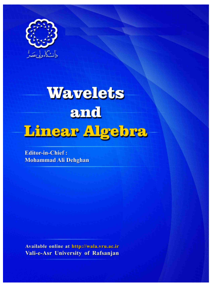
موجک‌ها و جبرخطی ۶(۱) (۱۳۹۸) ۵۳-۳۷



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

هم‌ارزی تعمیم مسئله پائولسن در نظریه عملگرها

احمد صفاپور*[آ]، زینب گلی‌نژاد[آ]

[آ]گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۱ مرداد ۱۳۹۷
پذیرفته شده: ۱۸ آبان ۱۳۹۷
دسترسی آنلاین: ۱۰ شهریور ۱۳۹۸

ادیتور رابط: علی‌اکبر عارفی‌جمال

کلمات کلیدی:

دوگان پارسوال، دنباله پذیرفتنی، قاب پذیرفتنی.

چکیده

مسئله پائولسن در نظریه قاب‌ها مبنی بر یافتن نزدیک‌ترین قاب پارسوالِ هم نرم به یک قاب نزدیک به پارسوال بودن و نزدیک به هم نرم بودن از مسائلی است که در سال‌های اخیر مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. برخی تلاش کرده اند با یافتن مسائلی هم‌ارز با آن، از طریق حل آن مسائل، پاسخی برای مسئله پائولسن پیدا کنند. تعمیم‌هایی از این مسئله هم ارائه شده است. در این مقاله با استفاده از برخی مفاهیم جدید، تعمیم دیگری از این مسئله ارائه شده و نشان داده شده است که این مسئله هم‌ارز مسئله‌ای در نظریه عملگرهاست.

*نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: Safapour@vru.ac.ir (احمد صفاپور)، zgolinejad@ymail.com (زینب گلی‌نژاد).

http://doi.org/10.22072/wala.2018.90523.1187

۱. مقدمه

قاب‌های چسبان و قاب‌های نرم واحد کاربردهای زیادی در نظریه رمزگذاری و انتقال دیجیتال سیگنال‌های آنالوگ دارند. اگر قابی هردو شرط را با هم داشته باشد قاب چسبان نرم واحد نامیده می‌شود. کاسازا ثابت کرد می‌توان نزدیکترین قاب پارسوال به یک قاب دلخواه و نزدیک‌ترین قاب هم نرم به یک قاب دلخواه را یافت [۴]. اما هر کدام از این دو الگوریتم دیگری را نقض می‌کند، یعنی با ساختن یک قاب پارسوال از روی یک قاب دلخواه، ساختار حاصل از هم نرم بودن دور می‌شود و بالعکس. لذا پائولسن مسئله ای را مطرح کرد که تحت چه شرایطی می‌توان هردو شرط را باهم داشت:

مساله ۱.۱ (پائولسن). هرگاه $F = \{f_n\}_{n=1}^N$ قابی نزدیک به پارسوال بودن در حد ε و نزدیک به هم نرم بودن در حد ε باشد، نزدیک‌ترین قاب پارسوال هم نرم به F را بیابید.

هدوین نشان داد که برای مسئله پائولسن جوابی وجود دارد. در سال ۲۰۱۰ بودمن و کاسازا روشی برای حل مسأله پائولسن ارائه نمودند. در این روش یک دستگاه معادلات دیفرانسیل از توابع مقدار برداری معرفی شده و هم چنین نشان داده شده است که مسأله پائولسن معادل با مسأله ای در نظریه ماتریس‌هاست و با پاسخ به مساله پائولسن به این مساله نیز پاسخ داده می‌شود [۲]. فیکوس، کاسازا و میکسون در سال ۲۰۱۰ راه حلی کاملا متفاوت را با استفاده از مفهوم پتانسیل قاب در حالتی که بعد فضا و تعداد بردارهای قاب نسبت به هم اول باشند ارائه نمودند [۶]. پس از آن مسئله تعمیم پائولسن مطرح شد:

مساله ۲.۱ (تعمیم پائولسن). هرگاه $A = \{a_n\}_{n=1}^N$ یک دنباله پذیرفتنی چسبان برای $\mathcal{H}_M$ بوده و $F = \{f_n\}_{n=1}^N$ یک قاب نزدیک به چسبان بودن در حد ϵ برای $\mathcal{H}_M$ باشد. نزدیکترین قاب چسبان A-پذیرفتنی به F را بیابید.

با استفاده از یک الگوریتم نشان داده می‌شود که افزایش درجه چسبان بودن گرادیان کاهشی یک قاب، آن قاب به یک قاب چسبان پذیرفتنی همگرا است [۸] . حال بررسی می‌کنیم تحت چه شرایطی مسئله تعمیم پائولسن با مسئله c- تصویر همارز است:

مساله ۳.۱ (c-تصویر). هرگاه $A = \{a_n\}_{n=1}^N$ یک دنباله چسبان پذیرفتنی با شرط $|a_n| \geq 1$ بوده و P یک c- تصویر از مرتبه M با $c \geq 1$ بروی $l_2(N)$ باشد بطوری که $\mathcal{P} = \{Pe_n\}$ قابی δ-نزدیک به A-پذیرفتنی باشد، نزدیک‌ترین c- تصویر با $c = 1$ مانند Q را بیابید بطوری که $|a_n| = \|Qe_n\|$.

این مقاله در دو بخش تنظیم شده است: در بخش اول به بررسی مسائل مربوط به نظریه عملگرها و نظریه قاب‌ها می‌پردازیم. در بخش بعد به بررسی هم‌ارزی مسئله توسیع پائولسن و مسله c- تصویر خواهیم پرداخت.

۲. مباحث مقدماتی

در این مقاله $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت جدایی پذیر و $\mathcal{H}_M$ یک فضای هیلبرت با بعد متناهی M در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۱.۲. یک خانواده از بردارهای $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ نامیده می‌شود اگر ثابت‌های $0 < B \leq D < \infty$ وجود داشته باشند بطوری که به ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داشته باشیم

$$B\|f\|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle f, f_n\rangle|^2 \leq D\|f\|^2. \tag{۱.۲}$$

دو عدد B و D که در رابطه فوق صدق می‌کنند منحصر به فرد نیستند. بزرگترین مقدار ممکن برای B کران پایین قاب و کوچکترین مقدار ممکن برای D کران بالای قاب نامیده میشوند.

اگر $B = D$، آنگاه $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک قاب چسبان است و اگر $B = D = 1$ آن را یک قاب پارسوال می‌نامند.

اگر اندازه بردارهای f_n مساوی باشد آن‌گاه قاب هم نرم نامیده می‌شود و اگر به ازای هر n، $\|f_n\| = 1$ آن‌گاه $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ قاب نرم واحد نام دارد.

در فضای با بعد متناهی، خانواده بردارهای $F = \{f_n\}_{n=1}^N$ یک قاب برای $\mathcal{H}_M$ نامیده می‌شود اگر ثابت‌های $0 < B \leq D < \infty$ وجود داشته باشند بطوری که به ازای هر $f \in \mathcal{H}_M$ رابطه (۱.۲) به ازای $n = \{1, 2, ..., N\}$ برقرار باشد.

تعریف ۲.۲. قاب $F = \{f_n\}_{n=1}^N$ در $\mathcal{H}_M$ نزدیک به هم نرم در حد ϵ $(\epsilon > 0)$ با ثابت k نامیده می‌شود اگر عدد $k > 0$ وجود داشته باشد، بطوری که

$$(1-\epsilon)k \leq \| f_n \| \leq (1+\epsilon)k, \qquad \forall n \in \{1, 2. \dots, N\}. \tag{۲.۲}$$

تعریف ۳.۲. قاب $F=\{f_n\}_{n=1}^{N}$ نزدیک به پارسوال بودن در حد ϵ $(\epsilon>0)$ نامیده می‌شود اگر به ازای هر $f\in\mathcal{H}_M$،

$$(1-\epsilon)\|f\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N}|\langle f,f_n\rangle|^2 \leqslant (1+\epsilon)\|f\|^2. \qquad (3.2)$$

در واقع در چنین حالتی کران‌های قاب به صورت زیر هستند

$$B=1-\epsilon, \qquad D=1+\epsilon.$$

اگر قاب F در رابطه (۲.۲) به ازای $\epsilon=0$ صدق کند آن‌گاه

$$\| f_n \|= k, \qquad (1\leqslant n\leqslant N).$$

لذا F یک قاب هم نرم است.
هم‌چنین اگر این قاب در رابطه (۳.۲) به ازای $\epsilon=0$ صدق کند آن‌گاه

$$\sum_{n=1}^{n}|\langle f,f_n\rangle|^2=\|f\|^2.$$

یعنی F یک قاب پارسوال است.

تعریف ۴.۲. برای قاب $\{f_n\}_{n=1}^{N}$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}_M$ عملگر تجزیه قاب نگاشت $T:\mathcal{H}_M\to\ell_2(N)$ با ضابطه

$$Tf=\sum_{n=1}^{N}\langle f,f_n\rangle e_n=\{\langle f,f_n\rangle\}_{n=1}^{N}$$

تعریف می‌شود که $\ell_2(N)$ فضای دنباله‌های همگرای N عضوی است و $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ پایه یکامتعامد متعارف $\ell_2(N)$ می‌باشد.

بنابراین

$$\|Tf\|^{۲} = \sum_{n=۱}^{N} |\langle f, f_n\rangle|^{۲} .$$

.

عملگر الحاقی T که با T^* نشان داده می‌شود عملگر ترکیب نام دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$T^*(\sum_{n=۱}^{N} a_n e_n) = \sum_{n=۱}^{N} a_n f_n .$$

از ترکیب T و T^* عملگر $S : \mathcal{H}_M \to \mathcal{H}_M$ بدست می‌آید که عملگر قاب نام دارد و

$$\begin{aligned} Sf = T^*Tf &= T^*\left(\sum_{n=۱}^{N}\langle f, f_n\rangle e_n\right) \\ &= \sum_{n=۱}^{N}\langle f, f_n\rangle T^* e_n \\ &= \sum_{n=۱}^{N}\langle f, f_n\rangle f_n . \end{aligned}$$

به راحتی می‌توان دید S عملگری مثبت، خودالحاق و معکوس پذیر است.

فرض می‌کنیم $F = \{f_n\}_{n=۱}^{N}$ قابی با عملگر S باشد. لذا به ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم

$$\begin{aligned} f &= S^{-۱}Sf \\ &= SS^{-۱}f \\ &= \sum_{n=۱}^{N}\langle S^{-۱}f, f_n\rangle f_n \\ &= \sum_{n=۱}^{N}\langle f, S^{-۱}f_n\rangle f_n. \end{aligned}$$

قاب $\left\{S^{-1} f_n\right\}_{n=1}^{N}$ دوگان کانونی F نام دارد و در حالت کلی اگر قاب $\{g_n\}_{n=1}^{N}$ در رابطه

$$f = \sum_{n=1}^{N} \langle f, g_n \rangle f_n \,, \quad f \in \mathcal{H}$$

صدق کند آن‌گاه $\{g_n\}_{n=1}^{N}$ یک دوگان قاب $\{f_n\}_{n=1}^{N}$ نامیده می‌شود.

دوگان کانونی یک قاب پارسوال خودش می‌باشد که قابی پارسوال است، از این‌رو می‌توان گفت هر قاب پارسوال یک دوگان پارسوال دارد. اما هر قاب دلخواهی دوگان پارسوال ندارد.

مثال ۵.۲. فرض کنیم $\{x_n\}_{n=1}^{N}$ یک پایه ریس باشد که پارسوال نیست. می‌دانیم یک قاب، دوگان منحصر به فرد دارد اگر و تنها اگر آن قاب یک پایه ریس باشد. از این‌رو دوگان $\{x_n\}_{n=1}^{N}$ منحصر به فرد است و پارسوال نیست.

اگر $\{g_n\}_{n=1}^{N}$ یک دوگان پارسوال برای قاب $\{f_n\}_{n=1}^{N}$ باشد برای هر $f \in \mathcal{H}_M$ داریم

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \sum_{n=1}^{N} \langle f, g_n \rangle \langle f_n, f \rangle \\ &\le \left(\sum_{n=1}^{N} |\langle f, g_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N} |\langle f_n, f \rangle|^2 \right)^{1/2} \\ &= \|f\| \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} |\langle f, g_n \rangle|^2 \right)^{1/2} , \end{aligned}$$

که این نتیجه می‌دهد

$$\|f\|^2 \le \sum_{n=1}^{N} |\langle f, g_n \rangle|^2 .$$

بنابراین یک شرط لازم برای این‌که قابی دوگان پارسوال داشته باشد این است که کران پایین قاب بزرگ‌تر یا مساوی ۱ باشد [۹].

تعریف ۶.۲. اگر $F = \{f_n\}_{n=1}^{N}$ و $G = \{g_n\}_{n=1}^{N}$ قاب‌هایی برای $\mathcal{H}_M$ باشند، فاصله دو قاب بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(F,G)=\sum_{n=۱}^{N}\|f_n-g_n\|^{۲}.$$

قضیه ۷.۲. *فرض کنید* $F=\{f_n\}_{n=۱}^N$ *و* $G=\{g_n\}_{n=۱}^N$ *قاب‌های چسبان برای* $\mathcal{H}_M$ *به ترتیب با کران‌های* B *و* D *و عملگرهای تجزیه* T_F *و* T_G *باشند. اگر*

$$d(F,G)=\sum_{n=۱}^{N}\|f_n-g_n\|^{۲}<\epsilon,$$

آنگاه

$$d(T_F(F),T_G(G))=\sum_{n=۱}^{N}\|T_Ff_n-T_Gg_n\|^{۲}<۲(B+D)\epsilon.$$

اثبات. می‌دانیم به ازای هر $i=۱,\ldots,N$ ، $T_Ff_i=\sum_{n=۱}^N\langle f_i,f_n\rangle e_n$ و $T_Gg_i=\sum_{n=۱}^N\langle g_i,g_n\rangle e_n$، که در اینجا $\{e_n\}_{n=۱}^N$ پایه استاندارد $\ell_۲(N)$ است. از این رو

$$\begin{aligned}\|T_Ff_i-T_Gg_i\|^{۲}&=\sum_{n=۱}^{N}|\langle f_i,f_n\rangle-\langle g_i,g_n\rangle|^{۲}\\&\leq ۲(\sum_{n=۱}^{N}|\langle f_i,f_n-g_n\rangle|^{۲}+\sum_{n=۱}^{N}|\langle f_i-g_i,g_n\rangle|^{۲}).\end{aligned}$$

حال با توجه به چسبان بودن قاب‌های F و G داریم

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{N}\|T_Ff_i-T_Gg_i\|^{۲}&\leq ۲(\sum_{i=۱}^{N}\sum_{n=۱}^{N}|\langle f_i,f_n-g_n\rangle|^{۲}+\sum_{i=۱}^{N}\sum_{n=۱}^{N}|\langle f_i-g_i,g_n\rangle|^{۲})\\&=۲(B\sum_{n=۱}^{N}\|f_n-g_n\|^{۲}+D\sum_{i=۱}^{N}\|f_i-g_i\|^{۲})\\&=۲(B+D)\sum_{i=۱}^{N}\|f_i-g_i\|^{۲}\leq ۲(B+D)\epsilon.\end{aligned}$$

□

تعریف ۸.۲. یک دنباله از اعداد حقیقی $A = \{a_n\}_{n=1}^{N}$ دنباله پذیرفتنی برای $\mathcal{H}_M$ نامیده می‌شود اگر قابی مانند $F = \{f_n\}_{n=1}^{N}$ وجود داشته باشد بطوری که به ازای هر n

$$\| f_n \|^2 = a_n^2.$$

در این حالت F نیز یک قاب A-پذیرفتنی نامیده می‌شود. در حالتی که F قاب چسبان باشد A را دنباله پذیرفتنی چسبان می‌نامند.

هرگاه به ازای $\epsilon > 0$

$$(1 - \epsilon)a_n^2 \leq \|f_n\|^2 \leq (1 + \epsilon)a_n^2,$$

$F = \{f_n\}_{n=1}^{N}$ قاب ϵ-نزدیک به A-پذیرفتنی نامیده می‌شود.

گزاره ۹.۲. *هرگاه $\{f_n\}_{n=1}^{N}$ یک قاب B-چسبان برای $\mathcal{H}_M$ باشد آنگاه*

$$\max_{n=1,\dots,N} \|f_n\|^2 \leq B = \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{N}\|f_n\|^2.$$

اثبات. به ازای هر $n = 1, \dots, N$ داریم

$$\|f_n\|^4 = |\langle f_n, f_n\rangle|^2 \leq \sum_{n'=1}^{N} |\langle f_n, f_{n'}\rangle|^2 = B\|f_n\|^2.$$

بنابراین $\max_{n=1,\dots,N}\|f_n\|^2 \leq B$. اگر $\{e_m\}_{m=1}^{M}$ پایه متعامدی برای $\mathcal{H}_M$ باشد داریم

$$\frac{1}{M}\sum_{n=1}^{N}\|f_n\|^2 = \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}|\langle f_n, e_m\rangle|^2 = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}|\langle f_n, e_m\rangle|^2 = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}B\|e_m\|^2 = B.$$

□

بنابراین شرط لازم برای اینکه دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{N}$ پذیرفتنی چسبان برای $\mathcal{H}_M$ باشد، این است که در نامساوی

$$\max_{n=1,\dots,N} a_n^2 \leq \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{N} a_n^2,$$

صدق کند.

تعریف ۱۰.۲. عملگر خطی $K : \mathcal{H}_M \to \mathcal{H}_M$ را یک c -تصویر می‌نامیم هرگاه، $K^* = K$ و به ازای یک $c > 0$ ، $K^2 = cK$. اگر $c = 1$ ، K یک تصویر است.

گزاره ۱۱.۲. *هرگاه K یک c-تصویر باشد آنگاه:*

۱) $ran(K) = (ker(K))^{\perp}$.

۲) $\|K\| = c$.

۳) *K خودالحاق است.*

۴) *K نرمال است.*

۵) *K عملگر مثبت است.*

اثبات. با توجه به متناهی بعد بودن فضا عملگر K کراندار است. از این رو

$$\|Kh\| \leq c^{-1}\|KK(h)\| \leq c^{-1}\|K\|\|Kh\|.$$

بنابراین $\|K\| \geq c$ و

$$\|Kh\|^2 = \langle Kh, Kh\rangle = \langle K^2h, h\rangle = \langle cKh, h\rangle \leq c\|Kh\|\|h\|.$$

پس

$$\|Kh\| \leq c\|h\|.$$

لذا

$$\|K\| = \sup\{\, \|Kh\| : \|h\| = ۱\} = c.$$

سایر موارد به سادگی ثابت می‌شوند. □

تعریف ۱۲.۲. فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ دو فضای هیلبرت جدایی پذیر باشند. همچنین فرض کنید $F = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ و $\mathcal{B} = \{\beta_n\}$ پایه ای برای K باشد. هرگاه $T : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ در رابطه

$$T(\beta_n) = cf_n,\ \ c > ۰, n \in \mathbb{N},$$

صدق کند، $(T, \mathcal{K}, \mathcal{B})$ را یک عملگر c- پیش قاب با ثابت c برای F می‌نامیم. اگر $c = ۱$ آنگاه $(T, \mathcal{K}, \mathcal{B})$ یک عملگر پیش قاب برای F نام دارد.

هرگاه $(T, \mathcal{K}, \mathcal{B})$ یک پیش قاب برای F باشد عدد اصلی

$$e(F) = dim\, N(T)$$

مانده قاب تعریف می‌شود.

درحالتی که $e(F) < \infty$ و Q یک تصویر باشد قضیه زیر را داریم که برای فضاهای هیلبرت جدایی پذیر برقرار است و لذا برای فضاهای هیلبرت با بعد متناهی نیز برقرار خواهد بود:

قضیه ۱۳.۲. [۱] *هرگاه $F = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد و همچنین $e(F) < \infty$ ، آنگاه شرایط زیر هم‌ارزند:*

۱) *یک فضای هیلبرت $\mathcal{K}$ بطوریکه $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$ ، یک تصویر $Q \in L(\mathcal{H})$ و یک پایه متعامد $\mathcal{B} = \{\beta_n\}$ برای $\mathcal{K}$ وجود دارند بطوری‌که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $Q\beta_n = f_n$.*

۲) *اگر $\mathcal{L}$ یک فضای هیلبرت ، E پایه ای متعامد برای $\mathcal{L}$ و $(T, \mathcal{L}, E)$ یک پیش قاب برای F باشد، آنگاه*

$$dim\, R(TT^* - I_{\mathcal{H}}) \leq e(F).$$

تعریف ۱۴.۲. اگر K و V ،c- تصویرهایی روی $\ell_{۲}(N)$ با ثابت‌های به ترتیب $c_{۲}, c_{۱}$ باشند، فاصله K و V را چنین تعریف می‌کنیم:

$$d(K, V) = \sum_{n=۱}^{N} ||c_{۱}Ke_{n} - c_{۲}Ve_{n}||^{۲}$$

که $\{e_{n}\}_{n=۱}^{N}$ پایه یکامتعامد متعارف $\ell_{۲}(N)$ است.

گزاره ۱۵.۲. *هرگاه $\{f_{n}\}_{n=۱}^{N}$ یک قاب برای $\mathcal{H}_{M}$ با کران‌های قاب A و B بوده و K یک c-تصویر با $c > ۰$ از $\mathcal{H}_{M}$ بروی یک زیر فضای بسته V باشد، آنگاه $\{Kf_{n}\}_{n=۱}^{N}$ یک قاب برای V با کران‌های قاب $c^{۲}B$ و $c^{۲}D$ است.*

اثبات. زمانی که K یک c-تصویر از $\mathcal{H}_{M}$ بروی V است برای هر $f \in V$، $Kf = cf$. حال با استفاده از این حقیقت که $\{f_{n}\}_{n=۱}^{N}$ یک قاب است داریم

$$\begin{aligned}\sum_{n=۱}^{N} |\langle f, Kf_{n}\rangle|^{۲} &= \sum_{n=۱}^{N} \langle f, Kf_{n}\rangle\langle Kf_{n}, f\rangle \\ &= \sum_{n=۱}^{N} |\langle Kf, f_{n}\rangle|^{۲}.\end{aligned}$$

لذا برای $f \in V$ داریم

$$Bc^{۲}||f||^{۲} = B||Kf||^{۲} \leq \sum_{n=۱}^{N} |\langle f, Kf_{n}\rangle|^{۲} \leq D||Kf||^{۲} = Dc^{۲}||f||^{۲}.$$

در نتیجه $\{Kf_{n}\}_{n=۱}^{N}$ یک قاب برای V با کران‌های $c^{۲}B$ و $c^{۲}D$ است.

□

گزاره ۱۶.۲. *اگر $F = \{f_{n}\}_{n=۱}^{N}$ یک قاب چسبان برای $\mathcal{H}_{M}$ با کران قاب B باشد، آنگاه یک فضای*

هیلبرت $\mathcal{H}_M \supseteq \mathcal{L}$ و یک پایه متعامد $\{e_n\}$ برای $\mathcal{L}$ وجود دارد بطوری که به ازای هر $n = ۱, ۲, ..., N$ داریم

$$Pe_n = B^{\frac{-۱}{۲}} f_n.$$

که در آن P تصویر متعامد از $\mathcal{L}$ بروی $\mathcal{H}_M$ است. همچنین به ازای c-تصویری مانند K از $\mathcal{L}$ بروی $\mathcal{H}_M$ داریم $Ke_n = f_n$.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{L} = \ell_۲(N)$ و $\{e_n : n \in N\}$ پایه ی یکامتعامد متعارف $\mathcal{L}$ باشد. از آنجایی که F چسبان است و T عملگرتجزیه برای F است واضح است که $T_۱ = B^{\frac{-۱}{۲}} T$ عملگر تجزیه قاب پارسوال $F_۱ = \{B^{\frac{-۱}{۲}} f_n\}_{n=۱}^N$ است. از آنجایی که $T_۱$ طولپا است می‌توان با یکی دانستن $\mathcal{H}_M$ با $T_۱(\mathcal{H}_M)$، $\mathcal{H}_M$ را درون $\mathcal{L}$ نشاند.

حال داریم

$$\begin{aligned}
\langle T_۱ f_m, Pe_n\rangle &= \langle PT_۱(f_m), e_n\rangle \\
&= \langle T_۱ f_m, e_n\rangle \\
&= \langle f_m, T_۱^* e_n\rangle \\
&= \langle f_m, B^{\frac{-۱}{۲}} f_n\rangle \\
&= B^{\frac{-۱}{۲}} \langle f_m, f_n\rangle \\
&= B^{\frac{-۱}{۲}} \langle T_۱ f_m, T_۱ f_n\rangle \\
&= \langle T_۱ f_m, B^{-۱} T f_n\rangle.
\end{aligned}$$

بنابراین $Pe_n - B^{-۱} T f_n \perp T_۱(\mathcal{H}_M)$. اما $T_۱(\mathcal{H}_M) = (kerP)^{\perp}$، از این رو $Pe_n = B^{-۱} T f_n$. حال قرار می‌دهیم $K = B^{\frac{۱}{۲}} P$. پس K یک c-تصویر از $\mathcal{L}$ بروی $\mathcal{H}_N$ با ثابت $c = B^{\frac{۱}{۲}}$ است و از این رو $Ke_n = B^{\frac{۱}{۲}} Pe_n = f_n$.

□

۳. هم‌ارزی مسائل

حال خواهیم دید با افزودن برخی شرایط به حالت تعمیم یافته ی مسئله پائولسن، می‌توان آن را با مسئله c-تصویر هم‌ارز ساخت. در اینجا منظور از رتبه یک c-تصویر، همان مفهوم رتبه ی یک عملگر است.

مساله ۱.۳. فرض کنید $A = \{a_n\}_{n=1}^N$ یک دنباله از اعداد حقیقی با شرط $|a_n| \geq 1$ باشد. اگر $F = \{f_n\}_{n=1}^N$ قابی δ-نزدیک به A-پذیرفتنی با کران پایین $B \geq 1$ بوده و $dim\, R(TT^* - I) \leq e(F)$ ، زمانی که $(T, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ یک c- پیش قاب برای F است، نزدیک‌ترین قاب چسبان A-پذیرفتنی به F را بیابید.

مساله ۲.۳ (c-تصویر). فرض کنید $A = \{a_n\}_{n=1}^N$ یک دنباله ازاعداد حقیقی با شرط $|a_n| \geq 1$ باشد و P نیز یک c- تصویر از مرتبه M با $c \geq 1$ بروی $l_2(N)$ بطوری که $\mathcal{P} = \{Pe_n\}$ قابی δ-نزدیک به A-پذیرفتنی باشد. نزدیک‌ترین c- تصویر با $c \geq 1$ مانند Q را بیابید بطوری که $||Qe_n|| = |a_n|$.

ابتدا فرض می‌کنیم مسئله (۱.۳)برقرار بوده و P یک c-تصویر با شرایط مسئله (۲.۳) است:

فرض می‌کنیم $\mathcal{E} = \{e_n\}$ پایه ای متعامد برای $\mathcal{H}_M$ است. لذا بنا بر گزاره (۱۵.۲) $\mathcal{P} = \{Pe_n\}$ یک قاب چسبان با کران c^2 و عملگر تجزیه T است. حال Q را تصویری از $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}_M$ بروی $\mathcal{H}_M$ فرض می‌کنیم. بنا به گزاره (۱۶.۲) به ازای $n = 1, 2, ..., N$ داریم

$$Qe_n = c^{-1} Pe_n.$$

بنابراین $(Q, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ یک عملگر c-پیش قاب برای $\{Pe_n\}$ است. از آنجایی که $\{Pe_n\}$ قابی چسبان با کران قاب c^2 فرض شده، واضح است که $X = \{c^{-1} Pe_n\}$ یک قاب پارسوال با عملگر تجزیه $T' = c^{-1} T$ می‌باشد و از این رو Q یک عملگر پیش قاب برای X است. بنابراین براساس قضیه (۱۳.۲) داریم

$$dim\, R(QQ^* - I) \leq e(X) = dim\, N(T') = dim\, N(T) = e(\mathcal{P}).$$

حال با توجه به اینکه فرض کرده ایم مسئله (۱.۳) برقرار است، یک قاب چسبان A-پذیرفتنی مانند $G = \{g_n\}_{n=1}^N$ وجود دارد بطوری که

$$\sum_{n=1}^{N} \|Pe_n - g_n\|^2 \leq f(\delta, M, N).$$

اگر L عملگر تجزیه قاب G باشد، K را یک تصویر متعامد بروی برد L تعریف می‌کنیم. بنابراین وقتی U کران قاب G است به ازای هر $n = 1, 2, ..., N$ داریم

$$Ke_n = U^{-1} Lg_n.$$

بنابراین

$$\|Ke_n\| = \|Lg_n\| U^{-1} = UU^{-1} \|g_n\| = |a_n|.$$

در نتیجه K یک c-تصویر و $\{Ke_n\}$ ، A-پذیرفتنی است. حال با توجه به c-تصویر بودن P داریم

$$\begin{aligned} TPe_n &= \sum_{m=1}^{N} \langle Pe_n, Pe_m \rangle e_m \\ &= \sum_{m=1}^{N} \langle P^* Pe_n, e_m \rangle e_m \\ &= \sum_{m=1}^{N} \langle cPe_n, e_m \rangle e_m \\ &= cPe_n. \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از قضیه (۷.۲) داریم

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\|cPe_n-Ke_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{N}\|TPe_n-Lg_n+Lg_n-U^{-1}Lg_n\|^2\\ &\leq 2\sum_{n=1}^{N}\|TPe_n-Lg_n\|^2+2\sum_{n=1}^{N}\|Lg_n-U^{-1}Lg_n\|^2\\ &\leq 2(c+1)\sum_{n=1}^{N}\|Pe_n-g_n\|^2+2(1-U^{-1})\sum_{n=1}^{N}a_n^2\\ &\leq 2(c+1)(f(\delta,M,N)+\sum_{n=1}^{N}a_n^2-M)\\ &\leq 2(c+1)(f(\delta,M,N)+Na_0-M)\\ &= g(\delta,M,N).\end{aligned}$$

که در اینجا $a_0=\max\{|a_n| : n=1,2,..N\}$. بنابراین مسئله (۲.۳) برقرار است.

برعکس، فرض می‌کنیم مسئله (۲.۳) برقرار است. هرگاه $F=\{f_n\}_{n=1}^{N}$ قاب صدق کننده در مسئله (۲.۳) باشد، آنگاه یک دوگان پارسوال مانند $\{y_n\}$ دارد. حال بنابر پارسوال بودن $\{y_n\}$ یک پایه متعامد $\{e_n\}$ وجود دارد بطوریکه وقتی Q تصویر متعامد از $l_2(N)$ بروی $\mathcal{H}$ است به ازای هر $n=1,2,...,N$

$$Qe_n=y_n.$$

از آنجایی که $\{y_n\}$ دوگان $\{f_n\}$ است داریم

$$\langle f_n,y_n\rangle=\sum_{k=1}^{N}\langle f_n,f_k\rangle\langle y_k,y_n\rangle=\|f_n\|^2\|y_n\|^2.$$

بنابراین چون F قابی δ-نزدیک به A-پدیرفتنی است، پس $\|f_n\|\neq 0$ و داریم

$$\|y_n\|^2=\frac{\langle f_n,y_n\rangle}{\|f_n\|^2}.$$

در نتیجه

$$(۱-\delta)a_n^۲ \leq \|f_n\|^۲ \leq (۱+\delta)a_n^۲.$$

اگر K را با $Kx = \sum_{n=۱}^{N} a_n^۲ Qx$ تعریف کنیم ، می‌بینیم که K یک c-تصویر از $l_۲(N)$ بروی $\mathcal{H}$ و $\{Ke_n\}$، δ-نزدیک به A-پذیرفتنی است. حال با فرض اینکه مسئله (۲.۳) برقراراست، یک c-تصویر مانند Q' روی $\mathcal{H}_M$ با $c \geq ۱$ وجود دارد بطوری‌که Ke_n ،A-پذیرفتنی بوده و $d(K, Q') \leq g(\delta, M, N)$.
بنابراین $\{Q'e_n\}$ قابی چسبان و A-پذیرفتنی است که:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=۱}^{N} \|f_n - Q'e_n\|^۲ &\leq ۲\sum_{n=۱}^{N} \|f_n - \sum_{n=۱}^{N} a_n^۲ Ke_n\|^۲ + ۲g(\delta, M, N) \\
&\leq ۴(\sum_{n=۱}^{N} \|f_n\|^۲ + \sum_{n=۱}^{N} a_n^۲ \sum_{n=۱}^{N} \|Qe_n\|^۲) + ۲g(\delta, M, N) \\
&\leq ۲((۱+\delta)\sum_{n=۱}^{N} a_n^۲ + M\sum_{n=۱}^{N} a_n^۲) + ۲g(\delta, M, N) \\
&\leq ۲N((۱+\delta)a_۰^۲ + MNa_۰^۴) + ۲g(\delta, M, N).
\end{aligned}$$

لذا مسئله (۱.۳) برقرار است.

مراجع

[1] J. Antezana, G. Corach, M. Ruiz and D. Stojanoff, Oblique projections and frames, *Proc. Am. Math. Soc.*, **134**(4) (2005), 1031–1037.

[2] B. Bodmann and P.G. Casazza, The road to equal-norm Parseval frames, *J. Funct. Anal.*, **2**(2) (2010), 379–420.

[3] J. Cahill and P.G. Casazza, The Paulsen problem in operator theory, *Oper. Matrices*, **7**(1) (2013), 117–130.

[4] P.G. Casazza, *Custom Building Finite Frames in Wavelets, Frames and Operator Theory*, College Park, MD, 2003.

[5] P.G. Casazza and M. Fickus, Minimizing fusion frame potential, *Acta Appl. Math.*, **107** (2009), 7–24.

[6] P.G. Casazza, M. Fickus and D.G. Mixon, Auto-tuning unit norm frames, *Appl. Comp. Harmon. Anal.*, **32** (2012), 1–15.

[7] P.G. Casazza and M. Leon, Existence and construction of finite tight frames, *J. Concr. Appl. Math.*, **3**(3) (2006), 277–289.

[8] Z. Golinejad and A. Safapur, Paulsen problem for A-admissible frames, *Bull. Iranian Math. Soc.*, To appear.

[9] D. Han, Frame represention and Parseval duals with applications to Gabor frames, *Trans. Am. Math. Soc.*, **360**(6) (2008), 3307–3326.

[10] P. Massey and M. Ruiz, Minimization of convex functionals over frame operators, *Adv. Comput. Math.*, **32** (2010),131–153.