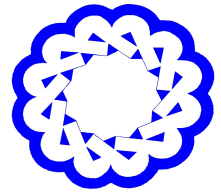


## موجک‌ها و جبرخطی

<http://wala.vru.ac.ir>



دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

# به‌کارگیری موجک چبیشف نوع دوم در حل عددی معادلات انتگرال فردهلم خطی فازی نوع دوم

مهدی سبزواری\*آ، عباس سعادت‌مندی

گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

### چکیده

در این مقاله، حل عددی معادلات انتگرال فردهلم فازی نوع دوم با به‌کارگیری موجک چبیشف نوع دوم را مورد بررسی قرار می‌دهیم. پس از بیان تعاریف مقدماتی مرتبط با معادلات فازی و نیز ویژگی‌های اولیه موجک چبیشف نوع دوم، فرم پارامتری معادلات انتگرال فردهلم فازی نوع دوم، که در واقع دستگاهی از معادلات انتگرال فردهلم خطی در حالت غیرفازی است را معرفی می‌نماییم. سپس با به‌کارگیری موجک چبیشف نوع دوم و به روش گالرکین، معادله انتگرال فازی را به دستگاهی از معادلات جبری خطی تبدیل می‌نماییم. نهایتاً پس از حل این دستگاه، تقریبی از جواب معادله انتگرال فازی به‌دست می‌آید. با ارائه چند مثال عددی، دقت روش را مورد بررسی قرار داده و مقایسه‌ای از نتایج به‌دست آمده با نتایج ارائه شده در سایر مقالات انجام می‌دهیم.

### اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت شده: ۵ تیر ۱۳۹۷  
پذیرفته شده: ۱۳ بهمن ۱۳۹۷  
دسترسی آنلاین: ۱۰ شهریور  
۱۳۹۸

ادیتور رابط: علی‌اکبر عارفی‌جمال

کلمات کلیدی:

معادلات انتگرال فردهلم  
فازی نوع دوم، موجک  
چبیشف نوع دوم، روش  
گالرکین.

## ۱. مقدمه

معادلات انتگرال یکی از شاخه‌های جذاب ریاضیات است که در بسیاری از زمینه‌های مهندسی و علوم کاربرد دارد. از آنجا که حل تحلیلی معادلات انتگرال در بسیاری از موارد دشوار و یا غیرممکن است، لذا روشهای عددی در حل این‌گونه معادلات پیشنهاد می‌گردد. در سال‌های اخیر انواع روش‌های عددی برای حل انواع معادلات انتگرال ارائه شده است. به عنوان نمونه به [۱۹]، [۲۰]، [۲۷] و [۲۶] مراجعه نمایید. معادلات انتگرال فازی حالت خاصی از معادلات انتگرال هستند که در سال‌های اخیر معرفی و مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

مفهوم اعداد فازی و عملیات محاسباتی بر روی این اعداد ابتدا توسط پرفسور لطف‌علی رحیم اوغلو عسکرزاده مشهور به لطفی زاده و همکاران وی معرفی و مورد بررسی قرار گرفت [۸]. پس از آن مفاهیم فازی به سرعت به فضاهاى متریک [۲۵]، فضاهاى توپولوژیک [۷]، معادلات دیفرانسیل [۱] و سایر شاخه‌های ریاضیات و علوم گسترش یافت.

مفهوم انتگرال از توابع فازی، برای نخستین بار توسط دابویس<sup>۱</sup> و پرید<sup>۲</sup> معرفی شد [۱۱] و پس از آن در [۱۶]، [۲۱]، [۲۲] و ... مورد بررسی قرار گرفت. با استفاده از مفهوم انتگرال فازی، کانگژین<sup>۳</sup> و مینگ<sup>۴</sup> برای نخستین بار معادلات انتگرال فزدهلم فازی نوع دوم را معرفی کردند [۹].

کاربردهای فراوان معادلات انتگرال فازی به‌ویژه در نظریه کنترل فازی، بسیاری از محققین را بر آن داشته است که این معادلات را به‌صورت ویژه مورد بررسی قرار دهند [۱۰]. اما علاوه بر آن، کاربرد معادلات انتگرال فازی در ریاضیات زیستی، ریاضیات مالی، اقتصاد و سیستم‌های دینامیکی غیرقابل انکار است [۶]. معادلات انتگرال فازی ابزار بسیار مفیدی برای مدل کردن دسته‌ای از سیستم‌های

\*نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: sabzevari@kashanu.ac.ir (مهدی سبزواری)، saadatmandi@kashanu.ac.ir (عباس سعادت‌مندی).

<http://doi.org/10.22072/wala.2019.88855.1180>

موجک‌ها و جبرخطی (۱۳۹۸) ©

<sup>1</sup>Dubois

<sup>2</sup>Prade

<sup>3</sup>Congxin

<sup>4</sup>Ming

دینامیکی است که مشخصه‌های آن مبهم و غیرقطعی هستند. این عدم قطعیت ممکن است به واسطه اطلاعات ناقص مسئله، و یا اطلاعاتی که به صورت کامل قابل اعتماد نیستند، و یا نامشخص بودن ذاتی برخی مفاهیم در مسئله، و یا دریافت اطلاعات از چندین مرجع که گاهی با یکدیگر متناقضند حاصل شود [۳۱]. از این رو، در سال‌های اخیر معادلات انتگرال فازی موضوع جذابی برای بسیاری از نویسندگان بوده و به سرعت رشد کرده است.

انواع روشهای عددی و تحلیلی مانند روش آدومین [۵]، روش هموتویی [۲۴]، روش سری نیستروم [۲]، روش تکراری بر اساس فرمول کوادراتور [۱۲] و ... برای حل اینگونه معادلات ارائه شده است. همچنین بسیاری از توابع پایه‌ای مانند توابع بلاک پالس [۱۵]، موجک لژاندر [۲۸]، توابع بلاک پالس آمیخته با چندجمله‌ای‌های برنشتاین [۲۳] و ... در حل عددی معادلات انتگرال فازی نوع دوم به کار رفته‌اند.

در این مقاله، با به‌کارگیری موجک چبیشف نوع دوم، حل عددی معادلات انتگرال فازی نوع دوم را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در ابتدا تعاریف مقدماتی مرتبط با معادلات فازی و نیز ویژگی‌های اولیه موجک چبیشف نوع دوم را بیان می‌کنیم. سپس فرم پارامتری معادلات انتگرال فازی نوع دوم، که در واقع دستگامی از معادلات انتگرال فازی خطی در حالت غیرفازی است را معرفی می‌نماییم. با به‌کارگیری موجک چبیشف نوع دوم و به روش گالرکین، معادله انتگرال فازی ارائه شده را به دستگامی از معادلات جبری خطی تبدیل کرده و پس از حل این دستگام، تقریبی از جواب معادله انتگرال فازی را به دست می‌آوریم. نهایتاً با ارائه چند مثال عددی، دقت روش را مورد بررسی قرار داده و مقایسه‌ای از نتایج به دست آمده با نتایج ارائه شده در سایر مقالات انجام می‌دهیم.

## ۲. تعاریف مقدماتی

در این بخش، تعاریف و قضایای مقدماتی مربوط به اعداد و معادلات فازی که در بخش‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۰.۲ [۴] یک عدد فازی تابعی است مانند  $[0, 1]$   $\mathbb{R} \rightarrow u$  که در شرایط زیر صدق کند:

$$1. \quad u \text{ نرمال است. در واقع } x_0 \in \mathbb{R} \text{ وجود دارد به قسمی که } u(x_0) = 1.$$

سبزواری، سعادت‌مندی / موجک‌ها و جبرخطی ۶(۱) (۱۳۹۸) ۱-۱۸

۲.  $u$  مجموعه‌ای محدب است. در واقع برای هر  $x, t \in \mathbb{R}$  و  $0 \leq \lambda \leq 1$ ، رابطه زیر برقرار است:

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)t) \geq \min \{u(x), u(t)\}.$$

۳.  $u$  از بالا نیمه پیوسته است. در واقع برای هر  $x_0 \in \mathbb{R}$  رابطه زیر برقرار است.

$$u(x_0) \geq \lim_{x \rightarrow x_0^+} u(x).$$

۴. مجموعه  $\overline{\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}}$  یک مجموعه فشرده است.

در ادامه این مقاله، مجموعه همه اعداد فازی را با  $\mathbb{R}_F$  نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۲. [۱۳] عدد دلخواه فازی  $u$  را به فرم پارامتری، به صورت زوج مرتب از توابع  $(\underline{u}(r), \bar{u}(r))$  نمایش می‌دهیم که  $0 \leq r \leq 1$  و شرایط زیر را برآورده می‌کند:

۱.  $\underline{u}(r)$  تابعی کراندار، از چپ پیوسته و غیرنزولی بر بازه  $[0, 1]$  است.

۲.  $\bar{u}(r)$  تابعی کراندار، از چپ پیوسته و غیرصعودی بر بازه  $[0, 1]$  است.

۳. به ازای هر  $0 \leq r \leq 1$ ،  $\underline{u}(r) \leq \bar{u}(r)$  است.

تعریف ۳.۲. برای دو عدد فازی دلخواه  $u = (\underline{u}(r), \bar{u}(r))$  و  $v = (\underline{v}(r), \bar{v}(r))$  و عدد حقیقی  $\lambda$ ، جمع و ضرب اسکالر به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(u \oplus v)(r) = (\underline{u}(r) + \underline{v}(r), \bar{u}(r) + \bar{v}(r)).$$

$$(\lambda \otimes u)(r) = \begin{cases} (\lambda \underline{u}(r), \lambda \bar{u}(r)) & \lambda \geq 0, \\ (\lambda \bar{u}(r), \lambda \underline{u}(r)) & \lambda < 0. \end{cases}$$

همچنین  $u = v$  است اگر و فقط اگر  $\underline{u}(r) = \underline{v}(r)$  و  $\bar{u}(r) = \bar{v}(r)$ .

سبزواری، سعادت‌مندی / موجک‌ها و جبرخطی ۶(۱) (۱۳۹۸) ۱-۱۸

تعریف ۴.۲. [۱۶] فاصله بین دو عدد فازی دلخواه  $u = (\underline{u}(r), \bar{u}(r))$  و  $v = (\underline{v}(r), \bar{v}(r))$  به صورت

$$D(u, v) = \sup_{0 \leq r \leq 1} \max \{ |\underline{u}(r) - \underline{v}(r)|, |\bar{u}(r) - \bar{v}(r)| \} \quad (۱.۲)$$

تعریف می‌شود.

قضیه ۵.۲. [۱۴] زوج مرتب  $(\mathbb{R}_F, D)$  یک فضای متریک کامل با شرایط زیر است.

۱. به ازای هر  $u, v, w \in \mathbb{R}_F$  داریم،  $D(u \oplus w, v \oplus w) = D(u, v)$ .

۲. به ازای هر  $u, v \in \mathbb{R}_F$  و  $\lambda \in \mathbb{R}$  داریم،  $D(\lambda \otimes u, \lambda \otimes v) = |\lambda| D(u, v)$ .

۳. به ازای هر  $u, v, w, e \in \mathbb{R}_F$  داریم،  $D(u \oplus v, w \oplus e) \leq D(u, w) + D(v, e)$ .

تعریف ۶.۲. [۳۰] تابع  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$  را در نقطه  $x_0 \in [a, b]$  پیوسته گوئیم هرگاه به ازای

هر  $\varepsilon > 0$ ،  $\delta > 0$  ای وجود داشته باشد به طوری که اگر  $x \in [a, b]$  و  $|x - x_0| < \varepsilon$  آن‌گاه

$$D(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

تابع  $f$  را روی بازه  $[a, b]$  پیوسته فازی گوئیم هرگاه به ازای هر  $x \in [a, b]$ ، پیوسته باشد. فضای

چنین توابعی را با  $C_F([a, b])$  نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۲. [۱۳] تابع  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$  را در نظر گیرید. برای هر افراز دلخواه  $P = \{t_0, \dots, t_n\}$

از  $[a, b]$  و مقدار دلخواه  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$  به ازای  $1 \leq i \leq n$ ، فرض کنید

$$R_P = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (t_i - t_{i-1}),$$

$$\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} \{t_i - t_{i-1}\}.$$

انتگرال تابع  $f(t)$  در بازه  $[a, b]$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} R_P. \quad (۲.۲)$$

قضیه ۸.۲. [۱۶] اگر تابع فازی  $f(t)$  در فضای متریک  $D$  پیوسته باشد آنگاه انتگرال تعریف شده در (۲.۲) وجود دارد و نیز،

$$\overline{\int_a^b f(t, r) dt} = \int_a^b \underline{f}(t, r) dt,$$

$$\overline{\int_a^b f(t, r) dt} = \int_a^b \overline{f}(t, r) dt.$$

### ۳. موجک چبیشف نوع دوم

موجک‌ها خانواده‌ای از توابع را تشکیل می‌دهند که از انتقال و اتساع تابعی به نام موجک مادر  $\psi$  به دست می‌آیند. زمانی که پارامتر اتساع  $a$  و انتقال  $b$  به طور پیوسته تغییر کنند، خانواده‌ای از موجک‌های پیوسته به صورت زیر داریم [۱۸].

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{\nu}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (1.3)$$

اگر پارامترهای  $a$  و  $b$  را به مقادیر گسسته

$$a = a_0^{-N}, b = nb_0 a_0^{-N}, a_0 > 1, b_0 > 0,$$

محدود کنیم، که در رابطه بالا  $n$  و  $N$  اعداد صحیح مثبت می‌باشند، آنگاه خانواده‌ای از موجک‌های گسسته به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\psi_{N,n}(t) = |a_0|^{-\frac{N}{\nu}} \psi(a_0^N t - nb_0).$$

$\psi_{N,n}(t)$  پایه‌ی موجک برای  $L_2(\mathbb{R})$  است. به صورت خاص اگر  $a_0 = 2$  و  $b_0 = 1$  باشد،  $\psi_{N,n}(t)$  پایه متعامد یکه خواهد بود [۱۸].

موجک‌های چبیشف نوع دوم بر بازه  $[0, 1)$  به صورت  $\psi_{nm}(t) = \psi(N, n, m, t)$  نمایش داده می‌شوند که در آن  $N$  عددی صحیح و مثبت است،  $n = 1, 2, \dots, 2^{N-1}$  و همچنین  $m$  درجه چندجمله‌ای‌های

سبزواری، سعادت‌مندی / موجک‌ها و جبرخطی ۶ (۱) (۱۳۹۸) ۱-۱۸

چبیشف نوع دوم را نشان می‌دهد. این موجک‌ها به شکل زیر تعریف می‌شوند [۳۲]:

$$\psi_{nm}(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{\frac{N}{2}} U_m(2^N t - 2n + 1) & \frac{n-1}{2^{N-1}} \leq t < \frac{n}{2^{N-1}}, \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (2.3)$$

و  $m = 0, 1, \dots, M-1$ . در رابطه بالا،  $U_m(t)$  چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم از مرتبه  $m$  هستند که از رابطه بازگشتی زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} U_0(t) &= 1, \\ U_1(t) &= 2t, \\ U_{m+1}(t) &= 2tU_m(t) - U_{m-1}(t), \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم نسبت به تابع وزن  $\omega(t) = \sqrt{1-t^2}$  در بازه  $[-1, 1]$  متعامدند. اما از آن‌جا که ما موجک‌های چبیشف نوع دوم در بازه  $[0, 1]$  تعریف کرده‌ایم، لذا تابع وزن  $\tilde{\omega}(t) = \omega(2t-1)$  باید به صورت زیر اتساع و انتقال یابد:

$$\omega_n(t) = \omega(2^N t - 2n + 1). \quad (4.3)$$

موجک‌های چبیشف نوع دوم نسبت به تابع وزن  $\omega_n(t)$  در بازه  $[0, 1]$  متعامد یکه‌اند. در اینجا ذکر این نکته لازم به نظر می‌رسد که موجک‌های لژاندر یکی از نزدیکترین خانواده توابع متعامد به موجک‌های چبیشف هستند. در بسیاری از محاسبات استفاده از موجک لژاندر در مقایسه با موجک چبیشف (نوع اول و دوم) مناسب‌تر است زیرا موجک‌های لژاندر دارای تابع وزن  $w(x) = 1$  هستند در حالی که موجک‌های چبیشف از این مزیت بی‌بهره‌اند. اما با این حال، وجود رابطه بازگشتی ساده به فرم (۳.۳) برای چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم و نیز اینکه می‌توان برخلاف چندجمله‌ای‌های لژاندر، ریشه‌های چندجمله‌ای‌های چبیشف را به سادگی و به کمک روابط مثلثاتی به فرم بسته نمایش داد، از مزیت‌های چندجمله‌ای‌های چبیشف و نیز موجک چبیشف می‌باشد. همچنین لازم به ذکر است که وجود تابع وزن در یک مجموعه متعامد در برخی حالات دارای مزایایی است که علاقه‌مندان برای مطالعه

سبزواری، سعادت‌مندی / موجک‌ها و جبرخطی ۶ (۱) (۱۳۹۸) ۱-۱۸

بیشتر می‌توانند به فصل سوم کتاب معروف گاتلیب و اورزاک [۱۷] مراجعه نمایند.

۱.۳. تقریب توابع

$\{\psi_{nm}\}$  یک پایه متعامد یکه برای  $L^2_{\omega_n}[0, 1)$  است. بنابراین تابع دلخواه  $f \in L^2_{\omega_n}[0, 1)$  را می‌توان توسط موجک‌های چیبیشف نوع دوم به صورت زیر بسط داد:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(t), \quad (5.3)$$

که در رابطه بالا  $c_{nm} = (f(t), \psi_{nm}(t))_{\omega_n}$  است و  $(\cdot, \cdot)_{\omega_n}$  بیانگر ضرب داخلی در فضای  $L^2_{\omega_n}[0, 1)$  است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f(t), \psi_{nm}(t))_{\omega_n} = \int_0^1 \omega_n(t) f(t) \psi_{nm}(t) dt. \quad (6.3)$$

اگر سری (۵.۳) را از جایی به بعد قطع کنیم، تقریبی از تابع  $f(t)$  به شکل زیر حاصل می‌شود که آن را با  $f_{NM}(t)$  نشان می‌دهیم.

$$f(t) \approx f_{NM}(t) = \sum_{n=1}^{2^{N-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{nm}(t) = C^T \Psi(t). \quad (7.3)$$

در رابطه بالا،  $C$  و  $\Psi$  بردارهای از مرتبه  $1 \times M \times 2^{N-1}$  هستند و عبارتند از:

$$C = [c_{10}, c_{11}, \dots, c_{1(M-1)}, c_{20}, \dots, c_{2(M-1)}, \dots, c_{2^{N-1}0}, \dots, c_{2^{N-1}(M-1)}]^T, \quad (8.3)$$

$$\Psi(t) = [\psi_{10}(t), \dots, \psi_{1(M-1)}(t), \psi_{20}(t), \dots, \psi_{2(M-1)}(t), \dots, \psi_{2^{N-1}0}(t), \dots, \psi_{2^{N-1}(M-1)}(t)]^T. \quad (9.3)$$

به طریق مشابه، تابع دو متغیره  $k(t, s) \in L^2_{\omega_n}([0, 1) \times [0, 1))$  را می‌توان توسط موجک‌های



چبیشف نوع دوم به صورت زیر تقریب زد:

$$k(t, s) \simeq k_{NM}(t, s) = \Psi(t)^T K \Psi(s), \quad (10.3)$$

که در رابطه بالا  $K$  ماتریس مربعی از مرتبه  $2^{N-1}M \times 2^{N-1}M$  است و درایه‌های آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \left( \psi_i(t), (k(t, s), \psi_j(s))_{\omega_n} \right)_{\omega_n} \quad (11.3) \\ &= \int_0^1 \omega \left( 2^N t - 2 \left[ \frac{i-1}{M} \right] - 1 \right) \psi_i(t) \int_0^1 \omega \left( 2^N s - 2 \left[ \frac{j-1}{M} \right] - 1 \right) k(t, s) \psi_j(s) ds dt. \end{aligned}$$

در رابطه بالا توابع  $\psi_j(s)$  و  $\psi_i(t)$  به ترتیب نشان دهنده درایه‌های  $i$ ام و  $j$ ام از بردارهای  $\Psi(s)$  و  $\Psi(t)$  تعریف شده در رابطه (۹.۳) هستند.

#### ۴. معادلات انتگرال فازی فردهلم نوع دوم

معادله انتگرال فردهلم خطی نوع دوم، در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s) u(s) ds. \quad (1.4)$$

در معادله بالا  $f(t) \in L^2[0, 1)$  و  $k(t, s) \in L^2([0, 1) \times [0, 1))$  توابعی معلوم و  $u(t)$  تابعی مجهول است. اگر  $f(t)$  تابعی غیرفازی باشد آنگاه جواب معادله انتگرال (۱.۴) نیز غیرفازی خواهد بود. اما اگر این تابع، تابعی فازی باشد، معادله به یک جواب فازی منجر خواهد شد. در این حالت، شرایط لازم و کافی برای وجود و یکتایی جواب معادله انتگرال فازی در مرجع [۲۹] بررسی شده است.

در این بخش با توجه به تعریف ۲.۲، فرم پارامتری معادله انتگرال فردهلم فازی نوع دوم را ارائه می‌نماییم. فرض کنید  $(\underline{f}(t, r), \bar{f}(t, r))$  و  $(\underline{u}(t, r), \bar{u}(t, r))$  شکل پارامتری از توابع  $f(t)$  و  $u(t)$  باشند که  $0 \leq r \leq 1$  و  $t \in [a, b)$ . شکل پارامتری معادله انتگرال فردهلم فازی نوع دوم به صورت زیر است

۱۰ سبزواری، سعادت‌مندی / موجک‌ها و جبرخطی ۶(۱) (۱۳۹۸) ۱-۱۸  
 :[۱۳]

$$\begin{aligned} \underline{u}(t, r) &= \underline{f}(t, r) + \lambda \int_a^b v_1(t, s, \underline{u}(s, r), \bar{u}(s, r)) ds, \\ \bar{u}(t, r) &= \bar{f}(t, r) + \lambda \int_a^b v_2(t, s, \underline{u}(s, r), \bar{u}(s, r)) ds, \end{aligned} \quad (2.4)$$

که برای هر  $0 \leq r \leq 1$  و  $t \in [a, b]$  داریم:

$$v_1(t, s, \underline{u}(s, r), \bar{u}(s, r)) = \begin{cases} k(t, s)\underline{u}(s, r) & k(t, s) \geq 0, \\ k(t, s)\bar{u}(s, r) & k(t, s) < 0, \end{cases}$$

و همچنین،

$$v_2(t, s, \underline{u}(s, r), \bar{u}(s, r)) = \begin{cases} k(t, s)\bar{u}(s, r) & k(t, s) \geq 0, \\ k(t, s)\underline{u}(s, r) & k(t, s) < 0. \end{cases}$$

در این مقاله فرض می‌کنیم  $\lambda = 1$ ،  $a = 0$  و  $b = 1$  باشد. در غیراین صورت با یک تغییر متغیر ساده می‌توان به چنین پارامترهایی رسید. همچنین فرض کنید  $k^+(t, s) = \max_{0 \leq t, s \leq 1} \{k(t, s), 0\}$  و  $k^-(t, s) = \min_{0 \leq t, s \leq 1} \{k(t, s), 0\}$ . در این صورت معادله انتگرال فازی (۲.۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \underline{u}(t, r) &= \underline{f}(t, r) + \int_0^1 k^+(t, s)\underline{u}(s, r) ds + \int_0^1 k^-(t, s)\bar{u}(s, r) ds, \\ \bar{u}(t, r) &= \bar{f}(t, r) + \int_0^1 k^+(t, s)\bar{u}(s, r) ds + \int_0^1 k^-(t, s)\underline{u}(s, r) ds. \end{aligned} \quad (3.4)$$

برای هر  $0 \leq t, r \leq 1$ ، معادله (۳.۴) یک دستگاه معادلات انتگرال فردهلم خطی در حالت غیرفازی است. در بخش بعد، به حل عددی دستگاه بالا با استفاده از موجک چیشف نوع دوم می‌پردازیم.

### ۵. حل عددی معادلات انتگرال فازی

معادله انتگرال فازی پارامتری (۳.۴) را در نظر می‌گیریم که توابع  $k^+(t, s)$ ،  $\bar{f}(t, r)$ ،  $\underline{f}(t, r)$  و  $k^-(t, s)$  توابعی معلوم در فضای  $L^2([0, 1) \times [0, 1))$  هستند و توابع  $\underline{u}(t, r)$  و  $\bar{u}(t, r)$  مجهول‌اند. با استفاده از رابطه (۱۰.۳)، تقریبی از این توابع با به‌کارگیری موجک چیشف نوع دوم به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} k^+(t, s) &\simeq \Psi^T(t)K^+\Psi(s), & k^-(t, s) &\simeq \Psi^T(t)K^-\Psi(s), \\ \underline{u}(t, r) &\simeq \Psi^T(t)\underline{U}\Psi(r), & \bar{u}(t, r) &\simeq \Psi^T(t)\bar{U}\Psi(r), \\ \underline{f}(t, r) &\simeq \Psi^T(t)\underline{F}\Psi(r), & \bar{f}(t, r) &\simeq \Psi^T(t)\bar{F}\Psi(r). \end{aligned} \quad (1.5)$$

در معادلات بالا،  $K^+$ ،  $K^-$ ،  $\bar{F}$  و  $\underline{F}$  ماتریس‌های مربعی از مرتبه  $2^{N-1}M \times 2^{N-1}M$  با درایه‌های معلوم و  $\bar{U}$  و  $\underline{U}$  ماتریس‌های از همین مرتبه با درایه‌های مجهول هستند. با جایگذاری معادلات رابطه (۱.۵) در معادله اول از رابطه (۳.۴) داریم:

$$\begin{aligned} \Psi^T(t)\underline{U}\Psi(r) &= \Psi^T(t)\underline{F}\Psi(r) + \int_0^1 \Psi^T(t)K^+\Psi(s)\Psi^T(s)\underline{U}\Psi(r)ds \\ &+ \int_0^1 \Psi^T(t)K^-\Psi(s)\Psi^T(s)\bar{U}\Psi(r)ds. \end{aligned}$$

به عبارت دیگر،

$$\begin{aligned} \Psi^T(t)\underline{U}\Psi(r) &= \Psi^T(t)\underline{F}\Psi(r) + \Psi^T(t)K^+ \left( \int_0^1 \Psi(s)\Psi^T(s)ds \right) \underline{U}\Psi(r) \\ &+ \Psi^T(t)K^- \left( \int_0^1 \Psi(s)\Psi^T(s)ds \right) \bar{U}\Psi(r). \end{aligned} \quad (2.5)$$

حال ماتریس  $D$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D = \int_0^1 \Psi(s)\Psi^T(s)ds. \quad (3.5)$$

با قرار دادن رابطه (۳.۵) در رابطه (۲.۵) و سپس ساده کردن آن به معادله زیر می‌رسیم:

$$\underline{U} = \underline{F} + K^+ D \underline{U} + K^- D \bar{U} \quad (4.5)$$

پس از طی مراحل مشابه در معادله دوم از رابطه (۳.۴)، رابطه زیر را داریم:

$$\bar{U} = \bar{F} + K^+ D \bar{U} + K^- D \underline{U} \quad (5.5)$$

معادلات (۴.۵) و (۵.۵) یک دستگاه معادلات خطی با  $2^{2N-1} M^2$  معادله و  $2^{2N-1} M^2$  مجهول است. پس از حل این دستگاه و محاسبه درایه‌های ماتریس‌های مجهول  $\underline{U}$  و  $\bar{U}$ ، می‌توان با استفاده از معادله (۱۰.۳)، تقریبی از  $\underline{u}(t, r)$  و  $\bar{u}(t, r)$  که در واقع همان جواب معادله انتگرال فازی (۲.۴) است و با  $\underline{u}_{NM}(t, r)$  و  $\bar{u}_{NM}(t, r)$  نشان داده می‌شود، ارائه نمود.

## ۶. نتایج عددی

در این بخش با استفاده از الگوی معرفی شده در بخش ۵ این مقاله، مثال‌هایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم و نتایج حاصل از این روش عددی را ارائه می‌نماییم.

مثال ۱.۰۶. معادله انتگرال فردهلم فازی (۳.۴) با توابع

$$\bar{f}(t, r) = -\frac{1}{3}t^2 + t^2r + \frac{7}{3}t + \frac{1}{4}r - \frac{1}{12} - 2rt,$$

$$\underline{f}(t, r) = -\frac{5}{3}t - t^2r - \frac{1}{4}r + \frac{5}{3}t^2 + \frac{5}{12} + 2rt,$$

و هسته  $k(t, s) = (2t - 1)^2(1 - 2s)$  را در نظر می‌گیریم. با به‌کارگیری موجک‌های چپیشف نوع دوم به ازای  $N = M = 2$  و با استفاده از رابطه (۱۱.۳)، ماتریس‌های  $K^+$ ،  $K^-$ ،  $\bar{F}$ ،  $\underline{F}$ ، و  $D$  به صورت

زیر به دست می‌آیند:

$$K^+ = \begin{pmatrix} \frac{5\pi}{256} & \frac{-5\pi}{512} & 0 & 0 \\ \frac{-\pi}{64} & \frac{\pi}{128} & 0 & 0 \\ \frac{5\pi}{256} & \frac{-5\pi}{512} & 0 & 0 \\ \frac{\pi}{64} & \frac{-\pi}{128} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-5\pi}{256} & \frac{-5\pi}{512} \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{64} & \frac{\pi}{128} \\ 0 & 0 & \frac{-5\pi}{256} & \frac{-5\pi}{512} \\ 0 & 0 & \frac{-\pi}{64} & \frac{-\pi}{128} \end{pmatrix},$$

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} \frac{331\pi}{6144} & \frac{-11\pi}{4096} & \frac{265\pi}{6144} & \frac{-11\pi}{4096} \\ \frac{43\pi}{1536} & \frac{-3\pi}{1024} & \frac{25\pi}{1536} & \frac{-3\pi}{1024} \\ \frac{1003\pi}{6144} & \frac{-43\pi}{4096} & \frac{745\pi}{6144} & \frac{-43\pi}{4096} \\ \frac{41\pi}{1536} & \frac{-\pi}{1024} & \frac{35\pi}{1536} & \frac{-\pi}{1024} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \frac{133\pi}{6144} & \frac{11\pi}{4096} & \frac{199\pi}{6144} & \frac{11\pi}{4096} \\ \frac{-11\pi}{1536} & \frac{3\pi}{1024} & \frac{7\pi}{1536} & \frac{3\pi}{1024} \\ \frac{229\pi}{6144} & \frac{43\pi}{4096} & \frac{487\pi}{6144} & \frac{43\pi}{4096} \\ \frac{23\pi}{1536} & \frac{\pi}{1024} & \frac{29\pi}{1536} & \frac{\pi}{1024} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{4}{\pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{3\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{3\pi} \end{pmatrix}.$$

با قرار دادن ماتریس‌های بالا در معادلات (۴.۵) و (۵.۵) و حل دستگاه معادلات خطی مربوطه، ماتریس‌های  $\bar{U}$  و  $\underline{U}$  مطابق زیر به دست می‌آیند:

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} \frac{7\pi}{128} & \frac{-\pi}{256} & \frac{5\pi}{128} & \frac{-\pi}{256} \\ \frac{7\pi}{256} & \frac{-\pi}{512} & \frac{5\pi}{256} & \frac{-\pi}{512} \\ \frac{21\pi}{128} & \frac{-3\pi}{256} & \frac{15\pi}{128} & \frac{-3\pi}{256} \\ \frac{7\pi}{256} & \frac{-\pi}{512} & \frac{5\pi}{256} & \frac{-\pi}{512} \end{pmatrix}, \quad \underline{U} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{128} & \frac{\pi}{256} & \frac{3\pi}{128} & \frac{\pi}{256} \\ \frac{\pi}{256} & \frac{\pi}{512} & \frac{3\pi}{256} & \frac{\pi}{512} \\ \frac{3\pi}{128} & \frac{3\pi}{256} & \frac{9\pi}{128} & \frac{3\pi}{256} \\ \frac{\pi}{256} & \frac{\pi}{512} & \frac{3\pi}{256} & \frac{\pi}{512} \end{pmatrix}.$$

نهایتاً با قرار دادن ماتریس‌های بالا در معادله (۱۰.۳)، جواب‌های تقریبی  $\underline{u}_{22}(t, r) =$  و  $\bar{u}_{22}(t, r) =$

سبزواری، سعادت‌مندی / موجک‌ها و جبرخطی ۶(۱) (۱۳۹۸) ۱-۱۸  
 جدول ۱: خطای حاصل از مثال ۱.۶ با توجه به فاصله تعریف شده در رابطه (۱.۲)

$t$	روش حاضر به ازای $M = N = ۲$	روش $LW$ [۲۸] به ازای $M = ۳$ و $N = ۴$	روش $HBPT$ [۲۸] به ازای $M = ۲$ و $N = ۸$
۰	۰	$۱/۴۴۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۵۱۷۷ \times ۱۰^{-۲}$
۰/۱	۰	$۱/۸۲۷۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۷۷۹۴ \times ۱۰^{-۳}$
۰/۲	۰	$۱/۹۲۱۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۹۹۵۸ \times ۱۰^{-۲}$
۰/۳	۰	$۱/۱۸۱۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۵/۶۶۰۴ \times ۱۰^{-۲}$
۰/۴	۰	$۱/۲۸۹۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۶۳۹۶ \times ۱۰^{-۲}$
۰/۵	۰	$۲/۴۷۶۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۶۰۵۳ \times ۱۰^{-۱}$
۰/۶	۰	$۱/۱۳۰۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۶۳۹۶ \times ۱۰^{-۲}$
۰/۷	۰	$۲/۶۴۳۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۵/۶۶۰۴ \times ۱۰^{-۲}$
۰/۸	۰	$۲/۲۰۰۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۹۹۵۸ \times ۱۰^{-۲}$
۰/۹	۰	$۱/۲۲۱۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۶/۴۰۹۱ \times ۱۰^{-۳}$

$(2 - r)t$  به ازای  $0 \leq r, t \leq 1$  حاصل می‌شود که همان جواب‌های دقیق معادله‌اند.

معادله انتگرال فردهم فازی ظاهر شده در مثال ۱.۶، در مرجع [۲۸] ارائه شده است. در این مقاله، با به‌کارگیری موجک‌های لژاندر و نیز توابع بلاک پالس آمیخته با چندجمله‌ای‌های لژاندر، تقریبی از جواب معادله انتگرال محاسبه شده است. در جدول ۱، مقایسه‌ای میان نتایج به‌دست آمده از روش حاضر و روش ارائه شده در [۲۸] با توجه به فاصله تعریف شده در رابطه (۱.۲) انجام شده است. همان‌گونه که از مقادیر این جدول قابل مشاهده است، در روش حاضر به ازای هزینه محاسباتی کمتر، یعنی مقادیر  $M$  و  $N$  کوچکتر، به جواب دقیق رسیده‌ایم، در حالی که این اتفاق در روش ارائه شده در [۲۸] رخ نداده است.

مثال ۲.۶. معادله انتگرال فردهم فازی (۳.۴) با توابع

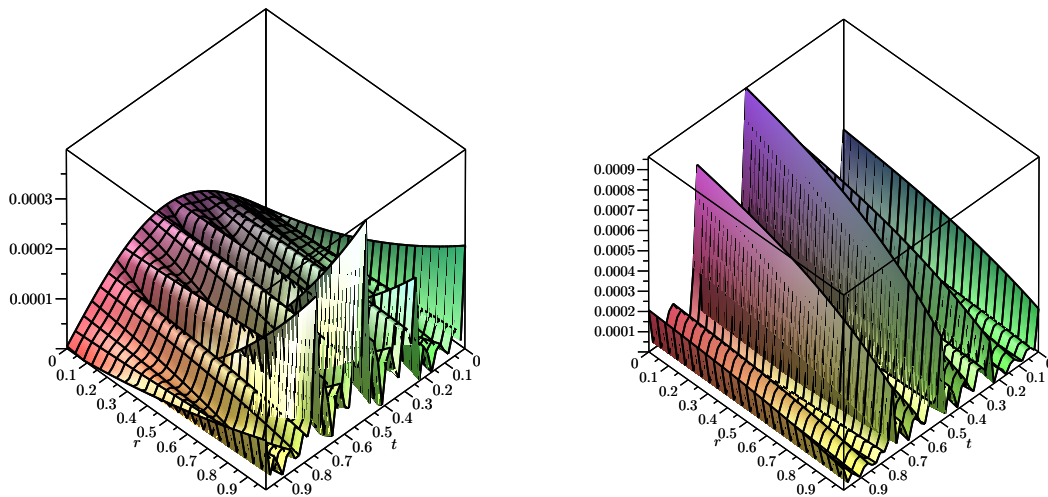
$$\bar{f}(t, r) = \sin(\pi t) \left( \frac{2}{15} r^2 - \frac{11}{15} r + \frac{52}{15} - \frac{13}{15} r^3 \right),$$

$$\underline{f}(t, r) = \sin(\pi t) \left( \frac{13}{15} r^2 + \frac{11}{15} r + \frac{8}{15} - \frac{2}{15} r^3 \right),$$

و هسته  $k(t, s) = \sin(\pi t) \sin(2\pi s)$  را در نظر می‌گیریم. جواب دقیق این معادله،  $\underline{u}(t, r) = (r^2 + r) \sin(\pi t)$  و  $\bar{u}(t, r) = (4 - r^3 - r) \sin(\pi t)$  می‌باشد. با به‌کارگیری موجک‌های چبیشف نوع دوم به ازای  $N = 3$  و  $M = 4$ ، خطای حاصل با توجه به فاصله تعریف شده در رابطه (۱.۲) در جدول

سبزواری، سعادت‌مندی / موجک‌ها و جبرخطی (۱)۶ (۱۳۹۸) ۱-۱۸  
 جدول ۲: خطای حاصل از مثال ۲.۶ با توجه به فاصله تعریف شده در رابطه (۱.۲)

$t$	روش حاضر به ازای $M = 4$ و $N = 3$	روش تجزیه [۵] آدومین
۰	۰٫۰۰۰۴۲۰۷۰۷	۰
۰٫۱	۰٫۰۰۰۰۸۷۸۰۹	۰٫۰۰۱۸۹۵
۰٫۲	۰٫۰۰۰۰۸۶۸۴۸	۰٫۰۰۳۷۸۶
۰٫۳	۰٫۰۰۰۰۱۶۰۷۸۵	۰٫۰۰۵۶۶۷
۰٫۴	۰٫۰۰۰۰۲۶۸۳۱۵	۰٫۰۰۷۵۳۵
۰٫۵	۰٫۰۰۰۰۱۳۰۵۰۰۴	۰٫۰۰۹۳۸۳
۰٫۶	۰٫۰۰۰۰۲۶۸۳۱۵	۰٫۰۰۱۱۲۰۰
۰٫۷	۰٫۰۰۰۰۱۶۰۷۸۵	۰٫۰۰۱۳۰۰۰
۰٫۸	۰٫۰۰۰۰۰۶۲۱۳۶	۰٫۰۰۱۴۷۶۹
۰٫۹	۰٫۰۰۰۰۰۸۸۵۷۷	۰٫۰۰۱۶۴۹۶



شکل ۱: منحنی خطای مطلق مثال ۲.۶ به ازای  $M = 4$  و  $N = 3$  برای  $\underline{u}(t, r)$  (سمت چپ) و  $\bar{u}(t, r)$  (سمت راست)

۲ ارائه شده است. همچنین در شکل ۱، نمودار خطای مطلق جواب تقریبی قابل مشاهده می‌باشد. معادله انتگرال فردهلم فازی ارائه شده در مثال ۲.۶، در مرجع [۵] در ناحیه  $0 \leq s, t \leq 2\pi$  ارائه شده است. در این مقاله، با استفاده از روش آدومین، خطای حاصل با توجه به فاصله تعریف شده در رابطه (۱.۲)، به ازای مقادیر مختلف  $t$  ارائه شده است. در این مقاله ما با تغییر متغیر مناسب، ناحیه مربوطه را به  $0 \leq s, t \leq 1$  منتقل کردیم. به منظور مقایسه نتایج حاصل از روش حاضر و روش ارائه شده در [۵]، نتایج در جدول ۲ ارائه شده است. از مقایسه ستون‌های این جدول می‌توان نتیجه گرفت که روش حاضر دارای دقت بیشتری نسبت به روش آدومین می‌باشد.

- [1] S. Abbasbandy and T. Allah Viranloo, Numerical solution of fuzzy differential equation by Runge–Kutta method, *Nonlinear Stud.*, **11**(1) (2004), 7–29.
- [2] S. Abbasbandy, E. Babolian and M. Alavi, Numerical method for solving linear Fredholm fuzzy integral equations of the second kind, *Chaos Solitons Fractals*, **31**(1) (2007), 138–146.
- [3] G.A. Anastassiou, *Fuzzy Mathematics: Approximation Theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2010.
- [4] G.A. Anastassiou and S.G. Gal, On a fuzzy trigonometric approximation theorem of Weirstrass-type, *J. Fuzzy Math.*, **9**(3) (2001), 701–708.
- [5] E. Babolian, H. Sadeghi Goghary and S. Abbasbandy, Numerical solution of linear fredholm fuzzy integral equations of the second kind by Adomian method, *Appl. Math. Comput.*, **161**(3) (2005), 733–744.
- [6] S. Biswas and T. Kumar Roy, Fuzzy linear integral equation and its application in biomathematical model, *Advances in Fuzzy Mathematics*, **12**(5) (2017), 1137–1157.
- [7] M. Caldas and S. Jafari,  $\theta$ -Compact fuzzy topological spaces, *Chaos Solitons Fractals*, **25**(1) (2005), 229–232.
- [8] SL. Chang and L.A. Zadeh, On fuzzy mapping and control, *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, **2**(1) (1972), 30–34.
- [9] W. Congxin and M. Ming, On embedding problem of fuzzy number spaces, *Fuzzy Sets Syst.*, **44**(1) (1991), 33–38.
- [10] P. Diamond, Theory and applications of fuzzy Volterra integral equations, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, **10**(1) (2002), 97–102.
- [11] D. Dubois and H. Prade, Towards fuzzy differential calculus part 1: Integration of fuzzy mappings, *Fuzzy Sets Syst.*, **8**(1) (1982), 1–7.
- [12] R. Ezzati and S. Ziari, Numerical solution of nonlinear fuzzy Fredholm integral equations using iterative method, *Appl. Math. Comput.*, **225**(1) (2013), 33–42.
- [13] M. Friedman, M. Ma and A. Kandel, Numerical solutions of fuzzy differential and integral equations, *Fuzzy Sets Syst.*, **106**(1) (1999), 35–48.
- [14] S. Gal, *Approximation Theory in Fuzzy Setting*, In *Handbook of Analytic–Computational Methods in Applied Mathematics*, Boca Raton, New York, Chapman CRC, 2000.
- [15] M. Ghanbari, R. Tousemalni and E. Kamrani, Numerical solution of linear fredholm fuzzy



- integral equation of the second kind by block-pulse functions, *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, **3**(3) (2009), 2637–2642.
- [16] R. Goetschel and W. Vaxman, Elementary calculus, *Fuzzy Sets Syst.*, **18**(1) (1986), 31–43.
- [17] D. Gottlieb and S.A. Orszag, *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*, Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1977.
- [18] J.S. Gu and W.S. Jiang, The Haar wavelets operational matrix of integration, *Int. J. Syst. Sci.*, **27** (1996), 623–628.
- [19] S.M. Hashemiparast, M. Sabzevari and H. Fallahgoul, Improving the solution of nonlinear Volterra integral equations using rationalized Haar s-functions, *Vietnam J. Math.*, **39** (2011), 145–157.
- [20] S.M. Hashemiparast, M. Sabzevari and H. Fallahgoul, Using crooked lines for the higher accuracy in system of integral equations, *J. Appl. Math. Comput.*, **29**(1-2) (2011), 145–159.
- [21] O. Kaleva, Fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets Syst.*, **24**(3) (1987), 301–317.
- [22] M. Matloka, On fuzzy integrals. In: proc 2nd polish symp on interval and fuzzy mathematics, *Wydawnicacwo Politechniki Poznanskiej*, (1987), 167–170.
- [23] F. Mirzaee, M. Komak Yari and S.F. Hoseini, A computational method based on hybrid of Bernstein and block-pulse functions for solving linear fuzzy Fredholm integral equations system, *Journal of Taibah University for Science*, **9**(2) (2015), 252–263.
- [24] A. Molabahrami, A. Shidfar and A. Ghyasi, An analytical method for solving linear Fredholm fuzzy integral equations of the second kind, *Comput. Math. Appl.*, **61**(9) (2011), 2754–2761.
- [25] J.H. Park, Intuitionistic fuzzy metric spaces, *Chaos Solitons Fractals*, **22**(5) (2004), 1039–1046.
- [26] A. Saadatmandi and M. Dehghan, A collocation method for solving Abel’s integral equations of first and second kinds, *Z. Nat.forsch., A: Phys. Sci.*, **63**(12) (2008), 752–756.
- [27] A. Saadatmandi and M. Dehghan, A Legendre collocation method for fractional integro-differential equations, *J. Vib. Control*, **17**(13) (2011), 2050–2058.
- [28] H. Sadeghi Goghary and M. Sadeghi Goghary, Two computational methods for solving linear Fredholm fuzzy integral equation of the second kind, *Appl. Math. Comput.*, **182**(1) (2006), 791–796.
- [29] HC. Wu, On the integrals, series and integral equations of fuzzy set valued functions, *J. Harbin Inst. Technol.*, **21** (1990), 11–19.

- [30] H.C. Wu, The fuzzy Riemann integral and numerical integration, *Fuzzy Sets Syst.*, **110** (2000), 1–25.
- [31] L.A. Zadeh, Toward a generalized theory of uncertainty (GTU)—an outline, *Inf. Sci.*, **172** (2005), 1–40.
- [32] L. Zhu and Q. Fan, Solving fractional nonlinear Fredholm integro-differential equations by the second kind Chebyshev wavelet, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **17** (2012), 2333–2341.