

Research Paper

Soliton Solution of Nonlinear Schrodinger Equation in the Presence of a Minimal Observable Length¹

Behrooz Khosropour²

Received: 2021.03.08

Revised: 2021.06.11

Accepted: 2021.08.12

Abstract

The unification between the theory of general relativity and the standard model of particle physics predicts the existence of a minimal measurable length on the order of the Planck length. Nowadays phenomenological studies of field theory in the presence of a minimal observable distance are extensively performed. The existence of a minimal measurable length leads to the generalized uncertainty principle (GUP). In this work, we obtain at first the angular wave frequency in the presence of a minimal observable length by considering the generalized uncertainty principle. Then, by expanding the generalized angular wave frequency, the nonlinear Schrodinger equation is found. Also, the soliton solution of the generalized nonlinear Schrodinger equation is obtained. In the limit $\beta \rightarrow 0$, the soliton solution in generalized space becomes the same as usual soliton solution. The value of minimal observable length is considered about $10^{-20}m$.

Keywords: *Minimal Measurable Length, Generalized Uncertainty Principle, Nonlinear Schrodinger Equation, Soliton.*

¹ DOI: 10.22051/ijap.2021.35381.1197

² Assistant Professor, Department of Physics, Faculty of science, Salman Farsi University of Kazerun, Kazerun, Fars, Iran. Email: b_khosropour@kazerunfu.ac.ir

فصلنامه علمی فیزیک کاربردی ایران، دانشگاه الزهرا

سال یازدهم، پیاپی ۲۵، تابستان ۱۴۰۰

صص ۴۷ - ۵۷

مقاله پژوهشی

پاسخ سالیتمونی معادله غیر خطی شرودینگر در حضور کمینه طول مشاهده پذیر^۱ بهر روز خسروپور^۲

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۱۸

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۳/۲۱

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۵/۲۱

چکیده

وحدت بخشی بین نسبیّت عام و مدل استاندارد ذرات بنیادی فیزیک، وجود یک کمینه طول اندازه پذیر از مرتبه طول پلانک را پیش بینی می کند. امروزه مطالعات پدیده شناختی نظریه میدان با فرض وجود یک کمینه طول مشاهده پذیر در اندازه گیری فواصل مکانی به طور گسترده در حال انجام است. وجود یک کمینه طول اندازه پذیر به اصل عدم قطعیت تعمیم یافته منجر می شود. در این مقاله نخست با در نظر گرفتن اصل عدم قطعیت تعمیم یافته، بسامد زاویه ای موج را در حضور کمینه طول مشاهده پذیر به دست می آوریم. در ادامه با بسط بسامد زاویه ای موج تعمیم یافته در حضور کمینه طول به معادله غیر خطی شرودینگر می رسیم. همچنین پاسخ سالیتمونی معادله شرودینگر تعمیم یافته را در حضور کمینه طول می یابیم. در حد $\beta \rightarrow 0$ ، پاسخ سالیتمونی در فضای تعمیم یافته به پاسخ سالیتمونی معمولی تبدیل می شود. کمینه طول مورد مطالعه در نظریه نزدیک به 10^{-20} m در نظر گرفته می شود.

واژگان کلیدی: کمینه طول مشاهده پذیر، اصل عدم قطعیت تعمیم یافته، معادله غیر خطی شرودینگر، سالیتمون.

¹ -DOI: 10.22051/ijap.2021.35381.1197

² استادیار، گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه سلمان فارسی کازرون، کازرون، فارس، ایران.

Email: b_khosropour@kazerunsfu.ac.ir

۱. مقدمه

در ابتدای قرن بیستم، فرضیه امکان وجود کوچک‌ترین بازه زمانی ممکن که به آن کرونون^۳ گفته می‌شود توسط فیزیکدانانی نظیر ارنست ماخ و هانری پوانکاره مطرح شد [۱]. پذیرش مفهوم کرونون توسط بعضی از فیزیکدانان باعث شد که ایده وجود یک مقیاس طول بنیادین نیز در اندازه‌گیری فواصل مکانی مطرح گردد و حدس زده می‌شد این مقدار باید برابر با $\frac{h}{MC}$ باشد که در آن h ثابت پلانک، M جرم پروتون و C سرعت نور در خلاء است [۱]. هایزنبرگ معتقد بود که هر نظریه میدانی که بخواهد توصیف سازگاری از بهمکنش بین ذرات بنیادی ارایه کند، علاوه بر دو ثابت بنیادین C و h باید شامل یک ثابت بنیادین دیگر نیز باشد که این ثابت سوم از جنس طول است [۲]. وی پیشنهاد کرد که مقیاس طول بنیادین در اندازه‌گیری فواصل مکانی دارای مرتبه بزرگی $\theta_0 \approx 10^{-13} \text{cm}$ است. حوالی سال ۱۹۳۰ میلادی وجود بی‌نهایت‌های ظاهر شده در الکتروینامیک کوانتمی باعث ایجاد سردرگمی در میان فیزیکدان‌های نظری شده بود. در آن زمان یک سری مکاتبات بین هایزنبرگ و بوهر صورت گرفت؛ هایزنبرگ توضیح داد که چگونه می‌توان ایده وجود یک کمینه طول در اندازه‌گیری فواصل مکانی را در مکانیک کوانتمی وارد کرد [۳ و ۱]. در سالیان اخیر فرمول‌بندی نظریه‌های فیزیکی با فرض وجود یک کمینه طول در اندازه‌گیری فواصل مکانی و مطالعه اثرات ناشی از وجود این کمیت در این نظریه‌ها به زمینه‌ای برای تحقیقات فعال در فیزیک نظری تبدیل شده است. فیزیکدان‌های نظری می‌دانند که مطالعه در بازه‌های مکانی بی‌اندازه کوچک نیاز به مقادیر بسیار بالایی انرژی دارد که در چنین مقیاس‌های بسیار بالایی از انرژی نمی‌توان نقش گرانش را نادیده گرفت. وحدت بخشی بین نسبیت عام و مدل استاندارد ذرات بنیادی فیزیک، وجود یک کمینه طول قابل اندازه‌گیری از مرتبه طول پلانک را پیش‌بینی می‌کند. امروزه می‌دانیم که وجود این کمینه به اصل عدم قطعیت توسعه یافته منجر می‌گردد. این اصل را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} \left[1 + a_1 \left(\frac{\ell_P}{\hbar} \right)^2 (\Delta P)^2 + a_2 \left(\frac{\ell_P}{\hbar} \right)^4 (\Delta P)^4 + \dots \right], \quad (1)$$

که در آن ℓ_P طول پلانک و $a_i, \forall i \in \{1, 2, \dots\}$ ثابت‌های عددی مثبت است [۵ و ۴].

³ chronon

اگر در طرف راست رابطه (۱) تنها دو جمله نخست را نگه داریم، اصل عدم قطعیت تعمیم یافته (GUP) به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} [1 + \beta (\Delta P)^2], \quad (2)$$

بنابر رابطه (۲) مشاهده می‌کنیم که همیشه ΔX از $\Delta X_{\min} = \sqrt{\beta} \hbar$ بزرگ‌تر است و این نتیجه همان‌طور که مطرح شد، سریع‌ترین نتیجه‌ای است که از رابطه عدم قطعیت تعمیم یافته به دست می‌آید.

تاریخچه کشف سالیتون به حدود ۲۰۰ سال پیش برمی‌گردد. در آن هنگام دانشمندی اسکاتلندی به نام جان اسکات راسل حین مطالعات خود بر روی طراحی کانال‌های آبی برای عبور قایق‌ها، مشاهده کرد زمانی که قایق به طور ناگهانی از حرکت باز می‌ایستد، جرمی از آب که در اطراف قایق انباشته شده به سمت جلو به حرکت درمی‌آید [۶]. این توده آب، شکلی صیقلی و موج‌مانند داشت و در طول حرکت در میان کانال، شکل و سرعت آن تغییر نمی‌کرد. این موج منفرد و پایدار سالیتاری نام گرفت. هر چند در ابتدا اغلب دانشمندان آن زمان به وجود امواج سالیتاری اعتقاد نداشتند، اما در سال ۱۸۷۰ میلادی فیزیکدان انگلیسی به نام جان ریلی و ریاضیدان فرانسوی به نام ژوزف بوسینسک^۴ به طور جداگانه و با استفاده از معادلات اساسی دینامیک شاره‌ها، وجود این نوع امواج را ثابت کردند. معادله‌ای که امروزه به نام KdV شناخته می‌شود، معادله‌ای است که در برگیرنده نتایج حاصل از مطالعات و مشاهدات بوسینسک، ریلی و ریلی راسل می‌باشد و توسط دیدریک یوهان کورتیه و گک^۵ و گوستاو دو وریز^۶ در سال ۱۸۹۵ میلادی ارائه شد [۷]. از آنجا که امواج سالیتاری پس از برخورد با یکدیگر بدون تغییر در سرعت و شکل از یکدیگر جدا می‌شوند و رفتاری شبیه به ذرات نور دارند نام «سالیتون» را برای آن‌ها انتخاب کردند. هر چند کوانتیدن گرانث یکی از چالش برانگیزترین موضوعات فیزیک نظری است، اما در دهه اخیر یک زمینه پژوهشی نوین با عنوان پدیده‌شناسی گرانث کوانتمی بوجود آمده است که می‌کوشد با استفاده از نظریه‌های میدان مؤثر، به توصیف اثرات گرانث کوانتمی بپردازد. در سال‌های اخیر، مطالعات گسترده‌ای در زمینه پدیده‌شناختی گرانث کوانتمی صورت گرفته است [۸-۱۹]. با توجه به اهمیت

⁴Joseph Boussinesq

⁵Diederik Johannes Korteweg

⁶Gustave de Vries

موضوع و نقش معادلات غیرخطی و سالیتون‌ها در زمینه‌های مختلف فیزیک، امید می‌رود که مطالعه تأثیر کمینه طول مشاهده‌پذیر می‌تواند در حل دشواری‌های موجود در این مباحث کمک شایانی انجام دهد.

نکته قابل ذکر این است که کمینه طول در حد انرژی‌های بسیار بالا قابل مطالعه و مشاهده است. به طور کلی معادله غیرخطی شرودینگر نیز توسط سالیتون‌های اپتیکی توصیف می‌شود اما مطالعه سالیتون‌ها در حد انرژی‌های بالا نیز موضوع مورد توجه فیزیکدانان نظری است. در اپتیک غیرخطی، با بسط بسامد زاویه‌ای یک موج بر حسب عدد موج و دامنه آن می‌توانیم معادله غیرخطی شرودینگر را به دست آوریم. بر این اساس اگر بسامد زاویه‌ای موج را در حضور کمینه طول مشاهده‌پذیر محاسبه کنیم، با بسط بسامد زاویه‌ای تعمیم‌یافته موج به معادله غیرخطی شرودینگر در حضور کمینه طول خواهیم رسید.

در این مقاله با بسط بسامد زاویه‌ای تعمیم‌یافته نخست معادله غیرخطی شرودینگر را در حضور کمینه طول مشاهده‌پذیر به دست می‌آوریم و سپس به بررسی پاسخ‌های سالیتونی تعمیم‌یافته معادله شرودینگر در حضور کمینه طول مشاهده‌پذیر می‌پردازیم. در بخش دوم به معرفی معادله غیرخطی شرودینگر از طریق بسط بسامد زاویه‌ای موج بر حسب عدد موج و دامنه موج می‌پردازیم. همچنین شرح مختصری از پاسخ شناخته شده سالیتونی معادله غیرخطی شرودینگر ارائه می‌دهیم. در بخش سوم معادله غیرخطی تعمیم‌یافته شرودینگر را به دست می‌آوریم و بر پایه پاسخ سالیتونی مربوط به آن، پاسخ سالیتونی این معادله را در حضور کمینه طول مشاهده‌پذیر می‌ایم. بحث و نتیجه‌گیری را در بخش چهارم مقاله مطرح می‌کنیم.

۲. معادله غیرخطی شرودینگر

معادله معمولی شرودینگر که چگونگی تغییر حالت کوانتمی یک سیستم فیزیکی را با زمان توصیف می‌کند، به شکل زیر است:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} - V(x,t)\psi(x,t) = 0. \quad (3)$$

اگر پتانسیل $V(x,t)$ به خود $\psi(x,t)$ وابسته باشد جمله آخر معادله شرودینگر را غیرخطی می‌کند و معادله به صورت معادله غیرخطی شرودینگر زیر تبدیل می‌شود [۲۰]:

$$i \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + p \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + q |\psi(x,t)|^2 \psi(x,t) = 0, \quad (۴)$$

که در آن $\psi(x,t)$ دامنه موج است، $i = (-1)^{\frac{1}{2}}$ و p و q ضرایبی هستند که برای امواج پلاسما به ترتیب با پاشندگی گروه $(\frac{dV_g}{dk})$ و انتقال بسامد غیر خطی $(\frac{\partial \omega}{\partial |\psi|^2})$ متناسب هستند. معادله غیر خطی شرو دینگر رابطه (۴) دارای پاسخ سالیتمونی به صورت زیر است [۲۰]:

$$\psi(x,t) = \left(\frac{2A}{Q}\right)^{\frac{1}{2}} \text{Sech} \left[\left(\frac{A}{P_{ML}}\right)^{\frac{1}{2}} (x - x_0 - (V_g)_{ML} t) \right] \exp \left[i \left(At + \frac{(V_g)_{ML}}{2P_{ML}} x - \frac{(V_g)_{ML}^2}{4P_{ML}} t + \theta_0 \right) \right], \quad (۵)$$

$$A = -\frac{1}{2}, x_0 = 0, \theta_0 = 0$$

که در آن A یک ثابت اختیاری است که دامنه، پهنا و بسامد بسته سالیتمون را به هم مرتبط می کند. رابطه (۵) یک سالیتمون متحرک پوش را بیان می کند که با سرعت V حرکت می کند. در ادامه برای یافتن معادله غیر خطی شرو دینگر بر اساس بسامد زاویه ای، ابتدا بسامد زاویه ای موج را به صورت تابعی از عدد موج k و مربع دامنه A در نظر می گیریم $\omega(k, A^2)$. نکته قابل ذکر در مورد بسامد زاویه ای این است که معادله غیر خطی شرو دینگر یک معادله با تمام ویژگی های معادلات غیر خطی (نظیر عدم کاربرد اصل بر هم نهی موج و...) است. از این رو بسامد زاویه ای به صورت تابع مربع دامنه موج در این معادله ظاهر می شود. اگر بسامد زاویه ای را حول نقطه $k = k_0$ بسط تیلور دهیم، خواهیم داشت:

$$\omega(k, |A|^2) = \omega_0 + (k - k_0) \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} + \frac{1}{2} (k - k_0)^2 \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k_0} - |A|^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial |A|^2} \right), \quad (۶)$$

$$\omega(k, |A|^2) - \omega_0 - (k - k_0) \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} - \frac{1}{2} (k - k_0)^2 \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k_0} + |A|^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial |A|^2} \right) = 0.$$

با فرض این که کمیت های نوسان کننده رفتار سینوسی دارند، تعویض های زیر در رابطه (۶) انجام پذیر است:

$$\begin{aligned} \omega - \omega_0 &= i \frac{\partial}{\partial t}, \\ k - k_0 &= -i \frac{\partial}{\partial x}, \\ V_g &= \frac{\partial \omega}{\partial k}. \end{aligned} \quad (۷)$$

از طرفی با در نظر گرفتن تغییر متغیرهای زیر، معادله غیر خطی شرودینگر به مختصات جدیدی که همراه با موج حرکت می کند، انتقال می یابد:

$$\begin{aligned} \zeta &= x - V_g t, \\ \tau &= t. \end{aligned} \quad (8)$$

در ادامه با جایگذاری روابط (۷) در معادله (۶) و در نظر گرفتن تغییر متغیر در رابطه (۸) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} i \left(\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + V_g \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right) + p \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + Q |\psi(x,t)|^2 \psi(x,t) &= 0, \\ i \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial \tau} + p \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial \zeta^2} + Q |\psi(x,t)|^2 \psi(x,t) &= 0, \\ i \left(\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + (V_g)_{ML} \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right) + P_{ML} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + Q |\psi(x,t)|^2 \psi(x,t) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

به طوری که p و Q برای امواج پلاسما به ترتیب با پاشندگی گروه $\frac{dV_g}{dk}$ و انتقال بسامد غیر خطی $\delta\omega \propto \frac{\partial\omega}{\partial|\psi|^2}$ متناسب هستند؛ به بیان دیگر

$$p = \frac{1}{2} \frac{dV_g}{dk}, \quad Q = -\frac{\partial\omega}{\partial|\psi|^2} \propto -\delta\omega. \quad (10)$$

شایان ذکر است که پاسخ معادله غیرخطی شرودینگر رابطه (۹) در حالت پایدار، همان پاسخ سالیتمونی رابطه (۵) است.

۳. بررسی پاسخ سالیتمونی معادله غیرخطی شرودینگر در حضور کمینه طول مشاهده پذیر

برای یافتن سالیتمون در حضور کمینه طول مشاهده پذیر، نخست باید بسامد زاویه ای تعمیم یافته را یافت. با توجه به رابطه عدم قطعیت تعمیم یافته (۲) و در نظر گرفتن معادلات و تقریب های زیر خواهیم داشت:

$$\Delta X \sim X, \Delta P \sim P, P = \hbar k, X = \frac{\lambda}{2\pi} \quad (11)$$

$$XP \approx \frac{\hbar}{2} [1 + \beta(P)^2], \quad (12)$$

$$\bar{\lambda}_{ML} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k} + \beta \hbar^2 k \right].$$

بر اساس رابطه بسامد زاویه‌ای با طول موج $(\omega = \frac{c}{\lambda})$ ، بسامد زاویه‌ای در حضور کمینه طول به صورت زیر به دست می‌آید [۲۱]:

$$\Omega = \omega_{ML}(k) = \frac{c}{\bar{\lambda}_{ML}} = \frac{2kc}{[1 + \beta \hbar^2 k^2]}. \quad (13)$$

در ادامه با بسط مخرج کسر بالا در رابطه (۱۳) و صرف نظر کردن از جملات مرتبه β^2 و بالاتر، بسامد زاویه‌ای تعمیم یافته موج به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Omega = \omega_{ML}(k) = k_{ML}c = 2k(1 - \beta \hbar^2 k)c, \quad (14)$$

و یا بر اساس کمینه طول مشاهده‌پذیر در نظریه، $(\Delta X)_{Min} = \hbar \sqrt{\beta}$ ، چنین خواهد شد:

$$\Omega(k) = 2k(1 - (\Delta X)_{Min}^2 k)c. \quad (15)$$

در ادامه با در نظر گرفتن بسط تیلور حول نقطه $k = k_0$ برای بسامد زاویه‌ای تعمیم یافته $\Omega(k, |A|^2)$ خواهیم داشت:

$$(\Omega - \Omega_0) - (k - k_0) \frac{\partial \Omega}{\partial k} \Big|_{k_0} - \frac{1}{2} (k - k_0)^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial k^2} \Big|_{k_0} + |A|^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial |A|^2} \right) = 0,$$

$$(\Omega - \Omega_0) - (V_{gr})_{ML}(k - k_0) - p_{ML}(k - k_0)^2 + |A|^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial |A|^2} \right) = 0. \quad (16)$$

همانند رابطه (۶) با در نظر گرفتن رفتار سینوسی کمیت‌های رابطه (۱۶) خواهیم داشت:

$$(\Omega - \Omega_0) = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad (17)$$

$$(V_{gr})_{ML} = \frac{\partial \Omega}{\partial k} |_{k_0} = 2c(1 - 3(\Delta X)_{Min}^2 k_0^2),$$

$$p_{ML} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial k^2} |_{k_0} = -6(\Delta X)_{Min}^2 ck_0.$$

با جایگذاری روابط (۱۷) در رابطه (۱۶) و اعمال تغییر متغیرهای رابطه (۸) خواهیم داشت:

$$i \left(\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} + (V_g)_{ML} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right) + P_{ML} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + Q |\psi(x, t)|^2 \psi(x, t) = 0,$$

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + p_{ML} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + Q |\psi|^2 \psi = 0, \quad (18)$$

به طوری که

$$p_{ML} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial k^2} = -6(\Delta X)_{Min}^2 ck_0,$$

$$Q = \frac{\partial \Omega}{\partial \psi^2} = -2kc(1 - (\Delta X)_{Min}^2 k_0^2). \quad (19)$$

نکته قابل توجه این است که معادله (۱۸) همان معادله غیر خطی شرودینگر در حضور کمینه طول مشاهده پذیر است. طبق رابطه (۵) پاسخ معادله غیر خطی شرودینگر (۱۸) در حضور کمینه طول مشاهده پذیر به صورت زیر به دست می آید:

$$\psi(x, t) = \left(\frac{2A}{Q} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sech} \left[\left(\frac{A}{P_{ML}} \right)^{\frac{1}{2}} (x - x_0 - (V_g)_{ML} t) \right] \exp \left[i \left(At + \frac{(V_g)_{ML}}{2P_{ML}} x - \frac{(V_g)_{ML}^2}{4P_{ML}} t + \theta_0 \right) \right], \quad (20)$$

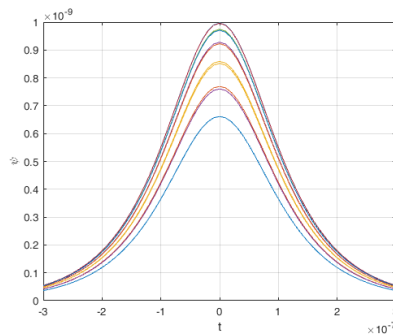
با جایگذاری $A = -\frac{1}{2}$, $x_0 = 0$, $\theta_0 = 0$ و P_{ML} و Q از رابطه (۱۹)، در رابطه (۲۰) خواهیم داشت:

$$\psi(x, t) = \left[\frac{1}{kc(1 - (\Delta X)_{Min}^2 k^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \text{Sech} \left[\left(\frac{1}{12(\Delta X)_{Min}^2 ck} \right)^2 (x - (V_{gr})_{ML} t) \right]$$

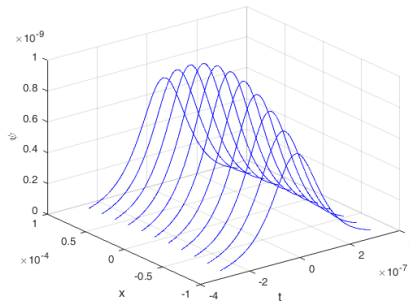
$$\exp \left[i \left(-\frac{1}{2} t - \frac{(V_{gr})_{ML}}{12(\Delta X)_{Min}^2 ck} x + \frac{(V_{gr})_{ML}^2}{24(\Delta X)_{Min}^2 ck} t \right) \right]. \quad (21)$$

همان طور که مشاهده می شود تصحیح های کمینه طول بر روی پاسخ سالیوتونی معادله غیر خطی شرو دینگر، نه تنها شامل بخش اصلی تابع موج سالیوتونی است، بلکه بر روی قسمت فاز تابع سالیوتونی نیز اثر دارد. رابطه (۲۱) بیانگر یک سالیوتون متحرک با سرعت تعمیم یافته $(V_{gr})_{ML}$ در حضور کمینه طول مشاهده پذیر است. نکته مهم این که در حد $\beta \rightarrow 0$ ، پاسخ سالیوتونی در حضور کمینه طول در رابطه (۲۰)، به پاسخ سالیوتونی معمولی در رابطه (۵) تبدیل می شود.

بر اساس رابطه (۲۱) نتایج عددی پاسخ سالیوتونی معادله غیر خطی شرو دینگر در حضور کمینه طول به راحتی قابل مشاهده است. با در نظر گرفتن طول موج دبابی در خورشید که در حدود $\lambda_D \approx 10^{-11}m$ است، کمینه طول مشاهده پذیر حدود $X_{Mm} \approx 10^{-20}m$ برآورد می شود. شایان ذکر است که مقدار کمینه طول برآورد شده مقاله ما در مقایسه با نتایج منابع [۱۱] و [۱۵] به ترتیب حدود 10^{10} و 10^{14} مرتبه بزرگ تر است؛ اما در مقایسه با منبع [۲۲] تقریباً 10^2 مرتبه کوچک تر است. با وجود تلاش های بسیار زیاد فیزیکدانان در جهت آشکارسازی کمینه طول بنیادین در طبیعت هنوز نتیجه قابل قبولی به دست نیامده است. با این حال، آنان امیدوارند که در آینده نزدیک با کمک برخورد دهنده بزرگ هادرونی (LHC)، به نتایج خوب و قابل قبولی در زمینه آشکارسازی کمینه طول دست یابند. با جایگذاری $X_{Mm} \approx 10^{-20}m$ در رابطه (۲۰)، نمودارهای موج سالیوتونی تعمیم یافته بر حسب زمان و مکان به صورت زیر نمایش داده می شود:



شکل ۱ تغییرات قسمت حقیقی موج سالیوتونی تعمیم یافته بر حسب زمان به ازای کمینه طول $10^{-20}m$ برای مقادیر مختلف کمیت مکان



شکل ۲ تغییرات قسمت حقیقی موج سالی تونی تعمیم یافته بر حسب زمان و مکان به ازای کمینه طول $10^{-20}m$ و مقادیر مختلف کمیت مکان

شکل (۱) قسمت حقیقی یک موج سالی تونی در حضور کمینه طول مشاهده پذیر در نظریه $(\Delta X_{Min} = 10^{-20}m)$ را در حالت سکون و بر حسب زمان توصیف می کند. این نمودار برای چند مقدار مختلف مکان (x) رسم شده است. شکل (۲) بیانگر قسمت حقیقی موج سالی تونی در حضور کمینه طول مشاهده پذیر در نظریه $(\Delta X_{Min} = 10^{-20}m)$ است که بر حسب زمان و مکان و به ازای چند مقدار مختلف مکان رسم شده است.

۴. بحث و نتیجه گیری

نظریه های میدان با ابعاد فضایی، با این هدف که به وحدت بخشی بین نظریه نسبیت عام اینشتین و مدل استاندارد ذرات بنیادی بیانجامد، به صورت گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است. با این حال در زمینه پدیده شناختی نظریه های میدان با فرض وجود یک کمینه طول مشاهده پذیر در اندازه گیری فواصل مکانی، پژوهش چندانی نشده است [۹]. در این مقاله نخست با در نظر گرفتن اصل عدم قطعیت تعمیم یافته (GUP)، بسامد زاویه ای موج در حضور کمینه طول مشاهده پذیر به دست آمد. در ادامه با بسط بسامد زاویه ای تعمیم یافته بر حسب عدد موج و دامنه موج، معادله غیرخطی شرودینگر در حضور کمینه طول استخراج شد. همچنین بر اساس پاسخ سالی تونی معادله غیرخطی شرودینگر، پاسخ سالی تونی تعمیم یافته در حضور کمینه طول به دست آورده شد. نکته قابل توجه این است که در حد $\beta \rightarrow 0$ ، پاسخ سالی تونی تعمیم یافته در رابطه (۲۱) به پاسخ سالی تونی معمولی در

رابطه (۵) تبدیل می‌شود. در شکل ۱ نتایج عددی موج سالیتمونی تعمیم‌یافته ساکن بر حسب زمان و در شکل ۲ نتایج عددی موج سالیتمونی تعمیم‌یافته بر حسب مکان و زمان رسم شده است. شایان ذکر است که در هر دو شکل برآورد تقریبی کمینه طول نزدیک به $10^{-20}m$ در نظر گرفته شده است. با توجه به اهمیت گرانس کوانتمی، از نتایج این مقاله می‌توان جهت مطالعات بیشتر معادله غیر خطی تعمیم‌یافته شرودینگر و همچنین بررسی تأثیر کمینه طول بر روی انواع دیگر سالیتمونها در محیط پلاسما استفاده کرد.

۵. تقدیر و تشکر

نویسنده لازم می‌داند از تمام داوران به خاطر نظرات ارزشمند و سازنده‌شان تشکر کند.

منابع

- [1] Kragh H., *Rev. Hist. Sci.* 48, 401 (1995).
- [2] Pavlopous T G., *Phys. Rev.* 159, 1106 (1967).
- [3] Carazza B., and Kragh H., *Am. J. Phys.* 63, 595 (1995).
- [4] Castro C., *J. Phys. A: Math. Gen.* 39, 14205 (2006).
- [5] Ko Y., Lee S., and Nam S., *Int. J. Theo. Phys.* 49, 1384 (2010).
- [6] Russell N S., *Institution of Naval Architects*, 4, 16 (1864).
- [7] Korteweg D J., and de Vries G., *Philosophical Magazine*, 39, 423 (1995).
- [8] Sprenger M., Nicolini P., and Bleicher M., *Eur. J. Phys.* 33, 853 (2012).
- [9] Khosropour B., *General Relativity and Gravitation*, 49, 91 (2017).
- [10] Khosropour B., *Physics Letters B*, 785, 3 (2018).
- [11] Khosropour B., *Prog. Theo. Exp. Phys.* 13A02 (2017).
- [12] Hossenfelder S., *Living Rev. Relativity*. 16, 2 (2013).
- [13] Das S., Vagenas E C., and Ali AF., *Phys. Lett. B*, 690, 407 (2010).
- [14] Kober M., *Int. J. Mod. Phys. A*, 26, 4251 (2011).
- [15] Nozari K., and Etemadi A., *Phys. Rev. D*, 85, 104029 (2012).
- [16] Majhi B R., and Vagenas E C., *Phys. Lett. B*, 725, 477 (2013).
- [17] Ali A F., *Phys. Lett. B*, 732, 335 (2014).
- [18] Bishop M., Lee J., and Singleton D., *Phys. Lett. B*, 802, 135209 (2020).
- [19] Mounni M., and A Fouhal, *Int. J. Mod. Phys. A*, 35, 2040043 (2020).
- [20] Chen F., "Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion", *Springer*, 312-315 (2015).
- [21] Nozari K., and Mehdi pour S H., *Gen. Relativity. Gravit.* 37, 1995 (2005).
- [22] Accioly A., and Mukai H., *Nuovo Cimento della Societ'altaliana di Fisica B*, 112, 1061(1997).