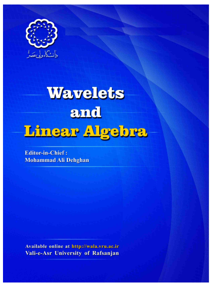
موجک‌ها و جبرخطی ۶(۲) (۱۳۹۸) ۱۲۳-۱۱۷



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

نگاشت‌های نگهدارنده جفت‌های عملگری باناخ روی جبرهای عملگری

روجا حسین زاده*[آ]

[آ] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، مازندران، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۱۶ بهمن ۱۳۹۷
پذیرفته شده: ۱ مهر ۱۳۹۸
دسترسی آنلاین: ۱۰ آذر ۱۳۹۸

ادیتور رابط: علی آرمندنژاد

کلمات کلیدی:

مسائل نگهدارنده، جبرهای عملگری، جفت عملگری باناخ، نقطه ثابت.

چکیده

فرض کنید $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ جبر شامل تمام عملگرهای خطی کران‌دار روی فضای باناخ $\mathcal{X}$ و $\phi : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{X})$ یک نگاشت جمعی دوسویی باشد که جفت عملگری باناخ را از دو طرف حفظ می کند. در این مقاله، نشان داده می شود که به ازای هر $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ و $x \in \mathcal{X}$، اسکالرهای $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ وجود دارند به طوری‌که

$$\phi(A)x = \alpha x + \beta A x.$$

*نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: ro.hosseinzadeh@umz.ac.ir (روجا حسین زاده).

http://doi.org/10.22072/wala.2019.103404.1217

۱. مقدمه

مسائل نگهدارنده (Preserving Problems) در قسمت‌های مختلفی از ریاضیات به چشم می‌خورد. در علوم مختلف در شرایط خاصی، ویژگی خاصی یا چیز خاصی ممکن است ”حفظ“ شود و این سؤال طبیعی به نظر می‌رسد که وقتی چیزی در یک اثرگذاری حفظ می‌شود، آیا می‌توان اطلاعات بیشتری در مورد آن به دست آورد؟ به عبارت دیگر، به زبان ریاضی، وقتی نگاشتی ویژگی خاصی یا مجموعه خاصی و یا رابطه خاصی را حفظ می‌کند، چه ویژگی‌های مهم دیگری دارد و فراتر از این آیا می توان فرم یک چنین نگاشت‌هایی را به دست آورد؟ این موضوعی است که ریاضی‌دانان زیادی بدان پرداخته اند. می توانید مراجع [۱] و [۳-۶] را ببینید.

در این‌جا به معرفی نمادها و تعریف مفاهیم بکار رفته در متن مقاله می پردازیم. برای نگاشت f روی یک فضای متری X، $F(f)$ را نماد مجموعه تمام نقاط ثابت f در نظر بگیرید.

تعریف ۱.۱. [۲] جفت مرتب (T,S) برای دو نگاشت T و S روی یک فضای متری X یک جفت عملگری باناخ نامیده می شود هرگاه $F(S)$ یک T-پایا باشد؛ به این معنی که $T(F(S)) \subseteq F(S)$.

هرگاه (T,S) یک جفت عملگری باناخ باشد، برای سادگی می‌نویسیم (T,S)، B.O.P. است. فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای باناخ و $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ جبر شامل تمام عملگرهای خطی کران‌دار روی $\mathcal{X}$ باشد. فرض کنید $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. واضح است که $F(T)$ یک زیرفضای برداری $\mathcal{X}$ است.

نگاشت $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ نگهدارنده یا حافظ یکی از ویژگی‌های

$$\dim F(AB) = \dim F(\phi(A)\phi(B)),$$

$$F(ABA) = F(\phi(A)\phi(B)\phi(A)),$$

$$F(A+B) = F(\phi(A)+\phi(B))$$

و یا

$$\dim F(A+B) = \dim F(\phi(A)+\phi(B))$$

به ترتیب در مراجع [۳]، [۴] و [۵] مورد بررسی قرار گرفته‌اند و فرم آن‌ها به دست آمده است. علاوه بر این، نگاشت‌های خطی حافظ مجموعه نقاط ثابت نیز در [۶] بررسی شده‌اند.

در این مقاله نگاشت‌های جمعی دوسویی روی $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ که دارای ویژگی زیر باشند را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

به ازای $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$، اگر $F(B)$ زیرفضای پایای A باشد، آن‌گاه $F(B)$ زیر فضای پایای $F(\phi(A))$ باشد و بالعکس.

به عبارت دیگر، می‌توان نتیجه اصلی این مقاله را به صورت زیر نیز بیان کرد:

قضیه اصلی. فرض کنید $\phi : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{X})$ یک نگاشت جمعی دوسویی باشد به طوری که برای هر $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$، (A, B)، B.O.P. است اگر و فقط اگر $(\phi(A), B)$، B.O.P. باشد. در این‌صورت، به ازای هر $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ و $x \in \mathcal{X}$، اسکالرهای $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ وجود دارند به طوری‌که

$$\phi(A)x = \alpha x + \beta Ax.$$

۲. اثبات ها

برای اثبات قضیه اصلی، نیاز به اثبات لم‌های کمکی زیر داریم. ابتدا چند نماد و مفهوم را تعریف می‌کنیم. فرض کنید $\mathcal{X}^*$ نماد فضای دوگان $\mathcal{X}$ باشد. اگر $x \in \mathcal{X}$ و $f \in \mathcal{X}^*$، آن‌گاه $x \otimes f$ نماد عملگر رتبه یک در $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ است که به‌صورت

$$(x \otimes f)(y) = f(y)x \quad (y \in \mathcal{X})$$

تعریف می‌شود. علاوه بر این، هر عملگر رتبه یک در $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ را نیز می‌توان به این صورت نوشت. به راحتی می‌توان دید که عملگر رتبه یک $x \otimes f$ خودتوان است اگر و تنها اگر $f(x) = ۱$. همچنین $F(x \otimes f) =< x >$ اگر و تنها اگر $f(x) = ۱$.

منظور از عملگر اسکالر، عملگر مضرب همانی یا متعلق به $\mathbb{C}I$ می‌باشد، که در آن I عملگر همانی است.

قضیه زیر قضیه ۲.۳ از [۱] است.

قضیه ۱.۲. *[۱] فرض کنید U و V دو فضای برداری روی میدان نامتناهی F و $R, S : U \to V$ دو تبدیل خطی باشند. در این صورت احکام زیر با هم معادل هستند.*

الف. بردارهای Ru و Su برای هر $u \in U$ وابسته خطی هستند.

ب. یا بردار $v \in V$ وجود دارد به طوری که $RU \subseteq \mathrm{span}\{v\}$ و $SU \subseteq \mathrm{span}\{v\}$، یا R و S وابسته خطی هستند.

در تمام لم های زیر فرض کنید $\phi : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{X})$ یک نگاشت جمعی دوسویی باشد به طوری که برای هر $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$، (A, B)، B.O.P. است اگر و فقط اگر $(\phi(A), B)$، B.O.P. باشد.

لم ۲.۲. *فرض کنید $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. به ازای هر $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$، (A, B)، $B.O.P$ است اگر و فقط اگر A یک عملگر اسکالر باشد.*

اثبات. اگر A یک عملگر اسکالر باشد، آن گاه چون $F(B)$ یک فضای برداری است، واضح است که به ازای هر $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$، $A(F(B)) = F(B)$ و ازاین رو، (A, B)، $B.O.P$ است. برای اثبات عکس، فرض کنید $۰ \neq x \in \mathcal{X}$. پس $f \in \mathcal{X}^*$ وجود دارد که $f(x) = ۱$ اگر $B = x \otimes f$، آن‌گاه بنا به فرض $(A, x \otimes f)$، $B.O.P$ است و در نتیجه $A < x > \subseteq < x >$ که این نیز نتیجه می‌دهد x و Ax وابسته خطی‌اند. بنابراین، بنا به قضیه ۱.۲، A مضربی از همانی است. □

لم ۳.۲. *ϕ عملگرهای اسکالر را از دو طرف حفظ می‌کند؛ به عبارت دیگر، A یک عملگر اسکالر هست اگر و فقط اگر $\phi(A)$ اسکالر باشد.*

اثبات. ابتدا فرض کنید A یک عملگر اسکالر باشد. بنا به لم ۲.۲، (A, B) به ازای هر $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$، $B.O.P$ است. بنا به فرضی که برای ϕ داریم، $(\phi(A), B)$ نیز به ازای هر $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$، $B.O.P$ است ازاین رو، با استفاده دوباره از لم ۲.۲ به این نتیجه می رسیم که $\phi(A)$ نیز یک عملگر اسکالر است. به طور مشابه می توان طرف دیگر حکم را ثابت نمود. □

لم ۴.۲. *به ازای هر خودتوان رتبه یک P، $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ وجود دارند که*

$$\phi(P) = \lambda I + \mu P.$$

اثبات. فرض کنید $P = x \otimes f$ که $f(x) = ۱$. همچنین فرض کنید $u \in \ker f$ و g یک تابعک خطی باشد که $g(u) = ۱$. چون $(x \otimes f)u = ۰$، پس $(x \otimes f, u \otimes g)$، B.O.P. است و در نتیجه $(\phi(x \otimes f), u \otimes g)$، B.O.P. است که نتیجه می‌دهد

$$\phi(x \otimes f) < u > \subseteq < u > .$$

بنابراین، $k \in \mathbb{C}$ وجود دارد که $\phi(x \otimes f)u = ku$. این رابطه به ازای هر $u \in \ker f$ برقرار است. از این‌رو، بنا به قضیه ۱.۲، $\phi(x \otimes f)$ روی ابرفضای $\ker f$ مضربی از همانی است. پس $\lambda \in \mathbb{C}$ وجود دارد که $\phi(x \otimes f) |_{\ker P} = \lambda I$.

دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد. یکی اینکه $\phi(x \otimes f)$ روی کل $\mathcal{X}$ مضربی از همانی باشد که درست نمی‌باشد، زیرا بنا به لم ۳.۲، ϕ عملگرهای اسکالر را از دو طرف حفظ می‌کند در حالی که $x \otimes f$ نااسکالر است و دوم اینکه $۰ \neq y \in \mathcal{X}$ و $۰ \neq g \in \mathcal{X}^*$ وجود دارند به طوری‌که $\phi(x \otimes f) = \lambda I + y \otimes g$.

اگر $u \in \ker f$، آن‌گاه

$$\phi(x \otimes f)u = \lambda u + g(u)y \Rightarrow \lambda u = \lambda u + g(u)y \Rightarrow g(u) = ۰$$

$$\Rightarrow \ker f \subseteq \ker g$$

که نتیجه می‌دهد f و g وابسته خطی‌اند. بدون از دست دادن کلیت، می‌توان فرض کرد $\phi(x \otimes f) = \lambda I + y \otimes f$.

چون (P, P)، B.O.P. است، پس $(\phi(P), P)$، B.O.P. است و از این‌رو

$$\phi(x \otimes f) < x > \subseteq < x > \Rightarrow \exists t \in \mathbb{C} : \ (\lambda I + y \otimes f)x = tx$$

$$\Rightarrow \lambda x + f(x)y = tx \Rightarrow y = (t - \lambda)x$$

که نتیجه می‌دهد x و y وابسته خطی‌اند. بنابراین $\mu \in \mathbb{C}$ وجود دارد به طوری‌که $\phi(x \otimes f) = \lambda I + \mu x \otimes f$. □

اثبات قضیه اصلی. اثبات رابه دو قسمت تقسیم می‌کنیم. فرض کنید $x \in \mathcal{X}$ ناصفر باشد.

۱. فرض کنید x و Ax وابسته خطی باشند. $f \in \mathcal{X}^*$ را در نظر می گیریم به طوری که $f(x) = ۱$. قرار دهید $B = x \otimes f$. وابستگی خطی x و Ax نتیجه می‌دهد $(A, x \otimes f)$، B.O.P. است و از این‌رو $(\phi(A), x \otimes f)$، B.O.P. است. بنابراین $\beta \in \mathbb{C}$ وجود دارد که $\phi(A)x = \beta x$.

۲. فرض کنید x و Ax مستقل خطی باشند. در این‌صورت $f \in \mathcal{X}^*$ وجود دارد که $f(x) = ۱$ و $f(Ax) = ۱$. قرار دهید $B = x \otimes f$. در این‌صورت

$$(A - AB)x = Ax - Ax = \circ$$

که نتیجه می‌دهد $(A - AB, B)$، B.O.P. است و از این‌رو $(\phi(A) - \phi(AB), B)$، B.O.P. است. بنا به لم ۴.۲، $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ وجود دارند که $\phi(AB) = \lambda I + \mu AB$. بنابراین $\alpha \in \mathbb{C}$ وجود دارد به طوری‌که

$$\phi(A) - \phi(AB) = (\phi(A) - \lambda I + \mu AB)x = \alpha x$$

$$\Rightarrow \phi(A)x = (\lambda + \alpha)x - \mu Ax.$$

در هر دو قسمت ۱ و ۲، $\phi(A)x \in \operatorname{span}\{x, Ax\}$ و از این رو اثبات به اتمام می‌رسد.

مراجع

[1] M. Brešar and P. Šemrl, On locally linearly dependent operators and derivations, *Trans. Am. Math. Soc.*, **351**(3) (1999), 1257–1275.

[2] J. Chen and Z. Li, Common fixed-points for Banach operator pairs in best approximation, *J. Math. Anal. Appl.*, **336** (2007), 1466–1475.

[3] A. Taghavi and R. Hosseinzadeh, Maps preserving the dimension of fixed points of products of operators, *Linear Multilinear Algebra*, **62** (2013), 1285–1292.

[4] A. Taghavi, R. Hosseinzadeh and V. Darvish, Maps preserving the fixed points of triple Jordan products of operators, *Indag. Math.*, **27**(3) (2016), 850–854.

[5] A. Taghavi, R. Hosseinzadeh and H. Rohi, Maps preserving the fixed points of sum of operators, *Oper. Matrices*, **9** (2015), 563–569.

[6] A. Taghavi and R. Hosseinzadeh, Some fixed points preserver, *Journal of New Researches in Mathematics*, **1**(4) (2016), 163–168.