

بهینه‌سازی حالت‌های اولیه برای رایانش کوانتومی آدیاباتیک در یک الگوریتم کوانتومی

آرش کریم‌خانی و امیر قلعه

[۱] تا [۱۳]، یک هامیلتونی به این سامانه نسبت داده شود و الگوریتم تعیین‌یافته دش با استفاده از معادله شروdinگر و قضیه آدیاباتیک کوانتومی بررسی گردد.

۲- ساخت هامیلتونی

ابتدا لازم است که مروری سریع بر الگوریتم تعیین‌یافته دش در [۴] و [۵] صورت گیرد. در این الگوریتم تلاش می‌شود مسأله پیداکردن یک نگاشت $\{1, 0\} \rightarrow \{0, 1\}$ به‌گونه‌ای حل گردد که ماهیت نگاشت f در یک گام محاسباتی به‌صورت کامل شناخته شود. لازم به ذکر است که در الگوریتم دش فقط مشخص می‌شود که آیا تابع f ثابت است یا خیر؛ اما در الگوریتم تعیین‌یافته دش ماهیت f به‌صورت کامل مشخص می‌شود. در [۴] و [۵] حالت ورودی الگوریتم تعیین‌یافته دش به‌صورت زیر پیشنهاد گردیده است

$$|\psi_1\rangle = \alpha |\cdot\rangle \left[\frac{|\cdot\rangle - i|\cdot\rangle}{\sqrt{2}} \right] + \beta |\cdot\rangle \left[\frac{|\cdot\rangle - |\cdot\rangle}{\sqrt{2}} \right] \quad (1)$$

که

$$\langle \psi_1 | \psi_1 \rangle = 1 \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \\ \alpha \neq 0 \\ \beta \neq 0 \quad (2)$$

$$|\cdot\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \end{pmatrix} \\ |\cdot\rangle = \begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

واضح است که حالت ورودی پیشنهادی، یک حالت درهم‌تبنیده کوانتومی است. چون هر ذره با اسپین $1/2$ دارای دو درجه آزادی است، وقتی دو ذره را در نظر می‌گیریم، چهار درجه آزادی خواهیم داشت. فضای هیلبرت دو ذره به‌صورت (۴) تعریف می‌شود. اگر $|\beta\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ و $|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

باشد، آنگاه

$$|\alpha\rangle |\beta\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \\ a_2 b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

چکیده: در هر رایانش کوانتومی آدیاباتیک، یک حالت اولیه وجود دارد که در الگوریتم کوانتومی مربوط استفاده می‌شود. در این مقاله، رابطه بین یک حالت اولیه و ترازهای انرژی مجاز در یک الگوریتم تعیین‌یافته دش پیاده‌سازی شده مطالعه گردیده است. برای مطالعه الگوریتم تعیین‌یافته دش، یک فرم فشرده برای حالت‌های خروجی به‌دست آمده است. نشان داده می‌شود که می‌توان حالت اولیه را طوری فراهم کرد که کمینه‌های انرژی را کنترل نمود. با استفاده از روش‌های عددی، کمینه انرژی حالت‌های مجاز برای حالت اولیه به‌دست آورده شده و برای بررسی دینامیک سامانه، حالت اولیه به‌دست آمده انتخاب گردیده است. هامیلتونی مربوط به الگوریتم، به‌دست آورده شد و مشخص گردید که یکی از ترازهای انرژی یک حالت مقید را توصیف می‌کند.

کلیدوازه: الگوریتم دش، رایانش کوانتومی آدیاباتیک، رایانش کوانتومی.

۱- مقدمه

پیشرفت‌های اخیر در تکنولوژی مربوط به رایانه‌های کوانتومی باعث ساخت آنها شده است. همچنین تعلق‌گرفتن جایزه نوبل فیزیک سال ۲۰۲۲ به امر مربوط به رایانش کوانتومی، نشان دهنده توجه روزافرون به این شاخه پریار علمی است [۱].

اساس کارکرد رایانه‌های کوانتومی بر مبنای الگوریتم‌های کوانتومی است [۲] و [۳]. در الگوریتم‌های کوانتومی تلاش می‌شود با استفاده از ویژگی‌های مربوط به مکانیک کوانتوم مانند درهم‌تبنیدگی کوانتومی، دستورالعمل‌هایی برای حل مسائل داده شود [۲] و [۳]. تمايز الگوریتم‌های کوانتومی نسبت به الگوریتم‌های کلاسیک، سرعت بالای پردازش محاسباتی است و اولین الگوریتم کوانتومی که سرعت بالای اجرای آن اثبات شد به الگوریتم دش مربوط است [۴] و [۵]. بعد از ارائه الگوریتم دش، تلاش‌های زیادی در جهت حل مسائل با استفاده از الگوریتم‌های کوانتومی صورت گرفته است که از جمله آنها می‌توان به الگوریتم برنشتاین-وزیرانی [۶] و [۷]، الگوریتم سیمون [۸] و الگوریتم شور اشاره کرد. به تازگی الگوریتم تعیین‌یافته دش در [۹] و [۱۰] پیشنهاد گردیده است که اساس این الگوریتم تعیین‌یافته بر مبنای یک فضای هیلبرت چهاربعدی است که درهم‌تبنیدگی یک سامانه کوانتومی را توصیف می‌کند. در این مقاله تلاش گردیده که در چارچوب رایانش کوانتومی آدیاباتیک

این مقاله در تاریخ ۲۱ بهمن ماه ۱۴۰۱ دریافت و در تاریخ ۱۵ مرداد ماه ۱۴۰۲ بازنگری شد.

آرش کریم‌خانی (نویسنده مسئول)، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه تفرش، تفرش، ایران، (email: karimkhani@tafreshu.ac.ir).
امیر قلue، گروه فزیک، دانشگاه تفرش، تفرش، ایران، (email: ghalee@tafreshu.ac.ir)

جدول ۱: خروجی‌های الگوریتم تعیین‌یافته دش.

خروجی	شرط
$ \psi_+\rangle = \alpha \cdot\rangle [\frac{ \cdot\rangle - i \cdot\rangle}{\sqrt{2}}] + \beta \cdot\rangle [\frac{ \cdot\rangle - \cdot\rangle}{\sqrt{2}}]$	$f_+(\cdot) = f_-(\cdot) = 0$
$ \psi_-\rangle = -i\alpha \cdot\rangle [\frac{ \cdot\rangle + i \cdot\rangle}{\sqrt{2}}] - \beta \cdot\rangle [\frac{ \cdot\rangle - \cdot\rangle}{\sqrt{2}}]$	$f_+(\cdot) = f_-(\cdot) = 1$
$ \psi_r\rangle = \alpha \cdot\rangle [\frac{ \cdot\rangle - i \cdot\rangle}{\sqrt{2}}] - \beta \cdot\rangle [\frac{ \cdot\rangle - \cdot\rangle}{\sqrt{2}}]$	$f_r(\cdot) = 0$ $f_r(\cdot) = 1$
$ \psi_l\rangle = -i\alpha \cdot\rangle [\frac{ \cdot\rangle + i \cdot\rangle}{\sqrt{2}}] + \beta \cdot\rangle [\frac{ \cdot\rangle - \cdot\rangle}{\sqrt{2}}]$	$f_r(\cdot) = 1$ $f_r(\cdot) = 0$

بنابراین فضای هیلبرت توصیف‌کننده سامانه مورد نظر به صورت یک فضای چهاربعدی است. با استفاده از این حالت ورودی در [۵] نشان داده شده که خروجی‌های جدول ۱ را خواهیم داشت.

در این مقاله ابتدا نشان داده می‌شود که چهار فرمول مستقل داده شده در [۵] را که در جدول ۱ آمده، می‌توان با یک فرمول کلی نوشت که به صورت (۵) است

$$\begin{aligned} |\Psi_f\rangle &= (-i)^{f(\cdot)} \alpha |\cdot\rangle [\frac{|\cdot\rangle - i(-1)^{f(\cdot)}|\cdot\rangle}{\sqrt{2}}] + \\ &\quad (-1)^{f(\cdot)} \beta |\cdot\rangle [\frac{|\cdot\rangle - |\cdot\rangle}{\sqrt{2}}] \end{aligned} \quad (5)$$

لازم به ذکر است که (۵) در ابتدا توسط نویسنده‌گان این مقاله پیشنهاد شد و اساس ساخت هامیلتونی برای الگوریتم تعیین‌یافته دش است.

در ساخت هامیلتونی برای الگوریتم تعیین‌یافته دش، هامیلتونی‌های ورودی H_I و هامیلتونی خروجی H_f به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۴] و [۱۵]

$$\begin{aligned} H_I &= I - |\Psi_I\rangle\langle\Psi_I| \\ H_f &= I - |\Psi_f\rangle\langle\Psi_f| \end{aligned} \quad (6)$$

که I یک ماتریس واحد همانی 4×4 است. حالا هامیلتونی سامانه به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H(t) = (I - S(t))H_I + S(t)H_f \quad (7)$$

که $S(t)$ یک تابع زمانی دلخواه است که در شرط‌های $S(0) = 0$ و $S(1) = 1$ صدق می‌کند و همچنین اگر $|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ و $|\beta\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ آنگاه نماد $|\alpha\rangle\langle\beta|$ معرف ضرب تانسوری به صورت زیر است

$$|\alpha\rangle\langle\beta| = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} (b_1^* & b_2^*) = \begin{pmatrix} a_1 b_1^* & a_1 b_2^* \\ a_2 b_1^* & a_2 b_2^* \end{pmatrix} \quad (8)$$

با استفاده از ضرب تانسوری، شکل صریح هامیلتونی از (۶) و (۷) به صورت (۹) به دست می‌آید

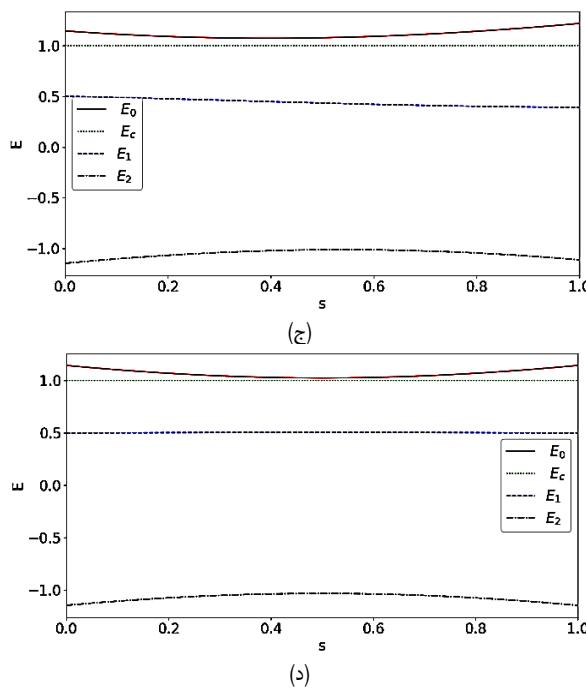
$$H(t) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{|\alpha|^2}{2} & x|\alpha|^2 & \alpha\beta^* y & -\alpha\beta^* y \\ x^*|\alpha|^2 & 1 - \frac{|\alpha|^2}{2} & -i\alpha\beta^* y^* & i\alpha\beta^* y^* \\ \alpha^*\beta y & i\alpha^*\beta y & 1 - \frac{|\beta|^2}{2} & \frac{|\beta|^2}{2} \\ -\alpha^*\beta y^* & -i\alpha^*\beta y & \frac{|\beta|^2}{2} & 1 - \frac{|\beta|^2}{2} \end{pmatrix} \quad (9)$$

که

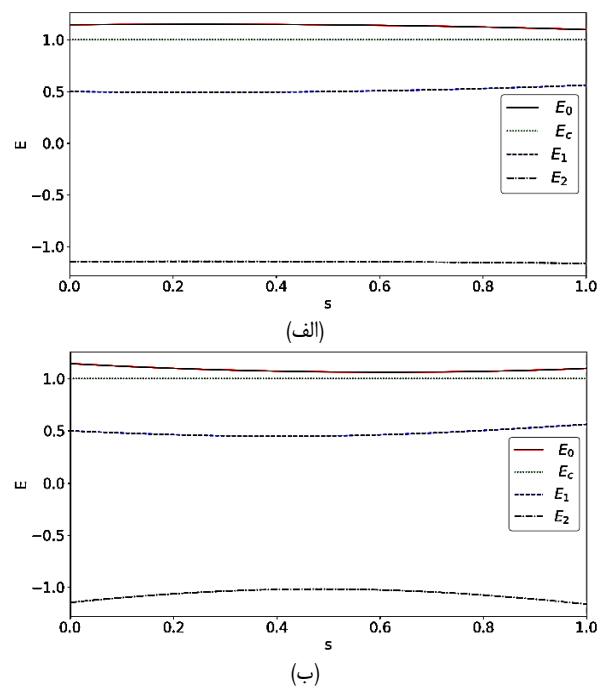
$$x = \frac{i}{\gamma} [[(-1)^{f(\cdot)} + 1]S - 1] \quad (10)$$

که منجر به (۱۷) می‌شود

$$\begin{aligned} q &= \frac{\gamma}{\gamma^2} (|\alpha|^2 - 1) - \frac{1}{\gamma} (|\alpha|^2 - 1) [\frac{|\alpha|^2}{4} - 1 - 4|\alpha|^2|\beta|^2|y|^2 - |\alpha|^2|x|^2] + (1 - \frac{|\alpha|^2}{2}) - 4|y|^2 (1 - \frac{|\alpha|^2}{2}) |\alpha|^2 |\beta|^2 + \\ &\quad |\alpha|^2 |x|^2 (|\alpha|^2 - |\beta|^2) + |\alpha|^2 |\beta|^2 \frac{1}{\gamma} \{[(-1)^{f(\cdot)+1} - 1]i^{f(\cdot)} + 3 + (-1)^{f(\cdot)}\} S - \\ &\quad |\alpha|^2 |\beta|^2 \frac{1}{\gamma} \{(-1)^{f(\cdot)+1} + 2 + \frac{(-1)^{f(\cdot)}}{\gamma} [(-1)^{f(\cdot)} - 1]i^{f(\cdot)+1}\} S \end{aligned} \quad (14)$$



. $f(\cdot) = f(1) = 1$ و (d) $f(\cdot) = 1$ و (c) $f(\cdot) = 0$ و (b) $f(\cdot) = 0$ و (a) $f(\cdot) = 1$



(ب)

جداول ۲ تا ۵ ارائه گردیده است. جداول داده شده کمک می‌کنند دینامیک سامانه در شرایط آدیاباتیک بررسی شود.

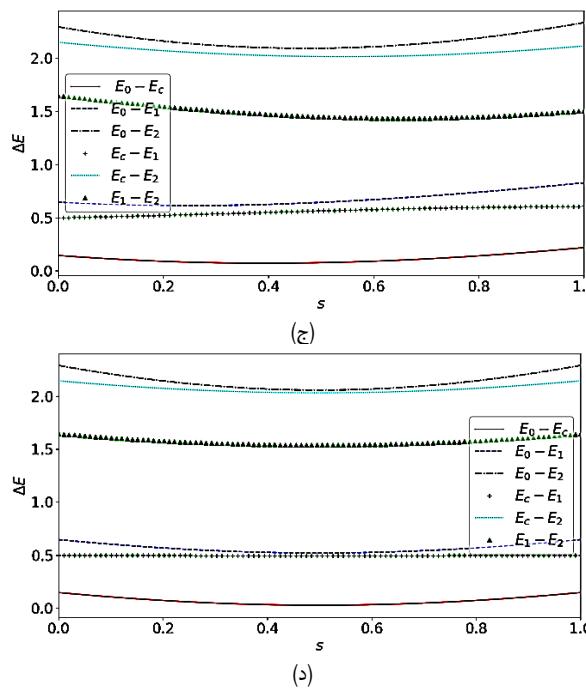
۳- نتیجه‌گیری

در این مقاله تلاش گردید که بهترین حالت اولیه برای الگوریتم تعمیم‌یافته دش پیدا شود. با استفاده از روش آدیاباتیک کوانتمی، یک هامیلتونی به سامانه نسبت داده شد و دینامیک سامانه با استفاده از حالت اولیه بهینه بررسی گردید. با داشتن کمینه اختلاف انرژی بین ترازهای انرژی می‌توان در مورد دینامیک رایانه کوانتمی مورد نظر اطلاعاتی را به دست آورد. از جمله این است که می‌توان گذار بین حالت‌های انرژی را بررسی کرد. از دیگر نتایج جالب این تحقیق، به دست آوردن فرمی فشرده برای حالت‌های خروجی الگوریتم تعمیم‌یافته دش است. همچنین با استفاده از هامیلتونی به دست آمده در این تحقیق مشخص شد که یکی از ترازهای انرژی یک حالت مقید را توصیف می‌کند.

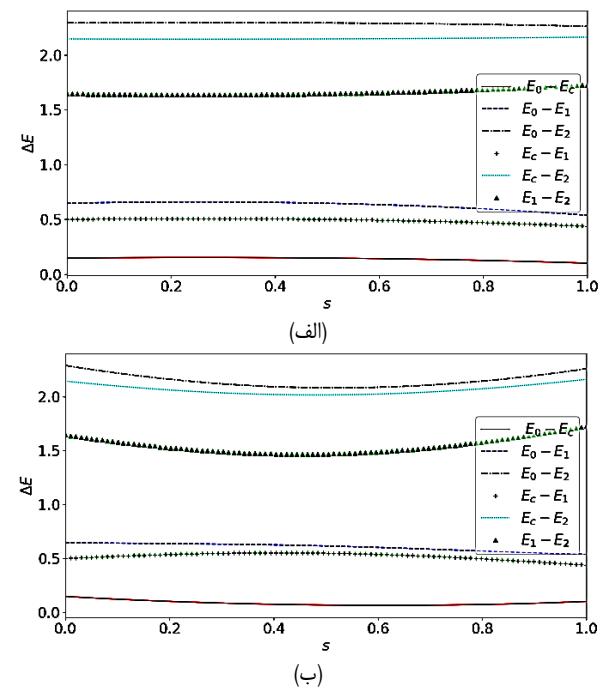
معادله به دست آمده، یک معادله غیرجبری برای U بوده و حل آن فقط به وسیله رایانه ممکن است. بنابراین برای حل عددی آن با رایانه مجبور به انتخاب یک تابع برای S هستیم. بدین منظور مطابق با [۱۴] و [۱۵]، S به صورت $S(t) = t/T$ انتخاب می‌شود که در آن T زمان مشخصه و $0 \leq t \leq T$ است. با روش‌های عددی مشخص می‌گردد که مقدار $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$ ، کمینه است و این حالت برای بررسی دینامیک سامانه انتخاب می‌شود. البته در روش آدیاباتیک کوانتمی، اختلاف بین ترازهای انرژی مهم است [۱۴] و [۱۵] و هرچقدر که اختلاف میان ترازهای انرژی کمتر باشد، زمان گذار سامانه کوانتمی بین دو حالت هم کمتر خواهد بود. در قسمت‌های الف تا ج در شکل ۱، ترازهای انرژی مربوط رسم شده‌اند.

توجه داریم که یک حالت مقید با انرژی منفی وجود دارد. برای مقایسه بهتر در شکل ۲ اختلاف بین ترازهای انرژی رسم شده‌اند. همچنین مقدار کمینه اختلاف انرژی بین ترازهای مختلف انرژی برای حالات مختلف در

$$\begin{aligned}
 & -\sqrt{\frac{-1}{3p}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3q}{\sqrt{p}} \sqrt{\frac{-3}{p}} \right) - \frac{2k\pi}{3} \right] - \frac{1}{2} \sin \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3q}{\sqrt{p}} \sqrt{\frac{-3}{p}} \right) - \frac{2k\pi}{3} \right] \frac{9}{\sqrt{p^2 + \frac{27}{4}q^2 p}} \\
 & \left[\frac{2}{3} - \frac{U}{6} - 4|y|^r + \lambda U |y|^r - \lambda U |x|^r \right] + \sin \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3q}{\sqrt{p}} \sqrt{\frac{-3}{p}} \right) - \frac{2k\pi}{3} \right] \frac{1}{\sqrt{p^2 + \frac{27}{4}q^2 p}} \\
 & \left(\frac{2}{9}(U-1)^r - \frac{1}{3} \left[\frac{U^r}{4} - 1 - 4|y|^r + 4|y|^r U^r - |x|^r U^r \right] \right) - \frac{1}{3}(U-1) \left[\frac{U^r}{2} - 4|y|^r + \lambda |y|^r U - 2|x|^r U \right] - \left(1 - \frac{U}{2} \right) + \\
 & 4|y|^r \left(1 - \frac{U}{2} \right) - 2|y|^r U \left(1 - \frac{U}{2} \right) - 4|y|^r \left(1 - \frac{U}{2} \right) U + |x|^r (4U-1) + \\
 & \frac{1}{2} (2U-3U^r) \left\{ (-1)^{f(\cdot)+1} - 1 \right\} i^{f(\cdot)} + 3 + (-1)^{f(\cdot)} \} S^r - \\
 & \frac{2U-3U^r}{2} \left\{ 2 + (-1)^{f(\cdot)+1} + \frac{(-1)^{f(\cdot)}}{2} \left[(-1)^{f(\cdot)} - 1 \right] i^{f(\cdot)+1} \right\} S - \frac{1}{3}] = .
 \end{aligned} \tag{17}$$



جدول ۴: مقدار کمینه اختلاف انرژی بین ترازهای مختلف انرژی برای $f(\cdot) = f(1) = 1$ و $f(\cdot) = \cdot$



شکل ۲: اختلاف تراز انرژی‌های سامانه برای (الف) $f(\cdot) = f(1) = \cdot$ و (ب) $f(\cdot) = 1$ و (ج) $f(\cdot) = f(1) = 1$ و $f(\cdot) = \cdot$.

جدول ۵: مقدار کمینه اختلاف انرژی بین ترازهای مختلف انرژی برای $f(\cdot) = f(1) = \cdot$

مشخصه تفاضل انرژی ترازها	کمینه اختلاف انرژی
$E_c - E_c$	۰,۰۷۷۸۷
$E_c - E_\gamma$	۰,۶۱۲۷۰
$E_c - E_\tau$	۲,۰۸۹۳۱
$E_\gamma - E_\gamma$	۰,۴۹۹۹۹
$E_\gamma - E_\tau$	۲,۰۱۱۳۷
$E_\tau - E_\tau$	۱,۴۳۳۲۳

جدول ۵: مقدار کمینه اختلاف انرژی بین ترازهای مختلف انرژی برای $f(\cdot) = f(1) = \cdot$

مشخصه تفاضل انرژی ترازها	کمینه اختلاف انرژی
$E_c - E_c$	۰,۰۲۵۹۶۱
$E_c - E_\gamma$	۰,۵۱۹۴۰
$E_c - E_\tau$	۲,۰۵۸۳۸
$E_\gamma - E_\gamma$	۰,۴۹۳۵۳
$E_\gamma - E_\tau$	۲,۰۳۲۴۲
$E_\tau - E_\tau$	۱,۵۳۸۸۹

- [7] E. Bernstein and U. Vazirani "Quantum complexity theory," *SIAM J. Comput.*, vol. 26, no. 5, pp.1411-1473, 1997.
- [8] D. R. Simon, "On The Power of Quantum Computation," in *Proc. of the 35th IEEE Annual Symp. on Foundations of Computer Science*, pp. 116-123 Symposium, Santa Fe, NM, USA, 20-22 Nov. 1994.
- [9] K. Nagata and T. Nakamura, "Some theoretically organized algorithm for quantum computer" *Int. J. Theor. Phys.*, vol. 59, no. 2, pp. 611-621, 2020.
- [10] K. Nagata and T. Nakamura, "Generalization of Deutsch's algorithm" *Int. J. Theor. Phys.*, vol. 59, no. 8, pp. 2557-2661, 2020.
- [11] P. W. Shor, "Algorithms for quantum computations: Discrete log and factoring," *Proc. of the 35th IEEE Annual Symp. on Foundations of Computer Science*, pp. 124-134, Santa Fe, NM, USA, 20-22 Nov. 1994.
- [12] E. Farhi, J. Goldstone, S. Gutmann, and M. Sipser, *Quantum Computation by Adiabatic Evolution*, arXive: quant-ph/001106.
- [13] A. M. Child, E. Farhi, and J. Preskill, "Robustness of adiabatic quantum computation," *Phys. Rev. A*, vol. 65, no. 1, pp. 0123220-01232210, Jan. 2002.

جدول ۳: مقدار کمینه اختلاف انرژی بین ترازهای مختلف انرژی برای $f(\cdot) = f(1) = \cdot$

مشخصه تفاضل انرژی ترازها	کمینه اختلاف انرژی
$E_c - E_c$	۰,۰۶۳۰۷
$E_c - E_\gamma$	۰,۵۳۷۵۷
$E_c - E_\tau$	۲,۰۸۳۰۲
$E_\gamma - E_\gamma$	۰,۴۴۰۳۸
$E_\gamma - E_\tau$	۲,۰۱۷۲۰
$E_\tau - E_\tau$	۱,۴۶۶۷۹

مراجع

- [1] IBM, *IBM Quantum Computing*, <https://www.ibm.com/quantum/>
- [2] M. A. Nielsen and, I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge, University Press, Cambridge, 2000.
- [3] R. Rennie, *Oxford Dictionary of Physics*, 7rd ed., Oxford University Press, Oxford 2015.
- [4] D. Deutsch, "Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer," *Proc. R. Soc. Lond. A.*, vol. 400, no. 1818, pp. 97-117, 1985.
- [5] D. Deutsch and R. Jozsa, "Rapid solution of problems by quantum computation," *Proc. R. Soc. Lond. A.*, vol. 439, no. 1907, pp. 553-558, 1992.
- [6] E. Bernstein and U. Vazirani, "Quantum complexity theory," in *Proc. of the Twenty-Fifth Annual ACM Symp. on Theory of Computing, STOC'93*, pp. 11-20, San Diego, CA, USA, 16-18 May 1993.

امیر قلعه در سال ۱۳۸۱ مدرک کارشناسی فیزیک خود را از واحد علوم و تحقیقات دانشگاه آزاد اسلامی دریافت کرد و در سال ۱۳۸۳ مدرک کارشناسی ارشد خود در گرایش فیزیک نظری را از دانشگاه تبریز اخذ نمود. ایشان در ادامه در سال ۱۳۸۹ مدرک دکتری فیزیک از دانشگاه تهران فارغ التحصیل شدند. تمرکز پژوهشی ایشان بر ذرات بنیادی و کیهان‌شناسی و بهبود الگوریتم‌های کوانتمی است.

- [14] S. Das, R. Kobes, and G. Kunstatter, "Adiabatic quantum computation and Deutsch's algorithm" *Phys. Rev. A*, vol. 65, no. 6, pp.0623100-0623107, Jun. 2002.
- [15] T. Albash and D. A. Lidar "Adiabatic quantum computation", *Rev. Mod. Phys.*, vol. 90, no. 1, pp. 0150020-0150035, Jan./Mar. 2018.

آرش کریم‌خانی مدرک کارشناسی مهندسی برق در گرایش مخابرات خود را در سال ۱۳۸۳ از دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی دریافت کرد و در سال ۱۳۸۵ کارشناسی ارشد مهندسی برق در گرایش الکترونیک را در دانشگاه تربیت مدرس به انجام رساند و در ادامه در سال ۱۳۸۹ فارغ التحصیل دکتری برق در گرایش الکترونیک شد. زمینه‌های تحقیقاتی مورد علاقه ایشان عبارتند از: افزارهای الکترونیک، بلورهای فوتوالکترونیک، سلول‌های خورشیدی و کامپیوترهای کوانتمی.