

Research Paper

## Solution of the Dirac Equation for Pseudo-Hermitian Hamiltonian and Energy-levels Crossing<sup>1</sup>

Zahra Bakhshi<sup>\*2</sup>, Fereshte Soleimani<sup>3</sup> and Sare Khoshdooni<sup>4</sup>

Received: 2021.04.13

Revised: 2021.06.24

Accepted: 2021.08.12

### Abstract

In this paper, the relativistic Dirac equation in one dimension is investigated for a particle in an external electromagnetic field, with the property of position-dependent effective mass approximation (*PDEM*), in the absence of vector potential. By removing the lower spinor component and combining the pair of equations, a Schrödinger-like equation is obtained for the upper spinor component. Using canonical transformations and introducing two first-order Hermitian and anti-Hermitian differential operators, a formalism for pseudo-hermitic Hamiltonians with parity-time reversal symmetry (*PT*) has been obtained. Comparing the equation derived from pseudo-Hermitian Hamiltonian with the non-relativistic Schrödinger equation leads to a general formalism for one-dimensional solvable imaginary non-Hermitian potentials with real energy spectra. Also, using this process, the complex potentials of Pöschl-Teller and Scarf II with real energy spectra in Dirac equation with *PDEM* approximation and *PT* symmetry have been investigated and their application has been expressed. For some particular parameters we will see the phenomenon of energy-levels crossing. In fact, it means that energy levels disappear from the spectrum. Also, for the mentioned examples, potential figures are drawn.

**Keywords:** *Dirac Equation; Schrödinger Equation; Imaginary Potential; Pseudo-Hermitian Hamiltonian.*

---

<sup>1</sup> DOI: 10.22051/ijap.2021.35731.1203

<sup>2</sup> Assistant Professor, Department of Physics, Faculty of Basic Sciences, Shahed University, Tehran, Iran. (Corresponding Author). Email: z.bakhshi@shahed.ac.ir

<sup>3</sup> M. Sc. Student, Department of Physics, Faculty of Basic Sciences, Shahed University, Tehran, Iran. Email: sn.fereshte1991@gmail.com

<sup>4</sup> M. Sc. Student, Department of Physics, Faculty of Basic Sciences, Shahed University, Tehran, Iran. Email: sare.khoshdooni@gmail.com

فصلنامه علمی فیزیک کاربردی ایران، دانشگاه الزهرا

سال یازدهم، پیاپی ۲۵، تابستان ۱۴۰۰

صص ۱۵ - ۳۱

مقاله پژوهشی

## حل معادله دیراک برای هامیلتونی شبه هرمیتی و گذار از ترازهای انرژی<sup>۱</sup>

زهرا بخشی<sup>۲\*</sup>، فرشته سلیمانی<sup>۳</sup> و ساره خوشدونی<sup>۴</sup>

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۱/۲۴

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۴/۰۳

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۵/۲۱

### چکیده

در این مقاله، معادله نسبیته دیراک در یک بعد، برای ذره‌ای در یک میدان الکترومغناطیسی خارجی با تقریب جرم مؤثر وابسته به مکان، و در نبود پتانسیل برداری، مورد بررسی قرار می‌گیرد. با حذف مؤلفه اسپینور پایین و ترکیب جفت معادلات، معادله شرودینگر گونه‌ای برای مؤلفه اسپینور بالا به دست می‌آید. با استفاده از تبدیلات کانونیک و معرفی دو عملگر دیفرانسیلی مرتبه اول هرمیتی و پاد هرمیتی، فرمول‌بندی مناسبی برای هامیلتونی‌های شبه هرمیتی با تقارن پارایته-وارونی زمان ( $PT$ ) نتیجه می‌شود. مقایسه معادله حاصل از هامیلتونی شبه هرمیتی با معادله غیر نسبیته شرودینگر، به یک فرمول‌بندی کلی برای پتانسیل‌های موهومی غیر هرمیتی

<sup>۱</sup> DOI: 10.22051/ijap.2021.35731.1203

<sup>۲</sup> استادیار، گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شاهد، تهران، ایران. (نویسنده مسئول) Email: z.bakhshi@shahed.ac.ir

<sup>۳</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شاهد، تهران، ایران. Email: sn.fereshte1991@gmail.com

<sup>۴</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شاهد، تهران، ایران. Email: sare.khoshtooni@gmail.com

حل پذیر یک بعدی با طیف انرژی حقیقی منجر خواهد شد. همچنین با به کارگیری این رهیافت، پتانسیل های موهومی پاشل- تلمر و اسکارف ۲ با طیف انرژی حقیقی در معادله دیراک با چارچوب جرم مؤثر وابسته به مکان و تقارن  $PT$  بررسی و کاربرد آنها بیان می گردد. به ازای برخی پارامترها، شاهد پدیده گذار (عبور) از ترازهای انرژی خواهیم بود. در واقع به تعبیری می توان گفت که ترازهای انرژی از طیف انرژی ناپدید می شوند. همچنین برای مثال های ذکر شده، نمودارهای پتانسیل نیز رسم شده است.

**واژگان کلیدی:** معادله دیراک، معادله شرودینگر، پتانسیل موهومی، هامیلتونی شبه هرmitی.

## ۱. مقدمه

مطالعه هامیلتونی های غیر هرmitی با تقارن  $PT$  نخستین بار توسط بندر و بوتچر انجام شد. پیش از آن تعداد فراوانی مقاله در زمینه های گوناگون مکانیک کوانتومی با تقارن  $PT$  منتشر شده بود. مطالعه این نوع تقارن با بررسی مدل های مکانیک کوانتومی آغاز شد و در جنبه های گوناگون ابر تقارنی، شبه حل پذیر و نظریه میدان کوانتومی ادامه یافت. نظریه تقارن  $PT$ ، به عنوان تحلیلی پیوسته از نظریه های مربوط به گذار از فضای حقیقی به موهومی نیز به کار می رود. مسائل با تقارن  $PT$  در نظریه میدان های کوانتومی مطالعه می شوند، همچنین از طریق شباهت های ریاضیاتی به مسائل فیزیک حالت جامد نیز مرتبط اند. از نوع تأثیر دو عملگر تقارنی گسسته یکی پارته (انعکاس فضا)، که با  $P$  نشان داده می شود و دیگری وارونی زمان، با نمایش  $T$ ، روی متغیرهای دینامیکی  $x$  (عملگر مکان) و  $\rho$  (عملگر تکانه) تعریف می شوند. عملگر پارته خطی است و روی عملگر تکانه  $\rho$  و عملگر مکان  $x$  به صورت  $P\rho P = -\rho$  و  $PxP = -x$  اثر می کند. عملگر  $T$  غیرخطی است و به صورت  $TxT = x$  و  $T\rho T = -\rho$  عمل می کند. از طرفی  $T$  تغییر علامت  $i \rightarrow -i$  را می دهد، زیرا باید رابطه جابجایی  $[x, \rho] = i$  بین متغیرهای دینامیکی مکانیک کوانتومی حفظ شود. از طرف دیگر، مجذور این عملگرها، عملگر واحد است ( $P^2 = T^2 = 1$ ) و با هم نیز جابجا می شوند [۱-۲].

روش های مختلفی برای ساخت هامیلتونی غیر هرmitی با طیف حقیقی وجود دارد و بدین منظور از مکانیک کوانتومی ابرتقارنی استفاده می شود. برای تعمیم تقارن  $PT$  شرط  $\eta$ -شبه هرmitی جایگزین آن می شود، با این مفهوم که بیان می کند تقارن  $PT$  شامل زیرمجموعه هایی است که به اصطلاح

$\eta$ -شبه‌هرمیتی نامیده می‌شوند. هامیلتونی  $H$  یک  $\eta$ -شبه‌هرمیتی است اگر از تبدیل تشابهی  $\eta H = H^\dagger \eta$  پیروی کند [۳-۴].

در سال‌های اخیر مطالعه سیستم‌های کوانتومی در چارچوب جرم مؤثر وابسته به مکان (PDEM) مورد توجه زیادی واقع شده است. ذرات کوانتومی با جرم مؤثر وابسته به مکان برای مطالعه مسائل فیزیکی مدل‌های جالبی هستند که در بررسی چگالی انرژی در مسائل چند جسمی، تعیین خواص الکترونیکی ساختارهای چندگانه نیم‌رساناها و همچنین توصیف خواص پیوندهای چندگانه و نقاط کوانتومی به کار می‌روند [۵-۸].

بررسی تأثیرات نسبیتی در سیستم‌های شامل اتم‌های سنگین یا یون‌های ناخالص سنگین بسیار مهم و ضروری به نظر می‌رسد [۹]. برای این نوع مواد مطالعه ویژگی‌های معادله دیراک در شرایط محیطی که جرم به صورت تابعی از مکان است، اهمیت بسیار می‌یابد [۱۰].

مدل‌های غیرهرمیتی کاربردهای زیادی در مطالعه سیستم‌های فیزیکی مانند فیزیک هسته‌ای، نظریه میدان‌های کوانتومی و ... دارد. پاسخ‌های معادلات نسبیتی و غیر نسبیتی با هامیلتونی‌های غیرهرمیتی که دارای طیف انرژی حقیقی یا موهومی هستند، با روش‌های متفاوت مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته‌اند. از این‌رو حل معادله دیراک با جرم مؤثر برای یک پتانسیل موهومی غیرهرمیتی و طیف انرژی حقیقی می‌تواند یک مسئله قابل توجه و جالب باشد [۱۱-۱۶، ۸].

هامیلتونی دیراک را می‌توان در حضور برهمکنش‌های متفاوتی از جمله در حضور میدان‌های الکترومغناطیسی مورد مطالعه قرار داد. در این برهمکنش‌ها، پتانسیل‌های اسکالر و برداری داخل میدان‌های الکترومغناطیسی نهفته‌اند. از آنجا که معادله دیراک یک معادله با فرم ماتریسی است، می‌توان آن را به صورت دو معادله دیفرانسیل جفت شده مرتبه اول برای مؤلفه‌های اسپینوری بالا و پایین نوشت و در شرایط خاص برای بعضی از برهمکنش‌ها با حذف یکی از مؤلفه‌ها، یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم برای مؤلفه اسپینوری دیگر به دست آورد. یکی از روش‌های حل این معادله، مقایسه آن با مسائل حل شده در مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی است [۱۶-۱۸]. اسپینورهای دیراک از جهات مختلف مهم و جالب توجه هستند. مهمتر از همه این که در نظریه میدان کوانتومی همه فرمیون‌های ذرات بنیادی شناخته شده در طبیعت، شامل الکترون و کوارک، را توصیف می‌کنند و در پاسخ موج تخت برای معادله دیراک ظاهر می‌شوند، که ترکیبی خاص از دو اسپینور ویل است. از نظر جبری، آنها به یک معنای خاص، مانند «ریشه مربعی» یک بردار رفتار می‌کنند. این نکته از بررسی مستقیم به آسانی مشخص نمی‌شود، اما به مرور آشکار شده است که نمایش‌های اسپینوری در علم هندسه دارای کاربرد هستند. به عنوان مثال، همه فضای ریمانی به طور مؤثر می‌تواند از طریق

جبر کلیفورد دارای اسپینور و اتصالات چرخشی باشد [۱۹]. اسپینور دیراک مخصوص فضا-زمان مینکوفسکی و تبدیلات لورنتز است. نمایش خاصی از ماتریس‌های گاما است و برای نمایش پاسخ-های انرژی مثبت و منفی معادله دیراک مناسب‌ترین است. پاسخ‌های انرژی منفی معادله دیراک در نگاه اول مشکل ساز به نظر می‌رسند. در نظریه کوانتومی، یک ذره می‌تواند بین حالت‌ها گذار انجام دهد. از این رو همه حالت‌های دیراک برای گذار به یک تراز پایین‌تر، ناپایدار به نظر می‌رسند. جواب دیراک به این اشکال، این بود که فرض کرد تقریباً تمام حالت‌های با انرژی منفی پر هستند، به طوری که اصل طرد پائولی اجازه گذار به آنها را نمی‌دهد. حالت‌های کوانتومی بس‌ذره‌ای که در آن تمام حالت‌های با انرژی منفی اشغال شده‌اند، دریای دیراک نامیده می‌شود. ذره‌ای که در یک حالت با انرژی منفی می‌افتد با مقدار زیادی تابش انرژی به عنوان نابودی همزمان یک زوج ذره-پاد ذره دیده می‌شود. برعکس، برانگیخته شدن یک ذره از حالت با انرژی منفی به حالتی با انرژی مثبت به عنوان تولید زوج دیده خواهد شد. برانگیختگی یک پوزیترون، پاد ذره الکترون، به صورت آزمایشگاهی در ۱۹۳۲ به اثبات رسید، و تولید زوج بلافاصله بعد از آن مشاهده شد [۲۱]، [۲۰].

در سیستم‌های کوانتومی یک‌بعدی ویژه‌مقادیر را با استفاده از روش‌های جبری و ویژه‌توابع حالت‌های مقید را با استفاده از عملگرهای ایجاد شده از جبر لی و تأثیر آن بر حالت پایه می‌توان تعیین کرد. همچنین هرگاه عملگرها بتوانند ویژه‌توابع وابسته به ویژه‌مقادیر یکسان سیستم‌ها را با پارامترهای پتانسیلی متفاوت ایجاد کنند، جبر به کار رفته جبر پتانسیلی خواهد بود و روش جبری نتایجی را برای خانواده پتانسیلی ارائه می‌دهد، از این رو، این روش را تقارن دینامیکی می‌نامند. در این روش به طور معمول نقطه شروع کار، معرفی جبر مولد طیف (SGA) برای مسئله مورد نظر است. هرگاه هامیلتونی  $H$  بتواند بر حسب مولد‌های جبر بیان شود، SGA وجود خواهد داشت. در این صورت نظریه گروه می‌تواند برای تعیین حدهای حل‌پذیر دقیق مورد استفاده قرار گیرد. در واقع زمانی حل معادله شرودینگر می‌تواند یک مسئله جبری باشد که آن مسئله با استفاده از ابزار نظریه گروه قابل بررسی باشد. علاوه بر ایجاد یک روش کلی برای مسئله مورد نظر، SGA می‌تواند به عنوان حالت‌های خاص، حدهای حل‌پذیر دقیق را نیز ایجاد کنند. تقارن دینامیکی تاکنون روی حالت‌های مقید و پیوسته متمرکز شده است. با نگاشت مسائل مکانیک کوانتومی به یک ساختار جبری، نظریه گروه می‌تواند انرژی‌های برانگیخته و حالت‌های ویژه سیستم مورد نظر را ایجاد کند. مسائل بحث شده بر حسب مفهوم جبر پتانسیلی را با استفاده از روش مکانیک کوانتومی آبر تقارنی نیز می‌توان مورد بررسی قرار داد [۲۲-۲۴].

روند ادامه مقاله در بخش‌های بعدی به این شرح است: شکل ماتریسی معادله نسبیتی دیراک با جرم مؤثر وابسته به مکان در یک میدان مغناطیسی خارجی را به صورت دو معادله دیفرانسیل جفت شده مرتبه اول برای مؤلفه‌های اسپینوری بالا و پایین می‌نویسیم. معادله‌های مورد نظر با حذف مؤلفه اسپینور پایین به یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم برای مؤلفه اسپینور بالا تبدیل می‌شود [۲۵-۲۶]. این معادله شرو دینگر گونه‌ای با جرم مؤثر وابسته به مکان است که با استفاده از تبدیلات کانونیک و معرفی دو عملگر دیفرانسیلی مرتبه اول هرمیتی و پادهرمیتی  $i\eta_1 = \eta_2$  به یک فرمول‌بندی کلی برای هامیلتونی  $\eta$ -شبه‌هرمیتی منجر می‌شود. همچنین از مقایسه معادله حاصل از هامیلتونی  $\eta$ -شبه‌هرمیتی با معادله غیر نسبیتی شرو دینگر، یک فرمول‌بندی کلی برای پتانسیل مؤثر نتیجه می‌شود. این رهیافت در پتانسیل‌های موهومی مدل پاشل-تلا و اسکارف ۲ با طیف انرژی حقیقی در معادله دیراک با چارچوب جرم مؤثر وابسته به مکان و تقارن  $PT$  به کار گرفته شده است [۲۷-۲۹]. همچنین پدیده عبور از ترازهای انرژی یا به اصطلاح پرواز ترازها مشاهده می‌شود، در واقع به یک تعبیر می‌توان گفت که ترازهای انرژی پرواز می‌کنند و از طیف ناپدید می‌شوند [۳۰-۳۲]. نمودارهای مربوط به پتانسیل‌های مورد نظر نیز رسم شده است (شکل ۱ و ۲).

## ۲. فرمول‌بندی کلی هامیلتونی $\eta$ -شبه‌هرمیتی

معادله نسبیتی دیراک برای ذره‌ای که در یک میدان الکترومغناطیسی خارجی  $A_\mu$  در حرکت است، در واحد اتمی  $\hbar = c = 1$  به صورت زیر نوشته می‌شود [۳۳]:

$$[i \gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - M(x)]\psi = 0 \quad (1)$$

$M(x)$  جرم مؤثر وابسته به مکان ذره و  $\gamma_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) ماتریس‌های گاما با تعریف زیر است:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

در ماتریس‌های بالا،  $I$  ماتریس واحد  $2 \times 2$  و  $\sigma^i$  ماتریس‌های پائولی هستند. در نبود پتانسیل برداری و با در نظر گرفتن رابطه  $v(x) = eA_0(x)$ ، معادله یک بعدی دیراک در حالت  $\psi(x, t) = e^{-iEt}\psi(x)$  که در آن کمیت  $\mathcal{E}$  انرژی نسبیتی است و تحول زمانی حالت‌های  $\psi(x)$  را توصیف می‌کند، در طرح جفت-برداری شکل زیر را خواهد داشت:

$$\left[ i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (\varepsilon - v(x)) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \theta(x) \end{pmatrix} = 0 \quad (۳)$$

تابع موج  $\psi(x)$  به صورت یک ماتریس ستونی چهارمؤلفه‌ای است که برای آسان‌تر شدن محاسبات می‌توان آن را به صورت دو اسپینورِ دومؤلفه‌ای نوشت.  $\varphi(x)$  و  $\theta(x)$  مؤلفه‌های بالا و پایین تابع موج اسپینور  $\psi(x)$  هستند. معادله (۳) به جفت معادله دیفرانسیل زیر تجزیه می‌شود:

$$-i \frac{d\theta(x)}{dx} + (\varepsilon - v(x))\theta(x) - M(x)\varphi(x) = 0 \quad (۴)$$

$$i \frac{d\varphi(x)}{dx} + (\varepsilon - v(x))\varphi(x) - M(x)\theta(x) = 0 \quad (۵)$$

از ترکیب دو معادله (۴) و (۵) و حذف مؤلفه اسپینور پایین  $\theta(x)$ ، معادله شرویدینگر گونه‌ای برای مؤلفه اسپینور بالای  $\varphi(x)$  تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} -\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \left[ 2\varepsilon v(x) - v^2(x) - i \frac{dv(x)}{dx} - i \frac{1}{M(x)} \frac{dM(x)}{dx} (\varepsilon - v(x)) \right] \varphi(x) \\ + \frac{1}{M(x)} \frac{dM(x)}{dx} \frac{d\varphi(x)}{dx} = (\varepsilon^2 - M^2(x))\varphi(x) \end{aligned} \quad (۶)$$

با تبدیلات کانونیک می‌توان موقعیت‌های جدید مکان و تکانه را برحسب موقعیت‌های اولیه آنها نمایش داد، با این شرط که شکل هامیلتونی معادله دیفرانسیل حفظ شود. به بیان دیگر، به دلیل ناوردا بودن سیستم کلاسیکی یا کوانتومی نسبت به انتخاب نوع دستگاه مختصات، می‌توان از متغیرهای جدید کلاسیکی یا کوانتومی استفاده کرد، مشروط بر آن که ساختار بنیادی حاکم بر سیستم عوض نگردد. بدین ترتیب، با استفاده از تغییر کانونیک نقاط به شکل  $\varphi(x) = \psi(q(x))$  رابطه (۶) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} -\left[ \frac{d^2\psi(q)}{dq^2} (q'(x))^2 + \frac{d\psi(q)}{dq} q''(x) \right] \\ + \frac{1}{M(x)} \frac{dM(x)}{dx} \left[ \frac{d\psi(q)}{dq} q'(x) \right] \\ + [A(x) + M^2(x) - \varepsilon^2] \psi(q(x)) = 0 \end{aligned} \quad (۷)$$

حال برای یافتن فرمول‌بندی کلی هامیلتونی  $\eta$ -شبه‌هرمیتی، دو عملگر مرتبه اول هرمیتی و پادهرمیتی با جرم مؤثر به صورت زیر معرفی می‌کنیم [۳۴-۳۷]:

$$\eta_1 = -i \left[ \mu(x) \frac{d}{dx} \right] + F(x) \quad (8)$$

$$\eta_2 = \left[ \mu(x) \frac{d}{dx} \right] + iF(x) \quad (9)$$

در روابط بالا  $\mu(x) = \frac{1}{M(x)}$  و  $m(x) = m_0 M(x)$  است. همچنین جرم مؤثر وابسته به مکان و  $x \in (-\infty, +\infty)$  است. در رابطه (۷) نیز  $A(x) = 2\varepsilon v(x) - v^2(x) - i \frac{dv(x)}{dx} - i \frac{1}{M(x)} \frac{dM(x)}{dx} (\varepsilon - v(x))$  است که به صورت زیر نامگذاری می‌کنیم:

$$iW(x) = \mu(x) \frac{d}{dx} [i(\mu(x)(\varepsilon - v(x)))] \quad (10)$$

$$V(x) = -\mu^2(x)(\varepsilon - v(x))^2 \quad (11)$$

با استفاده از شرط شبه‌هرمیتی  $\eta_j H = H^\dagger \eta_j$ ;  $j = 1, 2$ ، پس از تجزیه و ساده‌سازی قسمت موهومی  $\partial_x \psi(x)$ ، بخش موهومی پتانسیل را به شکل زیر نمایش می‌دهیم:

$$2iW(x)\mu(x) = -2i\mu^2(x)F_j'(x) \rightarrow W(x) = -\mu(x)F_j'(x) \quad (12)$$

با جداسازی قسمت حقیقی و موهومی  $\psi(x)$  داریم:

$$-i\mu^2(x)F_j''(x) - i\mu(x)\mu'(x)F_j'(x) = i\mu(x)W'(x) \quad (13)$$

$$-2\mu^2(x)\mu'(x)(\varepsilon - v(x))^2 + 2\mu^3(x)(\varepsilon - v(x))v'(x) - W(x)F_j(x) = W(x)F_j(x) \quad (14)$$

به کمک رابطه (۱۴) بخش حقیقی پتانسیل برحسب عملگر  $F(x)$  به صورت  $V(x) = -F^2(x) + \alpha_0$  نوشته می‌شود که در آن  $\alpha_0 \in R$  ثابت انتگرال‌گیری است و در مقایسه با رابطه (۱۱)، پتانسیل معادله دیراک برحسب ویژه‌تابع  $F(x)$  چنین می‌شود:

$$-\mu^2(x)(\varepsilon - v(x))^2 = -F^2(x) \rightarrow v(x) = \frac{(\varepsilon \pm F(x))}{\mu(x)} \rightarrow \quad (15)$$

$$V_j(x) = -F_j^2(q(x)) - i\mu(x)F_j'(q(x)) + \alpha_0$$

آنگاه، برای هامیلتونی  $\eta$ -شبه‌هرمیتی خواهیم داشت:

$$H = -\mu^2(x)\partial_x^2 - \mu(x)\mu'(x)\partial_x + V_j(x) \quad (16)$$



در واقع  $V_j(x)$  از تغییرات ایجاد شده بر روی پتانسیل برداری  $A(x)$  حاصل می شود. اکنون با جایگذاری پتانسیل  $V_j(x)$  در رابطه (۷) و با توجه به تغییر کانونیک نقاط، معادله زیر به دست می آید:

$$-\mu^2(x) \left[ \frac{d^2\psi(q(x))}{dq^2} (q'(x))^2 + \frac{d\psi(q(x))}{dq} q''(x) \right] - \mu(x)\mu'(x) \left[ \frac{d\psi(q(x))}{dq} q'(x) \right] + (-F_j^2(q(x)) - i\mu(x)F_j'(q(x)) + \alpha_0 - E)\psi(q(x)) = 0 \quad (17)$$

از مقایسه معادله (۱۷) با معادله غیرنسبیتی شرودینگر و جایگذاری  $q' = \frac{1}{\mu(x)}$  در این معادله داریم:

$$-\frac{d^2\psi(q(x))}{dq^2} + [-F_j^2(q(x)) - i\mu(x)F_j'(q(x)) + \alpha_0 - E]\psi(q(x)) = 0 \quad (18)$$

در معادله بالا می توان  $F_j'(q(x))$  را براساس  $q$  نوشت:

$$\frac{dF_j(q(x))}{dx} = \frac{dq(x)}{dx} \frac{dF_j(q)}{dq} = \frac{1}{\mu(x)} \frac{dF_j(q)}{dq} \quad (19)$$

با جایگذاری رابطه (۱۹) در معادله (۱۸)، نتیجه زیر به دست می آید:

$$-\frac{d^2\psi(q)}{dq^2} + [-F_j^2(q) - iF_j'(q) + \alpha_0 - E]\psi(q) = 0 \quad (20)$$

از مقایسه دو معادله غیرنسبیتی شرودینگر  $-\frac{d^2\psi(q)}{dq^2} + [V_{eff} - E]\psi(q) = 0$  و معادله (۲۰) به یک فرمول بندی کلی برای  $V_{eff}$  به صورت زیر خواهیم رسید:

$$V_{eff} = -F_j^2(q) - iF_j'(q) + \alpha_0 \quad (21)$$

اکنون برای نشان دادن کاربردهای فرمول بندی ذکر شده، پتانسیل های موهومی مدل پاشل-تِلر و اسکارف ۲ را در معادله دیراک با چارچوب جرم مؤثر وابسته به مکان و تقارن  $PT$ ، و با طیف انرژی حقیقی، بررسی می کنیم. در ازای برخی پارامترها شاهد پدیده گذار (عبور- یا به اصطلاح پرواز) از ترازهای انرژی خواهیم بود. در واقع، در تعبیری این بدان معناست که ترازهای انرژی پرواز می کنند و از طیف انرژی ناپدید می شوند.

**مثال ۱: پتانسیل موهومی پاشل-تلر**

در نخستین مثال، پتانسیل پاشل-تلر را با انرژی  $E_{n,\varepsilon}$  به صورت زیر در نظر می گیریم [۲۷]:

$$V(q(x)) = V_1 \operatorname{csch}^2(q) - V_2 \operatorname{csch}(q) \operatorname{coth}(q) \quad (22)$$

$$E_{n,\varepsilon} = - \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \left( \sqrt{V_1 + \frac{1}{4} + |V_2| + \varepsilon} \sqrt{V_1 + \frac{1}{4} - |V_2|} \right) - n - \frac{1}{2} \right]^2, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (23)$$

با در نظر گرفتن عملگر  $F(q)$  از رابطه زیر:

$$F(q) = V_2 \operatorname{csch}(q) \rightarrow F'(q) = V_2 \operatorname{csch}(q) \operatorname{coth}(q) \quad (24)$$

و با فرض  $V_1 = V_2^2$ ، از طریق جایگذاری رابطه (۲۴) در (۲۱) و همچنین با توجه به شکل پتانسیل از رابطه (۲۲)، می توان رابطه زیر را برای پتانسیل مؤثر به دست آورد:

$$V_{eff}(q) = -V_2^2 \operatorname{csch}^2(q) - iV_2 \operatorname{csch}(q) \operatorname{coth}(q) \quad (25)$$

همچنین مطابق فرض  $V_1 = V_2^2$  و رابطه (۲۳) برای انرژی داریم:

$$E_{n,\varepsilon=+1} = \left( |V_2| - n - \frac{1}{2} \right)^2; \quad n = 0, 1, 2, \dots, n_{max} < \left( |V_2| - \frac{1}{2} \right) \quad (26)$$

که به ازای  $\varepsilon = \pm 1$  داریم:  $n_{max} < \left( |V_2| - \frac{1}{2} \right)$  و برای  $|V_2| > \frac{1}{2}$  و  $\varepsilon = -1$  ترازهای خالی از ویژه مقادیر انرژی را خواهیم داشت که در چنین شرایطی شاهد پدیده گذار از ترازهای انرژی هستیم [۳۰-۳۲].

با در نظر گرفتن رابطه زیر:

$$q(x) = \pm \ln f(x); \quad f(x) \in R \quad (27)$$

عملگر  $f(x)$  بر حسب تابع جرم مؤثر وابسته به مکان به صورت زیر خواهد شد:

$$M(x) = [\pm \partial_x \ln f(x)] \rightarrow f(x) = \exp\left(\pm \int M(z) dz\right) \quad (28)$$

با توجه به روابط (۲۷) و (۲۸) می توان پتانسیل مؤثر را برحسب عملگر  $f(x)$  بازنویسی کرد:

$$csch(q) = \frac{1}{\sinh(\ln f(x))} = \frac{2 f(x)}{e^{\ln f(x)} - e^{-\ln f(x)}} \quad (29)$$

$$coth(q) = \frac{\cosh(\ln f(x))}{\sinh(\ln f(x))} \quad (30)$$

در نتیجه  $V_{eff}$  پتانسیل پاشل-تِلر چنین نوشته می شود:

$$V_{eff}(x) = -4V_2^2 \frac{f^2(x)}{(f^2(x) - 1)^2} - 2iV_2 \frac{f(x)(f^2(x) + 1)}{(f^2(x) - 1)^2} \quad (31)$$

پس از یافتن فرمول بندی کلی هامیلتونی  $\eta$ -شبه هرmitesی، می توان گفت  $f(x)$  یک مؤلد  $\eta$ -شبه هرmitesی با جرم مؤثر وابسته به مکان است، البته تا زمانی که  $f(x)$  چنان انتخاب شود که تابع جرم مؤثر وابسته به مکان قابل قبول را تولید کند. در یک انتخاب، تابع  $f(x)$  را به دلخواه به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$f(x) = x^2 - 1 \quad (32)$$

آنگاه، تابع جرم براساس روابط (۲۷) و (۲۸) چنین به دست می آید:

$$q(x) = \ln(x^2 - 1) \xrightarrow{M(x)=q'(x)} M(x) = [\pm \partial_x \ln(x^2 - 1)]$$

$$\rightarrow M(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

در نتیجه:

$$V_{eff} = -4V_2^2 \frac{(x^2 - 1)^2}{x^4(x^2 - 2)^2} - 2iV_2 \frac{(x^2 - 1)((x^2 - 1)^2 + 1)}{x^4(x^2 - 2)^2} \quad (33)$$

## مثال ۲: پتانسیل موهومی اسکارف ۲ (هایپر بولیک)

در مثال دیگر برای یک  $\eta$ -شبه هرmitesی با تقارن  $PT$  مدل اسکارف ۲ را در نظر می گیریم. این مدل با استفاده از جبر لی موهومی در منبع [۲۷] مورد مطالعه قرار گرفته است:

$$V(q(x)) = -V_1 \operatorname{sech}^2(q) - iV_2 \operatorname{sech}(q) \tanh(q) ; \quad V_1 > 0, V_2 \neq 0, \quad V_1, V_2 \in \mathbb{R} \quad (34)$$

$$E_{n,\varepsilon} = - \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \left( \sqrt{V_1 + \frac{1}{4} + |V_2|} + \varepsilon \sqrt{V_1 + \frac{1}{4} - |V_2|} \right) - n - \frac{1}{2} \right]^2, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (35)$$

که در آن،

$$n = 0, 1, 2, \dots < \frac{1}{2} \left( \sqrt{V_1 + \frac{1}{4} + |V_2|} + \varepsilon \sqrt{V_1 + \frac{1}{4} - |V_2|} - 1 \right)$$

با انتخاب عملگر  $F(q)$  به صورت زیر:

$$F(q) = -V_2 \operatorname{csch}(q) \rightarrow F'(q) = V_2 \operatorname{sech}(q) \tanh(q) \quad (36)$$

از طریق جایگذاری رابطه (۳۶) در رابطه (۲۱) و همچنین با توجه به پتانسیل (۳۴) می‌توان رابطه زیر را برای پتانسیل مؤثر به دست آورد:

$$V_{eff}(q) = -V_2^2 \operatorname{sech}^2(q) - iV_2 \operatorname{sech}(q) \tanh(q) \quad (37)$$

با تغییر  $V_1 = V_2^2$  داریم:

$$E_{n,\varepsilon} = - \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \left( \sqrt{V_2^2 + \frac{1}{4} + |V_2|} + \varepsilon \sqrt{V_2^2 + \frac{1}{4} - |V_2|} \right) - n - \frac{1}{2} \right]^2, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (38)$$

بنابراین برای  $\varepsilon = +1$  داریم  $|V_2| > \frac{1}{2}$ ، در نتیجه انرژی را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$E_{n,\varepsilon=+1} = \left( |V_2| - n - \frac{1}{2} \right)^2 ; \quad n = 0, 1, 2, \dots, n_{max} < \left( |V_2| - \frac{1}{2} \right) \quad (39)$$

برای طیف انرژی اسکالر  $\Psi$  با تقارن  $PT$  چنین پدیده‌ای زمانی رخ می‌دهد که تراز انرژی  $E_{n_1}$  در  $|V_2| = V_{2,1}$  و تراز انرژی  $E_{n_2}$  در  $|V_2| = V_{2,2}$  دارای ویژه‌مقادیر انرژی یکسان باشند.

$$E_{n_1}(|V_2| = V_{2,1}) = E_{n_2}(|V_2| = V_{2,2}) \quad ; \quad n_2 > n_1 \quad (40)$$

با توجه به روابط زیر:

$$\operatorname{sech}(q) = \frac{1}{\cosh(\ln f(x))} = \frac{2 f(x)}{e^{\ln f(x)} + e^{-\ln f(x)}} \quad (41)$$

$$\tanh(q) = \frac{\sinh(\ln f(x))}{\cosh(\ln f(x))} \quad (42)$$

آنگاه برای  $V_{eff}$  داریم:

$$V_{eff}(x) = -4V_2^2 \frac{f^2(x)}{(f^2(x) + 1)^2} - 2iV_2 \frac{f(x)(f^2(x) - 1)}{(f^2(x) + 1)^2} \quad (43)$$

مشابه حالت قبل، پس از به دست آوردن فرمول بندی کلی هامیلتونی  $\eta$ -شبه هرمیتی می توان گفت  $f(x)$  به عنوان یک مولد  $\eta$ -شبه هرمیتی با جرم مؤثر وابسته به مکان برای پتانسیل اسکارف ۲ است؛ البته دوباره تا آن زمان که  $f(x)$  چنان انتخاب شود که بتواند تابع جرم مؤثر وابسته به مکان قابل قبولی تولید کند.

در این مثال، تابع  $f(x)$  را به دلخواه چنین در نظر می گیریم:

$$f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}} \quad (44)$$

این انتخاب، به تابع جرم زیر منجر می شود:

$$q(x) = \ln\left(e^{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}\right) \xrightarrow{M(x)=q'(x)} M(x) = \left[ \pm \partial_x \ln\left(e^{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}\right) \right]$$

$$\rightarrow M(x) = \cos^{-1} x \quad ; \quad x > 1$$

همچنین برای پتانسیل مؤثر خواهیم داشت:

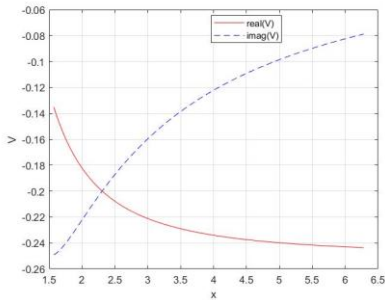
$$V_{eff}(x) = -4V_2^2 \frac{\left( e^{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}} \right)^2}{\left( \left( e^{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}} \right)^2 + 1 \right)^2} - 2iV_2 \frac{\left( e^{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}} \right) \left( \left( e^{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}} \right)^2 - 1 \right)}{\left( \left( e^{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}} \right)^2 + 1 \right)^2} \quad (45)$$

معادلات شرودینگر دقیقاً حل‌پذیر در مکانیک کوانتومی یک موقعیت قطبی را اشغال می‌کنند تا آنجا که بیشتر آنها به سیستم‌های فیزیکی مربوط می‌شوند. نمونه جالب آن، پتانسیل پاشل-تلا است که به عنوان یک میدان میانگین مؤثر در سیستم‌های چندجسمی با برهمکنش‌ها ظاهر می‌شود [۲۲]. پتانسیل اسکارف هذلولوی و حل‌های دقیق آن به طور خاص جنبه‌های ریاضی جالبی دارند که کاربردهای مختلفی در فیزیک پیدا می‌کنند، از الکترودینامیک و فیزیک حالت جامد گرفته تا نظریه ذرات. در حالت جامد، نسبت به آنچه که از پتانسیل مثلثاتی اسکارف ساخته شده از اسکارف ۲ فیزیک در ساخت پتانسیل‌های دوره‌ای واقع‌بینانه‌تری در بلورها استفاده می‌شود. در الکترودینامیک، اسکارف ۲ در یک دسته از مسائل با پتانسیل‌های غیرمرکزی ظاهر می‌شود. در فیزیک ذرات، اسکارف ۲ در مطالعات مربوط به بخش غیر اختلالی نظریه‌های سنج‌ای به وسیله مدل‌های اسباب بازی<sup>۱</sup> مانند نظریه میدان اسکالر در ابعاد (۱ + ۱) فضا-زمان کاربرد دارد [۳۸]. همچنین پتانسیل پاشل-تلا به طور گسترده‌ای در فیزیک مولکولی برای ساخت حالت‌های همدوس به کار گرفته می‌شود [۳۹]. نمونه دیگری از کاربردهای پتانسیل پاشل-تلا را می‌توان در بررسی مسئله الکترون و حفره از طریق این پتانسیل بیان کرد. پارامترهای فیزیکی کنترل‌کننده نقاط کوانتومی نه تنها از نظر علوم بنیادی بلکه به دلیل کاربرد بالقوه آن در توسعه دستگاه‌های الکترونیکی نیمه‌رسانا جذاب هستند [۴۰].

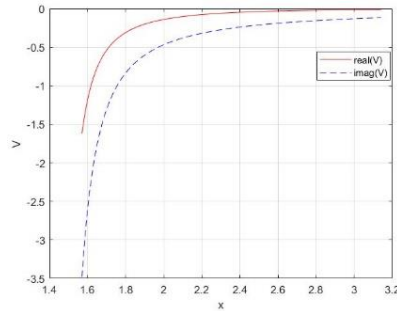
<sup>۱</sup> در مدل‌سازی فیزیک، یک مدل اسباب‌بازی (Toy Model) مدلی ساده است که بیشتر جزئیات در آن حذف شده تا بتوان از آن برای توضیح یک مکانیزم پیچیده به اختصار و راحتی استفاده کرد. از این روش در مدل‌سازی ریاضی و اقتصاد کلان و فیزیک استفاده می‌شود.

با اندکی اصلاح در پارامترسازی، پتانسیل شعاعی اسکارف ۲ قابل مقایسه با پتانسیل تعمیم یافته وودز-ساکسون<sup>۱</sup> خواهد بود. در واقع پتانسیل شعاعی اسکارف ۲ را می توان از پتانسیل یک بعدی اسکارف ۲ به همان شیوه ای تولید کرد که پتانسیل تعمیم یافته وودز-ساکسون از پتانسیل یک بعدی روزن-مورس<sup>۲</sup> تولید می شود. براساس این شباهت، پتانسیل شعاعی اسکارف ۲ می تواند در فیزیک هسته ای به کار برده شود [۴۱].

با حل تحلیلی معادله دیراک برای پتانسیل پاشل-تلر و پتانسیل غیر مرکزی مدل مثلثاتی اسکارف ۲، می توان بعضی از ویژگی های ترمودینامیکی سیستم را با کاهش معادله نسبتی انرژی به معادله غیر نسبتی انرژی تعیین کرد [۴۲].



شکل ۲ رسم پتانسیل مؤثر رابطه ۴۵ برای  $V_2 = 0.5$



شکل ۱ رسم پتانسیل مؤثر رابطه ۳۳ برای  $V_2 = 0.5$

### ۳. نتیجه گیری

معادله نسبتی دیراک با جرم مؤثر وابسته به مکان با حذف اسپینور پایین  $\theta(x)$  و ترکیب جفت معادله وابسته به مؤلفه های اسپینور پایین و بالا ( $\theta(x)$  و  $\varphi(x)$ ) به معادله شرودینگر گونه ای برای مولفه اسپینور بالا تبدیل شده است. معادله به دست آمده با استفاده از تبدیلات کانونیک و معرفی دو عملگر دیفرانسیلی مرتبه اول به یک هامیلتونی  $\eta$ -شبه هرمیتی تبدیل شده است. از مقایسه معادله حاصل از هامیلتونی  $\eta$ -شبه هرمیتی با معادله غیر نسبتی شرودینگر یک فرمول بندی کلی برای پتانسیل مؤثر نتیجه می شود. این رهبافت در پتانسیل های موهومی مدل پاشل-تلر و اسکارف ۲ با تقارن  $PT$  به کار گرفته شد، به طوری که ترازهای خالی از ویژه مقادیر انرژی و به اصطلاح گذار از

<sup>1</sup> Woods-Saxon

<sup>2</sup> Rosen-Morse II

ترازهای انرژی را می‌توان در آنها مشاهده کرد. این مورد زمانی اتفاق می‌افتد که  $n \gg |V_2|$  باشد، در تعبیری این بدان معناست که ترازهای انرژی پرواز می‌کنند و از طیف انرژی ناپدید می‌شوند. از جمله مطالعاتی که اخیراً در این زمینه صورت گرفته، می‌توان به عبور از ترازهای انرژی در مدل یک‌بعدی هوبارد و سیستم‌های فرمیونی در دره (اینستانتون - آنتی اینستانتون) و روش جبری ارائه شده برای یافتن چنین گذارهایی اشاره کرد [۳۰-۳۲]. در هر دو مدل مورد نظر با انتخاب  $f(x)$  مناسب، حالت‌های مختلفی از هامیلتونی  $\eta$ -شبه‌هرمیتی را می‌توان بررسی کرد. ذرات کوانتومی با جرم مؤثر وابسته به مکان برای مطالعه چگالی انرژی در مسائل چند جسمی، تعیین خواص الکترونیکی ساختارهای چندگانه نیم‌رساناها و همچنین توصیف خواص پیوندهای چندگانه و نقاط کوانتومی به کار می‌روند. مدل‌های غیرهرمیتی نیز کاربردهای زیادی در مطالعه سیستم‌های فیزیکی مانند فیزیک هسته‌ای، نظریه میدان‌های کوانتومی و ... دارند.

#### ۴. تقدیر و تشکر

این تحقیق توسط دانشگاه شاهد تهران پشتیبانی شده است.

#### منابع

- [1] Bender, C. M., Boettcher, S., and Meisinger, P. N. PT-Symmetric Quantum Mechanics, *J. Math. Phys.* 40, 2201, (1999).
- [2] Mustafa, O. Dirac and Klein-Gordon Particles in Complex Coulombic Fields: A Similarity Transformation, *J. Phys. A: Math. Gen.* 36, 5067, (2003).
- [3] Sinha, A., Roy, P. Generation of Exactly Solvable Non-Hermitian Potentials with Real Energies, *Czech. J. Phys.* 54, 129-138, (2004).
- [4] Mustafa, O., and Mazharimousavi, S. H. Non-Hermitian d-dimensional Hamiltonians with position-dependent mass and their  $\eta$ -pseudo-Hermiticity generators, *Czech. J. Phys.* 56, 967-975, (2006).
- [5] Quesne, C. First-order intertwining operators and position-dependent mass Schrödinger equations in d dimensions, *Ann. Phys.* 321, 1221-1239, (2006).
- [6] Tanak, T. N-fold supersymmetry in quantum systems with position-dependent mass, *J. Phys. A: Math. Gen.* 39, 219, (2006).
- [7] Mustafa, O., and Mazharimousavi, S. H. Quantum particles trapped in a position-dependent mass barrier; a d-dimensional recipe, *Phys. Lett. A* 358, 259-261, (2006).
- [8] Bender, C. M., Jones, H. F., and Rivers, R. J. Dual PT-symmetric quantum field theories, *Phys. Lett. B* 625, 333-340, (2005).
- [9] Alhaidari, A. D. Relativistic extension of the complex scaling method, *Phys. Rev. A* 75, 042707, (2007).
- [10] Panella, O., Biondini, S., and Arda, A. New exact solution of the one-dimensional Dirac Equation for the Woods-Saxon potential within the effective mass case, *J. Phys. A* 43, 325302, (2010).
- [11] Baye, D., Levai, G., and Sparenberg, J. M. Phase-equivalent complex potentials, *Nucl. Phys. A* 599, 435-456, (1996).



- [12] Ruschhaupt, A., Delgado, F., and Muga, J. G. Physical realization of  $PT$ -symmetric potential scattering in a planar slab waveguide, *J. Phys. A: Math. Gen.* 38, L171, (2005).
- [13] Cannata, F., Junker, G., and Trost, J. Schrödinger operators with complex potential but real spectrum, *Phys. Lett. A.* 246, 219-226, (1998).
- [14] Khare, A., and Mandal, B. P. A  $PT$ -invariant potential with complex  $QES$  eigenvalues, *Phys. Lett. A.* 272, 53-56, (2000).
- [15] Ahmed, Z., Pseudo-Hermiticity of Hamiltonians under imaginary shift of the coordinate: real spectrum of complex potentials, *Phys. Lett. A.* 290, 19-22, (2001).
- [16] Jia, C. S., and de Souza Dutra, A. Position-dependent effective mass Dirac equations with  $PT$ -symmetric and non- $PT$ -symmetric potentials, *J. Phys. A: Math. Gen.* 39, 11877, (2006).
- [17] Ahmed, Z. Energy band structure due to a complex, periodic,  $PT$ -invariant potential, *Phys. Lett. A.* 286, 231-235, (2001).
- [18] Panahi, H., and Bakhshi, Z. Solvable potentials with position-dependent effective mass and constant mass Schrödinger equation, *Acta. Physica. Polonica. B.* 41, 11, (2010).
- [19] Jost, J. Riemannian geometry and Geometric Analysis, *Springer*, (2002).
- [20] Bjorken, J. D., and Drell. S. D. Relativistic Quantum Mechanics, *McGraw-Hill*, (1964).
- [21] Itzykson, C., and Zuber, J. B. Quantum Field Theory, *McGraw-Hill*, (1980).
- [22] Li, H., and Kusnezov, D. Group Theory Approach to Band Structure: Scarf and Lamé Hamiltonians, *Phys. Rev. Lett.* 83, 1283, (1999).
- [23] Alhassid, Y., Gursev, F., and Iachello, F. Group theory approach to scattering. II. The euclidean connection, *Ann. Phys. NY.* 167, 181, (1986).
- [24] Sukumar, C. V. Potentials generated by  $SU(1, 1)$ , *J. Phys. A: Math. Gen.* 19, 2229, (1986).
- [25] Zarrinkamar, S., Rajabi, A. A., and Hassanabadi. H. Supersymmetric study of the pseudospin symmetry limit of the Dirac equation for a pseudo harmonic potential, *Physica Scripta.* 83, 015009, (2011).
- [26] Haouat, S., and Chetouani, L. The (1+1) dimensional Dirac equation with pseudo scalar potentials: path integral treatment, *International Journal of Theoretical Physics.* 46, 1528-1541, (2007).
- [27] Bagchi, B., and Quesne, C. Pseudo-Hermiticity, weak pseudo-Hermiticity and  $\eta$ -orthogonality condition, *Phys. Lett. A.* 301, 173-176, (2002).
- [28] Wei, G. F., and Gong, S. H. A novel algebraic approach to spin symmetry for Dirac equation with scalar and vector second Pöschl-Teller potentials, *The European Physical Journal A.* 43, 185-190, (2010).
- [29] Ikot, A. N., Maghsoodi, E., Zarrinkamar, S., Ibang, E., and Hassanabadi. H. Solutions of Dirac equation in the presence of modified Tietz and modified Pöschl-Teller potentials plus a Coulomb-Like Tensor interaction using SUSYQM, *Few-Body systems* 54, 2053-2065, (2013).
- [30] Kretschmer, R., and Szymanowski, L. The Hilbert-Space Structure of Non-Hermitian Theories with Real Spectra, *Czech. J. Phys.* 54, 71-75, (2004).
- [31] Mustafa, O., and Znojil, M.  $PT$ -symmetric pseudo-perturbation recipe: an imaginary cubic oscillator with spikes, *J. Phys. A: Math. Gen.* 35, 8929, (2002).
- [32] Samsonov, B. F., and Shamshudinova, V. V. Quadratic pseudo supersymmetry in two-level systems, *J. Phys. A: Math. Gen.* 38, 4715, (2005).
- [33] Alhaidari, A. D. Relativistic extension of shape-invariant potentials, *J. Phys. A: Math. Gen.* 35, 6207, (2002).
- [34] Mustafa, O., and Mazharimousavi, S. H. First-Order Intertwining Operators with Position Dependent Mass and  $\eta$ -Weak-Pseudo-Hermiticity Generators, *International Journal of Theoretical Physics* 47, 446-454, (2008).

- [35] Mostafazadeh, A., Pseudo-Hermiticity versus  $PT$  symmetry: The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian, *J. Math. Phys.* 43, 205, (2002).
- [36] Mostafazadeh, A. Pseudo-supersymmetric quantum mechanics and isospectral pseudo-Hermitian Hamiltonians, *Nucl. Phys. B.* 640, 419-434, (2002).
- [37] Mostafazadeh, A. Pseudo-Hermitian description of  $PT$ -symmetric systems defined on a complex contour, *J. Phys. A: Math. Gen.* 38, 3213, (2005).
- [38] Alvarez-Castillo, D. E., and Kirchbach, M. Exact spectrum and wave functions of the hyperbolic Scarf potential in terms of finite Romanovski polynomials, *Revista mexicana de fisica E* 53, 143-154, (2007).
- [39] Antoine, J-P., Gazeau, J-P., Monceau, P., Klauder, J. R., and Penson. K. A. Temporally stable coherent states for infinite well and Pöschl-Teller potentials, *Journal of Mathematical Physics*, 42, 2349, (2001).
- [40] Hayrapetyan, D. B., Kazaryan, E. M., and Tevosyan, H. KH. Optical properties of spherical quantum dot with modified Pöschl-Teller potential, *super lattices and Microstructures*, 64, 204-212, (2013).
- [41] Levai, G., Baran, A., Salamon, P., and Vertse, T. Analytical solutions for the radial Scarf II potential, *Physics Letters A.* 381, 1936L, (2017).
- [42] Pratiwi, B. N., Suparmi, A., Cari, C., and Husein, A. S Asymptotic iteration method for the modified Pöschl-Teller potential and trigonometric Scarf II non-central potential in the Dirac equation spin symmetry, *Pramana-J. Phys.* 88, 1-9, (2017).