

## یک روش گلرکین گسسته موضعی بدون شبکه برای حل معادلات دیفرانسیل مربوط به تحول عالم بر پایه تقریب کمترین مربعات متحرک

پوریا عصار<sup>۱</sup> · وحید کمالی<sup>۲</sup> · علی سوری<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> ایران، همدان، دانشگاه بوعلی سینا، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی؛  
ایمیل: [passari@basu.ac.ir](mailto:passari@basu.ac.ir)

<sup>۲</sup> ایران، همدان، دانشگاه بوعلی سینا، دانشکده علوم پایه، گروه فیزیک؛  
ایمیل: [vkamali@basu.ac.ir](mailto:vkamali@basu.ac.ir)

<sup>۳</sup> ایران، همدان، دانشگاه بوعلی سینا، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی؛  
ایمیل: [a.suri@basu.ac.ir](mailto:a.suri@basu.ac.ir)

**چکیده.** نتایج مشاهدات کیهانی وجود مشکلات اساسی در مدل انفجار بزرگ یا مهبانگ را نشان می‌دهند. با توجه به وجود دوره شتابدار سیر تحول عالم اولیه، می‌توان این مشکلات را حل کرد. انبساط شتابدار اولیه عالم به کمک میدان اینفلاتون توضیح داده می‌شود که در یک معادله دیفرانسیل غیر خطی صدق می‌کند. این معادله در مدل FLRW بررسی می‌شود. در مدل FLRW جهان را به صورت حاصل ضرب پیچشی خط حقیقی و یک منیفلد سه بعدی همگن و همسانگرد مانند  $S^3$  در نظر می‌گیرند که می‌تواند دارای خمیدگی مثبت، منفی و یا صفر باشد. هدف ما در این مقاله حل عددی معادله تحول اینفلاتون بر پایه یک روش گلرکین گسسته بدون شبکه است. در این روش ابتدا این معادلات دیفرانسیل را به یک معادله انتگرال نوع دوم تبدیل می‌کنیم. سپس این معادله انتگرال را با استفاده از روش کمترین مربعات متحرک حل می‌کنیم. در پایان با ارائه یک مثال عددی، کارایی و دقت این روش جدید را برای حل معادلات دیفرانسیل اینفلاتون نشان می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: انفجار بزرگ، اینفلاتون، منیفلد لورنزی، روش بدون شبکه، کمترین مربعات متحرک

## A meshless discrete Galerkin method for solving the universe evolution differential equations based on the moving least squares approximation

Pouria Assarir<sup>1</sup> · Vahid Kamali<sup>2</sup> · Ali Suri<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran;  
email: [passari@basu.ac.ir](mailto:passari@basu.ac.ir)

<sup>2</sup> Department of Physic, Faculty of Sciences, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran;  
email: [vkamali@basu.ac.ir](mailto:vkamali@basu.ac.ir)

<sup>3</sup> Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran;  
email: [a.suri@basu.ac.ir](mailto:a.suri@basu.ac.ir)

**Abstract.** In terms of observational data, there are some problems in the standard Big Bang cosmological model. Inflation era, early accelerated phase of the evolution of the universe, can successfully solve these problems. The inflation epoch can be explained by scalar inflaton field. The evolution of this field is presented by a non-linear differential equation. This equation is considered in FLRW model. In FLRW model, we consider the universe as the warped product of real line with a three dimensional homogeneous and isotropic manifold  $\Sigma$  which could have positive, negative or zero curvature. The main aim of this paper is the numerical solution of

the inflation evolution differential equations using of a meshless discrete Galerkin method. The method reduces the solution of these types of differential equations to the solution of Volterra integral equations of the second kind. Therefore, we solve these integral equations using moving least squares method. Finally, a numerical example is included to show the validity and efficiency of the new technique.

**Keywords:** Big Bang, Inflation, Lorentzian manifold, Meshless Method, Moving least squares

## ۱ مقدمه

در بررسی جهان قابل مشاهده به عنوان یک سیستم دینامیکی، مدل انفجار بزرگ یا مهبانگ ارائه شده است که با مشاهدات نیز سازگاری دارد [۱، ۲، ۳، ۶]. در بررسی های پیشرفته وجود برخی مشکلات در این مدل توجه محققان را به خود جلب کرد. در مسیر توجیه و حل این مشکلات نظریه تورم کیهانی مطرح گردید [۴، ۶]. تبیین این نظریه احتمال وجود یک دوره انبساط شتابدار در جهان اولیه را مطرح می کند. با توجه به انرژی بسیار بالای جهان در زمان های اولیه ذره ای که دلیل این انبساط شتابدار است، یک ذره عادی نمی باشد. با توجه به مفاد نظریه، اینفلاتون<sup>۱</sup> در یک جهان همگن و همسانگرد مسئول این انبساط می باشد.

به این منظور در بخش نخست مدل FLRW را برای جهان شرح می دهیم. در این مدل جهان به صورت حاصلضرب و خط حقیقی (زمان) در یک منیفلد سه بعدی (فضا) با شرایط مناسب است. پس از مشخص کردن متریک مناسب و انتخاب خمیدگی صفر، با توجه مشاهدات، معادلات مربوط به انبساط معادله تحول زمانی میدان این صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{\ddot{\phi}}{1-\dot{\phi}^2} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \frac{1}{V}\frac{dV}{d\phi} = 0,$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{3}\frac{V(\phi)}{1-\dot{\phi}^2}.$$

به طور کلی، انگیزه اصلی دو روش تقریب بدون شبکه‌ی متداول یعنی روش های توابع پایه‌ای شعاعی (RBFs) و کمترین مربعات متحرک (MLS) کاربردهای زمین شناسی، ژئوفیزیک، نقشه برداری و هواشناسی بوده است. بعدها کاربردهای بیشتری در زمینه های دیگر همچون حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، هوش مصنوعی، شبکه های عصبی، پردازش اطلاعات، نظریه نمونه گیری، آمار، اقتصاد و بهینه سازی پیدا کرد. لازم به توضیح است که از روش های رگرسیون محلی بدون شبکه در آمار به طور مستقل بیش از ۱۰۰ سال است که استفاده می شود.

روش های تقریب چندمتغیری استاندارد همچون اسپلاین ها و المان های محدود، به یک شبکه بندی برای تعریف توابع پایه یا المان ها نیاز دارند که معمولاً این کار برای فضاهای بزرگتر از دو بعد مشکل است. این بدین معنا است که این روش ها نیازمند اطلاعات منظم در دامنه هستند، اما در بسیاری از کاربردها امکان استخراج اطلاعات منظم وجود ندارد و داده ها به صورت پراکنده در دامنه پخش شده اند. علاوه بر این، این روش ها زمان زیادی را صرف تولید شبکه می کنند و در ضمن پیچیدگی آن ها با افزایش بعد مسئله بسیار زیاد می شود. این مشکلات باعث ظهور روش هایی مبتنی بر تقریب داده های پراکنده به نام روش های بدون شبکه شدند.

در ادامه تاریخچه مختصری از روش های بدون شبکه در نظریه تقریب ارائه می شود. در اواخر دهه ۱۹۶۰ شپارد<sup>۲</sup> [۳۵] استفاده از روشی را برای مدل بندی سطح پیشنهاد کرد که به عنوان توابع شپارد معروف است. استفاده دیگری از روش های بدون شبکه در اوایل دهه ۱۹۷۰ توسط رولن هاردی [۳۴] در زمینه زمین شناسی پیشنهاد شد. ایده های پیشنهادی توسط هاردی با نام های روش های چندربعی<sup>۴</sup> (MQ) و چندربعی معکوس<sup>۵</sup> (IMQ) شناخته می شوند. در همین حین، جین دوچون<sup>۶</sup> ایده تغییراتی مربوط به اسپلاین های صفحه ای باریک<sup>۷</sup> (TPS) یا به طور کلی اسپلاین های چندهمساز<sup>۸</sup> را فرمول بندی کرد [۲۲].

<sup>۱</sup>Inflaton

<sup>۲</sup>Shepard

<sup>۳</sup>Rolland Hardy

<sup>۴</sup>Multiquadric

<sup>۵</sup>Inverse Multiquadric

<sup>۶</sup>Jean Duchon

<sup>۷</sup>Thin Plate Splines

<sup>۸</sup>Polyharmonic Splines

ایده توابع شپارد توسط پیتر لنکستر و سالکاووسکاس<sup>۹</sup> [۳۶] تعمیم یافت. روش آن‌ها اکنون به روش کمترین مربعات متحرک معروف است. یک مقاله مهم که در آن به مقایسه تمامی روش‌های درونیایی داده‌های پراکنده موجود در اوایل دهه ۱۹۸۰ می‌پردازد، توسط ریچارد فرانکی<sup>۱۰</sup> ارائه شد [۲۴]. در این مقایسه او نتیجه می‌گیرد که چندربعی‌ها و اسپلاین‌های صفحه‌ای باریک بهترین روش‌های موجود در آن زمان می‌باشند. همچنین فرانکی حدس می‌زند ماتریس حاصل از درونیایی چندربعی‌ها معکوس‌پذیر است. این تحقیقات و حدس‌های مربوطه، حقیقتاً یک جهش در تحقیقات روی توابع پایه‌ای شعاعی محسوب می‌شوند.

با وجود گستردگی کارهای انجام شده روی روش‌های بدون شبکه از جمله روش‌های توابع پایه‌ای شعاعی و کمترین مربعات متحرک، تنها اخیراً شاهد استفاده از آن‌ها در حل معادلات دیفرانسیل جزئی و معادلات انتگرال هستیم و از آن جهت که نیازی به شبکه‌بندی ندارند به سرعت مورد توجه قرار گرفتند. از زمان کار اولیه کانس<sup>۱۱</sup> در سال ۱۹۹۰ که به حل معادلات دیفرانسیل جزئی با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی و روش هم‌مکانی می‌پردازد [۲۷]، یک دنباله‌ی افزایشی از مقالات در مورد این روش نوشته شده است. اثبات همگرایی و کران خطا برای تکنیک توابع پایه‌ای شعاعی برپایه‌ی روش هم‌مکانی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی با ضرایب ثابت توسط فرانکی و شاپک<sup>۱۲</sup> ارائه شده است [۲۴]. توابع پایه‌ای شعاعی برای حل معادلات انتگرال دوبعدی خطی و غیرخطی فردهلم بر نواحی غیرمربعی با هسته‌های پیوسته [۱۳، ۱۴] و هسته‌های منفرد ضعیف [۱۸، ۱۹] استفاده شده است. حل‌های عددی معادلات انتگرال خطی یک بعدی ولترا و فردهلم [۲۵] و معادلات انتگرالی مختلط ولترا-فردهلم [۳۲] با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. روش انتگرال‌گیری ضربی بدون شبکه برای حل معادلات انتگرال منفرد ضعیف در مرجع [۱۷] مطالعه شده است. همچنین روش کمترین مربعات متحرک به عنوان روشی موضعی بدون شبکه برای حل معادلات انتگرال دوبعدی خطی و غیرخطی فردهلم بر نواحی غیرمربعی [۱۶، ۳۱] معادلات انتگرال منفرد ضعیف [۱۵] معادلات انتگرال دیفرانسیل فردهلم [۲۱] معادلات انتگرال مرزی [۲۸، ۲۹] بکارگیری شده است.

هدف ما در این مقاله، ارائه روشی عددی برای حل معادلات دیفرانسیل مربوط به تحول ابتدای عالم است. روش ارائه شده در این مقاله مبتنی بر تقزیم کمترین مربعات متحرک است که این توابع پایه‌ای را به عنوان توابع شکل در روش گلرکین بکار می‌گیرد. برای گسسته‌سازی روش گلرکین، ما از روش انتگرال‌گیری عددی گوس-لژاندر مرکب استفاده می‌کنیم. روش پیشنهاد شده در انتها حل یک معادله دیفرانسیل مربوط به تحول ابتدای عالم را به حل یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی تبدیل می‌کند. مثال عددی در نظر گرفته شده در این مقاله دقت و کارایی روش را برای حل معادلات دیفرانسیل مربوط به تحول ابتدای عالم به اثبات می‌رساند. برخی از ویژگی‌های مطلوب این روش به شرح زیر است:

✓ روش از هیچ شبکه‌بندی به منظور تقریب جواب استفاده نمی‌کند.

✓ این روش شرایط مرزی را وارد مسئله می‌کند و دیگر نیازی به یافتن راهکاری به منظور کار با این شرایط در روش گلرکین نمی‌باشد.

✓ الگوریتم ایجاد شده بسیار ساده و از نظر محاسباتی کم هزینه است و برنامه آن را می‌توان به راحتی روی یک کامپیوتر شخصی عادی اجرا کرد.

✓ روش ارائه شده را می‌توان بدون صرف هزینه اضافه به منظور حل سایر معادلات کیهان‌شناسی توسعه داد. ساختار این مقاله بر چهار بخش استوار است. در بخش دوم به معرفی مدل هندسی فضا زمان و معادله تحول زمانی میدان اینفلاتون می‌پردازیم. بخش سوم، مروری بر توابع پایه‌ای شعاعی و خاصیت‌های مربوط به آن‌ها را شامل می‌شود. در بخش چهارم یک روش بر مبنای توابع پایه‌ای شعاعی برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل مغناطیسی با ضرایب متناوب ارائه شده است. در نهایت، مثالی عددی به منظور نشان دادن دقت روش در بخش پنجم در نظر گرفته شده است.

## ۲ هندسه لورنزی مدل FLRW در کیهان‌شناسی و معادله اینفلاتون

در مدل فریدمن-لامارش-رابرتسون-واکر<sup>۱۳</sup> FLRW کیهان را به صورت حاصل ضرب پیچشی خط حقیقی  $\mathbb{R}$  با یک منیفلد سه بعدی همبند، همسانگرد و همگن در نظر می‌گیرند. همسانگردی یعنی هیچ جهت مرجحی وجود ندارد و از نظر

<sup>۹</sup>Peter Lancaster and Kes Salkauskas

<sup>۱۰</sup>Richard Franke

<sup>۱۱</sup>Kansa

<sup>۱۲</sup>Franke and Schaback

<sup>۱۳</sup>Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker

هندسی به این مفهوم است که منیفلد  $\Sigma$  دارای خمیدگی مقطعی ثابت است. بنابر اصل کوپرنیک چون موقعیت زمین در کیهان به هیچ وجه خاصی نیست منیفلد  $\Sigma$  را همگن فرض کردیم. معادل این موضوع در هندسه منیفلد عمل متعدی گروه ایزومتري های  $\Sigma$  بر آن منیفلد است. چون  $\Sigma$  یک منیفلد سه بعدی است، همواره می توان در حالت موضعی متریک رابه صورت

$$h = a^2 \left( \frac{1}{1 - kr^2} dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi \right), \quad (1)$$

در نظر گرفت. در اینجا  $a > 0$  شعاع فضا و  $k \in \{-1, 0, 1\}$  خمیدگی می باشد. به طور دقیق تر خمیدگی می تواند مثبت، مانند کره، صفر مانند فضای اقلیدسی با متر معمولی و یا منفی مانند فضای هذلولوی<sup>۱۴</sup> باشد.

هم چنین عدد  $-1$  نماینده تمام خمیدگی های منفی است زیرا با تغییر همدیس<sup>۱۵</sup> متریک  $h$  به  $sc^2 h$  خمیدگی به  $\frac{1}{c^2}$  تغییر می یابد. بنابراین تانسور متریک فضا زمان در مدل FLRW به صورت متر لورنزی

$$g = dt \otimes dt + a^2(t) \left( \frac{1}{1 - kr^2} dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi \right), \quad (2)$$

مشخص می شود، که تابع  $a(t)$  به زمان بستگی دارد [۵]. در این مدل اگر  $k$  را مثبت فرض کنیم شعاع فضا در طول زمان کراندار خواهد ماند. بنابراین با توجه به مشاهدات خمیدگی را منفی و یا صفر نظر می گیرند.

بعلاوه فرض کنیم  $k = 1$  یا  $k = 0$  و Ric تانسور خمیدگی ریچی<sup>۱۶</sup> متریک  $g$  و تابع هموار  $\rho : \mathbb{R} \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{تابع چگالی مدل FLRW باشد. پس از قرار دادن در معادلات میدان انیشتین یعنی} \\ \text{Ric} = \mathcal{F}\pi\rho(\mathcal{F}dt \otimes dt + g), \quad (3)$$

و حل این معادلات غیرخطی، مشاهده می کنیم که  $\dot{a}(t)$  و  $\ddot{a}(t)$  برای یک  $t \in \mathbb{R}$  بی نهایت می شوند. قرار می دهیم  $t_0 = 0$  این واقعیت را در کیهان شناسی مهبانگ (انفجار بزرگ) می نامند [۵]. هاوکینگ و پنروز در [۸] و [۷] نشان دادند که این رخداد به دلیل متریک خاص  $g$  نیست بلکه به عنوان خاصیت اصلی هر مدل دیگری برای فضا زمان بروز می کند. به عنوان یک مسئله در ادامه این مقاله می توان معادلات انیشتین را به صورت

$$\text{Ric} = \mathcal{F}\pi\rho(\mathcal{F}dt \otimes dt + g) + \Lambda g, \quad (4)$$

در نظر گرفت که  $\Lambda \in \mathbb{R}$  را ثابت کیهانی می نامند. همچنین به عنوان زمینه برای مطالعات بیشتر می توان حالتی را در نظر گرفت که  $a$  تابعی از زمان و مکان باشد یعنی کیهان را ناهمگن در نظر بگیریم.

در این مقاله به بررسی کیهان (جهان) همگن و همسان گرد با  $k = 0$  می پردازیم که در سطح زمینه با مشاهدات کیهانی هم خوانی دارد [۴، ۶].

مهمترین مدل شناخته شده برای سیر تکامل عالم، مدل کیهان شناسی استاندارد یا همان مهبانگ است که این مدل با محدودیت هایی مواجه است و توانایی توضیح آنها را ندارد. این محدودیت ها نظیر مشکل تختی، مشکل افق و مشکل تک قطبی است که برای حل این مشکلات مدلی به نام تورم ارائه شد. در هنگام تورم در کسری از ثانیه جهان دارای انبساط بسیار تند شونده می باشد که این اتفاق در زمان های بسیار نزدیک به شروع مهبانگ بوقوع می پیوندد و نتیجه آن رفع مشکلات مدل استاندارد مهبانگ می باشد. جهانی که ما در دوره ی تورم بررسی می کنیم یک جهان منبسط شونده تخت، همگن و همسانگرد است که با متریک FLRW توصیف می شود

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a(t)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j.$$

همان طور که اشاره شد، در رابطه ی بالا  $a(t)$  فاکتور مقیاس می باشد که نشان دهنده چگونگی انبساط بخش فضایی، فضا-زمان می باشد. از طرفی موجودی که مسئول بوجود آمدن دوره انبساط تورمی می باشد اینفلاتون نام دارد که در واقع

یک میدان اسکالر همگن  $\phi(t)$  است. این میدان اسکالر همراه با فاکتور مقیاس در معادلات زیر صدق می کنند

$$\frac{\ddot{\phi}}{1 - \dot{\phi}^2} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} + \frac{1}{V} \frac{dV}{d\phi} = 0,$$

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{1}{3} \frac{V(\phi)}{1 - \dot{\phi}^2}.$$

<sup>۱۴</sup>Hyperbolic

<sup>۱۵</sup>Conformal

<sup>۱۶</sup>Ricci

برای مدل تاکیون پتانسیل  $V(\phi)$  که در نظر می‌گیریم به شکل  

$$V(\phi) = V \cdot \exp(-\alpha\phi)$$

رفتار می‌کند.  $\alpha$  یک پارامتر ثابت می‌باشد که ما بدنبال یافتن بهترین مقدار برای آن بر اساس چگونگی تحول میدان  $\phi(t)$  هستیم با جایگذاری این پتانسیل در معادلات بالا می‌توان معادلات کوپل شده را بدست آورد. با اضافه کردن معادله دیفرانسیل بعدی  $dN = -H dt$  پارامتر جدیدی به نام  $N$  معرفی می‌شود که مشاهدات رصدی انتهای دوره تورم را با مقدار  $60$  برای این متغیر تخمین می‌زند. در ادامه با حل معادلات کوپل شده  $y$  بالا به دنبال یافتن بهترین مقدار برای پارامتر  $\alpha$  در پتانسیل هستیم، بطوری که دوره  $y$  تورم در مقدار مقتضی مربوط به  $N = 60$  به اتمام برسد.

### ۳ روش کمترین مربعات متحرک

فرض کنیم مقادیر تابع  $u$  را در نقاط مشخص  $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\} \subset D \subset \mathbb{R}^d$  در اختیار داریم. ایده‌ی اصلی روش کمترین مربعات متحرک تقریب تابع  $u$  برای هر  $\mathbf{x} \in D$  با استفاده از کمترین مربعات وزنی موضعی است. برای هر  $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^d$  مقدار تقریب کمترین مربعات متحرک با  $s_{u,X}(\mathbf{x})$  نشان داده می‌شود که جواب مسئله زیر است [۹]:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^N [u(\mathbf{x}_i) - p(\mathbf{x}_i)]^2 w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) : p \in \Pi_q(\mathbb{R}^d) \right\}, \quad (5)$$

که در آن  $w : D \times D \rightarrow [0, \infty]$  یک تابع وزن پیوسته و  $\Pi_q(\mathbb{R}^d)$  فضای چندجمله‌ای‌های  $d$  متغیره حداکثر از درجه  $q$  است. در این تقریب عموماً علاقه‌مند هستیم از توابع وزنی موضعی استفاده کنیم تا هزینه‌های محاسباتی را کاهش داده و دیگر نیاز به حل دستگاه‌های بزرگ نداشته باشیم. در اصل ما به دنبال تابع وزنی مثل  $w$  هستیم که وقتی متغیرها در آن از هم دور می‌شوند مقدار  $w$  کوچک گردد. به‌طور ایده‌آل، مقدار  $w$  باید برای  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$  که  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$  از یک مقدار آستانه<sup>۱۷</sup> بیشتر است، صفر گردد. بنابراین می‌توان فرض کرد

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi_\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \phi\left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2}{\delta}\right), \quad \delta > 0, \quad (6)$$

که  $\Phi(\mathbf{x}) = \phi(\|\mathbf{x}\|_2)$  یک تابع شعاعی با این خاصیت است که  $\phi(r) = 0$  وقتی  $r \geq 1$  [۹].

**ملاحظه ۱.۳.** در ادامه فرض می‌شود  $\{p_0(\mathbf{x}), \dots, p_Q(\mathbf{x})\}$  پایه‌ای کامل و تک‌جمله‌ای برای  $\Pi_q(\mathbb{R}^d)$  است. به‌عنوان مثال در حالت یک‌بعدی، پایه‌ی خطی به‌شکل  $\{1, x\}$  پایه درجه‌ی دوم به‌صورت  $\{1, x, x^2\}$  است و در حالت دوبعدی، پایه‌ی خطی به‌شکل  $\{1, x, t\}$  پایه‌ی درجه‌ی دوم به‌صورت  $\{1, x, t, x^2, xt, t^2\}$  است که در آن  $\mathbf{x} = (x, t)$ .

**تعریف ۲.۳.** [۹] یک مجموعه از نقاط مجزا مانند  $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\} \subset \mathbb{R}^d$  را  $q$ -تک‌حلی<sup>۱۸</sup> گوئیم هرگاه تنها چندجمله‌ای درونیاب داده‌های صفر از درجه‌ی کلی حداکثر  $q$  روی  $X$  چندجمله‌ای صفر باشد.

در ادامه به بیان قضیه‌ای می‌پردازیم که روشی کاربردی و مستقیم برای حل مسئله (۵) در اختیار ما قرار می‌دهد.

**قضیه ۳.۳.** [۹] فرض می‌کنیم مجموعه  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$  یک مجموعه‌ی  $q$ -تک‌حلی است. در این حالت، مسئله (۵) یکتا حل‌پذیر است و جواب  $s_{u,X}(\mathbf{x})$  برای هر  $\mathbf{x} \in D$  می‌تواند به‌صورت زیر بدست آورده شود:

$$s_{u,X}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \psi_i(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}_i), \quad (7)$$

توابع پایه‌ای  $\psi_i(\mathbf{x})$  به‌صورت

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \Phi_\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \sum_{k=0}^Q z_k p_k(\mathbf{x}_i), \quad (8)$$

هستند که در آن ضرایب  $z_k$  به‌شکل یکتای زیر بدست آورده می‌شوند:

$$\sum_{k=0}^Q z_k \sum_{i=1}^N \Phi_\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) p_k(\mathbf{x}_i) p_l(\mathbf{x}_i) = p_l(\mathbf{x}), \quad 0 \leq l \leq m. \quad (9)$$

<sup>۱۷</sup>Threshold

<sup>۱۸</sup>Unisolvent

ملاحظه ۴.۳. توابع پایه‌ای  $\psi_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, N$ , به‌عنوان توابع شکل تقریب کمترین مربعات متحرک متناظر با نقاط  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$  شناخته می‌شوند. همچنین اگر  $w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \in C^r(D)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , آنگاه  $\psi_i(\mathbf{x}) \in C^r(D)$  و بنابراین  $s_{u,X}(\mathbf{x}) \in C^r(D)$ . [۹].

### ۱.۳ الگوریتم روش

برای بدست آوردن یک الگوریتم کلی برای تقریب کمترین مربعات متحرک، در ابتدا فرض می‌کنیم مجموعه  $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$  یک مجموعه‌ی  $q$  تک‌حلی باشد. سپس معادله (۷) را به‌صورت ماتریسی زیر می‌نویسیم:

$$s_{u,X}(\mathbf{x}) = \bar{U}^t \cdot \bar{\Psi}(\mathbf{x}), \quad (10)$$

که در آن

$$\bar{\Psi}(\mathbf{x}) = [\psi_1(\mathbf{x}), \dots, \psi_N(\mathbf{x})]^t, \quad \bar{U} = [u(\mathbf{x}_1), \dots, u(\mathbf{x}_N)]^T.$$

حال برای تعیین  $\bar{\Psi}(\mathbf{x})$  باید ماتریس‌های  $\mathbf{P}$  و  $\mathbf{W}(\mathbf{x})$  را تعریف کنیم

$$\mathbf{P}^T = [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_1), \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_2), \dots, \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_N)]_{(Q+1) \times N}, \quad \mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) & \dots & \dots \\ \dots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_N) \end{bmatrix}_{N \times N}. \quad (11)$$

با استفاده از قضیه ۳.۳ داریم

$$\bar{\Psi}^t(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) A^{-1}(\mathbf{x}) B(\mathbf{x}), \quad (12)$$

یا

$$j(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^Q \mathbf{p}_k(\mathbf{x}) [A^{-1}(\mathbf{x}) B(\mathbf{x})]_{kj}, \quad (13)$$

و برای تعریف ماتریس‌های  $A(\mathbf{x})$  و  $B(\mathbf{x})$  داریم

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P} = B(\mathbf{x}) \mathbf{P} = \sum_{j=1}^N w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) \mathbf{p}(\mathbf{x}_j) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j), \quad (14)$$

$$B(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W} = [w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1), w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2) \mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_N) \mathbf{p}(\mathbf{x}_N)]. \quad (15)$$

ماتریس  $A$  یک ماتریس  $(Q+1) \times (Q+1)$  نامنفرد است که با نام ماتریس گشتاور<sup>۱۹</sup> خوانده می‌شود [۱۰]. قابل ذکر است که توابع وزنی مختلفی را می‌توان در این تقریب به‌کار برد که از آن جمله می‌توان به تابع وزنی گوس اشاره کرد، که به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) = \begin{cases} \frac{\exp[-(d_j/\alpha)^2] - \exp[-(\delta/\alpha)^2]}{1 - \exp[-(\delta/\alpha)^2]}, & 0 \leq d_j \leq \delta, \\ 0, & d_j > \delta, \end{cases} \quad (16)$$

همچنین تابع وزنی اسپلاین به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1 - 6(d_j/\delta)^2 + 8(d_j/\delta)^3 - 3(d_j/\delta)^4, & 0 \leq d_j \leq \delta, \\ 0, & d_j > \delta, \end{cases} \quad (17)$$

که در آن‌ها  $d_j = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|$  فاصله‌ی اقلیدسی بین  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{x}_j$  است،  $\alpha$  ثابتی است که شکل تابع وزن  $w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)$  را کنترل می‌کند و  $\delta$  اندازه‌ی محمول‌ها را مشخص می‌کند.

<sup>۱۹</sup>Moment Matrix

## ۲.۳ برآورد خطا

در این قسمت از کار خود به مطالعه‌ی برآورد خطا برای تقریب یک تابع به وسیله‌ی روش کمترین مربعات متحرک برحسب فاصله‌ی تراکم  $h_{X,D}$  می‌پردازیم.

**تعریف ۵.۳.** [۹] برای یک مجموعه از نقاط  $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$  در یک دامنه‌ی کراندار  $D \subset \mathbb{R}^d$  فاصله تراکم به صورت

$$h_{X,D} = \sup_{x \in D} \min_{0 \leq j \leq N} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|_2,$$

و فاصله تفکیک به صورت

$$q_X = \frac{1}{\sqrt{2}} \min_{i \neq j} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2,$$

تعریف می‌شود. مجموعه نقاط  $X$  نسبت به ثابت  $c > 0$  در شرط شبه-یکنواخت صدق می‌کند اگر رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$q_X \leq h_{X,D} \leq cq_X.$$

در ادامه، خود را به ناحیه‌هایی محدود می‌کنیم که در شرط مخروط داخلی<sup>۲۰</sup> صدق کنند.

**تعریف ۶.۳.** [۹] مجموعه‌ی  $D \subset \mathbb{R}^d$  در شرط مخروط داخلی صدق می‌کند، اگر زاویه‌ی  $\theta \in (0, \pi/2)$  و  $r > 0$  چنان باشد که برای هر  $\mathbf{x} \in D$  جهت‌ی (بردار یکه) مانند  $\xi(\mathbf{x})$  وجود داشته باشد به طوری که مخروط

$$C(\mathbf{x}, \xi(\mathbf{x}), \theta, r) = \{\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d, \|\mathbf{y}\|_2 = 1, \mathbf{y}^T \xi(\mathbf{x}) \geq \cos \theta, \lambda \in [0, r]\}, \quad (18)$$

کاملاً درون  $D$  باشد.

حال قضیه‌ای از [۹] در مورد کران خطا برای روش کمترین مربعات متحرک بیان می‌کنیم.

**قضیه ۷.۳.** فرض کنید  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  مجموعه‌ای فشرده باشد و در شرط مخروط داخلی با زاویه  $\theta \in (0, \pi/2)$  و شعاع  $r > 0$  صدق کند. برای ثابت  $q \in \mathbb{N}$  فرض می‌شود  $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\} \subset D$  شرط شبه-یکنواخت را تصدیق کند و  $h_{X,D} \leq h_*$  که  $h_* = r/\tau$  با  $\tau = \frac{16(1+\sin \theta)^4 q^4}{3 \sin^3 \theta}$  و  $\delta = 2\tau h_{X,D}$  را به عنوان بستار مجموعه‌ی  $u \in C^{q+1}(D^*)$  عبارتی  $u$  دارای مشتقات پیوسته تا مرتبه  $q+1$  روی ناحیه  $D^*$  باشد و هر مجموعه از نقاط  $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\} \subset D$  در شرط شبه-یکنواخت و خاصیت  $h_{X,D} \leq h_*$  صدق می‌کنند، داریم

$$\|u - s_{u,X}\|_{L^\infty(D)} \leq Ch_{X,D}^{q+1} |u|_{C^{q+1}(D^*)}. \quad (19)$$

که در آن شبه-نرم  $|u|_{C^{q+1}(D^*)}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|u|_{C^{q+1}(D^*)} = \max_{|\alpha|=q+1} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(D^*)}.$$

**ملاحظه ۸.۳.** اگر در قضیه ۷.۳ شرط شبه-یکنواخت روی  $X$  نیز در نظر گرفته شود، با توجه به تعریف ۵.۳ وقتی  $N \rightarrow \infty$  آنگاه  $h_{X,D} \rightarrow 0$  حال با استفاده از کران خطای (۱۹) برای هر  $u \in C^{q+1}(D^*)$  نتیجه می‌گیریم  $P_{N,M} u \rightarrow u$  وقتی  $N \rightarrow \infty$ .

## ۴ حل عددی معادلات مربوط به تحول ابتدای عالم

برای رسیدن به انبساط شتابدار جهان‌های اولیه، با توجه به معادلات فریدمان، نیاز به تقریبی کند تغییر داریم. در این صورت اینفلاتون با سرعت بسیار کمی حرکت می‌کند یعنی  $\dot{\phi} \ll 1$ . در نتیجه در این بخش، روش کمترین مربعات متحرک برای حل معادله دیفرانسیل مربوط به تحول ابتدای عالم به شکل زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد [۶]:

$$\ddot{\phi}(t) + \sqrt{3V} \cdot \dot{\phi}(t) e^{-\sqrt{3}\alpha\phi(t)} - \alpha = 0, \quad (20)$$

<sup>۲۰</sup> Interior Cone Condition

همراه با شرایط اولیه

$$\phi(\cdot) = a, \quad \dot{\phi}(\cdot) = b.$$

برای شروع روش ارائه شده، در ابتدا در نظر می‌گیریم

$$\ddot{\phi}(t) = u(t), \quad (21)$$

که در آن  $u(t)$  یک تابع مشتق‌پذیر پیوسته از مرتبه دو است. با انتگرال‌گیری از  $\cdot$  تا  $t$  از طرفین معادله (۲۱) بدست می‌آوریم

$$\dot{\phi}(t) = \int_{\cdot}^t u(\theta) d\theta + \dot{\phi}(\cdot). \quad (22)$$

بطور مشابه با انتگرال‌گیری از  $\cdot$  تا  $t$  از طرفین معادله (۲۲) داریم

$$\phi(t) = \int_{\cdot}^t \left[ \int_{\cdot}^t (u(\theta) + \dot{\phi}(\cdot)) d\theta \right] d\theta + \phi(\cdot) = \int_{\cdot}^t \int_{\cdot}^t u(\theta) d\theta d\theta + tb + a. \quad (23)$$

با استفاده از انتگرال‌گیری جز به جز، انتگرال دوگانه قبل را به یک انتگرال تک متغیره به شکل زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int_{\cdot}^t \int_{\cdot}^t u(\theta) d\theta d\theta &= (\theta - t) \int_{\cdot}^t u(\theta) d\theta \Big|_{\cdot}^t - \int_{\cdot}^t (\theta - t) u(\theta) d\theta \\ &= \int_{\cdot}^t (t - \theta) u(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$$\phi(t) = \int_{\cdot}^t (t - \theta) u(\theta) d\theta + tb + a. \quad (24)$$

با قرار دادن (۲۴) در معادله دیفرانسیل (۲۰) بدست می‌آوریم

$$u(t) + \sqrt{3V} \cdot \left( \int_{\cdot}^t u(\theta) d\theta + \beta \right) e^{-\frac{1}{\alpha} \int_{\cdot}^t (t-\theta) u(\theta) d\theta + tb + a} - \alpha = 0. \quad (25)$$

عملگر انتگرالی  $\mathcal{K} : V \rightarrow V$  را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{K}u(t) = \alpha - \sqrt{3V} \cdot \left( \int_{\cdot}^t u(\theta) d\theta + \beta \right) e^{-\frac{1}{\alpha} \int_{\cdot}^t (t-\theta) u(\theta) d\theta + tb + a}, \quad (26)$$

که در آن  $V$  یک فضای تابعی کامل به مانند  $\beta > 0$ ،  $L^{\infty}[\cdot, \beta]$  است. با استفاده از این عملگر معادله انتگرال ولترا (۴۶) را می‌توان به شکل فشرده زیر نوشت:

$$\mathcal{K}u(t) = u(t). \quad (27)$$

برای بکارگیری روش گلرکین همراه توابع شکل روش کمترین مربعات متحرک، نیاز به یک تابع وزن  $w$  و  $N$  نقطه پراکنده روی بازه  $[\cdot, \beta]$  همچون

$$\cdot \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N \leq \beta,$$

هستیم. بنابراین می‌توان تابع مجهول  $u(t)$  را در معادله انتگرال (۴۶) به شکل زیر تقریب زد:

$$u(t) \approx u_N(t) = \sum_{i=1}^N c_i \psi_i(t), \quad t \in [\cdot, \beta]. \quad (28)$$

با جایگذاری بسط (۲۸) به جای تابع مجهول  $u(t)$  و گرفتن ضرب داخلی  $\langle \cdot, \psi_j \rangle$  از طرفین معادله بدست آمده خواهیم داشت:

$$\left\langle \mathcal{K} \left( \sum_{i=1}^N c_i \psi_i(t) \right), \psi_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N c_i \psi_i(t), \psi_j \right\rangle. \quad (29)$$



عملگر  $\mathcal{P}_N : V \rightarrow V_N$  به عنوان یک عملگر تصویری گلرکین به شکل

$$\mathcal{P}_N u(t) = \sum_{i=1}^N c_i \psi_i(t), \quad t \in [0, \beta], \quad (30)$$

تعریف می کنیم که در آن  $V_N = \text{span}\{\psi_1, \dots, \psi_N\} \subset V$  با بعد  $d_N$  و ضرایب  $\{c_1, \dots, c_N\}$  با حل دستگاه خطی

$$\langle u, \psi_j \rangle = \sum_{i=1}^N c_i \langle \psi_i, \psi_j \rangle, \quad j = 1, \dots, N, \quad (31)$$

بدست می آید. اما برای درک بهتر خصوصیات  $\mathcal{P}_N$  در ادامه یک فرمول صریح برای آن بدست می آوریم. پایه‌ی جدید متعامد یکه‌ی  $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  را برای  $V_N$  با استفاده از فرآیند گرام-اشمیت از پایه‌ی  $\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$  معرفی می کنیم. عناصر  $\phi_i$  یک ترکیب خطی از مجموعه‌ی  $\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$  هستند و بعلاوه

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (32)$$

با این پایه‌ی جدید، داریم

$$\mathcal{P}_N u(t) = \sum_{i=1}^N \langle u, \phi_i \rangle \phi_i(t), \quad t \in [0, \beta]. \quad (33)$$

بخاطر همین است که  $\mathcal{P}_N$  را عملگر تصویری متعامد می گوئیم [۱۱]. با استفاده از این عملگر متعامد می توان دستگاه (۲۹) را به شکل عملگری

$$\mathcal{P}_N \mathcal{K} u_N = \mathcal{P}_N u_N, \quad (34)$$

نمایش داد.

روش هم مکانی گسسته از تقریب تمامی انتگرال‌های دستگاه (۲۹) با استفاده از یک روش عددی مناسب به وجود می آید. روش‌های گوسی به منظور تقریب انتگرال‌های مختلف دارای کاربرد زیادی در علوم محاسباتی دارند که برای آشنایی با این روش‌ها و بحث در مورد آنالیز همگرایی آن‌ها می توان به مقالات [۱۲، ۲۶] مراجعه نمود. همچنین نویسندگان [۳۰] یک روش ساختار سلولی بر پایه روش گوسی لگاریتمی به منظور محاسبه انتگرال‌های منفرد مرزی ارائه داده‌اند. در روش ارائه شده در این مقاله، ما از روش گوس-لژاندر مرکب با  $m_k$  نقطه و  $M$  زیر بازه استفاده می کنیم. برای این هدف، فرض می کنیم تابع  $f(t)$  روی بازه  $(0, \beta)$  تعریف شده و داشته باشیم

$$|f^{(r_{m_k})}(t)| \leq C, \quad (35)$$

برای هر  $t \in (0, \beta)$ . در این صورت برای هر  $M > 0$  بدست می آوریم

$$\int_0^\beta f(t) dt \simeq \frac{\Delta t}{r} \sum_{q=1}^M \int_{-1}^1 f\left(\frac{\Delta t}{r} t + (q - \frac{1}{r}) \Delta t\right), \quad (36)$$

بطوری که  $\Delta t = \frac{\beta}{M}$  حال با بکارگیری روش انتگرال‌گیری عددی گوس-لژاندر با  $m_k$  نقطه روی بازه  $[-1, 1]$  با ضرایب  $\{\theta_k\}$  و وزن‌های  $\{w_k\}$  برای تقریب انتگرال‌های (۳۶)، بدست می آوریم

$$\int_0^\beta f(t) dt \simeq \sum_{q=1}^M \sum_{k=1}^{m_k} w_k \frac{\Delta t}{r} f(\eta_k^q), \quad (37)$$

که در آن  $\eta_k^q = \frac{\Delta t}{r} \theta_k + (q - \frac{1}{r}) \Delta t$ .

در مرجع [۱۲] نشان داده شده است که روش انتگرال‌گیری عددی (۳۷) برای تقریب انتگرال‌ها از مرتبه دقت  $\frac{1}{M^{r_{m_k}}}$  است. یعنی

$$\int_0^\beta f(t) dt = \sum_{q=1}^M \sum_{k=1}^{m_k} w_k \frac{\Delta t}{r} f(\eta_k^q) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M^{r_{m_k}}}\right). \quad (38)$$

از آنجایی که  $\psi_j$  روی  $[0, \beta]$  تابعی با مشتق پیوسته از هر مرتبه هستند، می توان روش انتگرال‌گیری عددی گوس-لژاندر را با  $m_k$  نقطه و  $M$  زیر بازه روی  $[-1, 1]$  با ضرایب  $\{\theta_k\}$  و با وزن‌های  $\{w_k\}$  برای انتگرال‌های ضرب داخلی بکار برد.

بنابراین داریم

$$\left\langle \mathcal{K} \left( \sum_{i=1}^N c_i \psi_i(t) \right), \psi_j \right\rangle = \sum_{q=1}^M \sum_{k=1}^{m_k} w_k \frac{\Delta t}{\sqrt[q]{q}} \mathcal{K} \left( \sum_{i=1}^N c_i \psi_i(\eta_k^q) \right) j(\eta_k^q), \quad (39)$$

و

$$\left\langle \sum_{i=1}^N c_i \psi_i(t), \psi_j \right\rangle = \sum_{q=1}^M \sum_{k=1}^{m_k} w_k \frac{\Delta t}{\sqrt[q]{q}} j(\eta_k^q) \sum_{i=1}^N c_i \psi_i(\eta_k^q), \quad (40)$$

به طوری که  $\eta_k^q = \frac{\Delta t}{\sqrt[q]{q}} \theta_k + (q - \frac{1}{\sqrt[q]{q}}) \Delta t$ .

با کاربرد یک فرمول انتگرال گیری عددی یک ضرب داخلی نیمه معین گسسته را با

$$\langle f, g \rangle_N = \sum_{k=1}^{q_N} \sum_{q=1}^M \bar{w}_{k,q} f(\theta_k^q) g(\theta_k^q), \quad f, g \in V, \quad (41)$$

و یک نیم نرم گسسته را با

$$\|g\|_N = \sqrt{\langle g, g \rangle_N}, \quad g \in V, \quad (42)$$

تعریف می کنیم [۱۱].

حال عملگر تصویری گسسته زیر را به شکل

$$\mathcal{Q}_N u(x) = \sum_{k=1}^N c_k \psi_k(x), \quad x \in [a, b], \quad (43)$$

معرفی می کنیم که ضرایب  $\{c_1, \dots, c_N\}$  با حل دستگاه

$$\langle u, \psi_j \rangle_N = \sum_{k=1}^N c_k \langle \psi_k, \psi_j \rangle_N \quad j = 1, \dots, N, \quad (44)$$

بدست می آیند. در ادامه قضیه‌ی زیر را در ارتباط با عملگر تصویری گسسته با پایه‌های توابع شکل روش کمترین مربعات متحرک بیان می کنیم.

لم ۱۰۴. با در نظر گرفتن فرضیات قضیه ۷.۳ و اینکه  $N \geq 1$ ،  $\mathcal{Q}_N$  عملگرهای تصویری گسسته با پایه‌های توابع شکل روش کمترین مربعات متحرک متناظر با نقاط شبه-یکنواخت  $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset [a, b]$  هستند. فرض می کنیم خانواده‌ی  $\{\mathcal{Q}_N : N \geq 1\}$  روی  $V$  به صورت یکنواخت کراندار باشد. اگر  $u \in C^{q+1}[a, b]$  آنگاه زمانی که  $\mathcal{Q}_N u, N \rightarrow \infty$  به سمت  $u$  همگرا می شود و بعلاوه

$$\|\mathcal{Q}_N u - u\|_{L^\infty([a, b])} \leq (1 + m) Ch_{X, D}^{q+1} |u|_{C^{q+1}([a, b]^*)}, \quad (45)$$

که  $m$  یک ثابت است.

می توان روش انتگرال گیری عددی گوس-لژاندر را با  $m_k$  نقطه و  $M$  زیر بازه روی  $[-1, 1]$  با ضرایب  $\{\theta_k\}$  و با وزن‌های  $\{w_k\}$  برای انتگرال‌های (۲۹) بکار برد. بنابراین دنباله‌ای از عملگرهای انتگرالی عددی  $\mathcal{K}_N$  روی  $C^{m_k}([0, \beta])$  به صورت زیر معرفی می گردند:

$$\mathcal{K}u(t) \approx \mathcal{K}_N u(t) = \alpha - \sqrt{\mathfrak{V}} \cdot \left( \sum_{q=1}^M \sum_{k=1}^{m_N} w_k \frac{t}{\sqrt[q]{q}} u(\eta_k^q) + b \right) e^{-\frac{1}{\sqrt[q]{q}} \alpha \sum_{q=1}^M \sum_{k=1}^{m_N} w_k \frac{t}{\sqrt[q]{q}} (t - \eta_k^q) u(\eta_k^q) + tb + a}, \quad (46)$$

به طوری که  $\eta_k^q = \frac{t}{\sqrt[q]{q}} \theta_k + (q - \frac{1}{\sqrt[q]{q}}) \frac{t}{M}$ .

با بکارگیری طرح‌های انتگرال گیری عددی بدست آمده در دستگاه (۲۹) دستگاه معادلات جبری غیرخطی

$$\sum_{q=1}^M \sum_{k=1}^{m_k} w_k \frac{\Delta t}{\sqrt[q]{q}} \mathcal{K}_N \left( \sum_{i=1}^N c_i \psi_i(\eta_k^q) \right) j(\eta_k^q) = \sum_{q=1}^M \sum_{k=1}^{m_k} w_k \frac{\Delta t}{\sqrt[q]{q}} j(\eta_k^q) \sum_{i=1}^N \bar{c}_i \psi_i(\eta_k^q), \quad (47)$$

را برای مجهولات  $\{\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_N\}$  بدست می‌آوریم.

بنابراین می‌توان سیستم جبری (۴۷) را بصورت عملگری زیر بازنویسی کرد:

$$\mathcal{Q}_N \mathcal{K}_N u_N = \mathcal{Q}_N u_N. \quad (48)$$

با حل دستگاه (۴۷) می‌توان  $u(t)$  یعنی جواب تقریبی معادله انتگرال ولترای (۴۶) به صورت زیر تقریب زد:

$$\hat{u}_N(t) = \sum_{i=1}^N \hat{c}_i \psi_i(t), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (49)$$

در انتها جواب تقریبی معادله دیفرانسیل (۲۰) را به شکل زیر تقریب می‌زنیم:

$$\phi(t) \approx \int_0^t (t-\theta) \hat{u}_N(\theta) d\theta + t\beta + \alpha. \quad (50)$$

حال با استفاده از روش انتگرال‌گیری عددی گوس-لژاندر را با  $m_k$  نقطه و  $M$  زیر بازه روی  $[-1, 1]$  با ضرایب  $\{\theta_k\}$  و با وزن‌های  $\{w_k\}$  داریم

$$y(t) \approx \hat{y}_N(t) = \sum_{i=1}^N \hat{c}_i \sum_{q=1}^M \sum_{k=1}^{m_N} w_k \frac{t}{\sqrt{M}} (t - \delta_k^q(t)) \psi_i(\delta_k^q(t)) + t\beta + \alpha, \quad (51)$$

$$\delta_k^q(t) = \frac{t}{\sqrt{M}} \theta_k + (q - \frac{1}{2}) \frac{t}{M}$$

## ۵ مثال عددی

در این بخش معادله تحول عالم زیر را با استفاده از روش ارائه شده در این مقاله حل می‌کنیم:

$$\ddot{\phi}(t) + \sqrt{3V} \dot{\phi}(t) e^{-\frac{1}{V} \alpha \phi(t)} - \alpha = 0. \quad (52)$$

با توجه به شکل تابع پتانسیل که به شکل اینفلاتون بیان شده است، شروع حرکت در  $\phi = 0$  اتفاق می‌افتد و با توجه به شرط کند تغییر  $1 \ll \dot{\phi}$  شرایط اولیه را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\phi(0) = 0, \quad \dot{\phi}(0) = 0.$$

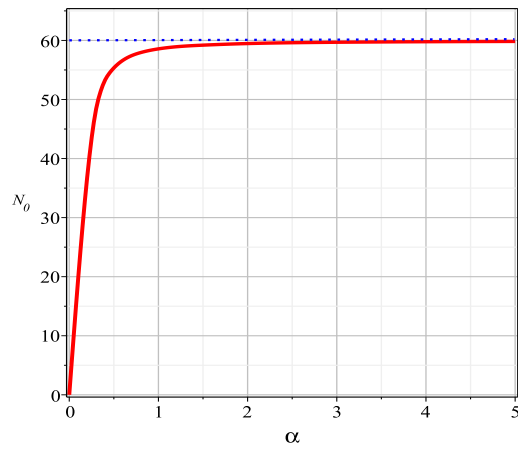
در دوره کند تغییر انرژی جنبشی کمتر از انرژی پتانسیل است و در انتهای تورم انرژی جنبشی و پتانسیل هم مرتبه می‌شوند. با این رشد نمایی در مقیاس فضایی مشکلات کیهانشناسی استاندارد یعنی مدل مه‌بانگ حل می‌شود. بنابراین پس از بدست آوردن تقریبی از  $\phi(t)$  با استفاده از روش پیشنهاد شده با مساوی صفر قرار دادن بخش پتانسیل و جنبشی انرژی می‌توان زمان انتهای تورم  $t$  را تقریب زد، یعنی

$$e^{-\alpha \phi(t)} = \frac{1}{V} \ddot{\phi}(t) e^{-\alpha \phi(t)}.$$

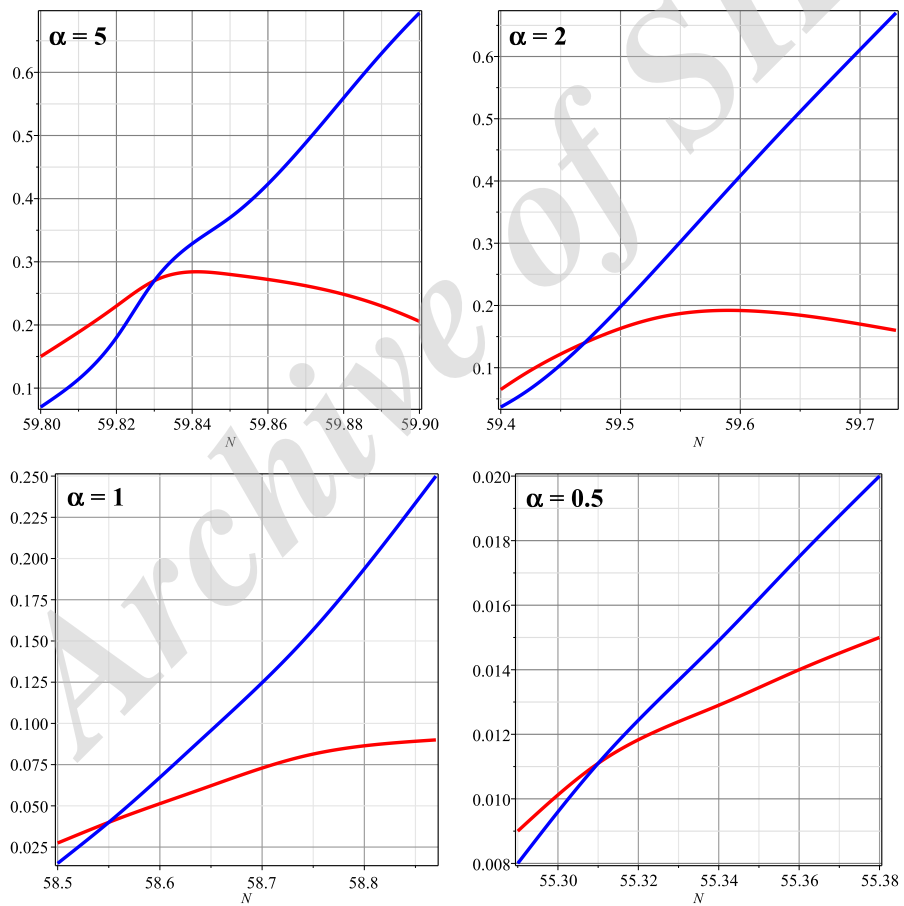
در انتها با استفاده از فرمول زیر می‌توان مقدار  $N$  را تخمین زد:

$$N = \int_0^t \frac{\dot{a}}{a} dt + 60.$$

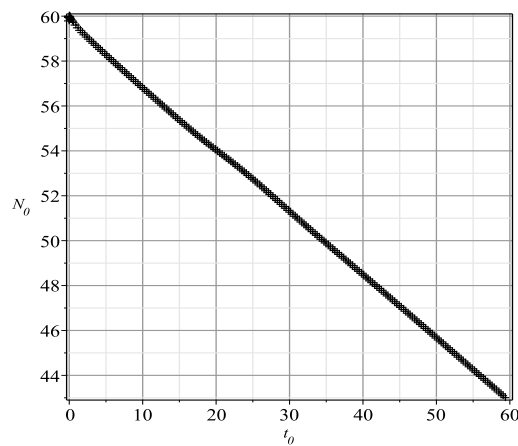
به منظور بکارگیری روش از تابع وزنی گوس و ۱۰۰ نقطه مجزا به صورت دلخواه در نظر می‌گیریم. علاوه بر این از روش گوس-لژاندر ۷ نقطه‌ای با ۲۰ تقسیم یکنواخت در نظر گرفته‌ایم. روش‌های قدیمی برای حل این معادله نیازمند محاسباتی پیچیده بوده‌اند، این در صورتی است که روش بدون شبکه ارائه شده در این مقاله این معادله را با استفاده از یک مجموعه از نقاط پراکنده به سادگی حل می‌کند. برنامه‌های کامپیوتری این مقاله در محیط "Maple ۲۰۱۵" و در یک لپ‌تاپ شخصی ۴ گیگابایت حافظه و پردازشگر دو هسته‌ای با فرکانس ۲.۱۰ گیگاهرتز اجرا شده‌اند. در اینجا شکل ۱ رابطه بین  $\alpha$  و  $N$  را نمایش می‌دهد. در ضمن مقادیر تقریبی  $N$  برای  $\alpha$  های مختلف را در شکل ۲ بدست آورده‌ایم. همانطور که از رفتار معادله دیفرانسیل اینفلاتون انتظار می‌رفت با افزایش مقادیر  $\alpha$  مقدار  $N$  به سمت عدد ۶۰ میل می‌کند که این موضوع صحت و دقت روش ارائه شده را برحسب رفتار فیزیکی معادله در شکل‌های ۱ و ۲ به درستی نشان می‌دهد و تصدیق کننده دقت روش در حل این معادله است. همچنین شکل ۳ رابطه بین  $t$  و  $N$  را نمایش می‌دهد که طبق توضیحات داده شده این دو دارای رابطه عکس هستند و شکل نیز به صورت کامل این موضوع را تایید می‌کند.



شکل ۱: رابطه بین  $\alpha$  و  $N_0$ .



شکل ۲: مقادیر تقریبی  $N$  برای  $\alpha$  های مختلف

شکل ۳: رابطه بین  $N_0$  و  $t_0$ .

## ۶ نتیجه گیری

در این مقاله، به معرفی روشی کارا و دقیق به منظور حل عددی معادلات دیفرانسیل اینفلاتون به عنوان یک مسئله مقدار اولیه غیرخطی کاربردی در کیهان‌شناسی پرداخته‌ایم. در ابتدا هندسه لورنزی مدل  $FLRW$  در کیهان‌شناسی و معادله اینفلاتون را مورد مطالعه و بررسی قرار دادیم. به منظور راه‌اندازی روش پیشنهادشده ابتدا معادله دیفرانسیل اینفلاتون را به یک معادله انتگرال غیرخطی معادل تبدیل کرده‌ایم و در ادامه روش کمترین مربعات متحرک به عنوان پایه روش گلرکین گسسته برای تقریب جواب این معادله انتگرال بکار گرفته‌ایم. سپس با استفاده از روش انتگرال‌گیری عددی گوس-لژاندر مرکب مسئله اصلی را به یک دستگاه جبری از معادلات غیرخطی تبدیل کرده‌ایم. در انتها مثالی عددی به منظور تصدیق کارایی و دقت روش خود ارائه داده‌ایم. همچنین پیشنهادهایی برای کارهای آتی به شکل زیر ارائه می‌گردد:

- حل سایر معادلات دیفرانسیل در کیهان‌شناسی با استفاده از روش ارائه شده.
- بدست آوردن الگوریتم‌هایی سریع برای حل معادلات اینفلاتون با تصحیح روش.
- استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی با محمل‌های فشرده به جای روش کمترین مربعات متحرک در روش گلرکین گسسته.
- ترکیب تقریب‌های بدون شبکه با سایر روش‌های حل معادلات دیفرانسیل و ایجاد روش‌های جدید و کاراتر.

## مراجع

- [1] P. Ade et al.: Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation, *arXiv:1502.02114* (2015).
- [2] P. Ade et al.: A Joint Analysis of BICEP2/Keck Array and Planck Data, *Phys. Rev. Lett.* 114, 101301 (2015).
- [3] P. Ade et al.: Planck 2013 results. XXII. Constraints on inflation, *Astron. Astrophys.* 571, A22 (2014).
- [4] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking, *Phys. Rev. Lett.* 48, 1220 (1982).
- [5] L. Godinho and J. Natario: An introduction to riemannian geometry: With applications to Mechanics and Relativity, Springer, 2014.

- [6] A. H. Guth, Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems, *Phys. Rev. D* **23**, 347 (1981).
- [7] S. Hawking: The occurrence of singularities in cosmology. III. Causality and singularities. *Proc. Roy. Soc. Lon.* **300**, 187–201 (1967)
- [8] S. Hawking, R. Penrose, : The singularities of gravitational collapse and cosmology. *Proc. Roy. Soc. Lon. A.* **314**, 529–548 (1970)
- [9] H. Wendland. *Scattered Data Approximation*. Cambridge University Press, New York, 2005.
- [10] C. Zuppa. Good quality point sets and error estimates for moving least square approximations. *Appl. Numer. Math.*, **47**(3-4):575–585, 2003.
- [11] K.E. Atkinson. *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [12] W. Fang, Y. Wang and Y. Xu. An implementation of fast wavelet Galerkin methods for integral equations of the second kind. *J. Sci. Comput.*, **20**(2):277–302, 2004.
- [13] P. Assari, H. Adibi and M. Dehghan. A meshless method for solving nonlinear two-dimensional integral equations of the second kind on non-rectangular domains using radial basis functions with error analysis. *J. Comput. Appl. Math.*, **239**(1):72–92, 2013.
- [14] P. Assari, H. Adibi and M. Dehghan. A numerical method for solving linear integral equations of the second kind on the non-rectangular domains based on the meshless method. *Appl. Math. Model.*, **37**(22):9269–9294, 2013.
- [15] P. Assari, H. Adibi and M. Dehghan. A meshless discrete Galerkin (MDG) method for the numerical solution of integral equations with logarithmic kernels. *J. Comput. Appl. Math.*, **267**:160–181, 2014.
- [16] P. Assari, H. Adibi and M. Dehghan. A meshless method based on the moving least squares (MLS) approximation for the numerical solution of two-dimensional nonlinear integral equations of the second kind on non-rectangular domains. *Numer. Algor.*, **67**(2):423–455, 2014.
- [17] P. Assari, H. Adibi and M. Dehghan. The numerical solution of weakly singular integral equations based on the meshless product integration (MPI) method with error analysis. *Appl. Numer. Math.*, **81**:76–93, 2014.
- [18] P. Assari and M. Dehghan. A meshless method for the numerical solution of nonlinear weakly singular integral equations using radial basis functions. *Eur. Phys. J. Plus.*, **132**:1–23, 2017.
- [19] P. Assari and M. Dehghan. The numerical solution of two-dimensional logarithmic integral equations on normal domains using radial basis functions with polynomial precision. *Eng. Comput.*, 2017.
- [20] A. Bejancu Jr. Local accuracy for radial basis function interpolation on finite uniform grids. *J. Approx. Theory*, **99**(2):242–257, 1999.
- [21] M. Dehghan and R. Salehi. The numerical solution of the non-linear integro-differential equations based on the meshless method. *J. Comput. Appl. Math.*, **236**(9):2367–2377, 2012.
- [22] J. Duchon. *Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces*, pp. 85–100. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1977.

- [23] G. E. Fasshauer. Meshfree methods. In *Handbook of Theoretical and Computational Nanotechnology*. American Scientific Publishers, 2005.
- [24] R. Franke. Scattered data interpolation: Tests of some methods. *Math. Comput.*, **38**(157):181–200, 1982.
- [25] A. Golbabai and S. Seifollahi. Numerical solution of the second kind integral equations using radial basis function networks. *Appl. Math. Comput.*, **174**(2):877–883, 2006.
- [26] H. Kaneko and Y. Xu. Gauss-type quadratures for weakly singular integrals and their application to Fredholm integral equations of the second kind. *Math. Comp.*, **62**(206):739–753, 1994.
- [27] E.J. Kansa. Multiquadrics-a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics-i surface approximations and partial derivative estimates. *Comput. Math. Appl.*, **19**(8-9):127–145, 1990.
- [28] X. Li and J. Zhu. A Galerkin boundary node method and its convergence analysis. *J. Comput. Appl. Math.*, **230**(1):314–328, 2009.
- [29] X. Li and J. Zhu. A Galerkin boundary node method for biharmonic problems. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **33**(6):858–865, 2009.
- [30] X. Li and J. Zhu. A meshless Galerkin method for Stokes problems using boundary integral equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **198**:2874–2885, 2009.
- [31] D. Mirzaei and M. Dehghan. A meshless based method for solution of integral equations. *Appl. Numer. Math.*, **60**(3):245–262, 2010.
- [32] K. Parand and J. A. Rad. Numerical solution of nonlinear Volterra-Fredholm-Hammerstein integral equations via collocation method based on radial basis functions. *Appl. Math. Comput.*, **218**(9):5292–5309, 2012.
- [33] G. Wahba. Convergence rate of "thin plate" smoothing splines when the data are noisy (preliminary report). *Springer Lecture Notes in Math.*, **757**, 1979.
- [34] R.L. Hardy. Hardy, multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. *J. Geophys. Res.*, **176**(8):1905–1915, 2006.
- [35] D. Shepard, A two-dimensional interpolation function for irregularly spaced points, in: Proc. 23rd Nat. Conf. ACM, ACM Press, New York, 1968, pp. 517-524.
- [36] P. Lancaster, K. Salkauskas, Surfaces generated by moving least squares methods, *Math. Comput.* 37 (1981) 141-158.