

Thermodynamic Response Functions in the Quantum Critical Region of Spin-1/2 XY Chain Model¹

Samira Mashhour², Mohammad Oskooeian³, Saeed Mahdavifar^{4*}
and Rouhollah Jafari⁵

Received: 2020.11.14

Revised: 2020.01.14

Accepted: 2021.02.09

Abstract

The spin-1/2 XY chain model in the presence of a transverse magnetic field is considered. The ground state phase diagram consists of two gapped ferromagnetic and the paramagnetic phases. These two phases are separated from each other by the quantum critical point, a neighborhood of which, is known as the quantum critical region. First, using the fermionization approach the Hamiltonian is diagonalized and the spectrum is obtained. Then, using energy spectrum of the system, free energy and thermodynamic quantities such as entropy, specific heat, magnetic expansion coefficient and Grüneisen ratio are calculated and the behavior of these quantities is studied in the quantum critical region. Results show that the different behavior of the specific heat in the critical region is related to the work in the isothermal process. Moreover, the Grüneisen ratio is always independent of the temperature in the critical quantum regions.

Keywords: *Spin-1/2 Chain, XY Model, Fermionization, Specific Heat, Quantum Critical Region.*

¹ DOI: 10.22051/ijap.2021.34570.1190

² Instructor, Department of Physics, University of Guilan, Rasht, Iran.

Email: samira.mashhour7@gmail.com

³ Instructor, Department of Physics, University of Guilan, Rasht, Iran. Email: mgilosqu@guilan.ac.ir

⁴ Professor, Department of Physics, University of Guilan, Rasht, Iran. (Corresponding Author).
Email: smahdavifar@gmail.com

⁵ Assistant Professor, Department of Physics, University of advanced studied, Zanjan, Iran.

Email: rohollah.jafari@gmail.com

فصلنامه علمی فیزیک کاربردی ایران، دانشگاه الزهرا
سال دهم، پیاپی ۲۲، پاییز ۱۳۹۹

مقاله پژوهشی

توابع پاسخ ترمودینامیکی در ناحیه بحرانی کوانتمی زنجره اسپین- $1/2$ مدل XY^۱

سمیرا مشهور^۲، محمد اسکویان^۳، سعید مهدوی فر^۴ و روح الله جعفری^۵

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۸/۲۴

تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۱۰/۲۵

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۱/۲۱

چکیده

در این مقاله زنجره اسپین- $1/2$ مدل XY در حضور میدان مغناطیسی عرضی در نظر گرفته ایم. ابتدا با استفاده از روش فرمیونش، هامیلتونی را در حد ترمودینامیک قطری و طیف انرژی سیستم محاسبه کرده ایم. نمودار فاز حالت پایه سیستم شامل دو فاز دارای گاف فرومغناطیس و پادفرومغناطیس است. این دو فاز توسط نقطه بحرانی کوانتمی از یکدیگر جدا شده اند، که همسایگی این ناحیه را، ناحیه بحرانی کوانتمی می نامند. سپس با استفاده از طیف انرژی سیستم، انرژی آزاد و کمیت های ترمودینامیکی مانند آنتروپی، گرمای ویژه، ضریب انبساط مغناطیسی و نسبت گرونایزن را محاسبه و رفتار این کمیت ها را در نواحی

^۱ DOI: 10.22051/ijap.2021.34570.1190

^۲ مری، گروه آموزشی فیزیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران. Email: samira.mashoor7@gmail.com

^۳ مری، گروه آموزشی فیزیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران. Email: mgilosqu@guilan.ac.ir

^۴ استاد، گروه آموزشی فیزیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران. (نویسنده مسئول).

Email: smahdavifar@gmail.com

^۵ استادیار، دانشکده فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی زنجان، زنجان، ایران.

Email: rohollah.jafari@gmail.com

بحرانی کوانتومی مطالعه کرده‌ایم. نتایج نشان می‌دهد، که رفتار متفاوت گرمای ویژه در ناحیه بحرانی ریشه در کار مکانیکی در فرآیند همدم دارد. مضاف بر اینکه نسبت گرونایزن همواره مستقل از دما در نواحی بحرانی کوانتومی است.

واژگان کلیدی: زنجیره اسپین-۱/۲، مدل XY، فرمیونش، گرمای ویژه، ناحیه بحرانی کوانتومی.

۱. مقدمه

فیزیک دمای پایین شاخه‌ای از علم فیزیک در ارتباط با خواص فیزیکی ماده در محدوده دمایی بسیار کم و نزدیک به صفر مطلق است. در این محدوده، رفتار سیستم تحت کنترل افت و خیزهای کوانتومی [۱] و گرمایی است. بنابراین انتظار می‌رود که با کاهش دما پدیده‌های کوانتومی در مقیاس ماکروسکوپیک مشاهده شوند. در سال‌های اخیر، خواص فیزیکی و به ویژه رفتار دمای پایین سیستم‌های مغناطیسی کم‌بعد به سبب اهمیتی که در طبیعت دارند توجه بسیاری در فیزیک ماده چگال به خود جلب کرده و یکی از مهم‌ترین مباحث در فیزیک مغناطیس‌ها به شمار می‌آیند. برای توصیف دقیق رفتار مغناطیسی این مواد از مدل‌های مؤثر اسپینی استفاده می‌شود که اولین بار توسط هایزنبرگ و دیراک در سال ۱۹۲۶ مطرح شدند. اینکه مغناطیس‌های واقعی می‌توانند به صورت مؤثر یک بعدی رفتار کنند انگیزه چشمگیری برای مطالعه سیستم‌های اسپینی یک‌بعدی ایجاد کرده است [۲].

خاصیت جالب دیگری که در همه مواد مغناطیسی به صورت ذاتی وجود دارد، اثر مگنتو کالریک است [۳]. اثر مگنتو کالریک یک پدیده مغناطیس-ترمودینامیکی است. در این پدیده، با قرار دادن یک ماده در معرض میدان مغناطیسی متغیر، تغییر دمایی در سیستم ایجاد می‌شود. این اثر که نخستین بار توسط واربرگ در سال ۱۸۸۱ در آهن کشف شد در همه مواد مغناطیسی به طور ذاتی مشاهده می‌شود و شدت آن بستگی به خواص ماده مورد مطالعه دارد. واربرگ مشاهده کرد که با اعمال میدان مغناطیسی به آهن و تغییر آن به صورت بی‌دررو، دمای آن تغییر می‌کند. در سال‌های گذشته مطالعه اثر مگنتو کالریک به طور چشمگیری افزایش پیدا کرده است [۴]. سهولت به دست آوردن اطلاعات از حالت مغناطیسی، گذارهای فاز مغناطیسی و همچنین استفاده از مواد مغناطیسی به عنوان اجزای سازنده سردکننده‌های مغناطیسی، از مهم‌ترین دلایل توجه به اثر مگنتو کالریک است. بررسی اثر فوق در زنجیره‌های اسپینی نیز از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است [۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰].

اخیراً مطالعه رفتار گرمایی در نزدیکی نقطه بحرانی کوانتومی از دیدگاه تجربی امکان پذیر شده است [۱۱، ۱۲، ۱۳]. گزارش‌ها نشان می‌دهد که تعامل بین افت‌وخیزهای گرمایی و کوانتومی در نزدیکی نقطه بحرانی کوانتومی، خواص فیزیکی سیستم‌ها را به شدت تحت تأثیر قرار می‌دهد. از دیدگاه نظری، اخیراً مقاله جالبی درباره مدل زنجیره آیزینگ اسپین-۱/۲ در میدان عرضی منتشر شده که در آن نسبت گرونایزن به صورت تحلیلی محاسبه و رفتار آن در ناحیه بحرانی کوانتومی مطالعه شده است [۱۴]. نتایج نشان داده‌اند که اگرچه نسبت گرونایزن در دمای صفر رفتار توانی دارد ولی در میدان عرضی بحرانی به مقدار ثابتی می‌رسد.

در این مقاله، مدل زنجیره اسپینی ناهمسانگرد XY در میدان عرضی مطالعه شده است. مدل فوق در یکی از حالت‌های حدی به مدل آیزینگ در میدان عرضی تبدیل می‌شود. با استفاده از روش فرمیونش همیلتونی سیستم را قطری و ارتباط بین رفتار دمای پایین گرمای ویژه سیستم در نزدیکی نقاط گذار فاز کوانتومی و طیف انرژی شبه ذرات نشان داده شده است. در نهایت، رفتار نسبت گرونایزن نیز در نواحی بحرانی تحلیل شده است.

۲. مدل زنجیره XY

هامیلتونی مربوط به زنجیره اسپین-۱/۲ مدل XY در حضور میدان مغناطیسی خارجی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H = J \sum_n (1 + \gamma) s_n^x s_{n+1}^x + (1 - \gamma) s_n^y s_{n+1}^y - h \sum_n s_n^z \quad (1)$$

در رابطه (۱)، J قدرت برهم کنش بین اسپین‌هاست، s_n عملگر اسپین در مکان n -ام شبکه، h میدان مغناطیسی عرضی و γ پارامتر ناهمسانگرد است. مقدار صفر ناهمسانگردی معادل هامیلتونی XX و مقدار یک آن معادل مدل آیزینگ در میدان عرضی است. نمودار فاز حالت پایه این سیستم مشخص شده است [۱۷]. در غیاب میدان مغناطیسی و ناهمسانگردی، سیستم در فاز سیال لائینجر بدون گاف است. به محض اعمال ناهمسانگردی، سیستم به فاز دارای گاف نیل می‌رود. بنابراین، $\gamma = 0$ نقطه بحرانی کوانتومی است. از طرف دیگر، با اعمال میدان مغناطیسی، گاف سیستم شروع به کاهش می‌کند و در میدان بحرانی $h_c = J$ گذار فاز کوانتومی به فاز پارامغناطیس روی می‌دهد.

در مرحله اول برای قطری‌سازی هامیلتونی فوق از روش فرمیونش استفاده می‌کنیم [۱۵]. فرمیونش روشی ریاضی برای حل مدل‌های اسپینی با اسپین-۱/۲ است که بر اساس نگاشت بین عملگرهای اسپینی و عملگرهای خلق و فنای فرمیونی کار می‌کند. این نگاشت توسط تبدیلات جوردن-ویگنر انجام می‌شود [۱۶].

$$S_n^+ = a_n^\dagger e^{i\pi \sum_L^{n-1} a_L^\dagger a_L} \quad (2)$$

$$S_n^- = a_n e^{-i\pi \sum_L^{n-1} a_L^\dagger a_L} \quad (3)$$

$$S_n^z = a_n^\dagger a_n - \frac{1}{2} \quad (4)$$

در مرحله بعد با استفاده از تبدیلات فوریه، عملگرهای فرمیونی را در فضای تکانه (k) باز نویسی و در گام آخر با کاربرد تبدیل بوگولیوف [۱۶]، هامیلتونی قطری شده به صورت زیر به دست می آید:

$$H = \sum_k \varepsilon(k) \left(\beta_k^+ \beta_k - \frac{1}{2} \right) \quad (5)$$

که در رابطه فوق، $\varepsilon(k)$ طیف انرژی شبه ذرات سیستم است،

$$\varepsilon(k) = \sqrt{(J \cos k - h)^2 + (J \gamma \sin k)^2} \quad (6)$$

۳. بررسی توابع ترمودینامیکی

با استفاده از طیف انرژی و نمایش فرمیونی هامیلتونی، توابع ترمودینامیکی از قبیل انرژی آزاد، آنتروپی، گرمای ویژه و ضریب انبساط مغناطیسی محاسبه می شوند:

$$f = -\frac{k_B T}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \ln \left[2 \cosh \left(\frac{1}{2} \beta \varepsilon(k) \right) \right] \quad (7)$$

$$S = \beta^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} \right) \quad (8)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \ln \left(2 \cosh \frac{\beta \varepsilon(k)}{2} \right) - \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \beta \varepsilon(k) \operatorname{tgh} \left(\frac{\beta \varepsilon(k)}{2} \right)$$

$$C_v = -\beta \left(\frac{\partial S}{\partial \beta} \right) \quad (9)$$

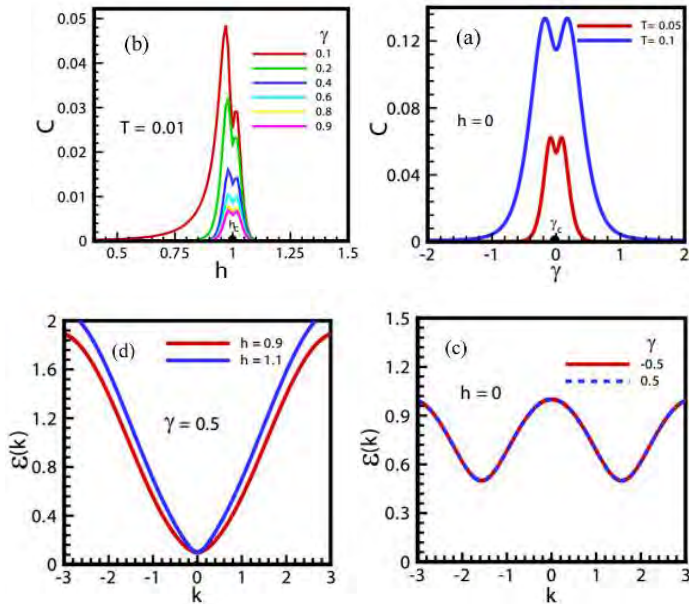
$$= \frac{1}{k_B T^2} \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \varepsilon(k)^2 \left(1 + \operatorname{tgh}^2 \left(\frac{1}{2} \beta \varepsilon(k) \right) \right)$$

$$\alpha = -\left(\frac{\partial S}{\partial h} \right) \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \frac{(h - J \cos k)}{4T^2} \operatorname{sech}^2 \frac{\beta \varepsilon(k)}{2}$$

ابتدا، وابستگی به میدان عرضی گرمای ویژه در دماهای پایین بررسی شده است. قبل از این مشخص شده بود که در منحنی گرمای ویژه مغناطیس های کوانتومی کم بُعد در دمای پایین، ساختار دوقله ای در طرفین نقطه بحرانی کوانتومی دیده خواهد شد که به عنوان یکی از مشخصه های گذار

فاز کوانتومی نیز شناخته شده است [۱۸، ۱۹، ۲۰]. در اینجا گرمای ویژه برای مقادیر مختلف ناهمسانگردی و میدان مغناطیسی محاسبه شده و نتایج در شکل ۱ (a) & (b) ارائه شده است.



شکل ۱ (a) گرمای ویژه بر حسب پارامتر ناهمسانگرد γ برای $h=0$ ، (b) گرمای ویژه بر حسب میدان h و برای مقادیر مختلف $0 < \gamma < 1$ ، (c) نمودار طیف انرژی سیستم در غیاب میدان و در اطراف $\gamma_c = 0$ ، (d) طیف انرژی در اطراف میدان بحرانی $h_c=1$ و برای پارامتر ناهمسانگرد $\gamma = 0.5$.

همچنانکه انتظار می‌رود ساختار دوقله‌ای در طرفین نقاط بحرانی کوانتومی در نمودار همدمای گرمای ویژه دیده می‌شود. ساختار دوقله‌ای فوق در غیاب میدان متقارن و در حضور میدان عرضی، نامتقارن است. رفتار تقارنی فوق ریشه در طیف انرژی شبه ذرات سیستم دارد. در شکل ۱ (c & d) طیف انرژی شبه ذرات بر حسب تکانه در نزدیکی نقاط بحرانی رسم شده است. تغییر ناهمسانگردی یا تغییر میدان عرضی، باعث تغییر در هامیلتونی و متعاقباً تغییر ترازهای انرژی می‌شود. تغییر ترازهای انرژی نیز در واقع معادل کار مکانیکی است. در غیاب میدان ($h=0$)، نقطه بحرانی در $\gamma_c = 0$ قرار دارد. در اطراف نقطه بحرانی فوق طیف انرژی شبه ذرات دقیقاً روی هم قرار می‌گیرند (شکل ۱ (c)). در واقع ضریب ناهمسانگردی به شکل مجذوری در رابطه انرژی شبه ذرات ظاهر شده و به همین دلیل مقادیر مثبت و منفی آن، تفاوتی در انرژی شبه ذرات ایجاد نمی‌کنند. از طرفی، انرژی شبه ذرات برای مقادیر اطراف میدان بحرانی $h_c=1$ روی هم قرار نمی‌گیرند (شکل ۱ (d)). از دیدگاه فیزیکی، کار مکانیکی انجام یافته بر سیستم برای مقادیر یکسان

ولی مختلف‌العلامت ناهمسانگردی تفاوت نمی‌کند. ولی در نزدیکی میدان بحرانی، کار مکانیکی انجام‌یافته بر سیستم برای میدان‌های مغناطیسی بزرگ‌تر از مقدار بحرانی بیشتر است. به همین دلیل، در نمودار گرمای ویژه بر حسب پارامتر ناهمسانگردی γ قله‌ها متقارن اما بر حسب میدان، نامتقارن دیده می‌شوند.

۴. نسبت گرونایزن

اثر مگنتوکلریک و مقدار مرتبط با آن به نام نسبت گرونایزن که با پارامتر Γ_H نشان داده می‌شود، ابزار مهمی برای شناسایی نقاط بحرانی کوانتومی است [۸]. این پارامتر برای یک سیستم مغناطیسی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Gamma_H = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial H} \right)_S = \frac{\alpha}{C} \quad (11)$$

$$= -\frac{1}{T} \frac{(\partial M / \partial T)}{(\partial S / \partial T)} = -\frac{1}{T} \frac{(\partial S / \partial H)}{(\partial S / \partial T)}$$

با داشتن ضریب انبساط مغناطیسی و گرمای ویژه این کمیت را می‌توان محاسبه کرد. ما با محاسبه تحلیلی کمیت‌های ترمودینامیکی، این پارامتر را در ناحیه بحرانی کوانتومی، هم در غیاب میدان و هم در حضور میدان محاسبه کرده‌ایم. با بسط انتگرالده مربوط به انرژی آزاد در ناحیه بحرانی کوانتومی مطابق پیشنهاد مرجع [۱۴]، رفتار مقیاسی تمامی کمیت‌های ترمودینامیکی تعیین شده است. نتایج در غیاب میدان مغناطیسی ($h=0$) به صورت زیر تعیین شده‌اند:

$$f \approx -t^2 \left[\frac{\ln 2}{\pi} - \frac{J^2(1-\gamma^2)}{24\pi} + \frac{J^2}{8t^2} \right] \quad (12)$$

$$S \approx t \left(\frac{2 \ln 2}{\pi} - \frac{J^2(1-\gamma^2)}{12\pi} \right) \quad (13)$$

$$C_v \approx t \left(\frac{2 \ln 2}{\pi} - \frac{J^2(1-\gamma^2)}{12\pi} \right) \quad (14)$$

$$\alpha \approx -\left(\frac{\partial S}{\partial \gamma} \right) = t \gamma \left(\frac{J^2}{6\pi} \right) \quad (15)$$

$$\Gamma \approx \frac{J^2 \gamma}{12 \ln 2 + J^2(1-\gamma^2)} \quad (16)$$

همچنانکه مشاهده می‌شود، توابع آنتروپی، گرمای ویژه و ضریب انبساط مغناطیسی به صورت خطی نسبت به افزایش دما تغییر کرده و دارای نمای بحرانی یکسانند. علاوه بر این، نسبت

گرونایزن مستقل از دماست که مشابه رفتار در مدل آیزینگ در حضور میدان عرضی است [۱۴]. همچنین، نتایج فوق در توافق با روابط فرامقیاسی نسبت گرونایزن است [۳]. محاسبات فوق در حضور میدان و برای مقادیر مختلف ناهمسانگردی نیز انجام شد و نتایج زیر به دست آمد:

$$f \approx -t^2 \left[\frac{\ln 2}{\pi} - \frac{J^2(1-\gamma^2)}{24\pi} + \frac{Jh}{24\pi} \right] \quad (۱۷)$$

$$S \approx t \left(\frac{2}{\pi} \ln 2 - \frac{J^2(1-\gamma^2)}{12\pi} + \frac{Jh}{12\pi} \right) \quad (۱۸)$$

$$C_v \approx t \left(\frac{2}{\pi} \ln 2 - \frac{J^2(1-\gamma^2)}{12\pi} + \frac{Jh}{12\pi} \right) \quad (۱۹)$$

$$\alpha \approx -\frac{J}{12\pi} t \quad (۲۰)$$

$$\Gamma \approx -\frac{J}{24 \ln 2} + \frac{1}{J(1-\gamma^2)-h} \quad (۲۱)$$

نکته مهم آن است که استقلال دمایی نسبت گرونایزن در حضور ناهمسانگردی بستگی به مقدار ناهمسانگردی نداشته و در توافق کامل با نتایج مدل آیزینگ است [۱۴].

۵. نتیجه گیری

اخیراً، اثر مگنتو کالریک در مدل زنجیره آیزینگ با میدان عرضی مطالعه شده است. نتایج تحلیل های نظری نشان دادند که نسبت گرونایزن در ناحیه بحرانی مستقل از دماست. در اینجا ما مدل زنجیره XY را در نظر گرفتیم که در حالت حدی به آیزینگ تبدیل می شود. با استفاده از روش فرمیونش، هامیلتونی را در حد ترمودینامیک قطری کردیم و توابع پاسخ ترمودینامیکی را محاسبه کردیم.

در محدوده دماهای پایین، گرمای ویژه برحسب میدان مغناطیسی h یک ساختار دوقله ای در اطراف میدان بحرانی کوانتومی نشان داد. قله های فوق تقارن نسبت به مقدار بحرانی نداشتند. اما گرمای ویژه در غیاب میدان و برحسب پارامتر ناهمسانگردی γ ، یک ساختار دوقله ای متقارن را نشان می داد. علاوه بر این، رفتار مقیاسی توابع پاسخ را نیز در ناحیه بحرانی مطالعه کردیم. نتایج ما نشان می دهد که نسبت گرونایزن همواره در ناحیه بحرانی کوانتومی مستقل از دماست.

۶. تقدیر و تشکر

از معاونت محترم پژوهشی دانشگاه گیلان تشکر می کنیم.

منابع

- [1] Sachdev S., "Quantum Phase Transitions", Cambridge University Press, Cambridge (1999).
- [2] Gu B., Su G., Gao S., Magnetic properties of J–J' quantum Heisenberg chains with spin $S=1/2, 1, 3/2$ and 2 in a magnetic field, *Journal of Physics: Condensed Matter* **17**, 6081 (2005).
- [3] Zhu L., Garst M., Rosch A., Si Q., Universally diverging Grüneisen parameter and the magnetocaloric effect close to quantum critical point, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 066404 (2003).
- [4] Tishin A. M., Spichkin Y. I., The magnetocaloric effect and its applications, Institute of Physics Publishing, Bristol, Philadelphia, (2003).
- [5] Zhitomirsky M. E., Honecker A., Magnetocaloric effect in one-dimensional antiferromagnets, *Theory and Experiment* **07**, P07012 (2004).
- [6] Garst M., Rosch A., Sign change of the Grüneisen parameter and magnetocaloric effect near quantum critical points, *Physical Review B* **72**, 205129 (2005).
- [7] Ribeiro G. A. P., The magnetocaloric effect in integrable spin-s chains, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, P12016 (2010).
- [8] Trippe C., Honecker A., Klümper A., Ohanyan V., Exact calculation of the magnetocaloric effect in the spin-1/2 XXZ chain, *Physical Review B* **81**, 054402 (2010).
- [9] Wolf B., Tsui Y., Jaiswal-Nagar D., Tutsch U., Honecker A., Removic-Langer K., Magnetocaloric effect and magnetic cooling near a field-induced quantum-critical point, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **108**, 6862-6866 (2011).
- [10] Jahangiri J., Amiri F., Mahdavifar S., Thermodynamic behavior near the quantum orders in dimerized spin $S=1/2$ two-leg ladders, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* **439**, 22-29 (2017).
- [11] Merchant P., Normand B., Kramer K., Boehm M., Morrow D., and Rugg C., Quantum and classical criticality in a dimerized quantum antiferromagnet, *Nat. Phys.* **10**, 373 (2014).
- [12] Schuberth E., Tippmann M., Steinke L., Lausberg S., Steppke A., Brando M., Krellner C., Geibel C., Yu R., Si Q., Emergence of superconductivity in the canonical heavy-electron metal YbRh₂Si₂, *Science* **351**, 485 (2016).
- [13] Wu J., Zhou F., and Wu C., Quantum criticality of bosonic systems with the Lifshitz dispersion, *Phys. Rev. B* **96**, 085140 (2017).
- [14] Wu J., Zhu L., Si Q., Crossovers and critical scaling in the one-dimensional transverse-field Ising model, *Phys. Rev. B* **97**, 245127 (2018).
- [15] Mancini M., "Fermionization of Spin Systems", Thesis, (2008).
- [16] Bogoliubov N., "On the theory of superfluidity." *J. Phys* **11.1**, 23 (1947).
- [17] Mofidnakhai F., Khastehdel Fumani F., Mahdavifar S., and Vahedi J., "Quantum correlations in anisotropic XY-spin chains in a transverse magnetic field", *Phase Transitions* **91**, no. 12 1256-1267 (2018).
- [18] Zhitomirsky M. E., Tsunetsugu H., Exact low-temperature behavior of a kagome antiferromagnet at high-fields, *Phys. Rev. B* **70**, 100403 (2004).
- [19] Hasanzadeh J., Feiznejad Z., Mahdavifar S., Specific heat of the 1D spin-1/2 Ising model with added Dzyaloshinskii-Moriya interaction, *J. Supercond. Nov. Magn.* **27**, 595, (2014).
- [20] Amiri F., Mahdavifar S., Hadipour H., Shahri Naseri M., Thermodynamics of the spin-1/2 Two-leg ladder compound (C₅H₁₂N₂)₂CuBr₄, *J. Low Temp. Phys.* **177**, 203 (2014).