تحلیلی در دامنه محدود و نیمه محدود، بایستی ابتدا عدد بی بعد پکلت ( $Pe$ ) معرفی شود. عدد بی بعد پکلت عبارت است از حاصل ضرب سرعت در طول مشخصه تقسیم بر ضریب پراکندگی ( $Pe = VL / D$ ). مطابق با تحقیقات انجام شده به ازای  $Pe > 60$  نتایج حل‌های تحلیلی در دامنه محدود و نیمه محدود بر هم منطبق می‌شوند و به ازای  $Pe < 20$ ، به علت اثر مرز پایین دست، غلظت حاصله از حل در دامنه محدود به خصوص در نزدیکی مرز خروجی از مقادیر غلظت حاصله از حل در دامنه نیمه محدود بیشتر خواهد بود [۲۵] با توجه به این که در رودخانه‌ها و مجاری روباز، طول مشخصه در مقایسه با ضریب پراکندگی عدد بسیار بزرگی است، بنابراین  $Pe > 60$  خواهد بود. همچنین محققان بیان داشته‌اند که حل‌های تحلیلی استخراج شده در

به منظور صحت سنجی انواع حل‌های عددی و حتی کاربرد در موارد واقعی را دارد. با استفاده از حل تحلیلی پیشنهادی می‌توان تخمین اولیه‌ای از وضعیت توزیع و انتشار آلودگی در مسائل پیچیده در دامنه دوبعدی داشت و به منظور تعیین پارامترهای انتقال آلودگی در فرایند بهینه‌سازی از آن بهره جست. پیچیدگی روند استخراج حل با استفاده از روش تبدیل انتگرالی تعمیم یافته و برنامه‌نویسی آن و نیز بالا بودن هزینه محاسباتی نسبت به سایر روش‌های حل تحلیلی به علت مسئله همگرایی سری‌های نامتناهی و حل دستگاه ODE موجود در این روش جزو محدودیت‌های این روش در استخراج حل تحلیلی است. در رابطه با تفاوت حل در دامنه محدود و نیمه محدود مطابق تحقیقات انجام شده توسط محققان، به ازای اعداد پکلت بزرگ‌تر از ۶۰، حل در دامنه محدود و نیمه محدود بر یکدیگر منطبق خواهند بود. همچنین در رابطه با کاربرد حل‌های تحلیلی در دامنه محدود می‌توان گفت که در شرایطی که ضریب پخش در دامنه زیاد باشد استفاده از حل تحلیلی در دامنه محدود از نظر همگرایی و هزینه محاسباتی به صرفه‌تر از حل در دامنه نیمه محدود است.

#### مراجع

- [1] Batu V. Applied flow and solute transport modeling in aquifers: fundamental principles and analytical and numerical methods: CRC Press; 2005.
- [2] Craig JR, Read WW. The future of analytical solution methods for groundwater flow and transport simulation. XVIII International Conference on Water Resources. 2010.
- [3] Chapra SC. Surface water-quality modeling: Waveland press; 1997.
- [4] Fischer HB, List JE, Koh CR, Imberger J, Brooks NH. Mixing in inland and coastal waters: Elsevier; 1979.
- [5] Batu V. A generalized two-dimensional analytical solute transport model in bounded media for flux-type finite multiple sources. Water Resources Research. 1993;29(8):2881-92
- [6] Mazumder B, Xia RJ. Dispersion of pollutants in an asymmetric flow through a channel. International journal of engineering science. 1994;32(9):1501-10.
- [7] Yeh G, Cheng J, Short TJUE. 2DFATMIC: User's manual of a two-dimensional subsurface

دامنه محدود به طور اختصاصی برای تحلیل انتقال آلاینده در مواردی که ضریب پخش زیاد باشد، مناسب بوده (از نظر همگرایی و هزینه محاسباتی) و در مواردی که ضریب پخش کم است، حل تحلیلی در دامنه نیمه محدود پیشنهاد می‌شود. [۱۳، ۲۵، ۲۶].

#### ۴. نتیجه گیری

در این تحقیق حل تحلیلی صورت دوبعدی معادله انتقال آلودگی با لحاظ ضرایب پراکندگی و سرعت در هر دو جهت  $x$  و  $y$ ، به ازای شرط اولیه و شرط مرزی ناهمگن به صورت تابع با الگوی زمانی نامنظم در دامنه محدود در رودخانه با استفاده از روش تبدیل انتگرالی تعمیم یافته تعیین شد. ضرایب معادله انتقال آلودگی اعم از سرعت و ضریب پخش در این تحقیق ثابت در نظر گرفته شد. به منظور ارزیابی حل حاصله، نتایج آن در قالب دو مثال کاربردی مجزا، با حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی در حالت دوبعدی در دامنه نیمه محدود با استفاده از روش تابع گرین مقایسه شد. در مثال اول غلظت ورودی از شرط مرزی صفر و شرط اولیه به صورت تخلیه جرم معینی از ماده آلاینده خشک در یک نقطه با مختصات معلوم در دامنه در نظر گرفته شد و نتایج حاصله از حل تحلیلی پیشنهادی با حل تحلیلی با روش GFM مقایسه شد. در مثال دوم نیز به منظور بررسی و ارزیابی عملکرد حل پیشنهادی شرط اولیه مشابه مثال اول و شرط مرزی به صورت یک تابع ورودی با الگوی زمانی نامنظم در نظر گرفته شده و تأثیر توأم شرط اولیه و شرط مرزی ورودی نامنظم، با استفاده از حل پیشنهادی و روش GFM در قالب کانتورهای غلظت در زمان‌های متفاوت ارائه شد. در هر دو مثال نتایج حاصل از حل پیشنهادی با روش GITT و حل تحلیلی با روش GFM کاملاً بر یکدیگر منطبق بودند. همچنین مقدار شاخص آماری ضریب هم‌بستگی ( $R^2$ ) برابر با یک و میانگین خطای نسبی ( $MRE$ ) نیز حدود ۰/۱ درصد به دست آمد. مقدار شاخص‌های محاسبه شده نیز بیانگر انطباق کامل نتایج حاصل از هر دو حل تحلیلی با یکدیگر می‌باشد. حل تحلیلی حاصله به دلیل انعطاف‌پذیری در اتخاذ الگوهای زمانی دلخواه تابع غلظت ورودی از شرط مرزی و شرط اولیه، قابلیت کاربرد

- [17] Das P, Begam S, Singh MKJ. Mathematical modeling of groundwater contamination with varying velocity field. *Journal of Hydrology & Hydromechanics*. 2017;65(2):192-204.
- [18] Yadav R, Kumar LK. Two-Dimensional Conservative Solute Transport with Temporal and Scale-Dependent Dispersion: Analytical Solution. *International Journal of Advances in Mathematics*. 2018.
- [19] Mikhailov MD, Ozisik MN. Unified analysis and solutions of heat and mass diffusion: John Wiley & Sons New York; 1984.
- [20] Cotta RM, Mikhailov MD. Heat conduction: lumped analysis, integral transforms, symbolic computation: Wiley Chichester; 1997.
- [21] Cotta RM. Integral transforms in computational heat and fluid flow: CRC Press; 1993.
- [22] Cotta RM, Knupp DC, Naveira-Cotta CP. Analytical heat and fluid flow in microchannels and microsystems: Springer; 2016.
- [23] Guerrero JP, Skaggs TJ. Analytical solution for one-dimensional advection-dispersion transport equation with distance-dependent coefficients. *Journal of Hydrology*. 2010;390(1-2):57-65.
- [24] Xu Z, Travis JR, Breitung W. Green's Function Method and Its Application to Verification of Diffusion Models of GASFLOW Code: Forschungszentrum Karlsruhe; 2007.
- [25] Van Genuchten MT, Alves W. Analytical solutions of the one-dimensional convective-dispersive solute transport equation. United States Department of Agriculture, Economic Research Service; 1982.
- [26] Kumar P, Sudheendra SJ. Mathematical Solution of Transport of Pollutant in Unsaturated Porous Media with Retardation Factor. *International Journal of Applied Engineering Research*. 2018;13(1):100-4.
- flow, fate and transport of microbes and chemical model version 1.0. 1997.
- [8] Basha H. Analytical model of two-dimensional dispersion in laterally nonuniform axial velocity distributions. *Journal of Hydraulic Engineering*. 1997;123(10):853-62.
- [9] Leij FJ, Priesack E, Schaap MGJ. Solute transport modeled with Green's functions with application to persistent solute sources. *Journal of Contaminant Hydrology*. 2000;41(1-2):155-73.
- [10] Park E, Zhan HJ. Analytical solutions of contaminant transport from finite one-, two-, and three-dimensional sources in a finite-thickness aquifer. *Journal of Contaminant Hydrology*. 2001;53(1-2):41-61.
- [11] Mashhadgarme N, Mazaheri M, MohammadVali Samani J. Analytical solutions to one- and two-dimensional Advection-Dispersion-Reaction equation with arbitrary source term time pattern using Green's function method. *Sharif Journal of Civil Engineering*. 2017;33-2:77-91.
- [12] De Barros F, Mills W, Cotta RJ. Integral transform solution of a two-dimensional model for contaminant dispersion in rivers and channels with spatially variable coefficients. *Environmental Modelling Software*. 2006;21(5):699-709.
- [13] Chen JS, Chen JT, Liu CW, Liang CP, Lin CW. Analytical solutions to two-dimensional advection-dispersion equation in cylindrical coordinates in finite domain subject to first-and third-type inlet boundary conditions. *Journal of Hydrology*. 2011;405(3-4):522-31.
- [14] van Genuchten MT, Leij FJ, Skaggs TH, Toride N, Bradford SA, Pontedeiro EMJ. Exact analytical solutions for contaminant transport in rivers 1. The equilibrium advection-dispersion equation. *Journal of Hydrology Hydromechanics*. 2013;61(2):146-60.
- [15] Chen JS, Liang CP, Liu CW, Li LY. An analytical model for simulating two-dimensional multispecies plume migration. *Hydrology Earth System Sciences*. 2016;20(2):733-53.
- [16] Cole A, Abdulrahim A, Olayiwola R, Shehu MJ. Analytical simulation of two dimensional advection dispersion equation of contaminant transport. *Journal of Applied Sciences Environmental Management*. 2017;21(5):827-32.

## پی نوشت

1. Advection Dispersion Reaction Equation (ADRE)
2. Method of Moments
3. Green's Function Method (GFM)
4. Generalized Integral Transform Technique (GITT)
5. Norm

$$6. \iint \sum \sum = \sum \sum \iint, \frac{\partial}{\partial n} \sum \sum V = \sum \sum \frac{\partial V}{\partial n}$$