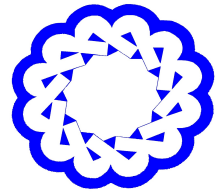


موجک‌ها و جبرخطی

<http://wala.vru.ac.ir>



دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

نمایش انتگرال‌پذیر مربعی روی فضای همگن از گروه حاصل ضرب نیم‌مستقیم

فاطمه اسماعیل‌زاده*

گروه ریاضی، واحد بجنورد، دانشگاه آزاد اسلامی، بجنورد، ایران

چکیده

در این مقاله، ابتدا نمایش‌های انتگرال‌پذیر مربعی از فضاهای همگن نسبت به اندازه پایای نسبی معرفی می‌شود. سپس شرط لازم و کافی برای انتگرال‌پذیر مربعی از گروه حاصل ضرب نیم‌مستقیم و فضای همگن این گروه‌ها نشان داده می‌شود. بنابراین ارتباط بین موجک‌های پذیرفتنی از این گروه‌ها و فضای همگن آن‌ها ارائه می‌گردد.

موجک‌ها و جبرخطی (۱۳۹۸) ©

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت شده: ۳۱ تیر ۱۳۹۷

پذیرفته شده: ۲۲ اسفند ۱۳۹۷

دسترسی آنلاین: ۱۰ شهریور

۱۳۹۸

ادیتور رابط: عطاء...

عسکری‌همت

کلمات کلیدی:

فضای همگن، اندازه

به‌طور نسبی پایا، گروه

حاصل ضرب نیم‌مستقیم،

نمایش انتگرال‌پذیر

مربعی، موجک پذیرفتنی.

۱. مقدمه

رده ساختارهای جبری توپولوژیک غیرتعویض‌پذیر شامل رده وسیعی از ساختارهای جبری توپولوژیک است و آنالیز روی این ساختارها دارای اهمیت فراوان در حوزه‌های علوم ریاضی- فیزیک و مهندسی می‌باشد. حاصل ضرب نیم‌مستقیم گروه‌های موضعاً فشرده و همچنین فضاهای همگن موضعاً فشرده متناظر با گروه‌های ناآبلی از این رده هستند. اغلب گروه‌ها را به صورت حاصل ضرب نیم‌مستقیم دو گروه موضعاً فشرده می‌توان نوشت و کاربرد آن‌ها در زمینه‌های ریاضی و فیزیک بسیار اساسی می‌باشد. گروه آفین و گروه هایزنبرگ مثال‌هایی از این گونه گروه‌ها می‌باشند. از آنجایی که اغلب گروه‌ها بسیار بزرگ می‌باشند و ممکن است نمایش‌های روی گروه‌ها انتگرال‌پذیر مربعی نباشند لذا برآن شدیم که زیرگروه‌هایی از آن‌ها را در نظر گرفته و با فضاهای همگن آن‌ها کار کنیم. فضاهای همگن در فیزیک کاربرد فراوان و بسزایی دارند. از جمله کره n -بعدی نیز مثالی از فضاهای همگن است که فضای همگن گروه ناآبلی $SO(n)$ می‌باشد و نقش اساسی در ریاضی- فیزیک مدرن و همچنین در پردازش تصویر پزشکی و شبیه‌سازی پزشکی دارد. می‌توان در [۱] دیدگاه‌هایی از تعمیم تبدیلات موجک پیوسته را بر فضاهای همگن G/H با در نظر گرفتن اندازه G -پایا دید. در [۲] تبدیلات موجک روی فضای همگن بوده است به طوری که فضای همگن G/H با اندازه به‌طور نسبی پایا در نظر گرفته می‌شود.

در این مقاله، ابتدا نمایش‌های انتگرال‌پذیر مربعی از فضاهای همگن نسبت به اندازه پایای نسبی و موجک‌هایی پذیرفتنی برای این گونه نمایش‌ها تعریف می‌شود. سپس ارتباط بین موجک‌های پذیرفتنی برای گروه‌های حاصل ضرب نیم‌مستقیم و فضاهای همگن این گروه‌ها بررسی می‌شود.

۲. پیش‌نیازها

فرض کنید G گروهی شامل یک زیرگروه نرمال K و یک زیرگروه H باشد به طوری که $G = KH$ و $K \cap H = \{e\}$. برای هر $g_1, g_2 \in G$ عناصری مانند $h_1, h_2 \in H$ و $k_1, k_2 \in K$ وجود دارد به طوری که

$$g_1 g_2 = k_1 h_1 k_2 h_2 = (k_1 h_1 k_2 h_1^{-1})(h_1 h_2) = (k_1 k_2^{h_1})(h_1 h_2)$$

*نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: esmaeelzadeh@bojnourdiau.ac.ir (فاطمه اسماعیل زاده)،

<http://doi.org/10.22072/wala.2019.90496.1186>

© (۱۳۹۸) موجک‌ها و جبرخطی

برای هر $h \in H$ تعریف کنید :

$$\tau_h : K \rightarrow K; \quad \tau_h(k) = k^h.$$

در این صورت $\{\tau_h; h \in H\}$ یک خودریختی داخلی از گروه K است. فرض کنید K و H دو گروه و $h \mapsto \tau_h$ یک همریختی از گروه H به گروه خودریختی‌های K باشد. به عبارت دیگر $\tau_{h_1 h_2} = \tau_{h_1} \circ \tau_{h_2}$. ضرب دکارتی H و K را با $K \times_\tau H$ نمایش می‌دهیم و برای هر $(k, h), (k', h')$ در $K \times_\tau H$ عمل زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(k, h) \cdot (k', h') = (k\tau_h(k'), hh'). \quad (1.2)$$

در این صورت $K \times_\tau H$ یک گروه است. عنصر همانی این گروه (e_K, e_H) است که e_K عضو همانی گروه K و e_H عضو همانی H می‌باشد. عنصر معکوس (k, h) برابر با $(\tau_{h^{-1}}(k^{-1}), h^{-1})$ است. در نظر بگیرید $K = \{(k, e_H); k \in K\}$ و $H = \{(e_K, h); h \in H\}$. در این صورت K یک زیرگروه نرمال و H یک زیرگروه از $K \times_\tau H$ می‌باشند. فرض کنید K, H دو گروه هاسدورف موضعاً فشرده و $\tau : H \rightarrow \text{Aut}(K)$ یک همریختی باشد به طوری که نگاشت $(k, h) \rightarrow \tau_h(k)$ یک نگاشت پیوسته از $K \times H$ به روی K باشد. در این صورت حاصل ضرب نیم‌مستقیم^۱ $K \times_\tau H$ نسبت به توپولوژی حاصل ضربی، یک گروه موضعاً فشرده می‌باشد. از این پس، عناصر $(k, e_H), (e_K, h)$ را به ترتیب با عناصر k, h نشان می‌دهیم.

اگر ρ_K و ρ_H به ترتیب اندازه هار راست بر K و H باشند، آنگاه اندازه حاصل ضربی $\rho_K \times \rho_H$ یک اندازه هار راست بر $K \times_\tau H$ است. همچنین اگر λ_H, λ_K به ترتیب اندازه‌های هار چپ روی گروه‌های K, H باشند، در این صورت اندازه هار چپ روی گروه $G = K \times_\tau H$ برابر است با:

$$d\lambda(k, h) = \delta(h)d\lambda_H(h)d\lambda_K(k),$$

¹semidirect product

و تابع مدولی از $K \times_{\tau} H$ برابر است با:

$$\Delta_G(k, h) = \delta(h)\Delta_K(k)\Delta_H(h); \quad k \in K, h \in H.$$

بنابراین $\delta : H \rightarrow (0, \infty)$ یک همریختی است (برای جزئیات بیشتر به [۸، ۶] مراجعه کنید). اکنون برای راحتی خواننده به مقدماتی درباره فضاهای همگن و اندازه روی این فضاها می‌پردازیم.

گروه موضعاً فشرده G و زیرگروه بسته H از آن را در نظر می‌گیریم. اندازه هر از گروه G و H را به ترتیب با dg و dh نمایش می‌دهیم. همچنین تابع‌های مدولی آنها را Δ_G و Δ_H می‌نامیم. فضای خارج قسمتی G/H را که از چپ روی آن عمل می‌کند، فضای همگن^۲ می‌نامیم. یک اندازه رادون μ روی فضای همگن G/H را در نظر بگیرید. برای هر $g \in G$ و برای یک زیرمجموعه بورل E از G/H ، انتقالات μ_g از اندازه μ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu_g(E) = \mu(gE).$$

اگر برای هر $g \in G$ ، $\mu_g = \mu$ ، آنگاه اندازه μ را G -پایا^۳ نامیم و اندازه μ به طور قوی شبه پایا^۴ نامیده می‌شود، اگر یک تابع پیوسته $\nu : G \times G/H \rightarrow (0, \infty)$ موجود باشد به قسمی که برای هر $g_1, g_2 \in G$ داشته باشیم:

$$d\mu_{g_1}(g_2H) = \nu(g_1, g_2H)d\mu(g_2H).$$

اگر تابع $\nu(g, \cdot)$ برای هر $g \in G$ ، به یک ثابت تقلیل یابد آنگاه μ را به‌طورنسبی پایا^۵ گوئیم. یک

²homogeneous space

³G-invariant

⁴strongly quasi-invariant

⁵relatively invariant

رو-تابع^۶ برای زوج (G, H) یک تابع پیوسته $\rho : G \rightarrow (0, \infty)$ تعریف می‌شود به طوری که

$$\rho(gh) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)} \rho(g) \quad (g \in G, h \in H).$$

قضیه ۱.۰۲. [۴، قضیه ۵۴.۲] فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده و H زیرگروه بسته از آن باشد. در این صورت هر زوج (G, H) یک رو-تابع می‌پذیرد.

هم‌چنین در [۴، قضیه ۵۶.۲] نشان داده شده است که برای هر رو تابع ρ ، یک اندازه به طور قوی شبه پایای μ بر G/H وجود دارد که در تساوی زیر صدق می‌کند:

$$\frac{d\mu_{g_1}}{d\mu}(g_2 H) = \frac{\rho(g_1 g_2)}{\rho(g_2)},$$

که $g_1, g_2 \in G$.

به علاوه در [۶، لم ۳.۲] نشان داده شده است که هر گاه μ یک اندازه به طور نسبی پایا باشد که از رو تابع ρ به دست آمده باشد در این صورت

$$d\mu_g = \frac{\rho(g)}{\rho(e)} d\mu, \quad (۲.۲)$$

که $g \in G$.

از طرفی در [۸، قضیه ۶.۴.۳] نشان داده شده است، اگر μ یک اندازه به طور قوی شبه پایا روی G/H باشد که از رو-تابع ρ القا شده باشد، آنگاه برای هر $f \in L^1(G)$ شرایط زیر برقرار است:

- یک زیرمجموعه E از G/H با اندازه صفر موجود است به طوری که برای هر $g \in G$ و $q(g) \notin E$ نگاشت $h \mapsto \frac{f(gh)}{\rho(gh)}$ در $L^1(H)$ قرار دارد.
- تابع $gH \mapsto \int_H \frac{f(gh)}{\rho(gh)} dh$ تقریباً همه جا تعریف شده روی G/H ، انتگرال‌پذیر است.

^۶ ρ -function

$$\int_{G/H} \int_H \frac{f(gh)}{\rho(gh)} dh d\mu(gH) = \int_G f(g) dg. \bullet$$

هم‌چنین نگاشت $T : L^1(G) \mapsto L^1(G/H)$ تعریف شده به صورت زیر یک نگاشت خطی کراندار و پوشا است.

$$Tf(gH) = \int_H \frac{f(gh)}{\rho(gh)} dh \quad (gH \in G/H) \quad (۳.۲)$$

(برای دیدن جزئیات روابط فوق به [۸، بخش ۴.۳] مراجعه کنید).

گزاره زیر بیان می‌کند که اگر G حاصل ضرب نیم‌مستقیم از دو گروه هاسدورف موضعاً فشرده H و K باشد. آنگاه G/H یک اندازه پایای نسبی می‌پذیرد.

گزاره ۲.۲. فرض کنید $G = K \times_{\tau} H$. در این صورت G/H یک اندازه پایای نسبی می‌پذیرد که از رو تابع $\rho : G \rightarrow (0, \infty)$ به دست می‌آید و به صورت

$$\rho(g) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}$$

تعریف می‌شود وقتی $g \in G, h \in H$ و برای یک $k \in K$ $g = kh$ [۶].

گزاره ۳.۲. فرض کنید $G = K \times_{\tau} H$ و رو-تابع ρ برای زوج (G, H) تعریف شده به صورت زیر باشد:

$$\rho(kh) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}$$

آنگاه وجود دارد یک اندازه هارچپ dk روی K به طوری که

$$\int_G f(g)\rho(g)dg = \int_K \int_H f(kh)dhdk \quad (۴.۲)$$

که در آن $f \in C_c(G)$ [۶].

۳. روش پیشنهادی

از آنجایی که بیشتر گروه‌ها به صورت حاصل ضرب نیم‌مستقیم از دو گروه موضعاً فشرده می‌باشند لذا بر آن شدیم تا رابطه بین موجک‌های پذیرفتنی را بین گروه‌های حاصل ضرب نیم‌مستقیم و فضای همگن آن گروه‌ها بررسی کنیم. در بعضی نمایش‌ها از گروه‌ها انتگرال‌پذیر مربعی به سادگی قابل تعیین نیست لذا با توجه به رابطه‌ای که بین آن‌ها می‌یابیم، انتگرال‌پذیر مربعی روی فضای همگن آن گروه را می‌توان به جای انتگرال‌پذیر مربعی گروه جایگزین کرد.

حال نمایش یکانی پیوسته از فضای همگن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳. یک نمایش یکانی پیوسته از فضای همگن G/H یک نگاشت ϖ از G/H به توی گروه $U(\mathcal{H}) \subseteq B(\mathcal{H})$ از عملگرهای یکانی روی فضای هیلبرت \mathcal{H} می‌باشد به طوری که برای هر $g, g_1, g_2 \in G$ و $x, y \in \mathcal{H}$ داشته باشیم:

$$\varpi(g_1 g_2 H) = \varpi(g_1 H) \varpi(g_2 H) \bullet$$

$$\varpi(g^{-1} H) = \varpi(g H)^* \bullet$$

• نگاشت $gH \mapsto \langle \varpi(gH)x, y \rangle$ از G/H به \mathbb{C} پیوسته است.

نکته ۲.۳. هر نمایش یکانی پیوسته از فضای همگن G/H تعریف شده بدین صورت، یک نمایش یکانی پیوسته π روی گروه G تعریف می‌کند به طوری که هسته π شامل زیرگروه H می‌شود. بالعکس، هر نمایش یکانی پیوسته π از گروه G که روی H بدیهی است، یک نمایش یکانی پیوسته ϖ از G/H با در نظر گرفتن $\varpi(gH) = \pi(g)$ تعریف می‌کند.

هم‌چنین یک زیرفضای بسته M از \mathcal{H} نسبت به ϖ پایا^۸ است اگر برای هر $g \in G$ $\varpi(gH)M \subseteq M$ باشد. یک نمایش یکانی پیوسته ϖ را تحویل‌ناپذیر^۹ گوئیم اگر زیرفضاهای پایای آن فقط $\{0\}$ و \mathcal{H} باشند. در ادامه بحث یک نمایش یکانی پیوسته را با عنوان یک نمایش نام می‌بریم.

^۷kernel

^۸invariant

^۹irreducible

مثال زیر مثالی از یک نمایش از فضای همگن روی یک فضای هیلبرت $L^2(G/H) = L^2(G/H, \mu)$ می‌باشد که μ یک اندازه پایای نسبی می‌باشد که از رو-تابع ρ القا شده است.

مثال ۳.۳. فرض کنید G حاصل ضرب مستقیم از دو زیرگروه نرمال H و K باشد. نمایش چپ

$$\varrho : G \rightarrow U(L^2(G/H)), \quad \varrho(g)\varphi = \left(\frac{\rho(e)}{\rho(k)}\right)^{1/2} L_k \varphi$$

را در نظر بگیرید که در آن $L_k \varphi(gH) = \varphi(k^{-1}gH)$ است ([۷]، قضیه ۱۰.۳). بدیهی است که $\varrho(H) = id_{L^2(G/H)}$. بنابراین می‌توان نمایش زیر را از فضای همگن G/H روی فضای هیلبرت $L^2(G/H)$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\tilde{\varrho} : G/H \rightarrow U(L^2(G/H)), \quad \tilde{\varrho}(gH) = \varrho(g).$$

در ابتدا نشان می‌دهیم نمایش تعریف شده در بالا خوش‌تعریف است. زیرا اگر $g_1 H = g_2 H$ آنگاه $k_1^{-1}k_2 \in H \cap K = e$ بنابراین $k_1 = k_2$ و این نتیجه می‌دهد که $\varrho(g_1) = \varrho(g_2)$. همچنین از این‌که نگاشت چپ تعریف شده در بالا روی H همانی است، داریم:

$$\tilde{\varrho}(g_1 H)\tilde{\varrho}(g_2 H) = \tilde{\varrho}(g_1 g_2 H).$$

در واقع

$$\begin{aligned} \tilde{\varrho}(g_1 g_2 H)\varphi &= \left(\frac{\rho(e)}{\rho(k_1 k_2)}\right)^{1/2} L_{k_1 k_2} \varphi \\ &= \left(\frac{\rho(e)^2}{\rho(k_1)\rho(k_2)}\right)^{1/2} L_{k_1} L_{k_2} \varphi \\ &= \left(\frac{\rho(e)}{\rho(k_1)}\right)^{1/2} \left(\frac{\rho(e)}{\rho(k_2)}\right)^{1/2} L_{k_1} L_{k_2} \varphi \\ &= \tilde{\varrho}(g_1 H)\tilde{\varrho}(g_2 H)\varphi. \end{aligned}$$

همچنین بنا به گزاره ۲.۲، G/H یک اندازه پایای نسبی می‌پذیرد که در رابطه (۲.۲) صدق می‌کند. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}(gH)\|_2 &= \int_{G/H} |\varphi(k^{-1}gH)|^2 \frac{\rho(e)}{\rho(k)} d\mu(gH) \\ &= \int_{G/H} |\varphi(gH)|^2 \frac{\rho(e)}{\rho(k)} d\mu_k(gH) \\ &= \int_{G/H} |\varphi(gH)|^2 d\mu(gH) \\ &= \|\varphi\|_2 \end{aligned}$$

تعریف ۴.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده و H یک زیر گروه فشرده از آن باشد. یک نمایش تحویل‌ناپذیر ϖ از G/H روی فضای هیلبرت \mathcal{H} را یک نمایش انتگرال‌پذیر مربعی^{۱۰} نامیم هرگاه عنصر غیر صفر ζ در \mathcal{H} باشد به طوری که

$$\int_{G/H} \frac{\rho(e)}{\rho(g)} |\langle \zeta, \varpi(gH)\zeta \rangle|^2 d\mu(gH) < \infty, \quad (1.3)$$

که در آن μ یک اندازه پایای نسبی روی G/H القا شده از رو-تابع (\cdot, ∞) است. اگر بردار ζ در شرط (۱.۳) صدق کند، آن را یک بردار پذیرفتنی^{۱۱} می‌نامیم و همچنین بردار پذیرفتنی $\zeta \in \mathcal{H}$ را موجک پذیرفتنی^{۱۲} گوئیم هرگاه $\|\zeta\| = 1$. در این حالت ثابت موجکی^{۱۳} وابسته به موجک ζ را با نماد c_ζ نمایش می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c_\zeta := \int_{G/H} \frac{\rho(e)}{\rho(g)} |\langle \zeta, \varpi(gH)\zeta \rangle|^2 d\mu(gH). \quad (2.3)$$

¹⁰square integrable representation

¹¹admissible vector

¹²admissible wavelet

¹³ wavelet constant

(برای دیدن جزئیات بیشتر به [۲] مراجعه کنید).

فرض کنید گروه G حاصل ضرب نیم‌مستقیم از زیرگروه نرمال K و زیرگروه بسته H باشد، یعنی $G = K \times_{\tau} H$. در ابتدا نشان می‌دهیم که اگر ϖ یک نمایش روی فضای همگن G/H انتگرال‌پذیر مربعی باشد آنگاه یک نمایش از زیرگروه K انتگرال‌پذیر مربعی است.

قضیه ۵.۳. فرض کنید G حاصل ضرب نیم‌مستقیم از زیرگروه نرمال K و زیرگروه بسته و فشرده H باشد. نمایش ϖ روی فضای همگن G/H یک نمایش روی زیرگروه K تعریف می‌کند که انتگرال‌پذیری مربعی نمایش روی K از انتگرال‌پذیری مربعی نمایش ϖ روی G/H نتیجه می‌شود.

اثبات. فرض کنید ϖ یک نمایش از G/H باشد. در این صورت نمایش ϖ یک نمایش π از گروه G تعریف می‌کند که روی H همانی است. به عبارت دیگر نداشت زیر یک نمایش از گروه G است که روی H همانی است.

$$\pi : K \times_{\tau} H \rightarrow U(\mathcal{H}), \quad \pi(x) = \varpi(xH), \quad x = kh.$$

حال نداشت تعریف شده در زیر روی زیرگروه K یک نمایش می‌باشد.

$$\zeta : K \rightarrow U(\mathcal{H}), \quad \zeta(k) = \varpi(kH). \quad (۳.۳)$$

فرض کنید \mathcal{M} زیرفضای نابدهی از فضای هیلبرت \mathcal{H} نسبت به نمایش ζ پایا باشد، یعنی برای هر $k \in K$ داشته باشیم $\zeta(k)\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$. پس بنا به رابطه (۳.۳) داریم $\varpi(kH)\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ یعنی نسبت به نمایش ϖ پایا است که با تحویل‌ناپذیری ϖ تناقض دارد. بنابراین نمایش ζ تحویل‌ناپذیر است اگر نمایش ϖ روی G/H تحویل‌ناپذیر باشد. هم‌چنین از این‌که نمایش ϖ انتگرال‌پذیر مربعی است لذا $\int_{G/H} \frac{\rho(e)}{\rho(x)} |\langle \varpi(xH)\zeta, \zeta \rangle|^2 d\mu(xH) < \infty$. قرار دهید $\Psi(xH) = |\langle \varpi(xH)\zeta, \zeta \rangle|^2$. پس $\Psi \in L^1(G/H)$ و می‌دانیم نداشت $T : L^1(G) \rightarrow L^1(G/H)$ پوشاست بنابراین $\varphi \in L^1(G)$ موجود است به‌طوری‌که $\Psi = T\varphi$.

لذا بنا به فرمول (۴.۲) و (۳.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
 \int_{G/H} \frac{\rho(e)}{\rho(x)} |\langle \varpi(xH)\zeta, \zeta \rangle|^2 d\mu(xH) &= \int_{G/H} T(\varphi)(xH) d\mu(xH) \\
 &= \int_G \varphi(x) dx \\
 &= \int_K \int_H \varphi(kh) dh dk \\
 &= \int_K \int_H \rho(kh) \frac{\varphi(kh)}{\rho(kh)} dh dk \\
 &= \int_K \rho(x) T\varphi(kH) dk \\
 &= \rho(e) \int_K |\langle \varpi(kH)\zeta, \zeta \rangle|^2 \\
 &= \rho(e) \int_K |\langle \varsigma(k)\zeta, \zeta \rangle|^2 dk,
 \end{aligned}$$

که در آن $\varphi \in L^1(G)$ و $x = kh$. بنابراین اگر ϖ انتگرال‌پذیر مربعی باشد نتیجه می‌شود که ς نیز انتگرال‌پذیر مربعی است. \square

نتیجه ۶.۳. فرض کنید G حاصل ضرب نیم‌مستقیم از زیرگروه نرمال K و زیرگروه بسته فشرده H باشد. اگر بردار ξ در فضای هیلبرت \mathcal{H} یک موجک پذیرفتنی برای نمایش ϖ از G/H باشد آنگاه ξ موجک پذیرفتنی برای نمایش ς از زیرگروه K است.

در ادامه نشان می‌دهیم که اگر G گروه حاصل ضرب نیم‌مستقیم از زیرگروه نرمال K و زیرگروه بسته فشرده H باشد، آنگاه نمایش انتگرال‌پذیر مربعی از زیرگروه K ، نمایش انتگرال‌پذیر مربعی از فضای همگن G/H را نتیجه می‌دهد. برای این منظور ابتدا فرض کنید $q : G \rightarrow G/K$ نگاشت کانونی و ς یک نمایش از زیرگروه K روی فضای هیلبرت \mathcal{H}_ς باشد. در ابتدا نمایشی روی گروه G می‌سازیم به طوری که روی زیرگروه H همانی باشد و از آن نمایش ϖ روی G/H را می‌توان نتیجه گرفت. برای این منظور فضای توابع پیوسته از G به فضای هیلبرت \mathcal{H}_ς را با $C(G, \mathcal{H}_\varsigma)$ نشان می‌دهیم و فضای توابع

برداری مقدار زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\mathfrak{F} = \{f \in C(G, \mathcal{H}_\zeta); \text{ فشرده است } q(\text{supp}f), f(xk) = \zeta(k^{-1})f(x), x \in G, k \in K\}.$$

برای هر $f, g \in \mathfrak{F}$ می‌توان تابعی مانند Υ از G/K تعریف کرد به طوری که $\langle f(x), g(x) \rangle_\zeta = \Upsilon(xK)$. بدیهی است که Υ در $C_c(G/K)$ قرار دارد و نسبت به اندازه G -پایای μ روی G/K انتگرال پذیر است. بنا به تعریف نمایش ζ از زیرگروه K نگاشت Υ خوش تعریف است. در واقع

$$\begin{aligned} \langle f(xk), g(xk) \rangle_\zeta &= \langle \zeta(k^{-1})f(x), \zeta(k^{-1})g(x) \rangle_\zeta \\ &= \langle \zeta(k)\zeta(k^{-1})f(x), g(x) \rangle_\zeta \\ &= \langle f(x), g(x) \rangle_\zeta. \end{aligned}$$

قرار دهید:

$$\langle f, g \rangle = \int_{G/K} \langle f(x), g(x) \rangle_\zeta d\lambda(xK),$$

که λ یک اندازه G -پایا برای G/K است. به سادگی بررسی می‌شود که $\langle \cdot, \cdot \rangle$ یک ضرب داخلی روی \mathfrak{F} است. کامل سازی فضای \mathfrak{F} یک فضای هیلبرت است که آن را با \mathfrak{H} نمایش می‌دهیم. نگاشت π روی گروه G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\pi : G \rightarrow U(\mathfrak{H}), \quad \pi(x)f = L_k f; \quad x = kh.$$

واضح است که $\pi(H) = id$. برای هر $f \in \mathfrak{F}$ داریم:

$$L_k f(xk^h) = f(k^{-1}xk^h) = \zeta(k^h)L_k f(x)$$

بنابراین $L_k f \in \mathfrak{F}$ و اگر برای $x_1, x_2 \in G$ داشته باشیم $x_1 = x_2$. آنگاه بنا به منحصر بفردی نمایش $x_1 = k_1 h_1, x_2 = k_2 h_2$ داریم $k_1 = k_2$. پس $\pi(x_1) = \pi(x_2)$. نگاشت π همریختی است زیرا π روی

H همانی است و برای هر $f \in \mathcal{F}$ داریم:

$$\begin{aligned} \pi(x_1 x_2) f &= \pi(k_1 k_2^{h_1} h_1 h_2) f \\ &= L_{k_1 k_2^{h_1}} f \\ &= L_{k_1} L_{k_2^{h_1}} f \\ &= L_{k_1} L_{h_1^{-1}} L_{k_2} L_{h_1} f \\ &= L_{k_1} L_{k_2} f \\ &= \pi(x_1) \pi(x_2) f. \end{aligned}$$

همچنین نگاشت π یکانی است. در واقع

$$\begin{aligned} \langle \pi(x) f, \pi(x) f \rangle &= \int_{G/K} \langle \pi(x) f(x^\dagger), \pi(x) f(x^\dagger) \rangle_\zeta d\lambda(x^\dagger K) \\ &= \int_{G/K} \langle L_k f(x^\dagger), L_k f(x^\dagger) \rangle_\zeta d\lambda(x^\dagger K) \\ &= \int_{G/K} \langle f(x^\dagger), f(x^\dagger) \rangle_\zeta d\lambda(x^\dagger K) \\ &= \langle f, f \rangle, \end{aligned}$$

که در آن $x = kh$. پیوستگی π نیز از پیوستگی انتقالات چپ نتیجه می‌شود. بنابراین π یک نمایش از گروه G است که روی H همانی است. لذا یک نمایش ϖ از G/H تعریف می‌کند به طوری که $\varpi(xH) = \pi(x)$. بنابراین می‌توان گزاره زیر را نتیجه گرفت:

گزاره ۷.۳. فرض کنید گروه G حاصل ضرب نیم‌مستقیم از زیرگروه نرمال K و زیرگروه بسته H و ζ یک نمایش از K باشد. در این صورت ϖ یک نمایش از فضای همگن G/H است.

گزاره زیر نشان می‌دهد که اگر نمایش ζ از زیرگروه K تحویل‌ناپذیر باشد آنگاه نمایش ϖ از فضای

همگن G/H تحویل‌ناپذیر است.

گزاره ۸.۳. فرض کنید گروه G حاصل ضرب نیم‌مستقیم از زیرگروه نرمال K و زیرگروه بسته H باشد. اگر ζ یک نمایش تحویل‌ناپذیر از زیرگروه K باشد آنگاه نمایش ϖ از فضای همگن G/H تحویل‌ناپذیر است.

اثبات. فرض کنید ζ یک نمایش از زیرگروه K روی فضای هیلبرت \mathcal{H}_ζ باشد. بنا به قضیه ۷.۳ نمایش ϖ از G/H روی فضای هیلبرت \mathcal{H} وجود دارد. زیر فضای بسته ϖ -پایای \mathfrak{M} را از فضای هیلبرت \mathcal{H} در نظر بگیرید. برای $f \in \mathcal{H}$ و $\phi \in C_c(G)$ قرار دهید:

$$\nu_{f,\phi} = \int_G \phi(x^{-1})f(x^{-1})dx$$

و بستار فضای خطی تولید شده توسط فضای $\{\nu_{f,\phi}; f \in \mathfrak{M}, \phi \in C_c(G)\}$ در فضای هیلبرت \mathcal{H} را در نظر بگیرید و آن را با $\widetilde{\mathfrak{M}}$ نمایش می‌دهیم. برای هر $k \in K$ داریم:

$$\begin{aligned} \zeta(k)\nu_{f,\phi} &= \int_G \phi(x^{-1})\zeta(k)f(x^{-1})dx \\ &= \int_G \phi(x^{-1})f(x^{-1}k^{-1})dx \\ &= \int_G \phi(x^{-1}k)f(x)dx \\ &= \int_G \tilde{\phi}(x)f(x)dx \\ &= \nu_{f,\tilde{\phi}} \end{aligned}$$

که در آن $\tilde{\phi} = \phi(x^{-1}k)$. بنابراین $\widetilde{\mathfrak{M}}$ زیر فضای بسته ζ -پایا از فضای هیلبرت \mathcal{H} می‌باشد. بنا به تحویل‌ناپذیری نمایش ζ نتیجه می‌شود که $\widetilde{\mathfrak{M}} = \{0\}$ یا $\widetilde{\mathfrak{M}} = \mathcal{H}_\zeta$ است. از این‌که بین $\mathfrak{M}, \widetilde{\mathfrak{M}}$ تناظر یک به یک وجود دارد (ببینید [۴، لم ۳۰.۶]) بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $\mathfrak{M} = \{0\}$ یا $\mathfrak{M} = \mathcal{H}$. بنابراین نمایش ϖ از فضای همگن G/H تحویل‌ناپذیر است. \square

قضیه زیر بیان می‌کند که انتگرال‌پذیر مربعی نمایش ϖ از فضای همگن G/H از انتگرال‌پذیر مربعی نمایش ς از زیرگروه K نتیجه می‌شود.

قضیه ۹.۳. فرض کنید گروه G حاصل ضرب نیم‌مستقیم از زیرگروه نرمال K و زیرگروه بسته و فشرده H باشد. اگر ς یک نمایش انتگرال‌پذیر مربعی از زیرگروه K باشد آنگاه نمایش ϖ از G/H انتگرال‌پذیر مربعی است.

اثبات. فرض کنید ς نمایش تحویل‌ناپذیر از زیرگروه K باشد. در این صورت ϖ یک نمایش تحویل‌ناپذیر از فضای همگن G/H است. بنا به فشردگی H و همانی بودن نمایش π روی زیرگروه H ، برای هر $f \in \mathcal{F}$ داریم:

$$\begin{aligned} \int_K |\langle \varsigma(k)f(x), f(x) \rangle|^2 dk &= \int_K |\langle f(xk^{-1}), f(x) \rangle|^2 dk \\ &= \int_K |\langle f(xkx^{-1}x), f(x) \rangle|^2 dk \\ &= \int_K |\langle L_{xkx^{-1}}f(x), f(x) \rangle|^2 dk \\ &= \int_K |\langle \pi(xkx^{-1})f(x), f(x) \rangle|^2 dk \\ &= \int_K |\langle \pi(x)\pi(k)\pi(x^{-1})f(x), f(x) \rangle|^2 dk \\ &= \int_K \int_H |\langle \pi(x)\pi(k)\pi(h)\pi(x^{-1})f(x), f(x) \rangle|^2 dhdk \\ &= \int_G |\langle \pi(x)\pi(x^\dagger)\pi(x^{-1})f(x), f(x) \rangle|^2 dx^\dagger \\ &= \int_{G/H} T(\varphi)(x^\dagger) d\mu(x^\dagger H) \\ &= \int_{G/H} \int_H \frac{\varphi(x^\dagger \eta)}{\rho(x^\dagger \eta)} d\eta d\mu(x^\dagger H) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{G/H} \int_H \frac{\rho(e)}{\rho(x^{\#})} |\langle \pi(x)\pi(kh\eta)\pi(x^{-1})f(x), f(x) \rangle|^2 d\eta d\mu(x^{\#}H) \\
 &= \int_{G/H} \frac{\rho(e)}{\rho(x^{\#})} |\langle \varpi(x^{\#}H)\pi(x^{-1})f(x), \pi(x^{-1})f(x) \rangle|^2 d\mu(x^{\#}H),
 \end{aligned}$$

که در آن $\varphi = |\langle \pi(x)\pi(x^{\#})\pi(x^{-1})f(x), f(x) \rangle|^2$ و $x^{\#} = kh$ یک اندازه پایای نسبی برای G/H است. بنابراین نمایش ϖ از فضای همگن G/H انتگرال‌پذیر مربعی است. \square

از قضیه فوق می‌توان نتیجه گرفت که هر موجک پذیرفتنی در فضای هیلبرت \mathcal{H} برای نمایش \mathcal{S} از زیرگروه K نیز یک موجک پذیرفتنی در فضای هیلبرت \mathcal{H} برای نمایش ϖ از فضای همگن G/H می‌سازد.

نتیجه ۱۰.۳. فرض کنید گروه G حاصل ضرب نیم‌مستقیم از زیرگروه نرمال K و زیرگروه بسته و فشرده H باشد. اگر $\xi \in \mathcal{H}$ یک موجک پذیرفتنی برای نمایش \mathcal{S} از زیرگروه K باشد آنگاه $\pi(x) * f$ یک موجک پذیرفتنی در \mathcal{H} برای نمایش ϖ از G/H است که برای $\phi \in C_c(G)$ ، $f(x) = \phi(x)\xi$ می‌باشد.

قضیه زیر رابطه بین موجک‌های پذیرفتنی روی فضای همگن G/H و گروه موضعاً فشرده G را که حاصل ضرب نیم‌مستقیم از دو گروه H و K است را نشان می‌دهد.

قضیه ۱۱.۳. فرض کنید K و H دو گروه موضعاً فشرده باشند به طوری که $G = K \times_{\tau} H$. در نظر بگیرید π و ϖ به ترتیب نمایش‌هایی از فضای همگن G/H و گروه G باشند. در این صورت ξ یک موجک پذیرفتنی برای ϖ است اگر و فقط اگر ξ یک موجک پذیرفتنی برای π باشد.

اثبات. بنا به نتیجه (۶.۳) کفایت نشان دهیم که نمایش π از G انتگرال‌پذیر مربعی است اگر و فقط

اگر π_K از K انتگرال‌پذیر مربعی باشد. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \int_G |\langle \zeta, \pi(g)\zeta \rangle|^2 dg &= \int_K \int_H |\langle \zeta, \pi(kh)\zeta \rangle|^2 dhdk \\ &= \int_K \int_H |\langle \zeta, \pi(k)\pi(h)\zeta \rangle|^2 dhdk \\ &= \int_K \int_H |\langle \zeta, \pi(k)\zeta \rangle|^2 dhdk \\ &= \int_K |\langle \zeta, \pi_K(k)\zeta \rangle|^2 dk. \end{aligned}$$

بنابراین ξ پذیرفتنی برای نمایش π از G است اگر و فقط اگر ξ پذیرفتنی برای π_K باشد و این نتیجه می‌دهد که ξ یک موجک پذیرفتنی برای نمایش π از G است اگر و فقط اگر ξ یک موجک پذیرفتنی برای نمایش π از G/H باشد. \square

در پایان مثالی ارائه می‌دهیم که بتوانیم کاربردی از قضیه‌های اثبات شده در این مقاله را ببینیم.

مثال ۱۲.۳. فرض کنید G گروه ویل‌هایزنبرگ باشد. یعنی $(WH)^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times_{\tau} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ عمل دوتایی روی گروه $(WH)^n$ برای هر $(q_1, p_1, t_1), (q_2, p_2, t_2) \in (WH)^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(q_1, p_1, t_1) \cdot (q_2, p_2, t_2) = (q_1 + q_2, p_1 + p_2, t_1 + t_2 + q_1 \cdot p_2).$$

که در آن q_1, p_2 حاصل ضرب داخلی اقلیدسی از q_1, p_2 در \mathbb{R}^n می‌باشد. اندازه لبگ $dqdpdt$ روی $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, 2\pi]$ یک اندازه هارچپ روی $(WH)^n$ است. نمایش تعریف شده در زیر برای هر $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ و $(q, p, t) \in (WH)^n$ یک نمایش تحویل‌ناپذیر است.

$$\pi : (WH)^n \rightarrow U(L^2(\mathbb{R}^n)), \quad (\pi(q, p, t)\varphi)(x) = e^{i(px - qp + t)}\varphi(x - q), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

در ([۹]، [بخش ۱۷]) نشان داده شده است که این نمایش، انتگرال‌پذیر مربعی است و هر $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ با $\|\varphi\| = 1$ یک موجک پذیرفتنی برای نمایش π است. حال در نظر بگیرید $H = \{(0, 0, t), t \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ فضای همگن گروه $(WH)^n$ می‌باشد. تعریف کنید:

$$\varpi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow U(L^2(\mathbb{R}^n)), \quad (\varpi(q, p)\varphi)(x) = e^{i(px-qp)}\varphi(x - q),$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n, \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ در [۳] نشان داده شده است که ϖ یک نمایش انتگرال‌پذیر مربعی G/H است و هر $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ یک موجک پذیرفتنی برای ϖ است. بنا به قضیه ۹.۳، از انتگرال‌پذیری مربعی نمایش از زیرگروه $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ انتگرال‌پذیر مربعی روی فضای همگن از گروه ویل‌هایزنبرگ نتیجه می‌شود.

مراجع

- [۱] S.T. Ali, J-P. Antoine and J-P. Gazeau, *Coherent States. Wavelets and Their Generalizations*, Springer-Verlag, New York, ۲۰۰۰.
- [2] F. Esmaealzadeh, R.A. Kamyabi Gol and R. Raisi Tousi, On the continuous wavelet transform on homogeneous spaces, *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.*, **10**(4) (2012), 1–18.
- [3] F. Esmaealzadeh, R.A. Kamyabi Gol and R. Raisi Tousi, Two-wavelet constants for square integrable representations of G/H , *Wavelet and linear algebra*, **1**(1) (2014), 63–73.
- [4] G.B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. CRC Press, 1986.
- [5] H. Führ and M. Mayer, Continuous wavelet transform from semidirect product: cyclic representation and plancherel measure, *J. Fourier Anal. Appl.*, **8** (2002), 375–398.
- [6] R.A. Kamyabi Gol and N. Tavallaei, Convolution and homogeneous spaces, *Bull. Iran. Math. Soc.*, **35**(1) (2009), 129–146.
- [7] R.A. Kamyabi Gol and N. Tavallaei, Wavelet transforms via generalized quasi-regular representations, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **26**(3) (2009), 291–300.
- [8] H. Reiter and J. Stegeman, *Classical Harmonic Analysis and Locally compact Group*. Clarendon press, 2000.
- [9] M.W. Wong, *Wavelet Transform and Localization Operators*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2002.