

Research Paper

Study of Thermal Entanglement and Teleportation in Spin-star Networks in Heisenberg XXX Model¹

Azita Naji^{*2} and Mohsen Mollaei Zamani³

Received: 2021.07.20

Revised: 2021.09.13

Accepted: 2021.10.20

Abstract

In this paper, thermal entanglement in four and five-qubit spin-star networks evolved by an XXX Hamiltonian model is studied. We examine the effect of temperature, magnetic field and coupling constant on the concurrence. We will show that the entanglement is decreased by increasing the temperature and the number of qubits. Also, we investigate quantum teleportation via a couple of spin-star networks in a thermal state. The average of fidelity as a function of temperature, magnetic field, and coupling constant is analyzed, too. It will be observed that as the temperature increases, the fidelity first decreases and then tends to a constant value. Moreover, with the increase of the external magnetic field, the average fidelity first increases and then gradually decreases, and in a certain amount of magnetic field, the average fidelity becomes zero. In addition, as the number of qubits increases, fidelity decreases with temperature. The results indicate that mean fidelity increases with increasing coupling constant.

Keywords: *Entanglement, Quantum Teleportation, Fidelity, Spin Star Network, Thermal State.*

¹ DOI: 10.22051/ijap.2021.36523.122

² Assistant Professor, Department of Physics, Faculty of Science, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. (corresponding Author). Email: a.naji@scu.ac.ir

³ M.Sc. in Physics, Department of Physics, Faculty of Science, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. Email: zamanimohsen77@gmail.com



بررسی درهم‌تنیدگی و ترابرد گرمایی در شبکه ستاره‌ای اسپینی تحت برهم‌کنش هایزنبرگ مدل XXX^۱ آزیتا ناجی^{۲*}، محسن ملائی زمانی^۳

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۴/۲۹

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۶/۲۲

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۷/۲۸

فصلنامه علمی فیزیک کاربردی ایران

دانشکده فیزیک شیمی، دانشگاه الزهرا

سال یازدهم، پیاپی ۲۶، پاییز ۱۴۰۰

صص ۶۸ - ۷۶

چکیده

در این مقاله، درهم‌تنیدگی گرمایی در شبکه‌های ستاره‌ای اسپینی چهار و پنج کیوبیتی، که تحت تأثیر هامیلتونی هایزنبرگ مدل XXX در حضور میدان خارجی تحول می‌یابند، مطالعه شده است. تأثیر دما، میدان مغناطیسی خارجی، و ضریب جفت‌شدگی بر درهم‌تنیدگی در سیستم‌های مذکور بررسی و مشاهده شد که با افزایش دما درهم‌تنیدگی کاهش می‌یابد. همچنین، افزایش تعداد کیوبیت‌ها سبب کاهش سریع‌تر درهم‌تنیدگی برحسب دما می‌شود. سپس، ترابرد یک حالت درهم‌تنیده از طریق یک زوج کیوبیت از این شبکه ستاره‌ای در حالت گرمایی با محاسبه میانگین وفاداری مورد بررسی قرار گرفت. با رسم میانگین وفاداری برحسب مقادیر مختلف میدان مغناطیسی خارجی، ضریب جفت‌شدگی و دما مشاهده شد که با افزایش دما وفاداری ابتدا کم می‌شود و سپس به یک مقدار ثابت میل می‌نماید. همچنین، با افزایش میدان مغناطیسی خارجی در ابتدا وفاداری افزایش و سپس، به تدریج کاهش می‌یابد و در مقدار خاصی از میدان مغناطیسی وفاداری به صفر می‌رسد. به علاوه، با افزایش تعداد کیوبیت‌ها وفاداری برحسب دما کاهش پیدا می‌کند.

واژگان کلیدی: درهم‌تنیدگی، ترابرد کوانتومی، وفاداری، شبکه ستاره‌ای اسپینی، حالت گرمایی.

^۱ DOI: 10.22051/ijap.2021.36523.122

^۲ استادیار، گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران. (نویسنده مسئول). Email: a.naji@scu.ac.ir

^۳ دانش آموخته کارشناسی ارشد، گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران. Email: zamanimohsen77@gmail.com

۱. مقدمه

درهم‌تیدگی گرمایی در زنجیره‌های اسپینی تحت هامیلتونی‌های هایزنبرگ، که نقش مهمی در محاسبات و شبیه‌سازی رایانه‌های کوانتومی دارد، در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است [۱-۴]. علاوه بر سیستم‌های اسپینی زنجیره‌ای، سیستم‌های اسپینی دو بعدی، مانند مدل ستاره‌ای، نیز در فیزیک حالت جامد مطرح هستند [۵-۷]. برخی پژوهشگران تحقیقاتی در زمینه درهم‌تیدگی حالت گرمایی و حالت پایه مدل ستاره‌ای انجام داده‌اند [۶-۷]. از طرفی، زنجیره‌های کیوبیتی هایزنبرگ به‌طور وسیعی برای ترابرد کوانتومی به کار می‌روند [۸-۱۱]. اثر دما، به‌عنوان یکی از عوامل مؤثر بر ترابرد کوانتومی در زنجیره‌ها، در سال‌های اخیر مورد توجه بوده، اما ترابرد گرمایی در مدل ستاره‌ای تاکنون مطالعه نشده است.

هدف از این پژوهش، بررسی درهم‌تیدگی و ترابرد گرمایی در مدل ستاره‌ای چهار و پنج کیوبیتی با برهم‌کنش هایزنبرگ مدل XXX در حضور میدان مغناطیسی است. ابتدا ساختار ستاره‌ای معرفی می‌شود. سپس تأثیرات دما، میدان مغناطیسی و ضریب جفت‌شدگی بر درهم‌تیدگی ساختارهای یاد شده با استفاده از سنجشگر کانکرنس مطالعه می‌گردد. آن‌گاه، با محاسبه میانگین وفاداری، ترابرد گرمایی یک حالت کوانتومی از طریق دو کیوبیت از مدل ستاره‌ای چهار و پنج کیوبیتی در حضور میدان مغناطیسی بررسی و در پایان، درباره نتایج بحث می‌شود.

۲. ساختار ستاره‌ای

در این ساختار یک اسپین مرکزی وجود دارد که با تمام اسپین‌های دیگر به‌طور مستقیم برهم‌کنش دارد، اما دیگر اسپین‌ها هیچ برهم‌کنشی با یکدیگر ندارند. هامیلتونی کلی این ساختار را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد [۵]:

$$H = j_x \sigma_{0x} \sum_{outer} \sigma_{ix} + j_y \sigma_{0y} \sum_{outer} \sigma_{iy} + j_z \sigma_{0z} \sum_{outer} \sigma_{iz} + B \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i^z \quad (1)$$

که در آن، J_x ، J_y و J_z ضریب جفت‌شدگی و σ_x ، σ_y و σ_z ماتریس‌های پائولی هستند. جمله چهارم نیز اثر میدان مغناطیسی خارجی در راستای z را نشان می‌دهد. ساختار ستاره‌ای مدل XXX متناظر با $J_z = J_y = J_x$ است. هامیلتونی چنین ساختاری به‌صورت زیر نوشته می‌شود [۵]:

$$H = j(\sigma_{0x} \sum_{outer} \sigma_{ix} + \sigma_{0y} \sum_{outer} \sigma_{iy} + \sigma_{0z} \sum_{outer} \sigma_{iz}) + B \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i^z \quad (2)$$

برای توصیف سیستم کوانتومی از عملگر چگالی استفاده می‌شود. هرگاه عملگر چگالی تابعی از دما باشد، سیستم مورد نظر را سیستم گرمایی می‌گویند. در چنین سیستمی عملگر چگالی برابر است با:

$$\rho(T) = z^{-1} \exp\left(\frac{-H}{k_B T}\right) \quad (3)$$

که در آن، z ، تابع پارش، از رابطه زیر به دست می‌آید [۱]:

$$z = \text{Tr}\left(\exp\left(\frac{-H}{k_B T}\right)\right) \quad (4)$$

که در آن، k_B ثابت بولتزمن است و مقدار آن یک فرض می‌شود.

۳. درهم‌تندگی در ساختار ستاره‌ای چهار و پنج کیوبیتی

هامیلتونی ساختار ستاره‌ای چهار و پنج کیوبیتی مدل XXX در حضور میدان همگن، به ترتیب، برابر است با:

$$H = j \sum_{i=1}^3 (\sigma_{0x} \otimes \sigma_{ix} + \sigma_{0y} \otimes \sigma_{iy} + \sigma_{0z} \otimes \sigma_{iz}) + B \sum_{i=0}^3 \sigma_i^z \quad (5)$$

$$H = j \sum_{i=1}^4 (\sigma_{0x} \otimes \sigma_{ix} + \sigma_{0y} \otimes \sigma_{iy} + \sigma_{0z} \otimes \sigma_{iz}) + B \sum_{i=0}^4 \sigma_i^z \quad (6)$$

از آنجایی که سیستم‌های معرفی شده شامل کیوبیت هستند، برای اندازه‌گیری درهم‌تندگی از سنجه کانکرنس (توافق) استفاده می‌شود. این سنجه توسط ووترز معرفی شده است [۱۲]. برای محاسبه کانکرنس ابتدا ماتریس چگالی سیستم به کمک ویژه توابع و ویژه مقادیر هامیلتونی به شکل زیر محاسبه می‌گردد:

$$\rho(T) = \frac{\sum_n e^{-\frac{E_n}{T}} |\psi_n\rangle \langle \psi_n|}{z} \quad (7)$$

که در آن، E_n ویژه مقدار متناظر با ویژه تابع بهنجار ψ_n است. سپس، ماتریس چگالی کاهش یافته کیوبیت مرکزی با یکی دیگر از کیوبیت‌ها با گرفتن رد جزئی از بقیه اسپین‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\rho_{AB}(T) = \text{Tr}_{CDE...}(\rho_{ABCDE...}) \quad (8)$$

برای سیستم معرفی شده در حالت‌های چهار و پنج کیوبیتی، ماتریس چگالی کاهش یافته به فرم ماتریس X از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$\rho(T) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & C & 0 \\ 0 & C & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F \end{bmatrix} \quad (9)$$

که عناصر آن در هر دو مورد محاسبه شده و به دلیل پیچیدگی، در این جا ذکر نشده است. با جای گذاری این ماتریس کاهش یافته در رابطه زیر، ماتریس R محاسبه می شود:

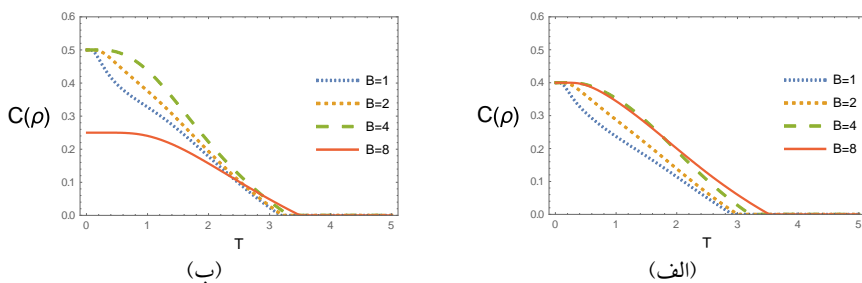
$$R \equiv \rho(\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y) \quad (10)$$

آن گاه، کانکرنس از رابطه زیر به دست می آید:

$$C = \max\{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0\} \quad (11)$$

که در آن، λ_i ها مجذور ویژه مقادیر ماتریس R هستند و به ترتیب نزولی در رابطه (۱۱) نوشته می شوند.

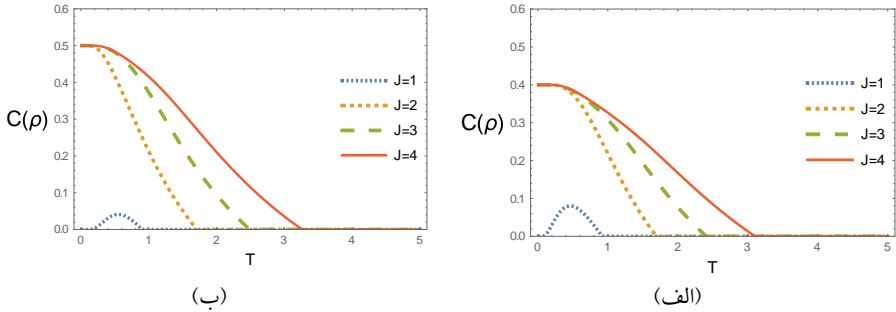
تابع کانکرنس به دست آمده در حضور میدان برحسب دما، برای حالت های چهار و پنج کیوبیتی، به ترتیب، در شکل های ۱-الف و ۱-ب رسم شده است. نمودارها نشان می دهند که اعمال میدان مغناطیسی خارجی سبب کاهش بیشینه کانکرنس می شود، درحالی که مرگ درهم تنیدگی در دمای بزرگتری اتفاق می افتد. مقایسه نمودارهای ۱-الف و ۱-ب نشان می دهد که رفتار درهم تنیدگی حالت چهار و پنج کیوبیتی تقریباً مشابه است، با این اختلاف که در شرایط یکسان، در حالت پنج کیوبیتی، بیشینه کانکرنس و بازه دمایی ای که سیستم در آن درهم تنیده است، کاهش یافته است.



شکل ۱ $C(\rho)$ برحسب دما در حالت (الف) چهار کیوبیتی و (ب) پنج کیوبیتی به ازای $J = 4$ و مقادیر مختلف B .

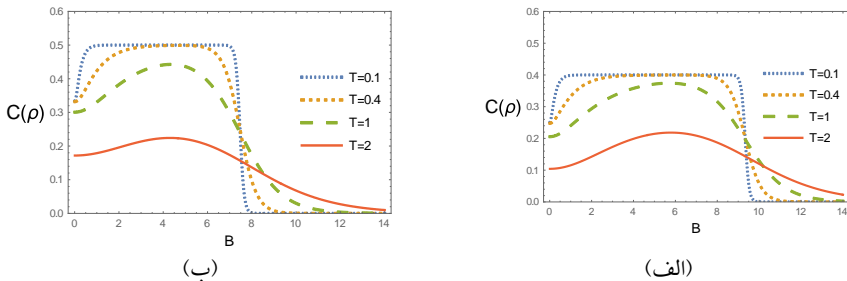
شکل (۲) تغییرات کانکرنس ساختار ستاره ای XXX را برحسب دما، به ازای مقدار خاصی از میدان مغناطیسی و چهار مقدار مختلف J نشان می دهد. ملاحظه می شود که با افزایش J ، بیشینه

درهم‌تنیدگی افزایش می‌یابد و سیستم در بازه دمایی بیشتری درهم‌تنیده می‌ماند. همچنین، کانکرنس در دمای معینی به بیشینه مقدار خود می‌رسد و سپس در دمایی به نام دمای بحرانی صفر می‌شود. مقایسه منحنی‌های (الف) و (ب) نشان می‌دهد که با افزایش تعداد کیوبیت‌ها بیشینه منحنی و دمای بحرانی کاهش می‌یابد.



شکل ۲ $C(\rho)$ برحسب دما در حالت (الف) چهار کیوبیتی و (ب) پنج کیوبیتی، به‌ازای $B = 3$ و مقادیر مختلف J .

در شکل (۳) کانکرنس برحسب میدان مغناطیسی برای چند مقدار دمای مشخص در حالت چهار و پنج کیوبیتی نمایش داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، برای همه دماها به‌ازای مقدار معینی از میدان درهم‌تنیدگی بیشینه می‌شود و پس از آن، با افزایش میدان شاهد کاهش درهم‌تنیدگی سیستم و در نهایت صفر شدن آن هستیم. مقایسه نمودارهای ۳-الف و ۳-ب نشان می‌دهد که با افزایش تعداد کیوبیت‌ها میزان درهم‌تنیدگی و میدان بحرانی کاهش می‌یابد.



شکل ۳ $C(\rho)$ برحسب میدان مغناطیسی در حالت (الف) چهار کیوبیتی و (ب) پنج کیوبیتی به‌ازای $J = 4$ و مقادیر مختلف T .



۴. تراپرد درهم تنیدگی گرمایی

در این بخش، هدف ما بررسی تراپرد کیوبیتی از طریق شبکه ستاره‌ای در مدل XXX است. اولین بار، تراپرد از طریق یک شبکه یک‌بعدی توسط بوز انجام شد [۱۱]. طبق این پروتکل، ابتدا یک حالت اولیه نامعلوم، به صورت برداری از کره بلاخ، به عنوان حالت ورودی کانال در نظر گرفته می‌شود:

$$|\psi_{in}\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|10\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|01\rangle \quad (12)$$

که در آن، $(0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ است. حالت ورودی در مکان i ام شبکه در مدل ستاره‌ای، که به عنوان کانال تراپرد کوانتومی انتخاب شده است، قرار می‌گیرد. ماتریس چگالی کاهش یافته دو کیوبیتی حالت ورودی در معادله (۹) محاسبه شده است و ماتریس چگالی برای حالت خروجی از کانال از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\rho_{out} = \sum_{\mu\nu} p_{\mu\nu} (\sigma_{\mu} \otimes \sigma_{\nu}) \rho_{in} (\sigma_{\mu} \otimes \sigma_{\nu}) \quad (13)$$

که در آن، $\sigma_{\mu,\nu} (\mu, \nu = 1, 2, 3)$ ماتریس‌های پائولی هستند و $\rho_{in} = |\psi_{in}\rangle\langle\psi_{in}|$ و $p_{\mu\nu} = \text{Tr}[E^{\mu}\rho(t)]\text{Tr}[E^{\nu}\rho(t)]$ است. همچنین، می‌توان نوشت: $\sum_{\mu\nu} p_{\mu\nu} = 1$ ، $E^0 = |\psi^{-}\rangle\langle\psi^{-}|$ ، $E^3 = |\psi^{+}\rangle\langle\psi^{+}|$ ، $E^1 = |\phi^{-}\rangle\langle\phi^{-}|$ ، $E^2 = |\phi^{+}\rangle\langle\phi^{+}|$ و $\psi^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$ ، $\phi^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$.

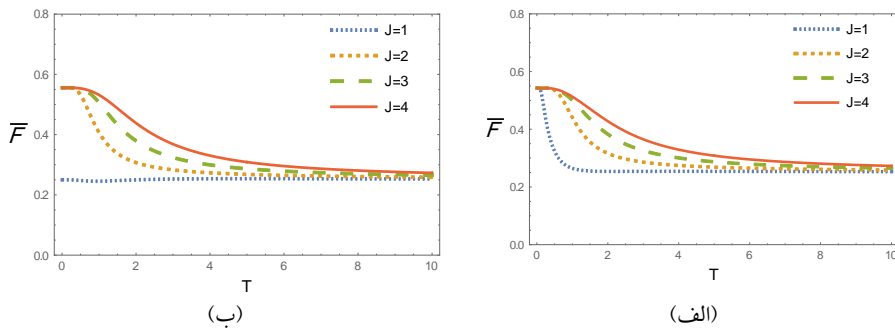
درستی ارسال حالت را از طریق وفاداری می‌توان تعیین کرد. به عبارت دیگر، وفاداری میزان شباهت حالت ورودی به حالت خروجی از کانال را نشان می‌دهد. در حالت کلی، وفاداری یک عدد بین صفر و یک است. اگر حالت ورودی و خروجی یکسان باشند، وفاداری یک و در غیر این صورت، وفاداری عددی کوچکتر از یک خواهد بود [۱۳-۱۴]. رابطه کلی وفاداری عبارت است از:

$$F(\rho_{in}, \rho_{out}) = \langle\psi_{in}|\rho_{out}|\psi_{in}\rangle \quad (14)$$

میانگین وفاداری روی همه حالت‌های خالص ورودی به کره بلاخ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

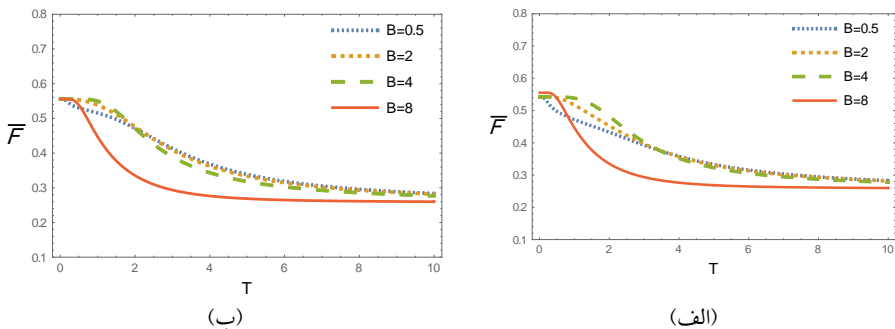
$$\bar{F} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F(\rho_{in}, \rho_{out}) \sin\theta d\theta d\varphi \quad (15)$$

میانگین وفاداری محاسبه شده برای حالت‌های چهار و پنج کیوبیتی به‌عنوان تابعی از T ، به ترتیب، در شکل ۴- الف و ۴- ب برای مقادیر مختلف J رسم شده است. نمودارها نشان می‌دهند که وفاداری با افزایش دما کاهش می‌یابد و به‌ازای مقادیر مختلف J به یک مقدار ثابت میل می‌نماید. همچنین، میانگین وفاداری تابعی افزایشی برحسب ضریب جفت‌شدگی است. افزایش تعداد کیوبیت‌ها نیز سبب کاهش وفاداری می‌شود.



شکل ۴ \bar{F} برحسب دما در حالت (الف) چهار کیوبیتی و (ب) پنج کیوبیتی به‌ازای $J = 2$ و مقادیر مختلف T .

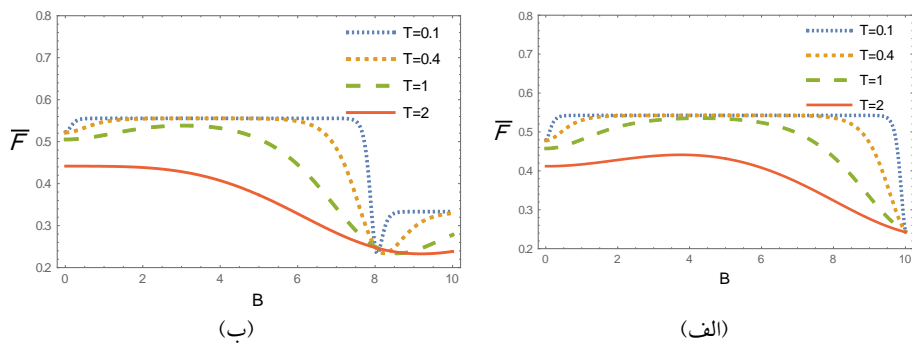
شکل (۵) میانگین وفاداری برحسب دما را برای مقادیر مختلف B در دو حالت چهار و پنج کیوبیتی نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که میانگین وفاداری تابعی کاهشی برحسب دماست. این تابع، به‌طور میانگین، با افزایش میدان و تعداد کیوبیت‌ها سریع‌تر کاهش می‌یابد.



شکل ۵ \bar{F} برحسب دما در حالت (الف) چهار کیوبیتی و (ب) پنج کیوبیتی، به‌ازای $J = 4$ و مقادیر مختلف B .



برای بررسی دقیق تر اثر میدان خارجی، میانگین وفاداری برحسب میدان برای حالت های چهار و پنج کیوبیتی در شکل (۶) رسم شده است. همان طور که مشاهده می شود، با افزایش میدان، وفاداری به تدریج کاهش می یابد و ناگهان در مقدار مشخصی از میدان مغناطیسی، به نام میدان بحرانی، به صفر می رسد و پس از گذر از این نقطه، اندکی افزایش می یابد. مقایسه شکل های (الف) و (ب) نشان می دهد که افزایش تعداد کیوبیت ها موجب کاهش میزان میانگین وفاداری و میدان بحرانی می شود.



شکل ۶ \bar{F} برحسب میدان مغناطیسی در حالت (الف) چهار کیوبیتی و (ب) پنج کیوبیتی به ازای $J = 4$ و مقادیر مختلف T .

۵. نتیجه گیری

در این مقاله، درهم تنیدگی و ترابرد کوانتومی از طریق ساختارهای ستاره ای چهار و پنج کیوبیتی در مدل XXX بررسی شد. مشاهده شد که در این ساختارها، افزایش دما سبب کاهش درهم تنیدگی و سپس مرگ آن می شود. اعمال میدان مغناطیسی در مدل XXX باعث تقویت درهم تنیدگی می گردد، به طوری که سیستم در بازه دمایی بزرگتری درهم تنیده باقی می ماند. با افزایش J مرگ درهم تنیدگی در دماهای بزرگتری اتفاق می افتد. همچنین، افزایش تعداد کیوبیت ها موجب کاهش درهم تنیدگی می شود. در ادامه، ترابرد کوانتومی از طریق شبکه ستاره ای، به عنوان کانال کوانتومی، با محاسبه میانگین وفاداری بررسی شد. نمودار میانگین وفاداری به صورت تابعی از دما رسم گردید. مشاهده شد که افزایش دما در ابتدا سبب کاهش میانگین وفاداری می شود و سپس، منحنی ها به یک مقدار ثابت میل می کنند. همچنین، میانگین وفاداری برحسب ضریب جفت شدگی تابعی افزایشی است. افزایش میدان مغناطیسی نیز باعث

کاهش میانگین وفاداری می‌شود تا آن‌جا که در میدان بحرانی وفاداری به صفر می‌رسد و پس از آن وفاداری دوباره افزایش مختصری می‌یابد. همچنین، مقدار میانگین وفاداری با افزایش تعداد کیوبیت‌ها کاهش می‌یابد، یعنی در شبکه‌های چند کیوبیتی بزرگ، درهم‌تنیدگی قوی و وفاداری بیشتر نمی‌توان ایجاد کرد.

۶. تقدیر و تشکر

این تحقیق توسط دانشگاه شهید چمران اهواز، ایران [GN: SCU.SP98.12469] پشتیبانی شد.

منابع

- [1] Gunlycke D., Bose S., Kendon V. M., and Vedral V., Thermal concurrence mixing in 1D Ising model, *Phy. Rev. A*, **64**, 2302, 2001.
- [2] Sorensen A., and Molmer K., Spin-spin interaction and spin-squeezing in an optical lattice, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2274, 1999.
- [3] Wang X., Effects of anisotropy on thermal entanglement, *Phys. Lett. A*, **281**, 101, 2001.
- [4] Jafarpour M., and Naji A., Thermal spin squeezing as a signature of thermal global entanglement in Heisenberg models, *Commun. Theor. Phys.* **58**, 198, 2012.
- [5] Zhang R., and Zhu S., Thermal entanglement in a two-dimensional Heisenberg XY models, *Phys. Lett. A*, **348**, 110, 2006.
- [6] Hutton A., and Bose S., Mediated entanglement and correlations in a star network of interacting spins, *Phys. Rev. A*, **69**, 042312, 2004.
- [7] Anza F., Militello B., and Messina A., Tripartite thermal correlations in an inhomogeneous spin-star system, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **43**, 205501, 2010.
- [8] Zhang Y.-D., Mao Z., and Zhou B., Entanglement teleportation via a couple of quantum channels in Ising-Heisenberg spin chain model of heterometallic Fe-Mn-Cu coordination polymer, *Chinese physics B*, **28**(12), 120307, 2019.
- [9] Xi Y.-X., Cheng W.-W., and Huang Y.-X., Entanglement and quantum teleportation in a three-qubit Heisenberg chain with three site interactions, *Quantum Inf Process*, **14**, 2551, 2015.
- [10] Mojaveri B., Dehghani A., Fasihi M.A., and Mohammadpour T., Thermal Entanglement Between Two Two-Level Atoms in a Two-Photon Jaynes-Cummings Model with an Added Kerr Medium, *Journal of Theoretical Physics*, **57**, 3396–3409, 2018.
- [11] Bowen G., and Bose S., Teleportation as a depolarizing quantum channel, relative entropy, and classical capacity, *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 267901, 2001.
- [12] Wootters W.K., Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits, *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 2245, 1998.
- [13] R. Jozsa, Fidelity for mixed quantum states, *J. Mod. Opt.*, **41**, 2315, 1994.
- [14] Bowdrey M.D., Oi D. K.L., Short A.J., Banaszek K., and Jones J.A., Fidelity of single qubit maps, *Phys. Lett. A*, **294**, 258, 2002.

