



پژوهش‌های نوین در تصمیم‌گیری

دوره ۵، شماره ۱، بهار ۱۳۹۹، صص ۱۴۱-۱۶۹

الگوریتمی جدید برای پیدا کردن نقاط بهینه پارتو در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه

فرشته اکبری^۱، اسماعیل خرم^۲، مهرداد غزنوی^{۳*}

۱. دانشجوی دکتری، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

۲. استاد تمام دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

۳. دکتری تحقیق در عملیات، استادیار دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

تاریخ پذیرش: ۱۶ / ۱ / ۱۳۹۹

تاریخ دریافت: ۲۲ / ۷ / ۱۳۹۸

چکیده

در این مقاله یک روش اسکالرسازی اصلاح‌شده برای بدست آوردن مجموعه نقاط پارتو در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه مورد بررسی قرار می‌گیرد. روش پیشنهادی، تعمیمی از روش‌های تقاطع مرزی نرمال محدودشده و پاسکوتی-سرافینی می‌باشد. در ابتدا، مساله بهینه‌سازی مربوط به روش اصلاح‌شده را بررسی می‌کنیم و سپس الگوریتمی برای بدست آوردن مجموعه نقاط پارتو ارائه می‌دهیم. در ادامه، روابط بین جواب‌های بهینه مساله اسکالرسازی و جواب‌های کارا (ضعیف، سره) مسائل بهینه‌سازی چندهدفه را بررسی می‌کنیم. در واقع شرایط لازم برای جواب‌های کارا (ضعیف، سره) مسائل بهینه‌سازی چندهدفه را بدست می‌آوریم. نتایج حاصل شده بدون شرط تحدب ناحیه شدنی مساله چندهدفه برقرار می‌باشند. در ادامه یک الگوریتم جدید برای تقریب زدن مرز پارتوی مسائل چندهدفه ارائه می‌دهیم. چندین مثال را به کمک الگوریتم ارائه شده حل و نتایج را با روش‌های موجود مقایسه می‌کنیم. نتایج حاصله نشان از کارایی رویکرد پیشنهاد شده نسبت به روش‌های معروف موجود دارد.

کلمات کلیدی: مساله بهینه‌سازی چندهدفه، اسکالرسازی، نرمال‌سازی، نقاط پارتو، جواب‌های کارای سره.

۱- مقدمه

اغلب برای مدل کردن و حل مسائل علوم مهندسی با چندین معیار، از مبحث بهینه‌سازی

E-mail: ghaznavi@shahroodut.ac.ir

* نویسندهٔ مسؤل مقاله



چندهدفه^۱ استفاده زیادی می‌شود. همچنین در زمینه‌های پزشکی، اقتصادی، زنجیره تامین، صنعت برق و غیره کاربردهای زیادی از مسائل بهینه‌سازی چندهدفه دیده می‌شود [۵-۱]. روش‌های حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه، به روش‌هایی که در آن تصمیم‌گیرنده^۲ هیچ دخالتی در روند حل مساله ندارد و روش‌هایی که اطلاعات ترجیحی توسط تصمیم‌گیرنده به صورت‌های مختلفی اعمال می‌شود، تقسیم‌بندی می‌شوند که دسته دوم خود شامل روش‌های پیشینی^۳، پسینی^۴ و تعاملی^۵ می‌باشد [۶]. مسائل بهینه‌سازی چندهدفه، بر خلاف مسائل تک‌هدفه، اغلب دارای جواب‌های بهینه متنوعی هستند که تصمیم‌گیرنده می‌تواند بهترین جواب را انتخاب کند. در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه، به دلیل تعارض بین توابع هدف، اغلب نمی‌توانیم جوابی را پیدا کنیم که تمام توابع هدف را بطور هم‌زمان بهینه کند. بنابراین پارتو^۱ مفهوم خاصی از بهینگی که به بهینگی پارتو معروف است، را ارایه داد [۷]. پس از آن روش‌های زیادی برای پیدا کردن نقاط پارتو (کارا) مطرح شد [۸-۱۴]. روش مجموع وزن‌دار^۶ برای تولید مجموعه نقاط پارتو در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه محب ارایه شد [۹]. همچنین، روش ϵ -محدودیت^۸ برای بهینه‌سازی چندهدفه بدون شرط تحب مطرح شد که با توجه به ساده بودن پیاده‌سازی این روش، کاربرد زیادی در حل مسائل مهندسی دارد [۱۵-۱۶]. به‌علاوه، روش پاسکلوتی-سرافینی^۹ یکی دیگر از روش‌های کارا برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه است که کاربرد فراوانی در مسائل مهندسی دارد [۱۷]. روش محدودیت انعطاف‌پذیر^{۱۰} در سال ۲۰۰۲ توسط ارگات و ریان^{۱۱} مطرح شد که روشی مناسب برای پیدا کردن جواب‌های کارای سره است [۱۸]. روش تقاطع مرزی نرمال^{۱۲} به‌منظور تولید نقاط مرزی پارتو با توزیع نزدیک به توزیع یکنواخت ارایه شد [۱۹]. این روش برمبنای گرادیان است. روش محدودیت نرمال^{۱۳} یکی از روش‌ها برای بدست آوردن جواب‌های کارا با توزیع یکنواخت روی مرز پارتو در مسائل چندهدفه است [۲۰]. این روش نسبت به روش تقاطع مرزی نرمال تمایل کمتری به تولید نقاط غیرپارتو دارد. روش تقاطع مرزی نرمال اصلاح شده^{۱۴} در سال ۲۰۱۲ به‌منظور تولید مرز پارتو با سرعت بالا و همچنین کاهش هزینه محاسباتی در مسائل بهینه‌سازی دوهده مطرح شد [۲۱]. روش‌های محدودیت وزن‌دار^{۱۵} و مخروطی^{۱۶} برای تقریب زدن مرز پارتو در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه غیرخطی و نامحذب



مطرح شده است [۲۲-۲۳]. در سال ۲۰۱۵، روش تقاطع مرزی نرمال محدود شده^{۱۷} توسط قانع کنفی و خرم^{۱۸} به منظور تولید تمام جواب‌های کارا با توزیع نزدیک به توزیع یکنواخت برای مسائل بهینه‌سازی چندهدفه با مرز پارتو محدب با انحنای غیر یکنواخت و نامحدب مطرح گردید [۲۴].

در این مقاله، روش اصلاح شده‌ای برای بدست آوردن مجموعه نقاط پارتو در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه را مطرح می‌کنیم. در این روش، بعد از پیدا کردن نقاط ایده‌آل و نقاط لنگر، در هر مرحله پوسته محدب حاصل از نقاط لنگر را تشکیل می‌دهیم و با کمک یک روش اسکالرسازی جدید نقاط کارای روی مرز پارتو را پیدا می‌کنیم. همچنین به بررسی رابطه بین جواب‌های کارا (ضعیف، سره) در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه و جواب‌های بهینه مساله تک‌هدفه مربوط به روش اصلاح شده می‌پردازیم. نشان می‌دهیم که برخلاف بسیاری از روش‌های موجود، این روش می‌تواند جواب‌های کارای سره که در بهینه‌سازی چندهدفه از اهمیت زیادی برخوردار هستند را نیز تولید کند. این روش بدون لحاظ کردن شرط تحدب بیان می‌شود.

این مقاله در ۷ بخش تنظیم شده است. در بخش ۲، برخی از مفاهیم و مبانی اولیه مربوط به مسائل بهینه‌سازی چندهدفه را مطرح می‌کنیم. در بخش ۳، مروری بر روش تقاطع مرزی نرمال محدود شده داریم. در بخش ۴ به معرفی روش پاسکلوتی-سرافینی می‌پردازیم. در بخش ۵، به معرفی روش پیشنهادی برای تولید نقاط واقع بر مرز پارتو می‌پردازیم و رابطه بین جواب‌های بهینه مساله تک‌هدفه پیشنهادی و جواب‌های کارا (ضعیف، سره) مساله بهینه‌سازی چندهدفه را در قالب چند قضیه مطرح می‌کنیم. در بخش ۶، الگوریتم مربوط به این روش را با جزئیات کامل بیان می‌کنیم. در این راستا توضیحات لازم را ارائه می‌دهیم. در زیر بخش نتایج عددی، کارایی الگوریتم را با چند مساله بهینه‌سازی دو و سه هدفه نشان می‌دهیم. در بخش ۷ به بررسی نتایج حاصل از این روش می‌پردازیم و منابع مورد استفاده در این مقاله را معرفی می‌کنیم.



۲- مفاهیم و تعاریف اولیه

فرض کنید $y^1, y^2 \in \mathbb{R}^p$. در این صورت $y^1 \leq y^2$ اگر و تنها اگر برای هر اندیس $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ داشته باشیم، $y_i^1 \leq y_i^2$. اگر $y^1 \leq y^2$ و تنها اگر $y^1 \leq y^2$ و $y^1 \neq y^2$. همچنین $y^1 < y^2$ اگر و تنها اگر به ازای هر اندیس $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ $y_i^1 < y_i^2$ باشد. حال مخروط ترتیبی \mathbb{R}_{\geq}^p به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbb{R}_{\geq}^p = \{y \in \mathbb{R}^p : y \geq 0\}.$$

در حالت کلی، یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{MOP: } \min_{s.t. x \in X} f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)),$$

که در آن X مجموعه شدنی و ناتهی در فضای تصمیم‌گیری \mathbb{R}^n و $f: X \rightarrow \mathbb{R}^p$ با $p \geq 2$ تابع هدف است. تصویر X تحت تابع f را با $Y = \{f(x) : x \in X\}$ نشان می‌دهند که مجموعه شدنی در فضای هدف \mathbb{R}^p می‌باشد. در این مقاله، فرض می‌کنیم $Y = f(X)$ از پایین کراندار باشد.

اگر به ازای هر اندیس $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ یک جواب بهینه برای مساله $\arg \min_{x \in X} f_i(x)$ باشد. آنگاه به نقطه $y_i^* := f(x_i^*) = f_i^*, \forall i = 1, 2, \dots, p$ در فضای هدف، نقطه لنگر می‌گویند. پوسته محدب حاصل از نقاط لنگر در فضای هدف را پوسته محدب مینیمم‌های تکی توابع هدف^{۱۱} می‌نامیم و با $CHIM$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۲. [۹]. جواب شدنی $\hat{x} \in X$ را یک جواب کارا^{۱۲} (بهینه پارتو) برای مساله بهینه‌سازی چندهدفه MOP گویند، هرگاه هیچ $x \in X$ وجود نداشته باشد که $f(x) \leq f(\hat{x})$.

علاوه بر مفهوم کارایی، تعریف کارایی ضعیف^{۱۱} که تعریفی ضعیف‌تر از کارایی است به صورت زیر بیان می‌شود.

تعریف ۲-۲. [۹]. جواب شدنی $\hat{x} \in X$ را یک جواب کارایی ضعیف (بهینه پارتو ضعیف) برای مساله MOP گوئیم، هرگاه هیچ $x \in X$ وجود نداشته باشد که $f(x) < f(\hat{x})$. با توجه به تعریف جواب کارا درمی‌یابیم که نمی‌توان یکی از توابع هدف را بهبود بخشید، مگر این بهبود با بدتر شدن حداقل یکی دیگر از توابع هدف همراه باشد. در بعضی مواقع این



بده و بستان^{۲۲} بین توابع هدف کران‌دار است. جواب‌های کارا همراه با بده و بستان کران‌دار از اهمیت زیادی برخوردارند که به این جواب‌ها، کارای سره^{۲۳} می‌گویند. تعاریف متفاوتی از کارایی سره مطرح شده‌است [۲۷-۲۵]. در ادامه جواب کارای سره به مفهوم جفرین^{۲۴} [۲۷] را بیان می‌کنیم.

تعریف ۲-۳. [۲۷]. جواب شدنی $\hat{x} \in X$ را یک جواب کارای سره برای مساله MOP گوئیم، هرگاه \hat{x} کارا باشد و یک عدد حقیقی $M > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر اندیس $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ و هر $x \in X$ با $f_i(x) < f_i(\hat{x})$ ، حداقل یک اندیس j با $j \neq i$ ،

$$\text{موجود باشد بطوریکه } f_j(\hat{x}) < f_j(x) \text{ و } \frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\hat{x})} \leq M$$

قابل ذکر است که مجموعه جواب‌های کارا، کارای ضعیف و کارای سره را به ترتیب با X_{PE} ، X_{WE} ، X_E نمایش می‌دهیم. همچنین رابطه زیر بین مجموعه جواب‌های بالا برقرار است:

$$X_{PE} \subseteq X_E \subseteq X_{WE}.$$

تعریف ۲-۴. [۹]. نقطه $y^l = (y_1^l, y_2^l, \dots, y_p^l)$ که به صورت $y_k^l = \min_{x \in X} f_k(x)$ برای $k = 1, 2, \dots, p$ تعریف می‌شود را یک نقطه ایده‌آل^{۲۵} برای مساله MOP گوئیم. علاوه، فرض کنید $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ با $\alpha_i > 0$ ، $i = 1, 2, \dots, p$. در این صورت به بردار u با $u = y_k^l - \alpha_k$ ، $k = 1, 2, \dots, p$ نقطه فوق ایده‌آل^{۲۶} می‌گویند.

تعریف ۲-۵. [۹]. نقطه $y^N = (y_1^N, y_2^N, \dots, y_p^N)$ با $y_k^N = \max_{x \in X_E} f_k(x)$ برای $k = 1, 2, \dots, p$ را نقطه حضیض^{۲۷} برای مساله MOP می‌گویند.

تعریف ۲-۶. معیار سنجش کیفیت برای تقریب زدن مرز پارتو [۲۴].

فرض کنید P_1, \dots, P_n هر کدام مجموعه نقاط پارتو تولید شده با الگوریتم‌های متفاوتی باشد و $U = \cup_{i=1}^n P_i$ حال فاصله نسلی مجموعه بصورت زیر تعریف می‌شود

$$GD_i = \frac{\sqrt{\sum_{q \in P_i} (d_q^{P_i})^2}}{|P_i|}, \forall i = 1, \dots, n,$$

که در آن $d_q^{P_i} = \min_{h \in U} d(q, h)$ مینیم فاصله‌ی بین دو جواب پارتو می‌باشد و $|P_i|$



عدد اصلی مجموعه P_i است. اگر $GD_i < GD_j, i, j = 1, \dots, n$ آنگاه تقریب مجموعه P_i بهتر از تقریب P_j است.

۳- مروری بر روش تقاطع مرزی نرمال محدود شده

در روش تقاطع مرزی نرمال محدود شده [۲۴] با استفاده از یک رویکرد پسینی و توزیع یکنواخت پارامترها، به تولید یکنواخت نقاط مرزی پارتو برای مسائل بهینه‌سازی چندهدفه با مرز پارتو محدب و نامحدب پرداخته می‌شود. این روش مستقل از مقیاس‌های وابسته به توابع هدف است. در این روش ابتدا تمام توابع هدف مربوط به مساله چندهدفه نرمال‌سازی می‌شوند، بطوریکه هر تابع هدف مقادیر خود را بین صفر و یک اختیار می‌کنند. سپس پوسته محدب حاصل از مینیمم‌های تکی توابع هدف $CHIM_1^1$ تعیین و در هر مرحله بروز رسانی می‌شود. اساس این روش بر مبنای تغییر پوسته محدب $CHIM_1^1$ در هر مرحله است. k امین مرحله از این روش، زیرپوسته‌های محدب از مینیمم‌های تکی توابع هدف عبارتند از: $CHIM_1^k, CHIM_2^k, \dots, CHIM_{p-k-1}^k$.

که در آن p تعداد توابع هدف در مساله MOP است.

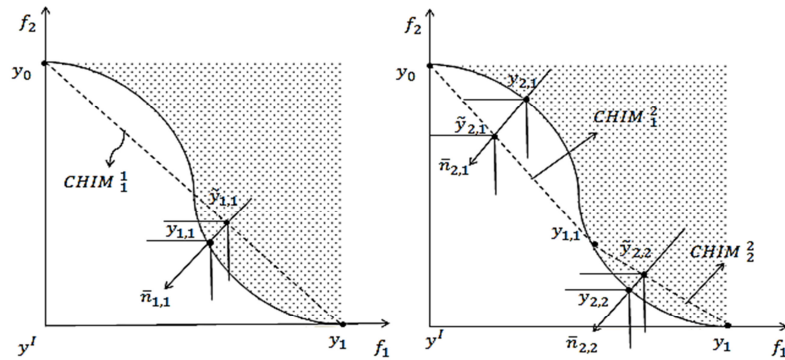
در مرحله اول با توجه به شکل ۱-۳ قسمت الف، بعد از تعیین پوسته $CHIM_1^1$ یک نقطه میانی روی $CHIM_1^1$ انتخاب می‌شود و سپس مخروط \mathbb{R}_{\geq}^p با شروع از نقطه انتخاب شده در امتداد جهت شبه نرمال $\bar{n}_{1,1}$ برای تولید نقاط پارتو پیش می‌رود. در مرحله بعد، با توجه به شکل ۱-۳ قسمت ب، با کمک نقطه پارتو حاصل شده $\gamma_{1,1}$ و دو نقطه لنگر γ_0 و γ_1 ، پوسته محدب $CHIM_1^1$ بروز رسانی می‌شود بطوریکه زیر پوسته‌های $CHIM_1^2$ و $CHIM_2^2$ حاصل شوند. حال هر پوسته محدب تولید شده را در نظر می‌گیریم، یک نقطه میانی روی هر زیرپوسته انتخاب می‌کنیم و سپس با استفاده از جهت‌های $\bar{n}_{2,1}$ و $\bar{n}_{2,2}$ نقاط پارتو متناظر با هر زیرپوسته را بدست می‌آوریم. تعداد نقاط پارتو بدست آمده برای مساله دوهدفه در k امین مرحله برابر با $2^k - 1$ است. در حالت کلی تعداد نقاط پارتو تولید شده از این روش در مرحله k ام برای مساله بهینه‌سازی چندهدفه برابر با $\frac{p^k - 1}{p - 1}$ است.

مساله تقاطع مرزی نرمال محدود شده وابسته به زیر پوسته محدب $CHIM_i^k$ ، $i = 1, 2, \dots, p^{k-1}$ در مرحله k ام به صورت زیر بیان می‌شود:



$$\begin{aligned}
 &MP: \max t_{k,i} \\
 &s. t. \\
 &\tilde{y}_{k,i} + t_{k,i}\bar{n}_{k,i} \in f(X) \cap (\tilde{y}_{k,i} - \mathbb{R}_{\geq}^p)
 \end{aligned} \tag{۲}$$

$t_{k,i} \in \mathbb{R}$,
 که در آن $\tilde{y}_{k,i} = \frac{1}{p}\Phi_{k,i}e$ با $e = (1, \dots, 1)^T$ بردار واحد و
 $\Phi = (f(x_1^*), f(x_2^*), \dots, f(x_p^*))$ یک ماتریس $p \times p$ بطوریکه
 $x_i^* = \arg \min_{x \in X} f_i(x)$ است. $\bar{n}_{k,i} = y_{k,i}^l - \tilde{y}_{k,i}$ که در آن $y_{k,i}^l$ و $\tilde{y}_{k,i}$ بترتیب نقطه
 ایده‌آل و نقطه میانی دلخواه روی $CHIM_i^k$ در مرحله k و در زیرپوسته i می‌باشد.



شکل ۳-۱. روش تقاطع مرزی نرمال محدود شده در فضای دوهدفه

۴-مروری بر روش اسکالرسازی پاسکلوتی-سرافینی

روش اسکالرسازی پاسکلوتی-سرافینی با مساله اسکالرسازی $PS(a, r, K)$ یکی از
 روش‌های کارا برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه است. مساله $PS(a, r, K)$ متناظر با
 MOP بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
 &PS(a, r, K): \min t \\
 &s. t. a + tr - f(x) \in K \\
 &x \in X, t \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$



که در آن K یک مخروط ناتهی، راسی و محدب است و همچنین پارامترهای $a, r \in \mathbb{R}^p$ دلخواه می‌باشد. در این روش ابتدا پارامترهای a, r و مخروط K انتخاب می‌شوند. همان‌گونه که در شکل ۴-۱ نشان داده شده است، برای حل یک مساله چندهدفه، مخروط $-K$ در جهت $-r$ در امتداد خط $a + tr$ حرکت داده می‌شود تا مجموعه $f(X) \cap (a + tr - K)$ به سمت تهی شدن میل کند.

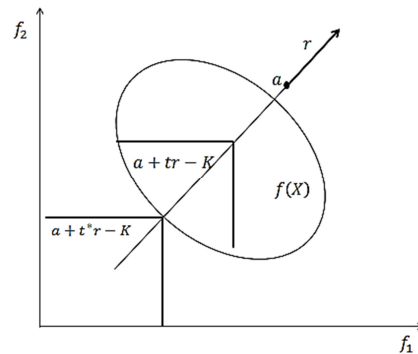
در مساله بالا فرض کنید $K = \mathbb{R}_{\geq}^p$. در این صورت مساله $PS(a, r, K)$ را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$PS(a, r): \min t$$

$$S. t. a_i + tr_i \leq f_i(x), \quad \forall i = 1, 2, \dots, p$$

$$x \in X, t \in \mathbb{R}.$$

در ادامه دو قضیه برای مساله $PS(a, r)$ بیان می‌کنیم. این دو قضیه رابطه بین جواب‌های کارا و کارای ضعیف مساله MOP و جواب‌های بهینه مساله $PS(a, r)$ را نشان می‌دهد [ه‌و ۱۷].



شکل ۴-۱. روش $PS(a, r, K)$ برای یک مساله دوهدفه

قضیه ۴-۱ مساله $PS(a, r)$ را در نظر بگیرید.

۱. اگر (\hat{x}, \hat{t}) یک جواب بهینه برای مساله $PS(a, r)$ باشد، در این صورت \hat{x} یک جواب کارای ضعیف برای MOP است.

۲. اگر (\hat{x}, \hat{t}) یک جواب بهینه اکید برای مساله $PS(a, r)$ باشد، در این صورت \hat{x} یک



جواب کارا برای MOP است.

قضیه ۲-۴ مساله $PS(a, r)$ را در نظر بگیرید.

۱. اگر \hat{x} یک جواب کارای ضعیف برای MOP باشد. در این صورت $(\hat{x}, 0)$ یک جواب بهینه برای مساله $PS(a, r)$ با $a = f(\hat{x})$ و $r \in \text{int}(\mathbb{R}_{\geq}^p)$ است.
۲. اگر \hat{x} یک جواب کارای ضعیف برای MOP باشد. در این صورت $(\hat{x}, 0)$ یک جواب بهینه برای مساله $PS(a, r)$ با $a = f(\hat{x})$ و $r \in \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{0\}$ است.

قابل ذکر است که در مسائل چندهدفه، جواب‌های کارای سره به دلیل بده و بستان کران‌دار از اهمیت زیادی برخوردارند و جواب‌های کارای غیرسره به دلیل در نظر نگرفتن حداقل یکی از توابع هدف برای تصمیم گیرندگان جالب نیستند. تکنیک اسکالرسازی ارایه شده در روش پاسکلوتی-سرافینی کارایی سره جواب‌ها را تضمین نمی‌کند. در بخش بعدی، برای این مشکل یک تکنیک اسکالرسازی جدید را معرفی می‌کنیم. علاوه بر این، مجموعه نقاط مرزی پارتو با توزیع نزدیک به توزیع یکنواخت تولید می‌شوند. در واقع، توزیع غیر یکنواختی از نقاط را در نزدیکی نقاط لنگر می‌توان مشاهده کرد که در این باره با ارایه مثال عددی در بخش ۶، توضیح بیشتری خواهیم داد. در خصوص نرمال‌سازی در این روش مرز پارتو باید دارای نقطه حضيض با مقدار کراندار باشد؛ در غیر این صورت نمی‌توان از تکنیک نرمال‌سازی بکار رفته در این روش استفاده کرد.

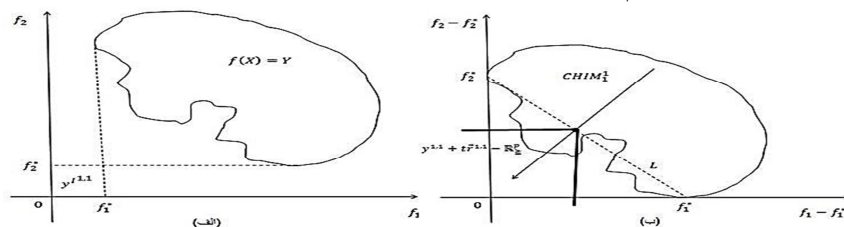
۵- بررسی روش پیشنهادی

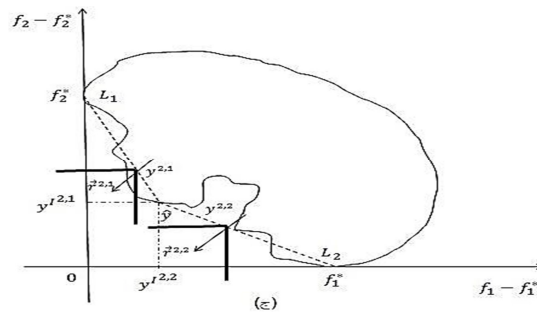
در این بخش به بررسی تکنیکی برای تولید مجموعه نقاط مرزی پارتو در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه می‌پردازیم. این روش به تولید نقاط مرزی پارتو و پارتو ضعیف محدود شده است. همچنین شرایط لازم برای بدست آوردن جواب‌های پارتو سره را با کمک این روش بیان می‌کنیم. در این مقاله فضای معیار مسائل چندهدفه مورد بررسی را از پایین کران‌دار فرض می‌کنیم. بدون از دست دادن کلیت و قبل از بیان الگوریتم روش ارایه شده، پارامترهای مطرح شده در روش پیشنهادی را طبق شکل ۵-۱ شناخته فرض کنید. در بخش ۶ با جزئیات بیشتر به موضوع می‌پردازیم.

برای بررسی هندسی، شکل ۵-۱ قسمت الف و ب را در نظر بگیرید. در فضای معیار



$f(X) = Y$ مخروط \mathbb{R}_{\geq}^p را در امتداد خط $y^{1,1} + t\vec{r}^{1,1}$ متحرک و ناحیه بین پاره خط L (پاره خط واصل بین نقاط f_1^* و f_2^*) و فضای معیار Y که در شکل ۵-۱ قسمت ب مشخص شده را پوسته محدب $CHIM_1^1$ می‌نامیم. به‌منظور تولید نقاط مرزی پارتو ابتدا نقطه را روی پاره خط L انتخاب می‌کنیم. سپس با استفاده از نقطه $y^{1,1}$ روی زیرپوسته $CHIM_1^1$ که به دلخواه انتخاب شده و نقطه ایده‌آل $y^{1,1}$ بردار جهت $\vec{r}^{1,1}$ را در مرحله ۱ و در زیرپوسته ۱ تعیین می‌کنیم. در فضای Y با در نظر گرفتن بردار متغیرهای کمکی $s \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ یک بهم‌ریختگی ایجاد می‌کنیم و این بهم‌ریختگی را با در نظر گرفتن جریمه در تابع هدف مساله مربوط به این تکنیک جبران می‌کنیم و فضای جدید را فضای معیار انعطاف‌پذیر می‌نامیم. حال به جای در نظر گرفتن مخروط \mathbb{R}_{\geq}^p در امتداد خط $y^{1,1} + t\vec{r}^{1,1}$ در فضای Y آن‌ها را در فضای انعطاف‌پذیر شده Y در نظر می‌گیریم و جستجو را با کمک مخروط \mathbb{R}_{\geq}^p در امتداد $y^{1,1} + t\vec{r}^{1,1}$ برای تولید نقطه مرزی پارتو شروع می‌کنیم و نقطه تولید شده را \hat{y} می‌نامیم. در مرحله دوم، با توجه شکل ۵-۱ قسمت ج ابتدا با کمک نقطه پارتو \hat{y} ، پوسته محدب $CHIM_1^1$ را بروز رسانی می‌کنیم و دو زیرپوسته $CHIM_1^2$ و $CHIM_2^2$ تولید می‌شود. حال روی زیرپوسته $CHIM_1^2$ در واقع روی خط L_1 نقطه $y^{2,1}$ را انتخاب می‌کنیم و سپس مخروط \mathbb{R}_{\geq}^p را در امتداد خط $y^{2,1} + t\vec{r}^{2,1}$ در فضای انعطاف‌پذیر شده حرکت می‌دهیم تا نقطه‌ای واقع بر مرز پارتو حاصل شود. بطور مشابه برای زیرپوسته $CHIM_2^2$ همین روند را پیاده سازی می‌کنیم. در مرحله سوم نیز هر زیرپوسته را با کمک نقطه پارتو مرزی حاصل از همان زیرپوسته بروز رسانی می‌کنیم و این روند را ادامه می‌دهیم تا مجموعه نقاط مرزی پارتو بدست آید.





شکل ۵-۱: روش پیشنهادی در فضای دوهدفه

به عبارت دیگر هدفمان در این روش ماکسیم کردن متغیر t در فضای انعطاف شده در هر زیرپوسته می‌باشد. به همین منظور در هر زیرپوسته به دنبال حل مساله تک‌هدفه متناظر با مساله چندهدفه هستیم که به صورت زیر فرموله می‌شود

$$NM(\mu, s, r): \max t - \sum_{i=1}^p \mu_i s_i$$

s. t.

$$y + t\vec{r} \geq f(x) + s$$

$$x \in X,$$

که در آن $x \in X$, $t \in \mathbb{R}$, $r \in -\mathbb{R}_{\geq}^p$ و بردار $s \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ است. همچنین μ_i ها وزن‌های

نامنفی هستند که در تابع هدف به ازای هر متغیر کمکی افزوده s_i در نظر گرفته می‌شوند.

مساله فوق یک مساله تک‌هدفه اصلاح‌شده از مساله (۲) است. با استفاده از تکنیک به‌کار برده شده در روش تقاطع مرزی نرمال محدود شده قادر به تولید نقاط پارتو (ضعیف) هستیم. در ادامه ثابت می‌کنیم که با کمک مساله $NM(\mu, s, r)$ قادر به تولید نقاط کارا، کارای ضعیف و کارای سره خواهیم بود.

نقطه ایده‌آل y^* را در این مقاله خارج از ناحیه شدنی در نظر می‌گیریم. زیرا در غیر این صورت مجموعه تمام نقاط مرزی پارتو شامل یک عضو می‌باشد که همان نقطه ایده‌آل است. این روش برای تولید مجموعه نقاط مرزی پارتو در مسائل چندهدفه با فضای معیار نامحدب، ناهموار و گسسته کاربرد دارد. در این راستا مثال‌هایی را در بخش ۶ بررسی خواهیم کرد.



در ادامه، براساس مساله تک‌هدفه $NM(\mu, s, r)$ ، شرایط لازم برای جواب‌های بهینه پارتو (ضعیف، سره) را بررسی می‌کنیم. در ادامه این شرایط را تحت عنوان قضیه بیان می‌کنیم.

قضیه ۱-۵ فرض کنید $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{t})$ یک جواب بهینه برای مساله $NM(\mu, s, r)$ با $\mu \geq 0$ باشد. در این صورت \hat{x} یک جواب کارای ضعیف برای مساله MOP است.

اثبات. فرض کنید $\hat{x} \notin X_{WE}$ در این صورت $x \in X$ وجود دارد بطوریکه $f(x) < f(\hat{x})$ ، بعبارتی دیگر بردار $d \in \text{int}(\mathbb{R}_{\geq}^p)$ وجود دارد که برای هر اندیس $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ داریم:

$$f_i(x) + d_i = f_i(\hat{x}). \quad (4)$$

با توجه به فرض قضیه، چون $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{t})$ یک جواب بهینه برای مساله $NM(\mu, s, r)$ است، بنابراین برای هر اندیس

$i \in \{1, 2, \dots, p\}$ می‌توان نوشت:

$$y_i + \hat{t}r_i \geq f_i(\hat{x}) + \hat{s}_i. \quad (5)$$

حال بنا به روابط (۴) و (۵) می‌توان نتیجه گرفت:

$$y_i + \hat{t}r_i \geq f_i(x) + \hat{s}_i + d_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, p.$$

از آنجایی که $d > 0$ است، پس عدد حقیقی $\varepsilon > 0$ وجود دارد بطوریکه $d + \varepsilon r \in \text{int}(\mathbb{R}_{\geq}^p)$

بنابراین برای هر اندیس $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ می‌توان چنین نتیجه گرفت که

$$y_i + \hat{t}r_i + \varepsilon r_i \geq f_i(x) + \hat{s}_i + d_i + \varepsilon r_i.$$

در این صورت $(x, \hat{s}, \hat{t} + \varepsilon)$ با توجه به رابطه بالا یک جواب شدنی برای مساله

$NM(\mu, s, r)$ با $\hat{t} + \varepsilon > \hat{t}$ است که با بهینه بودن $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{t})$ در تناقض است.

در قضیه زیر با در نظر گرفتن یکتایی جواب بهینه برای مساله $NM(\mu, s, r)$ نتایج زیر برای جواب‌های کارا حاصل می‌شود.

قضیه ۲-۵ فرض کنید $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{t})$ یک جواب شدنی برای مساله $NM(\mu, s, r)$ باشد. در

این صورت،

۱. اگر $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{t})$ یک جواب بهینه یکتا برای مساله $MP(\mu, s, r)$ با $\mu \geq 0$ باشد. آنگاه \hat{x}

یک جواب کارا برای مساله MOP است.



۲. اگر $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{t})$ یک جواب بهینه برای مساله $MP(\mu, s, r)$ با $\mu > 0$ و $\hat{s} > 0$ باشد. در این صورت \hat{x} یک جواب کارا برای مساله MOP است.

اثبات. ۱. فرض کنید یک جواب شدنی $x \in X$ وجود دارد بطوریکه $f(x) \leq f(\hat{x})$ بعبارتی دیگر

$f(x) \leq f(\hat{x})$ با $f(x) \neq f(\hat{x})$. در این صورت به آسانی می‌توان ثابت کرد که (x, \hat{s}, \hat{t}) یک جواب شدنی برای مساله است. از آنجایی که مقدار تابع هدف برای (x, \hat{s}, \hat{t}) با مقدار تابع هدف برای $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{t})$ با هم برابر است. با توجه به یکتایی جواب بهینه می‌توان نتیجه گرفت که $x = \hat{x}$. حال می‌توان نتیجه گرفت $\hat{x} \in X_E$.

۲. فرض کنید \hat{x} یک جواب کارا نباشد. در این صورت $x \in X$ وجود دارد بطوریکه،

$$f_i(x) \leq f_i(\hat{x}) \quad \forall i = 1, 2, \dots, p, \quad (6)$$

و اندیس $t \in \{1, 2, \dots, p\}$ وجود دارد بطوریکه،

$$f_t(x) < f_t(\hat{x}). \quad (7)$$

چون $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{t})$ یک جواب بهینه برای مساله $NM(\mu, s, r)$ است لذا داریم:

$$y_i + \hat{t}r_i \geq f_i(\hat{x}) + \hat{s}_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, p,$$

حال بنابه روابط (۶) و (۷) داریم:

$$y_i + \hat{t}r_i \geq f_i(x) + \hat{s}_i \quad \forall i \neq t,$$

و

$$y_t + \hat{t}r_t > f_t(x) + \hat{s}_t,$$

چون $\hat{s} > 0$ است، بنابراین یک عدد حقیقی $\delta > 0$ وجود دارد که $\hat{s}_t - \delta \geq 0$

حال برای هر اندیس $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ قرار می‌دهیم

$$\bar{s}_i = \begin{cases} \hat{s}_i & i \neq t \\ \hat{s}_i - \delta & i = t. \end{cases}$$

چون $\mu > 0$ ، می‌توان نتیجه گرفت (x, \bar{s}, \hat{t}) یک جواب شدنی برای مساله $NM(\mu, s, r)$

با

$$\hat{t} - \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i < \hat{t} - \sum_{i=1}^p \mu_i \bar{s}_i$$

می‌باشد، که این رابطه با بهینه بودن $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{t})$ در تناقض می‌باشد.



در قضیه بعد شرایط لازم برای کارایی سره را با استفاده از جواب بهینه مساله $NM(\mu, s, r)$ مطرح می‌کنیم.

قضیه ۳-۵ فرض کنید $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{t})$ یک جواب بهینه برای مساله $NM(\mu, s, r)$ با $\mu > 0$ و $\hat{s} > 0$ باشد. در این صورت \hat{x} یک جواب کارایی سره برای مساله MOP است.

اثبات. طبق قضیه ۱-۵ قسمت دوم می‌توان نتیجه گرفت \hat{x} یک جواب کارا برای مساله MOP است. برای اثبات کارایی سره، فرض می‌کنیم \hat{x} یک جواب کارایی سره برای مساله چندهدفه نیست. بنابراین برای هر عدد حقیقی $M > 0$ یک اندیس $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ و $x \in X$ با $f_i(x) < f_i(\hat{x})$ وجود دارند و برای هر اندیس $j \neq i$ با $f_j(\hat{x}) < f_j(x)$ داریم:

$$\frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\hat{x})} > M. \quad (8)$$

حال قرار می‌دهیم $J = \{j: f_j(\hat{x}) < f_j(x); j = 1, \dots, p\}$ برای اندیس i یک عدد حقیقی $d > 0$ چنان وجود دارد که

$$f_i(x) + d = f_i(\hat{x}). \quad (9)$$

چون $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{t})$ جواب بهینه برای مساله $NM(\mu, s, r)$ است، بنابراین داریم:

$$y_t + \hat{t}r_t \geq f_t(\hat{x}) + \hat{s}_t \quad \forall t = 1, 2, \dots, p, \quad (10)$$

از رابطه (۱۰) برای اندیس i داریم:

$$y_i + \hat{t}r_i > f_i(x) + \hat{s}_i \quad (11)$$

چون $\hat{s}_i > 0$ پس عدد حقیقی $\delta > 0$ چنان وجود دارد که برای اندیس i ، $\hat{s}_i - \delta > 0$

بنابراین طبق رابطه (۱۱) داریم:

$$y_i + \hat{t}r_i > f_i(x) + \hat{s}_i - \delta. \quad (12)$$

قرار می‌دهیم $M := \frac{d}{\hat{s}_{min}}$

با توجه به رابطه (۸) داریم:

$$f_j(x) - f_j(\hat{x}) < \frac{1}{M}(f_i(\hat{x}) - f_i(x)),$$

حال طبق رابطه بالا و تعریف M داریم:



$$f_j(x) < \frac{d}{M} + f_j(\hat{x}),$$

بنابراین طبق رابطه (۱۰) می‌توان نوشت:

$$y_j + \hat{t}r_j > f_j(x) + \hat{s}_j - \frac{d}{M} \quad \forall j \in J. \quad (۱۳)$$

به‌علاوه، برای هر اندیس $t \in \{1, 2, \dots, p\} \setminus JU\{i\}$ داریم $f_t(x) \leq f_t(\hat{x})$ ، حال طبق

رابطه (۱۰) داریم:

$$y_t + \hat{t}r_t \geq f_t(x) + \hat{s}_t. \quad (۱۴)$$

تعریف می‌کنیم:

$$\bar{s}_t = \begin{cases} \hat{s}_t - \delta & t = i \\ \hat{s}_t - \frac{d}{M} & t \in J \\ \hat{s}_t & t \notin JU\{i\}. \end{cases}$$

بنابراین روابط (۱۲)، (۱۳) و (۱۴) یک جواب شدنی برای مساله $NM(\mu, s, r)$

است. همچنین با توجه به اینکه

$\mu > 0$ است، داریم:

$$\hat{t} - \sum_{i=1}^p \mu_i \hat{s}_i < \hat{t} - \sum_{i=1}^p \mu_i \bar{s}_i.$$

که با بهینه بودن $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{t})$ برای مساله $NM(\mu, s, r)$ در تناقض است.

۶- الگوریتم روش پیشنهادی و نتایج عددی

در این بخش، الگوریتمی برای تقریب زدن مرز پارتو در مسائل MOP با کمک روش پیشنهادی ارائه می‌دهیم. الگوریتم ارائه شده شامل ۸ گام است. در گام ۲، نقطه ایده‌آل مساله MOP را بدست می‌آوریم و سپس فضای معیار را با کمک نقطه ایده‌آل نرمال‌سازی می‌کنیم. در گام‌های ۳ تا ۸ به جای مساله MOP ، مساله MOP نرمال‌سازی شده را در نظر می‌گیریم. در گام ۴، \bar{x}_i را از حل مساله $\min_{x \in \bar{X}} f_i^{normal}(x)$ در ناحیه شدنی $\bar{X} = \{x \in X: (y_i^l)^{k,t} \leq f_i(x), i = 1, 2, \dots, p\}$ و در زیرپوسته t بدست می‌آوریم. همچنین نقطه فوق ایده‌آل $(u)^{k,t}$ را به دلخواه برای



زیرپوسته محدب $CHIM_t^k$ در مرحله k و در زیرپوسته t انتخاب می‌کنیم. هدف از گام‌های ۵ و ۶ پیدا کردن یک نقطه روی زیرپوسته محدب $CHIM_t^k$ با کمک بردار وزنی مناسب $\beta = (w_1, \dots, w_p)$ و تعیین بردار جهت و وزن‌های نامنفی $\mu \in \mathbb{R}_{\geq}^p$ متناظر با هر تابع هدف می‌باشد. در گام ۷ به جای حل مساله $NM(\mu, s, r)$ متناظر با مساله MOP اصلی، به حل مساله $NM^{normal}(\mu, s, r)$ می‌پردازیم و نقطه مرزی پارتو را بدست می‌آوریم. بنابراین بعد از نرمال کردن توابع هدف در مرحله k ام و زیرپوسته $CHIM_t^k$ مساله تک‌هدفه $NM(\mu, s, r)$ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$NM^{normal}(\mu, s, r): \max t^{k,i} - \sum_{j=1}^p \mu_j^{k,i} s_j^{k,i}$$

s. t.

$$y_j^{k,i} + t^{k,i} r_j^{k,i} \geq f_j^{normal}(x) + s_j^{k,i} \quad \forall j = 1, 2, \dots, p,$$

$$x \in X$$

$$\mu \geq 0, s_j^{k,i} \geq 0 \quad \forall j.$$

برای مسائل بهینه‌سازی p -هدفه، با کمک الگوریتم جدید در مرحله k ام می‌توانیم $\frac{p^{k-1}}{p-1}$

نقطه مرزی پارتو را تولید کنیم.

شرط توقف در الگوریتم جدید به تعداد تکرار الگوریتم بستگی دارد که در گام اول این تعداد را با N نشان می‌دهیم. در گام ۸، بعد از جستجوی تمام زیرپوسته‌ها در مرحله k ام این زیرپوسته‌ها را با کمک درایه‌های بردار $F_t^{k-1}, t := 1, 2, \dots, p^{k-1}$ و با توجه به توضیحات داده شده در ابتدای بخش ۶ بروز رسانی می‌کنیم.

الگوریتم

گام ۱. N را تعداد تکرار الگوریتم قرار بده. اندیس $k := 1, 2, \dots, N$ را شمارشگر تعداد مراحل و $t := 1, 2, \dots, p^{k-1}$ را شماره زیرپوسته‌ها در مرحله k ام قرار بده. S را مجموعه نقاط مرزی پارتو تولید شده از تکرار الگوریتم قرار بده.

گام ۲. نقطه ایده‌آل y^I را بدست بیاور و سپس توابع هدف را با استفاده از نقطه ایده‌آل نرمال‌سازی کن بطوریکه بیشترین مقدار خود را در نقاط لنگر و کمترین مقدار خود را در صفر اختیار کنند. یعنی،

$$f_i^{normal} = f_i - y_i^I, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$



گام ۳. قرار بده $t = 1$.

گام ۴. \bar{x}_i را با استفاده از حل مساله $P_1 = \min_{x \in \bar{X}} f_i^{normal}(x)$ در $i = 1, 2, \dots, p$ زیر پوسته $CHIM_t^k$ پیدا کن. قرار بده $u_i = f_i(\bar{x}_i) - \alpha_i$ با $\alpha_i > 0$ ، $i = 1, 2, \dots, p$. $(u)^{k,t} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ را نقطه فوق ایده‌ال در زیرپوسته $CHIM_t^k$ قرار بده.

گام ۵. $\Phi^{k,t}$ را یک ماتریس $p \times p$ با سطر i ام $f_i^{normal}(\bar{x}_j) - (y_i^l)^{k,t}$ قرار بده. $j = 1, 2, \dots, p$.

گام ۶. $\beta = (w_1, \dots, w_p)$ را یک بردار وزنی $1 \times p$ در نظر بگیر و قرار بده:

$$y^{k,t} = \Phi^{k,t} \beta,$$

$$r^{k,t} = (u)^{k,t} - y^{k,t},$$

$$\mu = \frac{1}{\sum_{i=1}^p y_i^{k,t}} y^{k,t}.$$

گام ۷. \hat{x} را از حل مساله $NM(\mu, S, r)$ در زیرپوسته $CHIM_t^k$ بدست بیاور. قرار بده:

$$F_t = [f(\bar{x}_1), f(\bar{x}_2), \dots, f(\bar{x}_p), f(\hat{x})],$$

$$S := [S, f(\hat{x})].$$

گام ۸. اگر $k = N$ باشد، الگوریتم را متوقف کن و مجموعه S را تقریبی از مرز پارتو معرفی کن. اگر $k < N$ و $t < p^{k-1}$ ، آنگاه قرار بده $t := t + 1$ و به گام ۴ برو. در غیر این صورت اگر $k < N$ و $t = p^{k-1}$ ، قرار بده $k = k + 1$. زیرپوسته‌های محدب $CHIM_1^k, CHIM_2^k, \dots, CHIM_{p^{k-1}}^k$ را با کمک F_t ، $t := 1, 2, \dots, p^{k-1}$ بروزرسانی کن و به گام ۲ برو.

نتایج عددی

در این بخش از مقاله، الگوریتم روش پیشنهادی را برای تعدادی از مسائل دو هدفه و سه هدفه در نظر می‌گیریم و نتایج حاصل را با نتایج بدست آمده از روش‌های پاسکلوتی-سرافینی، ϵ -محدودیت (C_ϵ) و تقاطع مرزی نرمال محدودشده مقایسه می‌کنیم و برتری روش پیشنهادی را نسبت به روش‌های ذکر شده نشان می‌دهیم.

در روند مقایسه از مسائل بهینه‌سازی دوهدفه با مرز پارتو محدب، نامحدب گسسته و دارای جواب‌های کارای ضعیف استفاده می‌کنیم. در گام ۶ از الگوریتم پیشنهادی بردار وزنی β را برای مسائل دوهدفه برابر $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ قرار می‌دهیم. برای روش تقاطع مرزی نرمال



محدودشده از الگوریتم مطرح شده در مقاله [۲۴] استفاده می‌کنیم. همچنین برای روش‌های پاسکوتی-سرافینی و ϵ -محدودیت پارامترهای موجود را با توزیع یکنواخت انتخاب می‌کنیم و با شرایط ذکر شده در گام‌های ۵ و ۶ از الگوریتم پیشنهادی به‌کار می‌گیریم. بعلاوه دو مساله بهینه‌سازی سه‌هدفه با ناحیه‌شدنی محدب و نامحدب را برای مقایسه الگوریتم پیشنهادی، ϵ -محدودیت و تقاطع مرزی نرمال محدودشده استفاده می‌کنیم. در روش پاسکوتی-سرافینی برای مسائل سه‌هدفه از الگوریتم ۱ (گام ۱ تا گام ۴) مطرح شده در [۲۸] استفاده می‌کنیم و نتایج حاصل از حل مسائل چندهدفه را روی نمودار نشان می‌دهیم.

در این مقایسه از نرم‌افزار MATLAB (R2014b) استفاده می‌کنیم. برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی از دستور `fmincon` و `fgoalattain` با الگوریتم بهینه‌سازی `sqp` در این نرم‌افزار کمک می‌گیریم. در این راستا برای اجرای برنامه از کامپیوتر شخصی با سیستم `CORE i5` استفاده می‌کنیم.

مساله ۱-۶ برای مقایسه روش پیشنهادی با روش‌های پاسکوتی-سرافینی، ϵ -محدودیت و تقاطع مرزی نرمال محدود شده از یک مساله دوهدفه ساده با ناحیه‌شدنی محدب شروع می‌کنیم. برای تولید نقاط پارتو با کمک روش‌های فوق از الگوریتم پیشنهادی برای روش جدید و الگوریتمی از مرجع [۲۴] (الگوریتم PM) برای روش تقاطع مرزی نرمال محدود شده استفاده می‌کنیم. الگوریتم پاسکوتی-سرافینی را با توجه به گام‌های ۴-۶ از الگوریتم پیشنهادی بدون در نظر گرفتن زیرپوسته‌ها پیاده‌سازی می‌کنیم. افزون بر این در الگوریتم پاسکوتی-سرافینی و ϵ -محدودیت پارامترها را با شرایط در نظر گرفته شده در الگوریتم پیشنهادی با گام‌های ذکر شده بصورت یکنواخت انتخاب می‌کنیم. مساله دوهدفه مورد نظر از [۲۴]، بصورت زیر فرموله می‌شود.

$$\min f(x) = \left(\sqrt{1 + x_1^2}, x_1^2 - 4x_1 + x_2 + 5 \right),$$

$$s. t. x_1^2 - 4x_1 + x_2 + 5 \geq 3.5,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

در این مقایسه نقطه فوق ایده‌ال در زیرپوسته $CHIM_t^k$ را برابر $u^{k,t} = (y^t)^{k,t} +$ قرار می‌دهیم. تعداد تکرار در الگوریتم‌های پیشنهادی و PM را برابر $N = 4$ قرار می‌دهیم که با این تعداد تکرار انتظار می‌رود هر کدام از الگوریتم‌ها ۱۷ نقطه پارتو تولید کنند، بنابراین تعداد تکرار در الگوریتم پاسکوتی-سرافینی و ϵ -محدودیت را برابر با ۱۷ در نظر می‌گیریم.

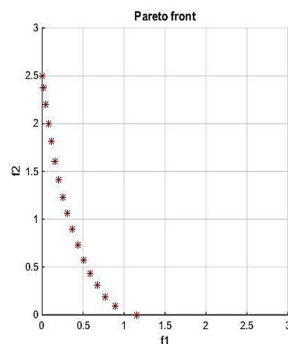


نقاط پارتو حاصل از الگوریتم‌های ذکر شده، در شکل ۶-۱ نشان داده می‌شود. همانطور که در شکل ۶-۱ قسمت ج مشاهده می‌کنید نقاط پارتو تولید شده با کمک الگوریتم پیشنهادی بصورت یکنواخت روی مرز پارتو توزیع شده است. ولی در قسمت‌های الف، ب و د از شکل ۶-۱، نقاط پارتو تولید شده با الگوریتم‌های پاسکوتی-سرافینی، E -محدودیت و PM بصورت یکنواخت روی مرز پارتو توزیع نشده‌اند. این غیریکنواختی در فاصله بین دو نقطه پارتو تولید شده در دو سر از مرز پارتو دیده می‌شود. برتری دیگر الگوریتم پیشنهادی، تولید نقاط پارتو در هر زیر پوسته می‌باشد. یعنی با ۴ تکرار از این الگوریتم دقیقاً ۱۷ نقطه پارتو تولید می‌شود در حالی که با ۱۷ تکرار از الگوریتم پاسکوتی-سرافینی تنها ۱۵ نقطه پارتو تولید شده است.

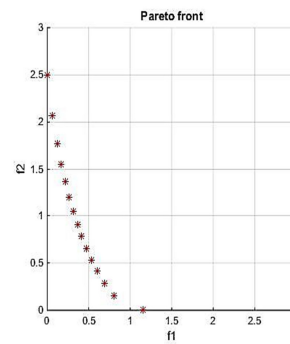
مقدار معیار GD به ازای روش‌های اسکالرسازی مطرح شده برای این مساله در جدول ۶-۱ آمده است. مقدار معیار کیفیت GD برای روش‌ها، نشان دهنده این است که تقریب جواب بدست آمده با روش پیشنهادی دقیق‌تر از سایر روش‌ها بوده و نسبت به روش‌های دیگر عملکرد بهتری داشته است.

جدول ۶-۱: معیار کیفیت روش‌ها با تقریب پنج رقم بعد اعشار

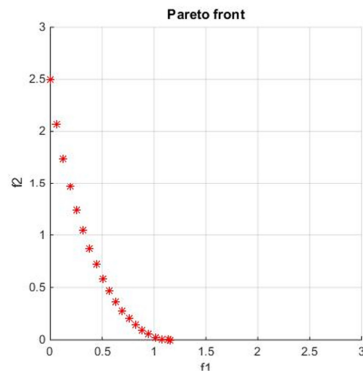
معیار کیفیت	NM	PM	PS	C_E
GD	۰/۱۲۹۷۴	۰/۲۸۳۲۰	۰/۱۶۵۰۹	۰/۲۱۵۶۵



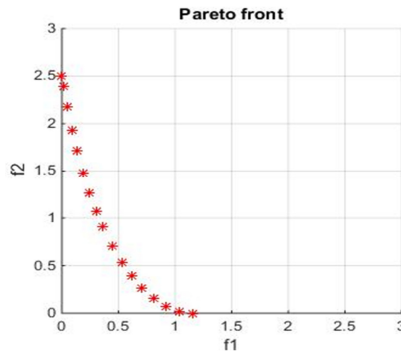
(ب) نقاط تولید شده با الگوریتم پاسکوتی-سرافینی



(الف) نقاط تولید شده با الگوریتم PM



(د) نقاط تولید شده با روش ϵ -محدودیت



(ج) نقاط تولید شده با الگوریتم پیشنهادی

شکل ۶-۱: مساله ۶-۱ مقایسه الگوریتم‌های پیشنهادی، پاسکلوتی-سرافینی، ϵ -محدودیت و PM.

مساله ۶-۲ در این مثال یک مساله دوهدفه نامحدب با مرز پارتو گسسته را بررسی می‌کنیم [۲۸]. ناحیه‌شدنی این مساله در شکل ۶-۲ نشان داده شده‌است و به صورت زیر فرموله می‌شود.

$$\begin{aligned} \min f(x) &= (x_1, x_2), \\ \text{s. t. } &(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 1 \leq 0, \\ &(1 - x_2^2) - (6x_1 - 5x_2)^2 - 1 \leq 0, \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

در این مثال تعداد تکرار در الگوریتم‌های پیشنهادی و PM را برابر $N = 4$ و در الگوریتم پاسکلوتی-سرافینی و ϵ -محدودیت برابر با ۱۷ قرار می‌دهیم. همچنین نقطه ایده‌ال در زیرپوسته $CHIM_t^k$ را برابر $(-1, -1)$ و $u^{k,t} = (y^l)^{k,t} + (-1, -1)$ در نظر می‌گیریم. در الگوریتم پاسکلوتی-سرافینی و ϵ -محدودیت پارامترها بصورت یکنواخت انتخاب می‌شوند. همانطور که در شکل ۶-۲ قسمت ج مشاهده می‌کنید، نقاط پارتو بصورت یکنواخت توسط الگوریتم پیشنهادی تولید شده‌اند. تعداد نقاط پارتو تولید شده در این الگوریتم برابر ۱۶ است. اما همان گونه که در شکل ۶-۲ قسمت‌های الف، ب و د مشاهده می‌شود نقاط پارتو تولید

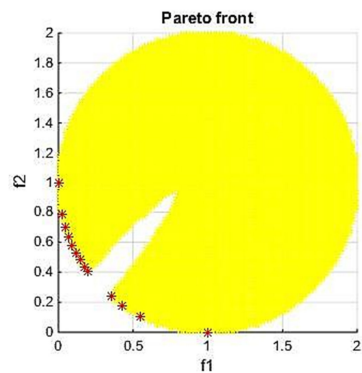


شده مرز پارتو را به طور کامل پوشش نمی‌دهند. در واقع تعداد نقاط پارتو تولید شده توسط الگوریتم PM برابر ۹ و توسط الگوریتم پاسکوتی-سرافینی و ϵ -محدودیت بترتیب برابر ۱۳ و ۳ می‌باشد. بنابراین در این مثال با کمک الگوریتم پیشنهادی توانستیم تقریب مناسبی از مرز پارتو ارایه دهیم.

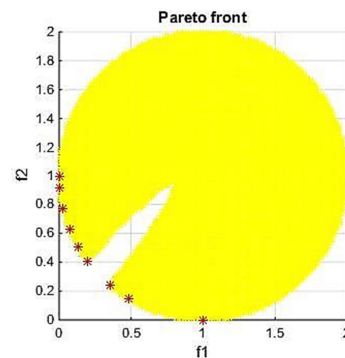
مقدار معیار GD به ازای روشهای اسکالرسازی مطرح شده در این مساله در جدول ۶-۲ آمده است. مقدار معیار کیفیت GD برای روش‌ها نشان می‌دهد که تقریب جواب بدست آمده از روش پیشنهادی دقیق‌تر بوده و نسبت به روش‌های دیگر عملکرد بهتری داشته است.

جدول ۶-۲: معیار کیفیت روش‌ها با تقریب پنج رقم بعد اعشار

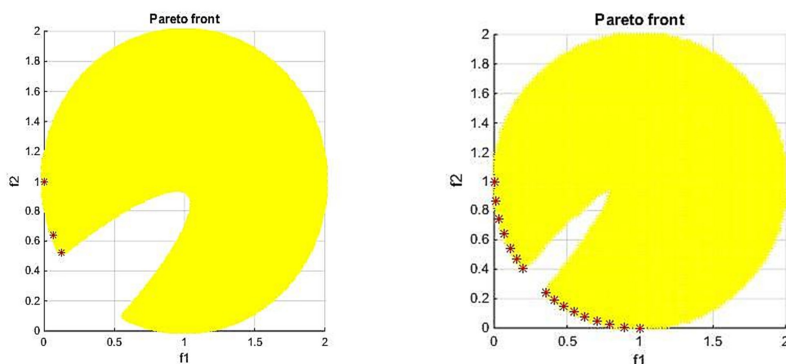
معیار کیفیت	NM	PM	PS	C_ϵ
GD	۰/۰۸۱۶۲	۰/۱۹۲۶۷	۰/۲۱۷۷۹	۰/۱۷۱۷۵



(ب) نقاط تولید شده با الگوریتم پاسکوتی-سرافینی



(الف) نقاط تولید شده با الگوریتم PM



شکل ۶-۲: مساله ۶-۲ مقایسه الگوریتم‌های پیشنهادی، پاسکلوتی-سرافینی، ϵ -محدودیت و PM. (ج) نقاط تولید شده با الگوریتم پیشنهادی (د) نقاط تولید شده با روش ϵ -محدودیت

مساله ۳-۶ در این مساله سعی داریم الگوریتم پیشنهادی را با الگوریتم PM توسط یک مساله ساده سه‌هدفه با ناحیه شدنی محدب مقایسه کنیم. همه‌ی نقاط مرزی پارتو در این مساله کارا (پارتو) می‌باشند. قابل ذکر است که الگوریتم PM در مقاله [۲۴] برای مساله سه‌هدفه زیر به‌کار گرفته شده‌است که می‌توان برتری الگوریتم پیشنهادی را نسبت به این الگوریتم نشان داد. مساله سه‌هدفه مورد نظر بصورت زیر فرموله می‌شود.

$$\begin{aligned} \min f(x) &= (x_1, x_2, x_3), \\ \text{s. t. } &(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 - 1 \leq 0, \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

تعداد تکرار در این مساله را برابر $N = 5$ در نظر می‌گیریم و نقطه فوق ایده‌آل در زیرپوسته $CHIM_t^k$ را برابر $u^{k,t} = (y^t)^{k,t}$ قرار می‌دهیم. همچنین در گام ۶ برای انتخاب بردار وزنی (w_1, w_2, w_3) از گام‌های ۱-۴ الگوریتم ۳ از [۲۸] استفاده می‌کنیم. وزن‌ها با شرایط $u_1 + u_2 + u_3 = 1$ و $0 \leq u_i \leq 1$ حاصل می‌شوند. بنابراین $w_i = 1/u_i$ قرار می‌دهیم.

با مشاهده شکل ۶-۳ می‌توانیم نتیجه بگیریم که با الگوریتم PM تنها نقاط پارتو در قسمت داخلی رویه پارتو تولید می‌شود. درواقع ناحیه شدنی شامل نقاط پارتو (کارا) در

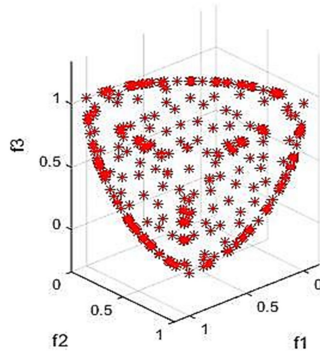


نزدیکی نقاط ایده‌ال و قسمت مرزی رویه پارتو بدون جستجو رها می‌شوند. در حالی که در قسمت ب با کمک الگوریتم پیشنهادی این مشکل رفع می‌شود و تقریب مناسبی برای رویه پارتو نسبت به الگوریتم PM برای این مساله ارایه می‌شود.

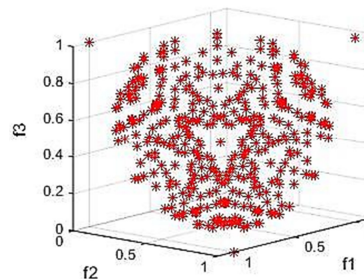
جدول ۳-۶ نتایج بدست آمده از معیار کیفیت برای روش‌های پیشنهادی و PM را نشان می‌دهد. روش پیشنهادی با معیار کیفیت صفر برتر بودن عملکرد این روش، نسبت به روش PM را نشان می‌دهد.

جدول ۳-۶: معیار کیفیت روش‌ها با تقریب پنج رقم بعد اعشار

معیار کیفیت	NM	PM
GD	.	۰/۰۲۴۹۰



(ب) نقاط تولید شده با الگوریتم پیشنهادی



(الف) نقاط تولید شده با الگوریتم PM

شکل ۳-۶: مساله ۲-۶. مقایسه الگوریتم پیشنهادی و الگوریتم PM با $N = 5$.

مساله ۴-۶: مساله سه‌هدفه زیر با ناحیه شدنی نامحدب که یک نسخه اصلاح شده از مساله‌ای در [۲۹] می‌باشد، را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \min f(x) &= (-x_1, -x_2, -x_3^2), \\ s. t. & -\cos(x_1) - \exp(-x_2) + x_3 \leq 0, \\ & 0 \leq x_1 \leq \pi, x_2 \geq 0, x_3 \geq 1.2. \end{aligned}$$

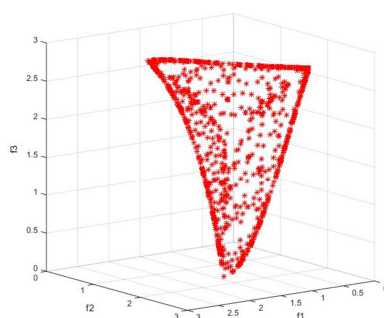
در این مساله $N = 7$ و نقطه فوق ایده‌ال را در زیرپوسته $CHIM_t^k$ برابر



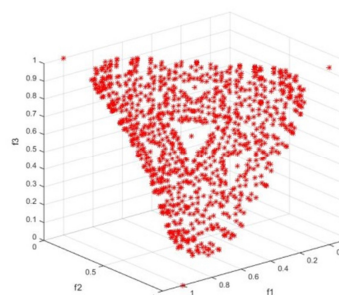
$u^{k,t} = (y^l)^{k,t}$ در نظر می‌گیریم. درایه‌های بردار وزنی (w_1, w_2, w_3) را بطور یکنواخت در فاصله $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ اختیار می‌کنیم. با توجه به شکل ۶-۴، درمی‌یابیم که با الگوریتم پیشنهادی تقریب مناسب‌تری از مرز پارتو نسبت به الگوریتم PM ارایه شده است. نتایج بدست آمده از معیار کیفیت GD برای روش‌های پیشنهادی و روش PM در جدول ۶-۴ آمده است. با توجه به مقدار معیار کیفیت بدست آمده در جدول ۶-۴ برای روش‌ها، برتری عملکرد روش پیشنهادی نسبت به روش PM دیده می‌شود و جوابهای بدست آمده از این روش از تقریب خوبی برخوردار است.

جدول ۶-۴: معیار کیفیت روش‌ها با تقریب پنج رقم بعد اعشار

معیار کیفیت	NM	PM
GD	۰	۰/۰۰۸۸۴



(ب) نقاط تولید شده با الگوریتم پیشنهادی



(الف) نقاط تولید شده با الگوریتم PM

شکل ۶-۴: مساله ۴-۶ مقایسه الگوریتم‌های پیشنهادی و PM با $N = 5$.

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله تکنیکی برای اصلاح روش تقاطع مرزی نرمال محدودشده برای حل مسائل



بهینه‌سازی چندهدفه پیشنهاد کردیم. در تکنیک جدید از یک رویکرد اسکالرسازی اصلاح شده استفاده کردیم که با اضافه کردن متغیرهای کمکی به قیدهای مساله پاسکلوتی-سرافینی بدست آمده است. با ارایه قضایایی رابطه بین جواب‌های کارا (ضعیف و سره) مساله بهینه سازی چندهدفه و جوابهای بهینه این مساله اسکالرسازی را بررسی کردیم. در این راستا الگوریتمی برای تقریب زدن مرز پارتو در مسائل چندهدفه محدب و نامحدب گسسته (ناهموار) ارایه دادیم. در الگوریتم جدید با انعطاف‌پذیر کردن محدودیت روش تقاطع مرزی نرمال محدودشده، این روش را اصلاح کردیم. نتیجه اصلاحات لحاظ شده تولید نقاط پارتو بطور یکنواخت در سرتاسر مرز پارتو در مقایسه با روش تقاطع مرزی نرمال محدود شده و روش پاسکلوتی-سرافینی می‌باشد. در روش پاسکلوتی-سرافینی مشکل اصلی انتخاب پارامترهای مناسب برای تولید نقاط کارا در سرتاسر مرز پارتو با توزیع یکنواخت می‌باشد که در این الگوریتم با ارایه راهکارهایی این مشکل برطرف شده است. در این مقاله با نتایج عددی، مزیت روش جدید را نسبت به روش‌های پاسکلوتی-سرافینی، تقاطع مرزی نرمال محدودشده و روش اپسیلون-محدودیت نشان دادیم. نتایج بدست آمده بیانگر آن است که الگوریتم ارایه شده برای تقریب زدن مرز پارتو در مسائل چندهدفه بسیار کارآمد است. در پژوهش آتی سعی بر آن است که الگوریتم‌های عددی با مزیت بیشتری برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه ارایه دهیم بطوریکه نقاط مرزی پارتو در مسائل چندهدفه را با توزیع یکنواخت تولید کنند.

۸- پی‌نوشت‌ها

1. Multiple objective optimization
2. Decision maker
3. Posteriori methods
4. Priori methods
5. Interactive methods
6. Pareto
7. The weighted sum method
8. The ε – Constraint method
9. Pascoletti-Serafini method
10. The elastic constraint method
11. Ehrgott and Ryan



12. The normal boundary intersection method
13. The normal constraint method
14. The modified normal boundary intersection method
15. The weighted-constraint method
16. Cone method
17. The restricted normal boundary intersection
18. Ghane-kanafi and Khorrarn
19. Convex hull of individual minima
20. Efficient solution
21. Weak efficiency
22. Trade-off
23. Proper efficient
24. Geoffrion
25. Ideal point
26. Utopia point
27. Nadir point

۹- منابع

- [1] Amiri, M., Taghavi Fard, M.T., Aghaei, M. (2016). Development of three-objective model for the location – allocation of assistance centers in a probabilistic condition of availability to emergency vehicles, *Modern Research in Decision Making*, 1(2), 1-27 (In Persian).
- [2] Rasouli, N., Marandi, F., Nahavandi, N. (2018). An integrated approach based on MADM and MODM for supplier selection and assembler selection in supply chain management, *Modern Research in Decision Making*, 3(1), 159-185 (In Persian).
- [3] Niusha, A., Azar, A., Moazzez, H., Heydari, K. (2019). A multi-objective optimization model for iran's renewable power portfolio. *Management Research in Iran*, 23(1), 171-191 (In Persian).
- [4] Mohebbi, N., Rad, A., Motameni, A. (2018). Developing sustainable recovery model of end-life products (case study: end-of life vehicle). *Management Research in Iran*, 22(2) 227-249 (In Persian).
- [5] Eichfelder, G. (2009). *An adaptive Scalarization Methods in Multiobjective*



- Optimization. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [6] Hwang, C.L., Masud, A.S. (1979). Multiple objective decision making, methods and applications. Springer-Verlag.
- [7] Pareto, V. (1964). Course Economics Politique. Libraire Droze, Geven.
- [8] Akbari, F., Ghaznavi, M., Khorram, E. (2018). A Revised Pascoletti-Serafini scalarization method for multiobjective optimization problems. J. Optim. Theory Appl, 178, 560-590.
- [9] Ehrgott, M. (2005). Multicriteria Optimization. Berlin: Springer.
- [10] Ghaznavi, M., Akbari, F. and Khorram, E. (2019). Optimality conditions via a unified direction approach for (approximate) efficiency in multiobjective optimization. Optim. Methods Softw. DOI 10.1080/10556788.2019.1571589 (In press).
- [11] Ghaznavi, M., Azizi, Z. (2017). An algorithm for approximating nondominated points of convex multiobjective optimization problems, Bulletin of the Iranian Mathematical Society 43 (5), 1399-1415.
- [12] Ghaznavi, M. (2017). Optimality conditions via scalarization for approximate quasi efficiency in multiobjective optimization, Filomat, 31 (3), 671-680.
- [13] Ghaznavi-ghosoni, B.A., Khorram, E., Soleimani-damaneh, M. (2013). Scalarization for characterization of approximate strong/weak/proper efficiency in multi-objective optimization. Optimization, 62 (6), 703-720.
- [14] Dolatnezhadsomarin, A., Khorram, E. (2019). Two efficient algorithms for constructing almost even approximations of the Pareto front in multi-objective optimization problems. Engineering Optimization, 51(4), 567-589.
- [15] Chankong, V., Haimes, Y. (1983). Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology. Elsevier Science Publishing Company New York, NY.
- [16] Haimes, Y.Y., Lasdon, L.S., Wismer, D.A. (1971). On a bicriterion formulation of the problems of intergrated system identification and system optimization. IEEE



- Trans. Syst. Man Cybern, 1, 296-297.
- [17] Pascoletti, A., Serafini, P. (1984). Scalarizing vector optimization problem. *J. Optimization Theory Appl*, 42(4), 499-524.
- [18] Ehrgott, M., Ryan, D. (2002). Constructing robust crew schedules with bicriteria optimization. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 11(3), 139-150.
- [19] Das, I., Dennis, J.E. (1998). Normal-Boundary Intersection: A new method for generating the Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems. *SIAM Journal on Optimization*, 8, 631-657.
- [20] Messac, A., Mattson, C.A. (2004). Normal constraint method with guarantee of even representation of complete Pareto frontier. *AIAA Journal* 42(10), 2101-2111.
- [21] Siddiqui, S., Azarm, S., (2012). Gabriel On improving normal boundary intersection method for generation of Pareto frontier. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 46, 839-852.
- [22] Burachik, R.S., Kaya, C.Y., Rizvi, M.M. (2013). A new scalarization technique to approximate Pareto fronts of problems with disconnected feasible sets. *Journal of Optimization Theory and Application*, 162(2), 428-446.
- [23] Ghosh, D., Chakraborty, D. (2014). A direction based classical method to obtain complete Pareto set of multi-criteria optimization problems. *OPSEARCH* 52(2), 340-366.
- [24] Ghane-Kanafi, A., Khorram, E. (2015). A new scalarization method for finding the efficient frontier in non-convex multi-objective problems. *Applied Mathematical Modelling*.
- [25] Benson, H. (1979). An improved definition of proper efficiency for vector maximization with respect to cones. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 71, 232-241.
- [26] Borwein, J.M. (1977). Proper efficient points for maximization with respect to cones. *SIAM Journal on Control and Optimization* 15, 57-63.
- [27] Geoffrion, A. (1968). Proper efficiency and the theory of vector maximization. *J.*



Math. Anal. Appl, 22,618–630.

- [28] Rizvi, M.M. (2013). New optimality conditions for non-linear multiobjective optimization problems and new scalarization techniques for constructing pathological Pareto fronts, PhD

Thesis, University of South Australia.

- [29] Kim, Y.I. and Weck, O.De. (2006). Adaptive weighted sum method for multiobjective optimization: a new method for Pareto front generation. Structural and Multidisciplinary Optimization, 31, 105-116.