

تحلیل ارتعاش آزاد قاب‌های نیمه‌سخت با تکیه‌گاه‌های کشسان دورانی و عضوهای ناهمگن

محسن بمبائی‌چی^{۱*} و مرتضی حسینعلی‌زاده تونی^۲

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۰۶/۲۰ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۰۱/۲۱	در این مقاله، تحلیل دقیق ارتعاش آزاد قاب‌های نیمه‌سخت تشکیل شده از ماده‌ی تابعی درجه‌ای (FGM) که دارای تکیه‌گاه‌های کشسان دورانی می‌باشند، انجام پذیرفت. ماده‌های FGM (ناهمگن) که با نام ماده‌های هدفمند یا هوشمند نیز شناخته می‌شوند، به صورت تابع توانی الگوسازی می‌گردند. همچنین، برای الگوسازی سختی پیوندهای کشسان تکیه‌گاهی و عضوی، از فنرهای دورانی خطی بهره‌جویی می‌شود. در این راستا، نخست، با حل معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش آزاد سازه و بر پایه نگره اولر-برنولی، پاسخ‌های دقیق، بر حسب تابع‌های بسل به دست آمدند. سپس، با وارد نمودن شرط‌های مرزی، ماتریس ضریب‌های ثابت برپا گردید. از برابر صفر قراردادن دترمینان ماتریس ضریب‌ها، معادله مشخصه سازه در دسترس قرار می‌گیرد. پاسخ‌های حقیقی این معادله، فرکانس‌های طبیعی سیستم و به دنبال آن، شکل‌های ارتعاشی سازه را به دست می‌دهد. به سخن دیگر، رابطه‌های صریحی برای یافتن فرکانس طبیعی و مودهای ارتعاشی سازه‌های FGM قابی با شرط‌های مرزی متفاوت در دسترس قرار می‌گیرد. در ادامه، پس از صحت‌سنجی رابطه‌سازی پیشنهادی، به ارزیابی اثر عامل‌های گوناگونی مانند سختی پیوند عضوی، سختی پیوندهای تکیه‌گاهی و گونه ماده تابعی درجه‌ای بر پاسخ ارتعاش آزاد قاب‌های همگن و ناهمگن پرداخته شد. یافته‌ها نشان می‌دهند، هر یک از عامل‌های یاد شده، می‌توانند اثر قابل توجهی بر فرکانس طبیعی سازه داشته باشند.
واژگان کلیدی: ارتعاش آزاد، قاب نیمه‌سخت، ماده‌ی تابعی درجه‌بندی شده (FGM)، تکیه‌گاه کشسان دورانی، فرکانس طبیعی.	

۱-مقدمه

تدریجی از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند معرفی شد و امروزه، به طور فزاینده‌ای در صنایع هوافضا، هواپیماسازی، خودروسازی و دفاعی به کار گرفته می‌شوند [۱]. از دیگر کاربردهای ماده‌های تابعی درجه‌بندی شده در حوزه‌های مهندسی می‌توان به بهره‌گیری از آن‌ها در میکروتیرها [۲] و نانوتیرها [۳ و ۴] اشاره نمود. تاکنون، پژوهش‌های بسیاری درباره‌ی ارتعاش آزاد تیرهای با مواد تابعی درجه‌بندی شده و تکیه‌گاه‌های کشسان انجام گرفته است. از آن میان روزا و اوسالیو [۵] با بررسی حل دقیق معادله ارتعاش آزاد تیر اولر-برنولی بر حسب تابع‌های بسل، به بررسی رفتار پویای تیرهای نامنشوری با تکیه‌گاه‌های انعطاف‌پذیر پرداختند. آن‌ها از فنرهای خطی انتقالی و دورانی برای الگوسازی تکیه‌گاه‌های کشسان بهره جستند.

در سال‌های کنونی، نیاز به ماده‌هایی با مقاومت‌های بالای گرمایی و مکانیکی به سبب گسترش ماشین‌ها، واکنش‌گاه-ها، توربین‌ها و موتورهای پر قدرت صنعت هوافضا بیشتر شده است. با پیدایش ماده‌های تابعی درجه‌بندی شده (FGM)، مواد مرکبی در دسترس قرار گرفت که ویژگی مکانیکی آن‌ها به طور پیوسته و تدریجی از یک سطح به سطح دیگر جسم تغییر می‌کند. این تغییر پیوسته که از تابع‌های توانی یا نمایی پیروی می‌کند، سبب پیچیدگی تحلیل رفتار ماده در برابر نیروهای وارده می‌شود. ماده‌ی تابعی مدرج، نخستین بار، در سال ۱۹۸۴، به وسیله‌ی ناینو و همکارانش در آزمایشگاه هوافضای ملی ژاپن به عنوان ماده‌ای که ویژگی‌های مکانیکی آن به طور پیوسته و

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: m.bambaechee@qiet.ac.ir

۱. استادیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی قوچان

۲. دانشجوی کارشناسی ارشد سازه، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی قوچان

با پیوندهای نیمه‌سخت پرداختند. در این میان، تحلیل کمانش سه‌بعدی پانل‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدمند (FGM) به وسیله احمدی و همکاران [۱۵] بررسی شده است. رحمانی و بیات [۱۶] به کنترل ارتعاشات تیرهای هوشمند به روش تحلیلی ناوبر پرداختند. به تازگی، حشمت خدمتی بازکیایی و همکاران [۱۷] ارتعاشات آزاد ورق نازک مواد مدرج تابعی بر بستر الاستیک وینکلر را به روش‌های عددی و تحلیلی مورد ارزیابی قرار داده‌اند. آن‌ها با بهره‌جویی از روش المان کوادراچر دیفرانسیلی بسامدهای طبیعی یک ورق، با شش شرط مرزی متفاوت را در دسترس قرار دادند. بر این پایه، بیشتر کارهای انجام شده به ارزیابی رفتار دینامیکی تیرهای ناهمگن و قاب‌های همگن پرداخته‌اند. افزون بر این‌ها، در بیشتر نمونه‌ها، همانند طراحی‌های کنونی، حالت‌های رایج تکیه‌گاهی (ساده و گیردار) و پیوندی (سخت) مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. از این رو، در این پژوهش، به تحلیل دقیق ارتعاش آزاد قاب ساده دو عضوی ناهمگن با پیوند نیمه‌سخت و تکیه‌گاه‌های کشسان پرداخته شد. تیر و ستون قاب از ماده تابعی درجه-۱ تشکیل شده‌اند. پیوند نیمه‌سخت تیر به ستون و سختی دورانی تکیه‌گاه‌های کشسان، با فبرهای دورانی خطی الگوسازی شدند. نخست، با بهره‌جویی از نگره تیر اولر-برنولی، معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش آزاد سازه حل و پاسخ‌های دقیق، بر حسب تابع‌های بسل به دست می‌آیند. سپس، با وارد نمودن شرط‌های مرزی، ماتریس ضریب‌های ثابت برپا می‌گردد. از برابر صفر قراردادن دترمینان ماتریس ضریب‌ها، معادله مشخصه سازه در دسترس قرار می‌گیرد. پاسخ‌های حقیقی این معادله، بسامدهای طبیعی سیستم و به دنبال آن، شکل‌های ارتعاشی سازه را به دست می‌دهد. در ادامه، پس از صحت‌سنجی رابطه‌سازی پیشنهادی، به ارزیابی اثر عوامل گوناگونی مانند سختی دورانی پیوند عضوی، سختی دورانی سختی تکیه‌گاه‌ها و گونه ماده تابعی درجه‌ای بر پاسخ ارتعاش آزاد قاب‌های همگن و ناهمگن پرداخته خواهد شد. یافته‌ها نشان داد، عامل‌های یاد شده، اثر قابل توجهی بر فرکانس طبیعی سازه دارند.

۲- الگوسازی قاب ناهمگن

یک قاب فولادی ساده ناهمگن با پیوند نیمه‌سخت و تکیه‌گاه‌های کشسان دورانی همانند شکل ۱ در نظر گرفته شد. سختی پیوندهای تکیه‌گاه‌های ستون و تیر، به ترتیب، با دو فنر دورانی به سختی‌های K_{f1} و K_{f2} الگوسازی شده است.

باید افزود، عضوهای نامنشوری، حالت خاصی از عضوهای ناهمگن به حساب می‌آیند. رفتار ارتعاش آزاد قاب‌های همگن با پیوندهای نیمه‌سخت و تکیه‌گاه‌های ساده، به وسیله سوفیانوپولوس [۶] مورد ارزیابی قرار گرفت. عطارنژاد و همکاران [۷] با بهرجویی از برنامه‌ای به زبان فرترن، راهکار دقیقی برای بررسی رفتار ارتعاش آزاد تیرهای نامنشوری با تکیه‌گاه‌های کشسان دورانی در دسترس قرار دادند. سینا و همکاران [۸] بر پایه نگره تغییرشکل‌های برشی، یک راهکار تحلیلی برای بررسی رفتار ارتعاش آزاد تیرهای FGM ارائه کردند. آن‌ها فرکانس‌های طبیعی و شکل مود تیرهای ناهمگن با شرط‌های متفاوت تکیه‌گاهی را ارزیابی نمودند. یک روش نوین عددی برای حل معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش آزاد تیرهای با ماده تابعی درجه‌بندی شده محوری با مقطع نامنشوری به وسیله هانگ و لی [۹] ارائه گردید. آن‌ها به ارزیابی اثرهای تغییر ضریب کشسانی و لنگر لختی بر روی فرکانس‌ها و مودهای ارتعاشی تیرها با شرط‌های تکیه‌گاهی متفاوت پرداختند. شهبها و همکاران [۱۰] با به کارگیری روش اجزای محدود، پایداری و ارتعاش آزاد تیر ناهمگن اولر- تیموشنکو با شرط‌های گوناگون تکیه‌گاهی را ارزیابی کردند. این پژوهشگران، اثر عامل‌هایی مانند ضریب نامنشوری، تکیه‌گاه‌های کشسان، جرم متمرکز و ناهمگنی مواد را بر بسامدهای طبیعی و بار کمانشی بررسی نمودند. حل دقیق معادله‌های فرکانس ارتعاش آزاد تیرهای ناهمگن تیموشنکو به وسیله تانگ و همکاران [۱۱] در دسترس قرار گرفت. آن‌ها تغییر ویژگی‌های مواد را بر حسب تابع‌های نمایی در نظر گرفتند و فرکانس‌های طبیعی تیرهای ناهمگن با شرط‌های متفاوت تکیه‌گاهی را به دست آوردند. با بهره‌جویی از نگره تیر لوینسون، وانگ و لی [۱۲] رفتار ارتعاش آزاد تیرهای FGM با شرط‌های متفاوت تکیه‌گاهی را ارزیابی نمودند. هاشمی و همکاران [۱۳] ارتعاش آزاد تیرهای ناهمگن دو سر ساده را به صورت تحلیلی بررسی کردند. این پژوهشگران، از تابع‌های توانی و نمایی برای الگوسازی تیرهای FGM بهره بردند. رضایی‌پژند و مسعودی [۱۴] با بهره‌جویی از تابع‌های بسل و حل دقیق، کمانش و ارتعاش آزاد تیر- ستون‌های تشکیل یافته از ماده تابعی درجه‌بندی شده را بررسی نمودند. آن‌ها اثرهای ناهمگنی و نامنشوری تیر- ستون با شرط‌های گوناگون تکیه‌گاهی را ارزیابی کردند. همچنین، به واکاوی رفتار کمانشی قاب‌های ناهمگن

c_i ، در نمونه‌های کاربردی برابر مقدارهای $0/1$ و $0/2$ در نظر گرفته می‌شود. یادآوری می‌کند، تغییر هم‌زمان و یا مستقل در هر یک از ویژگی‌های هندسی یا مکانیکی عضو، سبب FGM پنداشتن عضو و ناهمگن شدن آن می‌گردد. به سخن دیگر، تغییرات سختی خمشی $D(x)$ در یک عضو FGM (ناهمگن)، می‌تواند تابعی از تغییرات ضریب کشسانی باشد، هنگامی که لنگر لختی ثابت است $(D(x)=E(x).I_0)$ یا تابعی از تغییرات لنگر لختی باشد، زمانی که ضریب کشسانی ثابت است $(D(x)=E_0.I(x))$ و یا تابع تغییرات هم‌زمان ضریب کشسانی و لنگر لختی باشد $(D(x)=E(x).I(x))$. بر این پایه، تابع تغییرات سختی خمشی در رابطه (۴) را می‌توان به هر کدام از چهار شکل رابطه‌های زیر پنداشت:

$$E(x_i) = E_{0i} \left(1 + c_i \frac{x_i}{L_i} \right)^3; I = I_{0i} \quad (۶)$$

$$E = E_{0i}; I(x_i) = I_{0i} \left(1 + c_i \frac{x_i}{L_i} \right)^3 \quad (۷)$$

$$E(x_i) = E_{0i} \left(1 + c_i \frac{x_i}{L_i} \right)^2; I(x_i) = I_{0i} \left(1 + c_i \frac{x_i}{L_i} \right)^1 \quad (۸)$$

$$E(x_i) = E_{0i} \left(1 + c_i \frac{x_i}{L_i} \right)^1; I(x_i) = I_{0i} \left(1 + c_i \frac{x_i}{L_i} \right)^2 \quad (۹)$$

۳- رابطه‌سازی پیشنهادی

معادله‌ی دیفرانسیل ارتعاش آزاد حاکم بر هر یک از عضوهای قاب شکل ۱ بر پایه نگره تیر اولر-برنولی، برابر رابطه‌های زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(D(x_i) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} w_i(x_i, t) \right) + \quad (۱۰)$$

$$G(x_i) w_i(x_i, t) = 0 \quad i = 1, 2$$

در رابطه کنونی، x_i ، محور طولی عضو و w_i ، تغییرشکل جانبی عضو و t ، نشانگر زمان می‌باشند. تابع‌های $D(x_i)$ و $G(x_i)$ نیز، پیشتر با رابطه‌های (۴) و (۵)، تعریف شدند. معادله‌ی بالا، رابطه‌ای شامل مشتق‌های جزئی مکانی و زمانی است، که حل آن را دشوار می‌سازد. با انتقال این معادله از حوزه‌ی زمان به حوزه‌ی فرکانس، پاسخ‌ها به صورت ساده‌تری به دست می‌آیند. باید افزود، این تبدیل و جداسازی، اثری بر پاسخ‌ها نخواهد داشت. برای دستیابی به این هدف، راهکارهای گوناگونی مانند بهره‌جویی از تابع‌های نمایی و مثلثاتی در تابع پاسخ تغییرشکل وجود دارد. بر این

سختی این فنرها، به ترتیب، با ضریب‌های بدون یکای \bar{K}_{f1} و \bar{K}_{f2} تغییر می‌کنند. همچنین، سختی پیوند تیر به ستون با یک فندورانی به سختی K_{fc} وارد تحلیل می‌گردد که سختی آن نیز، با ضریب بدون یکای \bar{K}_{fc} تغییر می‌نماید. باید افزود، رفتار فنرهای دورانی، کشسان خطی پنداشته می‌شوند و رابطه‌های زیر میان سختی فنرهای دورانی و ضریب‌های بدون یکای نظیر هر یک برقرار می‌باشد:

$$K_{f1} = \bar{K}_{f1} \frac{E_{01} I_{01}}{L_1} \quad (۱)$$

$$K_{f2} = \bar{K}_{f2} \frac{E_{02} I_{02}}{L_2} \quad (۲)$$

$$K_{fc} = \bar{K}_{fc} \frac{E_{02} I_{02}}{L_2} \quad (۳)$$

در این رابطه‌ها، E_{0i} و I_{0i} ، به ترتیب، ضریب کشسانی و لنگر لختی عضو همگن پنداشته می‌شوند و طول عضوها برابر L_i می‌باشد. پایین‌نویس‌های $i=1$ و $i=2$ ، به ترتیب، نشانگر وابستگی عامل‌ها به ستون و تیر هستند. بر پایه رابطه‌های (۱) تا (۳)، هنگامی که ضریب‌های سختی بدون یکا از صفر تا بی‌نهایت تغییر می‌کنند، نوع پیوندهای عضوی و تکیه-گاهی، به ترتیب، از مفصلی به گیردار تغییر می‌یابند.

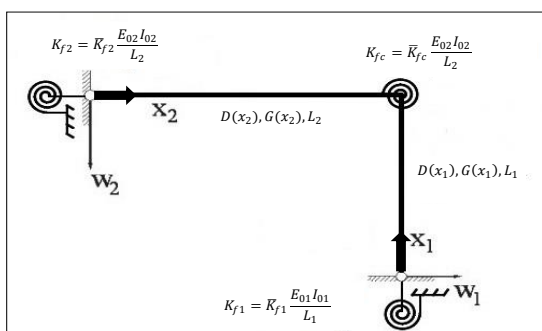
بر پایه شکل (۱)، عضوهای قاب، ناهمگن می‌باشند و از ماده تابعی درجه‌بندی شده (FGM) محوری، تشکیل یافته‌اند به گونه‌ای که تابع تغییرات سختی خمشی $D(x_i)$ و تابع تغییرات جرم واحد طول $G(x_i)$ آن‌ها، به ترتیب، با روابط زیر بیان می‌گردند:

$$D(x_i) = E(x_i) I(x_i) = E_{0i} I_{0i} \left(1 + c_i \frac{x_i}{L_i} \right)^3 \quad i = 1, 2 \quad (۴)$$

$$G(x_i) = \rho(x_i) A(x_i) = \rho_{0i} A_{0i} \left(1 + c_i \frac{x_i}{L_i} \right) \quad i = 1, 2 \quad (۵)$$

در رابطه‌های کنونی، E_{0i} ، I_{0i} ، ρ_{0i} و A_{0i} ، به ترتیب، ضریب کشسانی، لنگر لختی، دانسیته و سطح مقطع عضو همگن یا همان موقعیت $x_i=0$ می‌باشند. پایین‌نویس‌های $i=1$ و $i=2$ ، به ترتیب، نشانگر رابطه‌های وابسته به ستون و تیر هستند. افزون بر این، عامل c_i ، ضریب تغییر ویژگی‌های مقطع عضو در طول آن می‌باشند که همواره بزرگتر از منفی یک خواهد بود ($c_i > -1$). چنانچه، ضریب تغییر ویژگی‌های عضو، صفر در نظر گرفته شود ($c_i=0$)، به معنی آن است که عضو مورد نظر همگن می‌باشد و در غیر این صورت، عضو ناهمگن خواهد بود. باید افزود، به طور معمول، عامل

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{W}_1(0) &= 0 \\ \bar{W}_2(0) &= 0 \\ \bar{W}_1(1) &= 0 \\ \bar{W}_2(1) &= 0 \\ \bar{W}_1''(0) - \bar{K}_f \bar{W}_1'(0) &= 0 \\ \bar{W}_2''(0) - \bar{K}_f \bar{W}_2'(0) &= 0 \\ (1+c_1)^3 \bar{W}_1''(1) + \frac{\bar{I}}{L} (1+c_2)^3 \bar{W}_2''(1) &= 0 \\ \bar{L} \bar{W}_1'(1) - \bar{W}_2'(1) + \frac{(1+c_2)^3 \bar{W}_2''(1)}{\bar{K}_{fc}} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (14)$$



شکل ۱- قاب ساده ناهمگن با پیوند نیمه‌سخت و تکیه‌گاه‌های کشسان دورانی

با وارد نمودن شرط‌های بالا در معادله‌های تغییرشکل اعضا که در رابطه‌ی (۱۳) آمد، رابطه‌هایی میان ضرایب ثابت مجهول در دسترس قرار می‌گیرد. بر این پایه، یک دستگاه هشت معادله، هشت مجهول، همانند رابطه (۱۵) به دست می‌آید که در آن، درایه‌های ماتریس ضرایب‌های ثابت $[F]$ با توجه به شرط‌های مرزی حساب می‌شوند.

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} & F_{16} & F_{17} & F_{18} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} & F_{25} & F_{26} & F_{27} & F_{28} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} & F_{35} & F_{36} & F_{37} & F_{38} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} & F_{45} & F_{46} & F_{47} & F_{48} \\ F_{51} & F_{52} & F_{53} & F_{54} & F_{55} & F_{56} & F_{57} & F_{58} \\ F_{61} & F_{62} & F_{63} & F_{64} & F_{65} & F_{66} & F_{67} & F_{68} \\ F_{71} & F_{72} & F_{73} & F_{74} & F_{75} & F_{76} & F_{77} & F_{78} \\ F_{81} & F_{82} & F_{83} & F_{84} & F_{85} & F_{86} & F_{87} & F_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

دستگاه معادله کنونی، در صورتی دارای پاسخ یگانه خواهد بود که دترمینان ماتریس ضرایب‌های ثابت، برابر صفر شود. از این رو، با بهره‌جویی از دترمینان ماتریس ضرایب‌های مجهول و برابری آن با صفر، معادله‌ی مشخصه‌ی قاب برپا می‌گردد. با به دست آوردن ریشه‌های این معادله، فرکانس‌های طبیعی سیستم در دسترس قرار می‌گیرند.

پایه، تابع پاسخ تغییرشکل عضو به صورت زیر پنداشته می‌شود:

$$w_{in}(x_i, t) = \bar{w}_{in}(x_i) e^{j\omega_n t} \quad (j^2 = -1) \quad (11)$$

که در آن، ω_n ، فرکانس زاویه‌ای مود ارتعاشی n ام و \bar{w}_{in} ، تابع پاسخ نظیر تغییرشکل جانبی ستون ($i=1$) و تیر ($i=2$)، در مود ارتعاشی n ام می‌باشند. با تعریف عامل‌های بدون

$$\bar{W}_{in}(\xi_i) = \frac{\bar{w}_{in}(x_i)}{L_i}, \quad \xi_i = \left(1 + c_i \frac{x_i}{L_i}\right)$$

یکای $\bar{L} = \frac{L_2}{L_1}$ (نسبت لاغری)، $\lambda_i = L_i \left(\frac{A_{0i}}{I_{0i}}\right)^{\frac{1}{2}}$ (نسبت طولی)، $\bar{I} = \frac{I_{02}}{I_{01}}$ (نسبت لنگر لختی)،

$$\mu_{in}^4 = \frac{\rho_{0i} A_{0i} \omega_n^2 L_i^4}{E_{0i} I_{0i}}$$

طبیعی، $(\mu_{2n} = \mu_{1n} \sqrt{\bar{L} \frac{\lambda_2}{\lambda_1}})$ و از جایگزینی رابطه‌های

(۴)، (۵) و (۱۱) در معادله (۱۰)، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \bar{W}_i''''(\xi_i) \xi_i^2 + 6\bar{W}_i'''(\xi_i) \xi_i + \\ 6\bar{W}_i''(\xi_i) - \frac{\mu_{in}^4}{c_i^4} \bar{W}_i(\xi_i) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی چهارم بالا، بر حسب تابع‌های بسل و برای ستون ($i=1$) و تیر ($i=2$) به قرار زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \bar{W}_1(\xi_1) = \left(C_1 I_1 \left[\frac{2\mu_{1n} \sqrt{\xi_1}}{c_1} \right] + C_2 J_1 \left[\frac{2\mu_{1n} \sqrt{\xi_1}}{c_1} \right] + \right. \\ \left. C_3 K_1 \left[\frac{2\mu_{1n} \sqrt{\xi_1}}{c_1} \right] + C_4 Y_1 \left[\frac{2\mu_{1n} \sqrt{\xi_1}}{c_1} \right] \right) \frac{1}{\sqrt{\xi_1}} \\ \bar{W}_2(\xi_2) = \left(C_5 I_1 \left[\frac{2\mu_{2n} \sqrt{\xi_2}}{c_2} \right] + C_6 J_1 \left[\frac{2\mu_{2n} \sqrt{\xi_2}}{c_2} \right] + \right. \\ \left. C_7 K_1 \left[\frac{2\mu_{2n} \sqrt{\xi_2}}{c_2} \right] + C_8 Y_1 \left[\frac{2\mu_{2n} \sqrt{\xi_2}}{c_2} \right] \right) \frac{1}{\sqrt{\xi_2}} \end{cases} \quad (13)$$

در این رابطه، ثابت‌های C_1 تا C_8 ، ثابت‌های مجهول تغییرشکل‌های تیر و ستون سازه هستند. برای یافتن هشت ثابت مجهول، نیاز به هشت شرط مرزی می‌باشد. این شرط‌های مرزی در رابطه (۱۴) آمده است.

۵-۱- اثر سختی دورانی پیوندهای تکیه‌گاهی و

عضوی

تحلیل ارتعاش آزاد قاب‌های همگن و ناهمگن، با سختی‌های دورانی متفاوت تکیه‌گاهی و عضوی، در این بخش، مورد بررسی قرار می‌گیرد. ضریب‌های بدون یکای فرکانس طبیعی قاب همگن ($c=0/0$)، در سه مود نخست، برای مقادیرهای متفاوت \bar{K}_{f1} ، \bar{K}_{f2} و \bar{K}_{fc} ، در جدول ۳ گزارش شده است. همچنین، در جدول‌های ۴ و ۵، به ترتیب، مقدار μ در سه مود نخست قاب‌های ناهمگن با ضریب تغییر ویژگی‌های $c=0/1$ و $c=0/2$ و برای مقادیرهای متفاوت سختی دورانی تکیه‌گاه‌ها و پیوند نیمه‌سخت تیر به ستون در دسترس قرار گرفته‌اند. جدول‌های ۳ تا ۵ نشان می‌دهند، برای سختی‌های تکیه‌گاهی کم و زیاد ($\bar{K}_{f1} = \bar{K}_{f2} = 0, 0.5, 1e5$)، با افزایش \bar{K}_{fc} ، ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) در هر سه مود ارتعاشی و برای هر سه مقدار ضریب تغییر ویژگی‌ها ($c=0/0-0/1-0/2$)، افزایش می‌یابد. با وجود این، در سختی‌های تکیه‌گاهی میانی ($\bar{K}_{f1} = \bar{K}_{f2} = 5$)، بسته به شکل (مود) ارتعاشی و ضریب تغییر ویژگی‌ها، مقدار μ کاهش یا افزایش خواهد یافت.

بر پایه جدول ۳، در مود یکم قاب همگن ($c=0/0$)، افزایش سختی تکیه‌گاه‌ها از ساده ($\bar{K}_{f1} = \bar{K}_{f2} = 0$) به گیردار ($\bar{K}_{f1} = \bar{K}_{f2} = 1e5$)، برای پیوندهای عضوی ساده و سخت، به ترتیب، سبب افزایش ۲۵/۴۳ درصدی و ۲۴/۹۹ درصدی در مقدار ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) می‌شوند. همچنین، در شکل دوم ارتعاشی، با افزایش سختی دورانی تکیه‌گاه‌ها از ساده به گیردار، برای پیوندهای عضوی ساده ($\bar{K}_{fc} = 0.1$) و سخت ($\bar{K}_{fc} = 1e5$)، مقدار ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی، به ترتیب، افزایشی ۲۴/۹۹ درصدی و ۲۰/۴۶ درصدی خواهد داشت. افزون بر این‌ها، افزایش سختی تکیه‌گاه‌ها از ساده به گیردار، برای پیوندهای عضوی ساده و سخت، به ترتیب، افزایش ۱۲/۵۶ درصدی و ۱۲/۵۰ درصدی مقدار μ برای مود سوم را در پی خواهد داشت. از سوی دیگر، پاسخ‌های جدول ۳ نشان می‌دهند، در مود یکم قاب همگن ($c=0/0$)، افزایش سختی دورانی پیوند از ساده ($\bar{K}_{fc} = 0.1$) به گیردار ($\bar{K}_{fc} = 1e5$)، برای تکیه‌گاه‌های ساده و سخت، به ترتیب، سبب افزایش ۱/۰۷ درصدی و ۰/۷۲ درصدی در مقدار ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) می‌شوند. همچنین، در شکل دوم ارتعاشی قاب، با افزایش سختی پیوند عضوی

به سخن دیگر، معادله مشخصه قاب (M)، همانند رابطه (۱۶)، تابعی از عامل بدون یکای فرکانس‌های طبیعی، ضریب تغییر ویژگی‌های عضوها، ضریب‌های بدون یکای سختی دورانی پیوندهای تکیه‌گاهی و عضوی، نسبت‌های لاغری، لنگر لختی و طول عضوها می‌باشد.

$$M = M(\mu_m, c_1, c_2, \bar{K}_{f1}, \bar{K}_{f2}, \bar{K}_{fc}, \bar{I}, \bar{L}, \lambda_1, \lambda_2) \quad (16)$$

۴- صحت سنجی

به منظور واری دقت و کارایی رابطه‌سازی پیشنهادی، دو نمونه در این بخش بررسی می‌شوند. نخست، قاب شکل (۱) با عضوهای همگن ($c=0$) و تکیه‌گاه‌های ساده ($\bar{K}_{f1} = \bar{K}_{f2} = 0$) تحلیل شده است. باید افزود، این سازه پیش از این به وسیله سوفیانوپولوس [۶] مورد ارزیابی قرار گرفته است و فرکانس‌های طبیعی ارتعاش آزاد سه شکل (مود) نخست آن برای سختی‌های متفاوت عضوی حساب شده‌اند. بر پایه جدول ۱، می‌توان دید که یافته‌های رابطه‌سازی پیشنهادی، همخوانی دقیقی با پاسخ‌های مرجع [۶] دارند. افزون بر این، راهکار پیشنهادی برای قاب‌های ناهمگن ($c \neq 0$) و شرط‌های متفاوت تکیه‌گاهی ($\bar{K}_{f1} \neq \bar{K}_{f2} \neq 0$) کاربرد خواهد داشت. در نمونه دیگر، سه فرکانس طبیعی نخست ارتعاش آزاد تیر ناهمگن دو سر گیردار ($c=0, 0-0, 1-0, 2$) با پاسخ‌های مرجع‌های [۹] و [۱۸] سنجیده شده‌اند. پاسخ‌های جدول ۲ نیز، دقت و کارایی رابطه‌سازی پیشنهادی را به خوبی آشکار می‌سازد. باید افزود، در صورتی که سختی ستون به سمت بی‌نهایت میل داده شود، رابطه‌سازی‌های کنونی برای تیر ناهمگن نیز به کار خواهند آمد.

۵- ارزیابی اثر عامل‌های گوناگون در تحلیل

ارتعاش آزاد قاب ناهمگن

در این بخش، به بررسی اثر عامل‌های ضریب تغییر ویژگی‌های عضوها و ضریب‌های بدون یکای سختی دورانی پیوندهای تکیه‌گاهی و عضوی بر فرکانس‌های طبیعی و شکل‌های ارتعاشی قاب مورد مطالعه پرداخته می‌شود. باید افزود، در تمامی نمونه‌ها، برای سادگی و به منظور درک بهتر اثر عامل‌های یاد شده، مشخصه‌های تیر و ستون قاب یکسان پنداشته خواهند شد. به سخن دیگر، $\bar{I} = \bar{L} = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ در نظر گرفته می‌شوند و به دنبال آن، رابطه‌های $c_1 = c_2 = c$ و $\mu_{1n} = \mu_{2n} = \mu$ برقرار خواهند بود.

افزون بر این‌ها، افزایش سختی دورانی پیوند تیر به ستون، از ساده به سخت، برای تکیه‌گاه‌های ساده و گیردار، به ترتیب، افزایش‌های اندک ۰/۲۶ درصدی و ۰/۲۰ درصدی مقدار μ برای مورد سوم را به دنبال خواهد داشت.

از ساده به گیردار، برای تکیه‌گاه‌های ساده ($\bar{K}_{f1} = \bar{K}_{f2} = 1e5$) و گیردار ($\bar{K}_{f1} = \bar{K}_{f2} = 0$)، مقدار ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی، به ترتیب، افزایشی ۲۴/۹۹ درصدی و ۲۰/۴۶ درصدی خواهد داشت.

جدول ۱- ضریب‌های بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) در سه مود نخست قاب همگن با تکیه‌گاه‌های ساده ($c = \bar{K}_{f1} = \bar{K}_{f2} = 0$)

\bar{I}	\bar{L}	λ_1	λ_2	شماره مود (شکل) ارتعاش	منبع	\bar{K}_{fc}					
						۰/۱	۰/۵	۲	۱۰	۵۰	۱۰۵
۱	۱	۳۵	۴۵	۱	راهکار پیشنهادی	۲/۷۵۵۳	۲/۶۵۷۴	۲/۹۵۳۵	۲/۹۰۹۷	۲/۹۰۹۴	۲/۹۰۰۳
					سوفیانوپولوس [۶]	۲/۷۵۵۳	۲/۶۵۷۴	۲/۹۵۳۵	۲/۹۰۹۷	۲/۹۰۲۴	۲/۹۰۰۳
				۲	راهکار پیشنهادی	۳/۱۲۵۶	۳/۰۶۴۳	۵/۲۶۸۹	۳/۹۷۶۵	۳/۷۸۴۰	۳/۷۴۷۶
					سوفیانوپولوس [۶]	۳/۱۲۵۶	۳/۰۶۴۳	۵/۵۶۸۹	۳/۹۷۶۵	۳/۷۸۴۰	۳/۷۴۷۶
				۳	راهکار پیشنهادی	۵/۵۳۲۵	۵/۵۰۰۶	۶/۱۰۰۷	۵/۸۱۸۴	۵/۷۶۴۸	۵/۷۵۳۷
					سوفیانوپولوس [۶]	۵/۵۳۲۵	۵/۵۰۰۶	۶/۱۰۰۷	۵/۸۱۸۴	۵/۷۶۴۸	۵/۷۵۳۷
۱	۵	۳۵	۴۵	۱	راهکار پیشنهادی	۱/۲۳۲۶	۱/۲۰۲۶	۰/۹۳۷۰	۱/۶۰۳۸	۱/۴۸۷۸	۱/۴۶۹۴
					سوفیانوپولوس [۶]	۱/۲۳۲۶	۱/۲۰۲۶	۰/۹۳۷۰	۱/۶۰۳۸	۱/۴۸۷۸	۱/۴۶۹۴
				۲	راهکار پیشنهادی	۲/۴۷۴۹	۲/۴۶۰۸	۲/۲۳۱۸	۲/۷۳۶۰	۲/۶۴۶۷	۲/۶۳۲۶
					سوفیانوپولوس [۶]	۲/۴۷۴۹	۲/۴۶۰۸	۲/۲۳۱۸	۲/۷۳۶۰	۲/۶۴۶۷	۲/۶۳۲۶
				۳	راهکار پیشنهادی	۳/۱۳۴۸	۳/۱۲۴۸	۳/۰۶۱۸	۳/۴۹۹۴	۳/۳۸۳۸	۳/۳۵۹۵
					سوفیانوپولوس [۶]	۳/۱۳۴۸	۳/۱۲۴۸	۳/۰۶۱۸	۳/۴۹۹۴	۳/۳۸۳۸	۳/۳۵۹۵
۱	۱	۳۰	۱۵۰	۱	راهکار پیشنهادی	۱/۳۹۷۴	۱/۳۵۵۸	۲/۱۳۴۲	۱/۵۶۲۲	۱/۵۳۷۸	۱/۵۳۳۸
					سوفیانوپولوس [۶]	۱/۳۹۷۴	۱/۳۵۵۸	۲/۱۳۴۲	۱/۵۶۲۲	۱/۵۳۸۷	۱/۵۳۳۸
				۲	راهکار پیشنهادی	۲/۸۰۶۱	۲/۷۸۱۵	۲/۸۹۰۴	۲/۸۵۶۳	۲/۸۵۲۳	۲/۸۵۱۴
					سوفیانوپولوس [۶]	۲/۸۰۶۱	۲/۷۸۱۵	۲/۸۹۰۴	۲/۸۵۶۳	۲/۸۵۲۳	۲/۸۵۱۴
				۳	راهکار پیشنهادی	۳/۱۲۵۴	۳/۰۵۴۹	۴/۱۵۵۲	۳/۸۶۶۸	۳/۷۲۱۸	۳/۶۹۰۲
					سوفیانوپولوس [۶]	۳/۱۲۵۴	۳/۰۵۴۹	۴/۱۵۵۲	۳/۸۶۶۸	۳/۷۲۱۸	۳/۶۹۰۲
۱	۵	۳۰	۱۵۰	۱	راهکار پیشنهادی	۰/۶۲۵۰	۰/۶۰۹۸	۰/۴۷۵۴	۰/۸۱۶۴	۰/۷۵۵۵	۰/۷۴۶۰
					سوفیانوپولوس [۶]	۰/۶۲۵۰	۰/۶۰۹۸	۰/۴۷۵۴	۰/۸۱۶۴	۰/۷۷۵۵	۰/۷۴۶۰
				۲	راهکار پیشنهادی	۱/۲۵۵۰	۱/۲۴۸۰	۱/۲۱۰۲	۱/۴۷۱۸	۱/۳۶۵۲	۱/۳۵۲۶
					سوفیانوپولوس [۶]	۱/۲۵۵۰	۱/۲۴۸۰	۱/۲۱۰۲	۱/۴۷۱۸	۱/۳۶۵۲	۱/۳۵۲۶
				۳	راهکار پیشنهادی	۱/۸۸۳۹	۱/۸۷۹۳	۱/۸۵۶۳	۲/۱۰۳۸	۱/۹۷۴۹	۱/۹۶۲۴
					سوفیانوپولوس [۶]	۱/۸۸۳۹	۱/۸۷۹۳	۱/۸۵۶۳	۲/۱۰۳۸	۱/۹۷۴۹	۱/۹۶۲۴

جدول ۲- مربع ضریب‌های بدون یکای فرکانس طبیعی (μ^2) در سه مود نخست تیر ناهمگن دو سر گیردار با ضریب‌های تغییر ویژگی‌های متفاوت ($c = 0, 0.1, 0.2, \bar{K}_{f1} = \bar{K}_{f2} = \bar{K}_{fc} = \infty$)

شماره مود (شکل) ارتعاش	منبع	c		
		۰/۰	۰/۱	۰/۲
۱	راهکار پیشنهادی	۲۲/۳۷۳۲۸۵	۲۳/۴۷۹۶۰۷	۲۴/۵۶۳۴۱۸
	قازاریان و همکاران [۱۸]	۲۲/۳۷۳۲۸۵	۲۳/۴۷۹۶۰۷	۲۴/۵۶۳۴۱۸
	هانگ و لی [۹]	۲۲/۳۷۳۲۸۵	۲۳/۴۷۹۶۰۷	۲۴/۵۶۳۴۱۸
۲	راهکار پیشنهادی	۶۱/۶۷۲۸۲۳	۶۴/۷۲۱۰۶۸	۶۷/۷۰۴۷۵۵
	قازاریان و همکاران [۱۸]	۶۱/۶۷۲۸۲۳	۶۴/۷۲۱۰۶۸	۶۷/۷۰۴۷۵۵
	هانگ و لی [۹]	۶۱/۶۷۲۸۲۳	۶۴/۷۲۱۰۶۸	۶۷/۷۰۴۷۵۵
۳	راهکار پیشنهادی	۱۲۰/۹۰۳۳۹۲	۱۲۶/۸۷۸۰۱۷	۱۳۲/۷۲۳۹۷۷
	قازاریان و همکاران [۱۸]	۱۲۰/۹۰۳۳۹۲	۱۲۶/۸۷۸۰۲۰	۱۳۲/۷۲۳۹۸۰
	هانگ و لی [۹]	۱۲۰/۹۰۳۴۰۰	۱۲۶/۸۷۸۰۵۱	۱۳۲/۷۲۴۰۶۸

جدول ۳- ضریب‌های بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) سه مود نخست قاب همگن ($c = 0.0$) با سختی‌های متفاوت تکیه‌گاهی و عضوی

$\bar{K}_{f1} - \bar{K}_{f2}$	شماره مود (شکل) ارتعاش	\bar{K}_{fc}						
		۰/۱	۰/۵	۱	۵	۱۰	۵۰	۱۰۵
۰-۰	۱	۳/۱۰۸۴	۲/۹۳۹۲	۲/۵۷۱۵	۳/۱۴۱۶/	۳/۱۴۱۶	۳/۱۴۱۶	۳/۱۴۱۶
	۲	۳/۱۴۱۶	۳/۱۴۱۶	۳/۱۴۱۶	۴/۶۴۰۴	۴/۱۸۵۴	۳/۹۶۷۹	۳/۹۲۶۶
	۳	۶/۲۶۷۰	۶/۱۹۵۶	۶/۰۸۹۲	۶/۲۸۳۲	۶/۲۸۳۲	۶/۲۸۳۲	۶/۲۸۳۲
۰/۵-۰/۵	۱	۳/۱۸۱۵	۳/۰۱۸۹	۲/۶۷۴۰	۲/۲۱۳۶	۳/۲۱۳۶	۳/۲۱۳۶	۳/۲۱۳۶
	۲	۳/۲۱۳۶	۳/۲۱۳۶	۳/۲۱۳۶	۴/۷۰۵۷	۴/۲۴۸۴	۴/۰۳۰۱	۳/۹۸۸۷
	۳	۶/۳۰۵۲	۶/۳۳۴۸	۶/۱۲۹۹	۶/۳۲۱۲	۶/۳۲۱۲	۶/۳۲۱۲	۶/۳۲۱۲
۵-۵	۱	۳/۵۰۵۱	۳/۳۶۱۹	۳/۰۸۰۷	۳/۵۳۴۱	۳/۵۳۴۱	۳/۵۳۴۱	۳/۵۳۴۱
	۲	۳/۵۳۴۱	۳/۵۳۴۱	۳/۵۳۴۱	۵/۰۵۰۲	۴/۵۶۶۸	۴/۳۳۶۱	۴/۲۹۲۹
	۳	۶/۵۳۷۶	۶/۴۷۱۶	۶/۳۷۴۲	۶/۵۵۲۶	۶/۵۵۲۶	۶/۵۵۲۶	۶/۵۵۲۶
۱۰۵-۱۰۵	۱	۳/۸۹۸۷	۳/۷۶۴۳	۳/۵۱۶۱	۳/۹۲۶۶	۳/۹۲۶۶	۳/۹۲۶۶	۳/۹۲۶۶
	۲	۳/۹۲۶۶	۳/۹۲۶۶	۳/۹۲۶۶	۵/۶۳۳۸	۵/۰۵۴۶	۴/۷۸۰۱	۴/۷۳۰۰
	۳	۷/۰۵۴۲	۶/۹۹۱۸	۶/۹۰۱۱	۷/۰۶۸۵	۷/۰۶۸۵	۷/۰۶۸۵	۷/۰۶۸۵

جدول ۴- ضریب‌های بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) سه‌مود نخست قاب همگن ($c = 0.1$) با سختی‌های متفاوت تکیه‌گاهی و عضوی

$\bar{K}_{f1} - \bar{K}_{f2}$	شماره مود (شکل) ارتعاش	\bar{K}_{fc}						
		۰/۱	۰/۵	۱	۵	۱۰	۵۰	۱۰۵
۰-۰	۱	۳/۲۱۵۳	۳/۲۰۴۳	۳/۱۹۰۳	۳/۰۵۶۷	۲/۸۰۷۸	۳/۲۱۸۰	۳/۲۱۸۰
	۲	۳/۲۱۸۰	۳/۲۱۸۰	۳/۲۱۸۰	۳/۲۱۸۰	۳/۲۱۸۰	۵/۱۱۵۶	۴/۰۴۸۷
	۳	۶/۴۳۵۶	۶/۴۳۰۴	۶/۴۲۳۸	۶/۳۶۷۴	۶/۲۸۶۷	۶/۴۳۶۹	۶/۴۳۶۹
۰/۵-۰/۵	۱	۳/۲۲۲۷	۳/۲۱۱۸	۳/۱۹۷۷	۳/۰۶۴۶	۲/۸۱۷۱	۳/۲۲۵۳	۳/۲۲۵۳
	۲	۳/۲۲۵۳	۳/۲۲۵۳	۳/۲۲۵۳	۳/۲۲۵۳	۳/۲۲۵۳	۵/۱۲۲۰	۴/۰۵۴۹
	۳	۶/۴۴۰۸	۶/۴۳۴۳	۶/۴۲۷۷	۶/۳۷۱۴	۶/۲۹۰۸	۶/۴۴۰۸	۶/۴۴۰۸
۵-۵	۱	۳/۲۸۳۱	۳/۲۷۲۵	۳/۲۵۸۸	۳/۱۲۹۸	۳/۸۹۲۸	۳/۲۸۵۷	۳/۲۸۵۷
	۲	۳/۲۸۵۷	۳/۲۸۵۷	۳/۲۸۵۷	۳/۲۸۵۷	۳/۲۸۵۷	۵/۱۷۶۱	۴/۱۰۷۴
	۳	۶/۴۷۲۶	۶/۴۶۷۴	۶/۴۶۰۹	۶/۴۰۵۲	۶/۳۲۵۶	۶/۴۷۳۹	۶/۴۷۳۹
۱۰۵-۱۰۵	۱	۳/۹۹۳۴	۳/۹۸۴۲	۳/۹۷۲۴	۳/۸۶۴۹	۳/۶۸۴۶	۳/۹۹۵۷	۳/۹۹۵۷
	۲	۳/۹۹۵۷	۳/۹۹۵۷	۳/۹۹۵۷	۳/۹۹۵۷	۳/۹۹۵۷	۶/۱۲۸۰	۴/۸۴۵۴
	۳	۷/۲۲۵۶	۷/۲۲۱۰	۷/۲۱۵۲	۷/۱۶۵۷	۷/۰۹۶۲	۷/۲۲۶۸	۷/۲۲۶۸

جدول ۵- ضریب‌های بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) سه‌مود نخست قاب همگن ($c = 0.2$) با سختی‌های متفاوت تکیه‌گاهی و عضوی

$\bar{K}_{f1} - \bar{K}_{f2}$	شماره مود (شکل) ارتعاش	\bar{K}_{fc}						
		۰/۱	۰/۵	۱	۵	۱۰	۵۰	۱۰۵
۰-۰	۱	۳/۲۸۵۸	۳/۲۶۶۹	۳/۲۴۲۱	۲/۹۷۳۱	۲/۱۱۹۱	۳/۲۹۰۴	۳/۲۹۰۴
	۲	۳/۲۹۰۴	۳/۲۹۰۴	۳/۲۹۰۴	۳/۲۹۰۴	۳/۲۹۰۴	۴/۶۹۶۳	۴/۱۶۵۲
	۳	۶/۵۸۲۴	۶/۵۷۳۸	۶/۵۶۲۸	۶/۴۶۴۶	۶/۳۱۲۱	۶/۵۸۴۶	۶/۵۸۴۶
۰/۵-۰/۵	۱	۳/۲۹۹۶	۳/۲۸۰۸	۳/۲۵۶۱	۲/۹۸۹۴	۲/۱۵۵۲	۳/۳۰۴۱	۳/۳۰۴۱
	۲	۳/۳۰۴۱	۳/۳۰۴۱	۳/۳۰۴۱	۳/۳۰۴۱	۳/۳۰۴۱	۴/۷۰۸۵	۴/۱۷۶۹
	۳	۶/۵۸۹۹	۶/۵۸۱۲	۶/۵۷۰۲	۶/۴۷۲۳	۶/۳۲۰۲	۶/۵۹۲۰	۶/۵۹۲۰
۵-۵	۱	۳/۴۰۴۰	۳/۳۸۶۰	۳/۳۶۲۴	۳/۱۱۱۰	۲/۳۹۳۴	۳/۴۰۸۴	۳/۴۰۸۴
	۲	۳/۴۰۸۴	۳/۴۰۸۴	۳/۴۰۸۴	۳/۴۰۸۴	۳/۴۰۸۴	۴/۸۰۵۷	۴/۲۶۸۶
	۳	۶/۶۵۱۴	۶/۶۴۲۹	۶/۶۳۲۱	۶/۵۳۶۱	۶/۶۵۳۴	۶/۶۵۳۴	۶/۶۵۳۴
۱۰۵-۱۰۵	۱	۴/۰۵۸۳	۴/۰۴۲۵	۴/۰۲۱۹	۳/۸۱۴۸	۳/۳۵۷۶	۴/۰۶۲۲	۴/۰۶۲۲
	۲	۴/۰۶۲۲	۴/۰۶۲۲	۴/۰۶۲۲	۴/۰۶۲۲	۴/۰۶۲۲	۵/۶۳۱۷	۴/۹۵۶۱
	۳	۷/۳۷۷۵	۷/۳۶۹۹	۷/۳۶۰۱	۷/۲۷۴۵	۷/۱۴۵۵	۷/۳۷۹۴	۷/۳۷۹۴

پیوندهای عضوی ساده و سخت، به ترتیب، افزایش ۱۲/۰۸ درصدی و ۱۲/۰۷ درصدی مقدار μ برای مود سوم را در پی خواهد داشت. از سوی دیگر، پاسخهای جدول ۵ نشان می-دهند، در مود یکم قاب ناهمگن ($c=0/2$)، افزایش سختی دورانی پیوند از ساده ($\bar{K}_{fc}=0.1$) به گیردار ($\bar{K}_{fc}=1e5$)، برای تکیه‌گاه‌های ساده و سخت، به ترتیب، سبب افزایش‌های ناچیز ۰/۱۴ درصدی و ۰/۰۱ درصدی در مقدار ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) می‌شوند. همچنین، در شکل دوم ارتعاشی قاب، با افزایش سختی پیوند عضوی از ساده به گیردار، برای تکیه‌گاه‌های ساده ($\bar{K}_{f1}=\bar{K}_{f2}=0$) و گیردار ($\bar{K}_{f1}=\bar{K}_{f2}=1e5$)، مقدار ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی، به ترتیب، افزایش ۲۶/۵۹ درصدی و ۲۲/۰۱ درصدی خواهد داشت. افزون بر این‌ها، افزایش سختی دورانی پیوند تیر به ستون، از ساده به سخت، برای تکیه‌گاه‌های ساده و گیردار، هر دو، افزایش اندک ۰/۰۳ درصدی مقدار μ برای مود سوم را به دنبال خواهد داشت.

افزون بر این‌ها، شکل‌های (۲)، (۳) و (۴)، به ترتیب، نمودار تغییرات ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) مود یکم قاب با ضریب تغییر ویژگی‌های $c=0/1$ ، $c=0/0$ و $c=0/2$ را در برابر تغییرهای سختی عضوی (\bar{K}_{fc}) و برای سختی‌های متفاوت تکیه‌گاهی نشان می‌دهند. با توجه به نمودارهای شکل‌های (۲) تا (۴)، می‌توان دید، با افزایش سختی دورانی پیوند تیر به ستون، ضریب μ یک روند کاهشی را تا رسیدن به مقدار بحرانی \bar{K}_{fc} می‌پیماید. این کاهش، در محدوده پیش از سختی عضوی بحرانی، بسیار شدید می‌باشد. پس از آن و در مقدار بحرانی \bar{K}_{fc} ، یک پرش در نمودار تغییرات ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی رخ می‌دهد و در ادامه، مقدار μ ، به طور تقریبی ثابت خواهد بود. به سخن دیگر، در سختی‌های کمتر از \bar{K}_{fc} بحرانی، رفتار سازه به صورت تیری و برای سختی‌های بیشتر از \bar{K}_{fc} بحرانی، رفتار سازه به صورت قابی می‌باشد. در این میان، سختی تکیه‌گاه‌ها و ضریب تغییر ویژگی‌های مقطع (C)، سبب جابجایی مقدار سختی عضوی بحرانی می‌گردند. شکل (۲) نشان می‌دهد، تغییر هم‌زمان سختی تکیه‌گاه‌های قاب همگن ($c=0.0$)، از ساده به گیردار و در مود یکم، سبب جابجایی مقدار بحرانی \bar{K}_{fc} از ۱/۵۰ تا ۲/۰۲ خواهد شد. بر پایه شکل ۳ نیز، با تغییر هم‌زمان سختی تکیه‌گاه‌های قاب ناهمگن ($c=0/1$)، از ساده به گیردار و در شکل

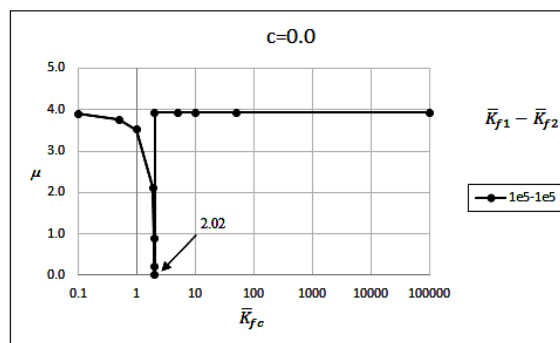
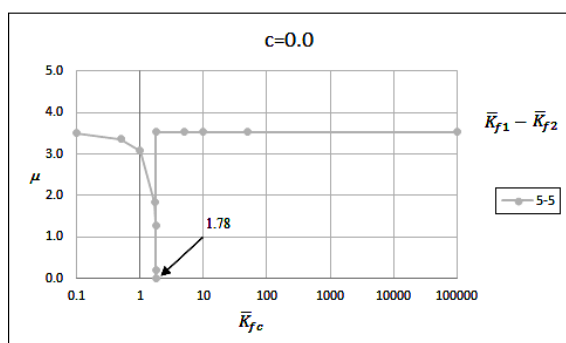
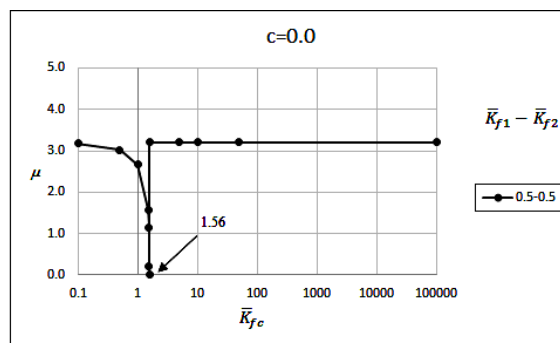
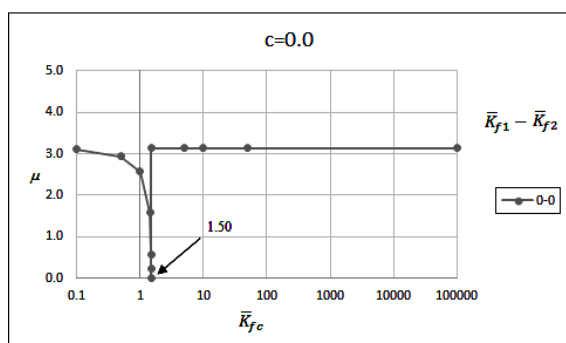
پاسخهای جدول ۴ نشان می‌دهند در مود یکم قاب ناهمگن ($c=0/1$)، افزایش سختی تکیه‌گاه‌ها از ساده ($\bar{K}_{f1}=\bar{K}_{f2}=0$) به گیردار ($\bar{K}_{f1}=\bar{K}_{f2}=1e5$)، برای پیوندهای عضوی ساده و سخت، به ترتیب، افزایش ۲۴/۲۰ درصدی و ۲۴/۱۷ درصدی در مقدار ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) را به دنبال دارد. همچنین، در شکل دوم ارتعاشی، با افزایش سختی دورانی تکیه‌گاه‌ها از ساده به گیردار، برای پیوندهای عضوی ساده ($\bar{K}_{fc}=0.1$) و سخت ($\bar{K}_{fc}=1e5$)، مقدار ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی، به ترتیب، افزایش ۲۴/۱۷ درصدی و ۱۹/۶۸ درصدی خواهد داشت. افزون بر این‌ها، افزایش سختی تکیه‌گاه‌ها از ساده به گیردار، برای پیوندهای عضوی ساده و سخت، به ترتیب، افزایش ۱۲/۲۸ درصدی و ۱۲/۲۷ درصدی مقدار μ برای مود سوم را در پی خواهد داشت. از سوی دیگر، بر پایه جدول ۴، در مود یکم قاب ناهمگن ($c=0/1$)، افزایش سختی دورانی پیوند از ساده ($\bar{K}_{fc}=0.1$) به گیردار ($\bar{K}_{fc}=1e5$)، برای تکیه‌گاه‌های ساده و سخت، به ترتیب، سبب افزایش‌های ناچیز ۰/۰۸ درصدی و ۰/۰۶ درصدی در مقدار ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) می‌شوند. همچنین، در شکل دوم ارتعاشی قاب، با افزایش سختی پیوند عضوی از ساده به گیردار، برای تکیه‌گاه‌های ساده ($\bar{K}_{f1}=\bar{K}_{f2}=0$) و گیردار ($\bar{K}_{f1}=\bar{K}_{f2}=1e5$)، مقدار ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی، به ترتیب، افزایش ۲۵/۸۱ درصدی و ۲۱/۲۷ درصدی خواهد داشت. افزون بر این‌ها، افزایش سختی دورانی پیوند تیر به ستون، از ساده به سخت، برای تکیه‌گاه‌های ساده و گیردار، هر دو، افزایش اندک ۰/۰۲ درصدی مقدار μ برای مود سوم را در پی خواهد داشت.

بر پایه جدول ۵، در مود یکم قاب ناهمگن ($c=0/2$)، افزایش سختی تکیه‌گاه‌ها از ساده ($\bar{K}_{f1}=\bar{K}_{f2}=0$) به گیردار ($\bar{K}_{f1}=\bar{K}_{f2}=1e5$)، برای پیوندهای عضوی ساده و سخت، به ترتیب، سبب افزایش ۲۳/۵۱ درصدی و ۲۳/۴۶ درصدی در مقدار ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) می‌شوند. همچنین، در شکل دوم ارتعاشی، با افزایش سختی دورانی تکیه‌گاه‌ها از ساده به گیردار، برای پیوندهای عضوی ساده ($\bar{K}_{fc}=0.1$) و سخت ($\bar{K}_{fc}=1e5$)، مقدار ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی، به ترتیب، افزایش ۲۳/۴۶ درصدی و ۱۸/۹۹ درصدی خواهد داشت. افزون بر این‌ها، افزایش سختی تکیه‌گاه‌ها از ساده به گیردار، برای

یکم ارتعاشی، مقدار بحرانی \bar{K}_{fc} در بازه ۱۸/۵۹ تا ۲۴/۷۹ جابه‌جا می‌شود. همچنین، شکل (۴) نشان می‌دهد، تغییر هم‌زمان سختی تکیه‌گاه‌های قاب ناهمگن ($c=0/2$)، از ساده به گیردار و در مود یکم، سبب جابجایی مقدار بحرانی \bar{K}_{fc} از ۱۱/۳۲ تا ۱۵/۱۰ خواهد گشت.

در ادامه، نمودار تغییرات تغییرات ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) موده‌های یکم تا سوم قاب‌های همگن ($c=0/0$) و ناهمگن ($c=0/1-0/2$)، در برابر تغییرهای سختی تکیه‌گاهی ($\bar{K}_{f1} = \bar{K}_{f2}$) و برای پیوندهای عضو ساده ($\bar{K}_{fc} = 0.1$) و سخت ($\bar{K}_{fc} = \infty$)، به ترتیب، در شکل‌های (۵) تا (۷) آمده‌اند. بر پایه نمودارهای شکل‌های (۵) تا (۷)، دیده می‌شود، با افزایش هم‌زمان سختی دورانی تکیه‌گاه‌ها از ساده ($\bar{K}_{f1} = \bar{K}_{f2} = 0$) به گیردار ($\bar{K}_{f1} = \bar{K}_{f2} = 1e5$)، برای پیوندهای عضو ساده

مدها، افزایش فرکانس طبیعی قاب، بسیار ناچیز می‌باشد.



شکل ۲- نمودار تغییرات ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) مود یکم قاب همگن ($c = 0.0$) در برابر تغییرهای \bar{K}_{fc} و برای سختی‌های متفاوت تکیه‌گاهی

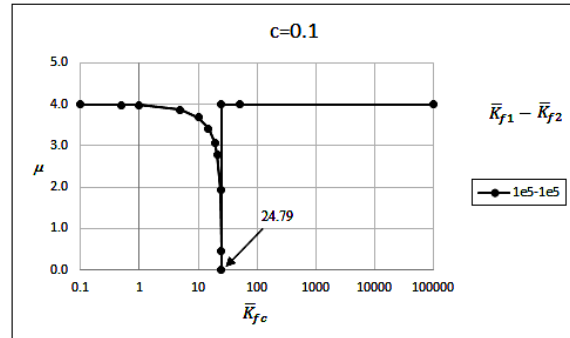
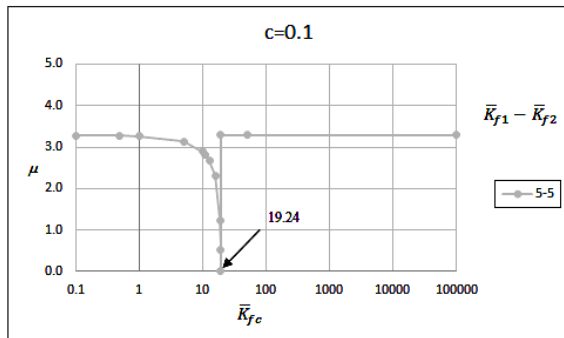
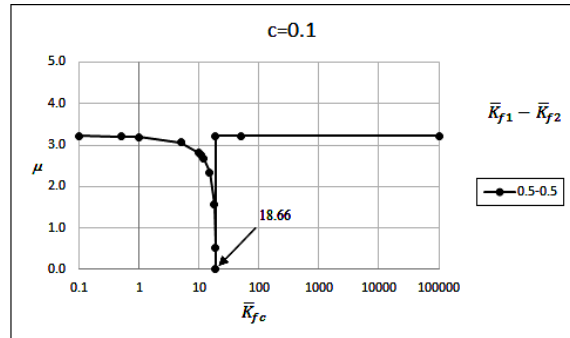
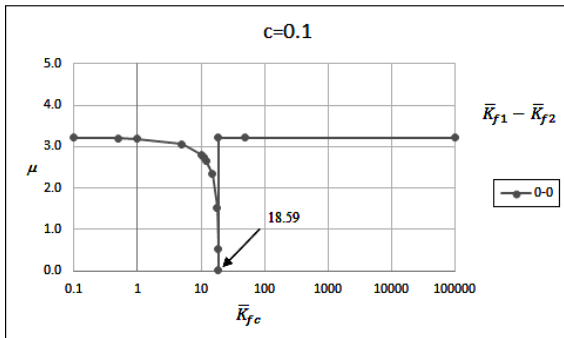
۵-۲- اثر ماده‌ی تابعی درجه‌ای (ضریب تغییر ویژگی-های عضو)

در این بخش، به منظور ارزیابی اثرهای ناهمگنی مواد، (FGM) بر پاسخ‌های ارتعاش آزاد سازه، قاب شکل ۱ با مقدارهای متفاوت ضریب تغییر ویژگی‌های عضو بررسی می‌شود. بر این پایه، ضریب تغییر ویژگی‌های عضوها (c)،

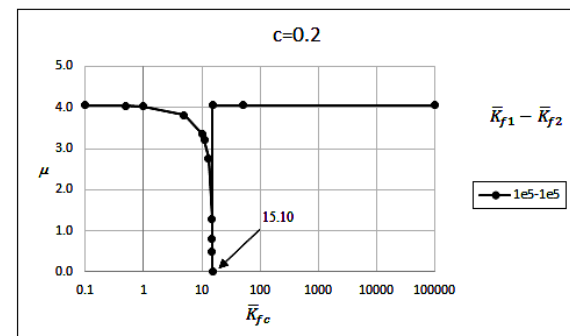
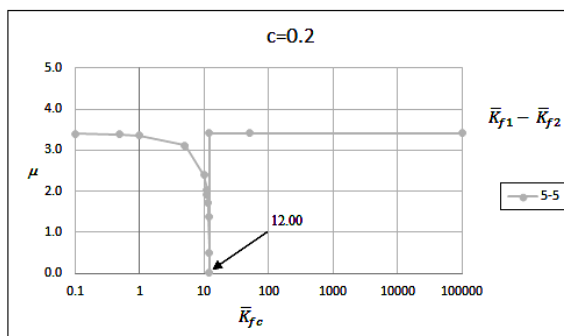
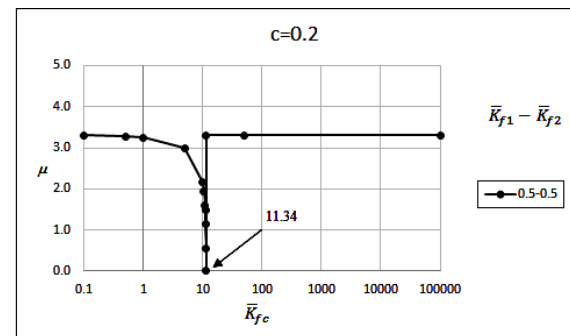
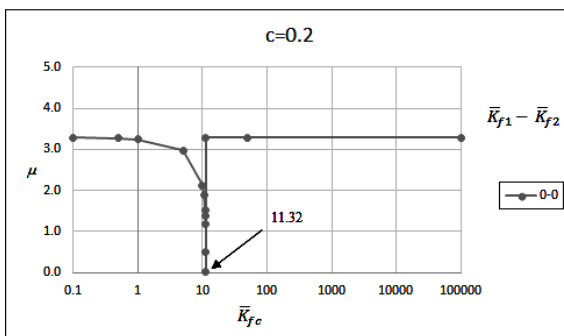
برای سه مقدار ($c=0, 0.1-0.2$) ارزیابی گردیده است. یادآوری می‌کند، برای سادگی و به منظور درک بهتر اثر عامل یاد شده، مشخصه‌های تیر و ستون قاب یکسان پنداشته خواهند شد. به سخن دیگر، $\bar{I} = \bar{L} = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ در نظر گرفته می‌شوند و به دنبال آن، رابطه‌های $c_1 = c_2 = c$ و $\mu_{1n} = \mu_{2n} = \mu$ برقرار خواهند بود.

۵-۲- اثر ماده‌ی تابعی درجه‌ای (ضریب تغییر ویژگی-های عضو)

در این بخش، به منظور ارزیابی اثرهای ناهمگنی مواد، (FGM) بر پاسخ‌های ارتعاش آزاد سازه، قاب شکل ۱ با مقدارهای متفاوت ضریب تغییر ویژگی‌های عضو بررسی می‌شود. بر این پایه، ضریب تغییر ویژگی‌های عضوها (c)،



شکل ۳- نمودار تغییرات ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) مود یکم قاب همگن ($c = 0.1$) در برابر تغییرهای \bar{K}_{fc} و برای سختی‌های متفاوت تکیه‌گاهی



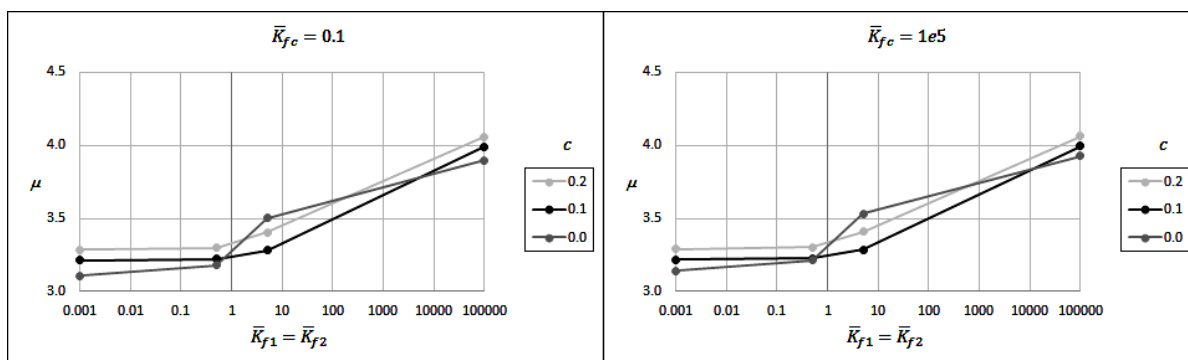
شکل ۴- نمودار تغییرات ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) مود یکم قاب همگن ($c = 0.2$) در برابر تغییرهای \bar{K}_{fc} و برای سختی‌های متفاوت تکیه‌گاهی

است. همچنین، برای درک بهتر رفتار قاب، نمودار تغییرهای فرکانس طبیعی در برابر ضریب تغییر ویژگی‌ها نیز، برای مدهای یکم تا سوم، به ترتیب، در شکل‌های (۸) تا (۱۰) در دسترس قرار گرفته‌اند. پاسخ‌ها نشان می‌دهند،

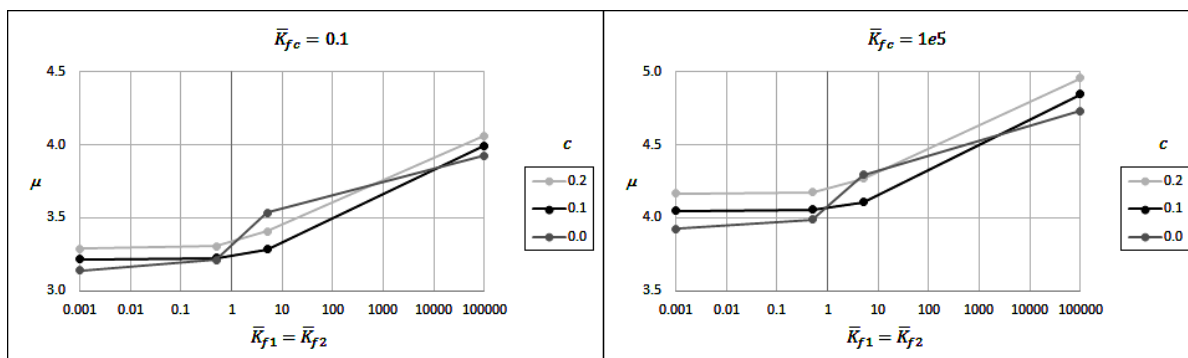
بر این پایه، ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) سه مود نخست قاب با ضریب‌های تغییر ویژگی‌های مقطع و سختی - های تکیه‌گاهی متفاوت برای سختی‌های عضوی $\bar{K}_{fc} = 1$ و $\bar{K}_{fc} = 10$ ، به ترتیب، در جدول‌های ۶ و ۷ گزارش شده

پی خواهد داشت. در این راستا و در میان گونه‌های بررسی شده، بیشترین درصد افزایش μ در مود یکم و برای $\bar{K}_{fc} = 1$ رخ می‌دهد. در این گونه، با تغییر ضریب ویژگی‌ها از $c = 0.0$ به $c = 0.1$ ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی (μ)، حدود $24/06$ درصد، افزایش می‌یابد. همچنین، بیشترین درصد کاهش μ در شکل ارتعاشی دوم و برای $\bar{K}_{fc} = 10$ روی خواهد داد. در این گونه، با تغییر ضریب ویژگی‌ها از $c = 0.0$ به $c = 0.1$ ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی (μ)، حدود $28/05$ درصد، کاهش می‌یابد.

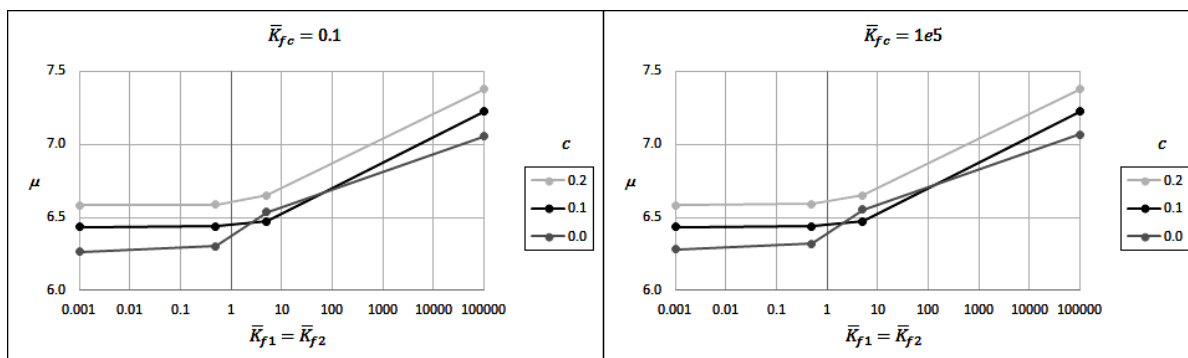
با افزایش سختی تکیه‌گاه‌ها، ضریب μ ، همواره افزایش می‌یابد. این پدیده، در همه شکل‌های ارتعاشی و برای تمام ضریب‌های c برقرار است. در این میان، افزایش سختی پیوندهای عضوی از $\bar{K}_{fc} = 1$ به $\bar{K}_{fc} = 10$ و برای قاب همگن ($c = 0.0$) نیز، سبب افزایش فرکانس طبیعی قاب در همه مودهای ارتعاشی می‌گردد. با وجود این، افزایش سختی پیوندهای عضوی با تغییر هم‌زمان ضریب تغییر ویژگی‌های مقطع، بسته به سختی تکیه‌گاهی، شکل ارتعاشی و مقدار c ، کاهش یا افزایش فرکانس طبیعی را در



شکل ۵- نمودار تغییرات ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) مود یکم قاب‌های همگن ($c = 0.0$) و ناهمگن ($c = 0.1, 0.2$) در برابر تغییر هم‌زمان سختی‌های تکیه‌گاهی ($\bar{K}_{f1} = \bar{K}_{f2}$) و برای سختی‌های عضوی متفاوت



شکل ۶- نمودار تغییرات ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) مود دوم قاب‌های همگن ($c = 0.0$) و ناهمگن ($c = 0.1, 0.2$) در برابر تغییر هم‌زمان سختی‌های تکیه‌گاهی ($\bar{K}_{f1} = \bar{K}_{f2}$) و برای سختی‌های عضوی متفاوت



شکل ۷- نمودار تغییرات ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) مود سوم قاب‌های همگن ($c = 0.0$) و ناهمگن ($c = 0.1, 0.2$) در برابر تغییر هم‌زمان سختی‌های تکیه‌گاهی ($\bar{K}_{f1} = \bar{K}_{f2}$) و برای سختی‌های عضوی متفاوت

جدول ۶- ضریب‌های بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) سه مود نخست قاب با ضریب‌های تغییر ویژگی‌های مقطع و سختی‌های تکیه‌گاهی

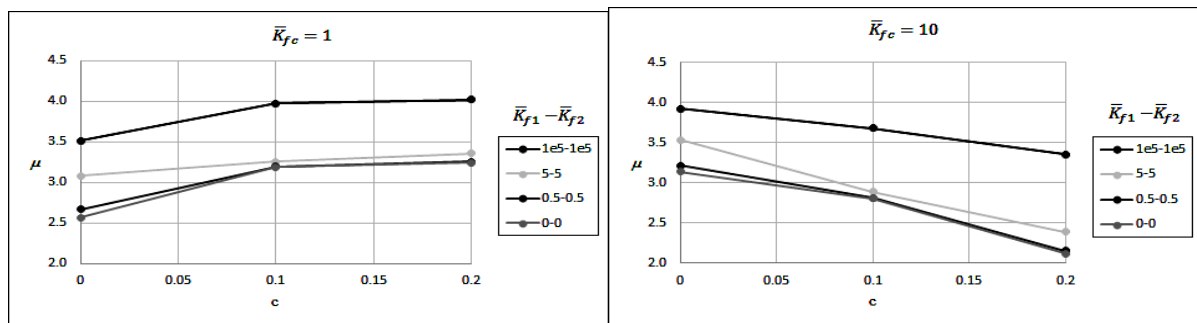
متفاوت برای $\bar{K}_{fc} = 1$

c	شماره مود (شکل) ارتعاش	$\bar{K}_{f1} - \bar{K}_{f2}$			
		۰-۰	۰/۵-۰/۵	۵-۵	۱۰۵-۱۰۵
۰/۰ (همگن)	۱	۲/۵۷۱۵	۲/۶۷۴۰	۳/۰۸۰۷	۳/۵۱۶۱
	۲	۳/۱۴۱۶	۳/۲۱۳۶	۳/۵۳۴۱	۳/۹۲۶۶
	۳	۶/۰۸۹۲	۶/۱۲۹۹	۶/۳۷۴۲	۶/۹۰۱۱
۰/۱ (ناهمگن)	۱	۳/۱۹۰۳	۳/۱۹۷۷	۳/۲۵۸۸	۳/۹۷۲۴
	۲	۳/۲۱۸۰	۳/۲۲۵۳	۳/۲۸۵۷	۳/۹۹۵۷
	۳	۶/۴۲۳۸	۶/۴۲۷۷	۶/۴۶۰۹	۷/۲۱۵۲
۰/۲ (ناهمگن)	۱	۳/۲۴۲۱	۳/۲۵۶۱	۳/۳۶۲۴	۴/۰۲۱۹
	۲	۳/۲۹۰۴	۳/۳۰۴۱	۳/۴۰۸۴	۴/۰۶۲۲
	۳	۶/۵۶۲۸	۶/۵۷۰۲	۶/۶۳۲۱	۷/۳۶۰۱

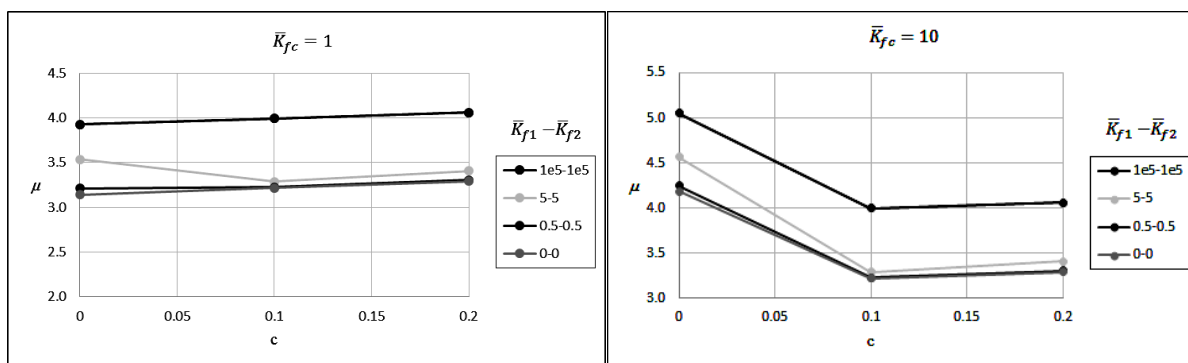
جدول ۷- ضریب‌های بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) سه مود نخست قاب با ضریب‌های تغییر ویژگی‌های مقطع و سختی‌های تکیه‌گاهی

متفاوت برای $\bar{K}_{fc} = 10$

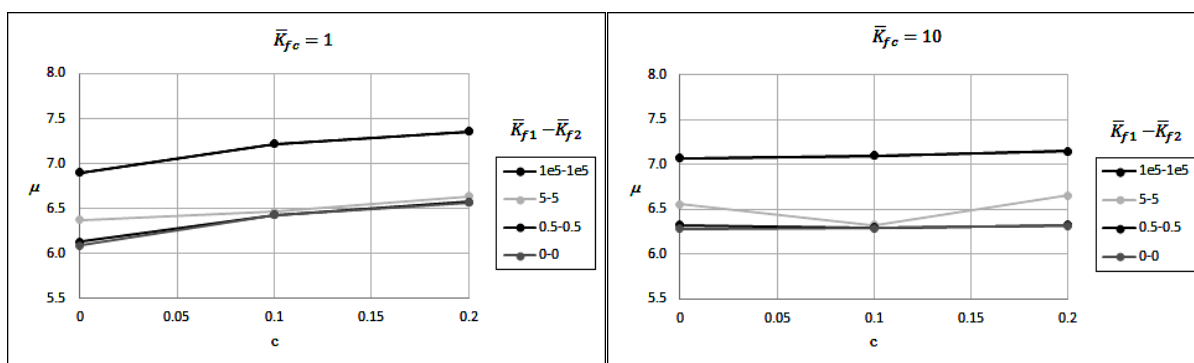
c	شماره مود (شکل) ارتعاش	$\bar{K}_{f1} - \bar{K}_{f2}$			
		۰-۰	۰/۵-۰/۵	۵-۵	۱۰۵-۱۰۵
۰/۰ (همگن)	۱	۳/۱۴۱۶	۳/۲۱۳۶	۳/۵۳۴۱	۳/۹۲۶۶
	۲	۴/۱۸۵۴	۴/۲۴۸۴	۴/۵۶۶۸	۵/۰۵۴۶
	۳	۶/۲۸۳۲	۶/۳۲۱۲	۶/۵۵۲۶	۷/۰۶۸۵
۰/۱ (ناهمگن)	۱	۲/۸۰۷۸	۲/۸۱۷۱	۲/۸۹۲۸	۳/۶۸۶۴/
	۲	۳/۲۱۸۰	۳/۲۲۵۳	۳/۲۸۵۷	۳/۹۹۵۷
	۳	۶/۲۸۶۷	۶/۲۹۰۸	۶/۳۲۵۶	۷/۰۹۶۲
۰/۲ (ناهمگن)	۱	۲/۱۱۹۱	۲/۱۵۵۲	۲/۳۹۳۴	۳/۳۵۷۶
	۲	۳/۲۹۰۴	۳/۳۰۴۱	۳/۴۰۸۴	۴/۰۶۲۲
	۳	۶/۳۱۲۱	۶/۳۲۰۲	۶/۶۵۳۴	۷/۱۴۵۵



شکل ۸- نمودار تغییرات ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) مود یکم قاب در برابر ضریب تغییر ویژگی‌های مقطع (c) با سختی‌های تکیه‌گاهی و عضو متفاوت



شکل ۹- نمودار تغییرات ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) مود دوم قاب در برابر ضریب تغییرویژگی‌های مقطع (c) با سختی‌های تکیه‌گاهی و عضوی متفاوت



شکل ۱۰- نمودار تغییرات ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) مود سوم قاب در برابر ضریب تغییرویژگی‌های مقطع (c) با سختی‌های تکیه‌گاهی و عضوی متفاوت

۶- نتیجه‌گیری

در پژوهش کنونی، راهکاری برای تحلیل دقیق ارتعاش آزاد قاب‌های همگن و ناهمگن با پیوند نیمه‌سخت و تکیه‌گاه-های کشسان دورانی در دسترس قرار گرفت. ماده‌های تابعی درجه‌ای محوری (ناهمگن) با الگوی توانی و سختی‌های تکیه‌گاهی و عضوی، با فنرهای دورانی خطی الگوسازی شدند. با بهره‌جویی از نگره تیر اولر- برنولی، معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش آزاد سازه حل و پاسخ‌های دقیق، بر حسب تابع‌های بسل به دست آمدند. سپس، با وارد نمودن شرط‌های مرزی، ماتریس ضریب‌های ثابت برپا گشت. از برابر صفر قراردادن دترمینان ماتریس ضریب‌ها، معادله مشخصه سازه در دسترس قرار گرفت. پاسخ‌های حقیقی این معادله، فرکانس‌های طبیعی سازه را به دست داد. با ارزیابی پاسخ‌های به دست آمده از گونه‌های مورد بررسی، می‌توان به نتیجه‌های زیر دست یافت:

۱- برای سختی‌های تکیه‌گاهی کم و زیاد ($\bar{K}_{f1} = \bar{K}_{f2} = 0, 0.5, 1e5$)، با افزایش سختی دورانی عضوی (\bar{K}_{fc})، ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) در

هر سه مود ارتعاشی و برای هر سه مقدار ضریب تغییر ویژگی‌ها ($c = 0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$)، افزایش می‌یابد. با وجود این، در سختی‌های تکیه‌گاهی میانی ($\bar{K}_{f1} = \bar{K}_{f2} = 5$) بسته به شکل (مود) ارتعاشی و ضریب تغییر ویژگی‌ها، مقدار μ کاهش یا افزایش خواهد یافت.

۲- در هر سه مود ارتعاشی قاب‌های همگن ($c = 0/0$) و ناهمگن ($c = 0/1 - 0/2$)، افزایش سختی تکیه‌گاه‌ها از ساده ($\bar{K}_{f1} = \bar{K}_{f2} = 0$) به گیردار ($\bar{K}_{f1} = \bar{K}_{f2} = 1e5$)، برای پیوندهای عضوی ساده و سخت، افزایش ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی (μ) را در پی خواهد داشت. بر این پایه و در میان نمونه‌های بررسی شده، بیشترین درصد افزایش μ حدود ۲۴/۹۹ درصد خواهد بود.

۳- با افزایش سختی دورانی پیوند تیر به ستون، فرکانس طبیعی (μ) یک روند کاهشی را تا رسیدن به مقدار بحرانی \bar{K}_{fc} می‌پیماید. این کاهش، در محدوده پیش از سختی عضوی بحرانی، بسیار شدید می‌باشد. پس از آن و در مقدار بحرانی \bar{K}_{fc} ، یک پرش در نمودار تغییرات ضریب بدون یکای فرکانس طبیعی رخ می‌دهد و در ادامه، مقدار μ به

و شماره مود ارتعاشی، می‌تواند سبب افزایش یا کاهش فرکانس‌های طبیعی سازه شود.
۵- هریک از عامل‌های سختی دورانی تکیه‌گاهی، سختی دورانی عضوی و ضریب تغییر ویژگی‌های عضو، در برخی حالت‌ها، اثر قابل توجهی بر فرکانس طبیعی سازه دارند. از این رو، اثر هر یک از عامل‌های یاد شده را در طرح قاب‌های همگن و ناهمگن، بایستی در نظر گرفت.

طور تقریبی ثابت خواهد بود. در این میان، سختی تکیه-گاه‌ها و ضریب تغییر ویژگی‌های مقطع (c)، سبب جابجایی مقدار سختی عضوی بحرانی می‌گردند. این پدیده، در طرح پیوند عضوی و به کارگیری ماده‌های ناهمگن، بسیار مهم خواهد بود.
۴- در میان نمونه‌های بررسی شده، افزایش ضریب تغییر ویژگی‌های مقطع، بسته به سختی‌های تکیه‌گاهی و عضوی

مراجع

- [1] H. Lohar, A. Mitra, and S. Sahoo, "Natural frequency and mode shapes of exponential tapered AFG beams on elastic foundation", *International Frontier Science Letters*, Vol. 9, Aug. 2016, pp. 9–25.
- [2] M. H. Ghayesh, "Mechanics of tapered AFG shear-deformable microbeams", *Microsyst Technol*, Vol. 24, No. 4, Apr. 2018, pp. 1743–1754.
- [3] H. Zeighampour and Y. Tadi Beni, "Free vibration analysis of axially functionally graded nanobeam with radius varies along the length based on strain gradient theory", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 39, No. 18, Sep. 2015, pp. 5354–5369.
- [4] O. Rahmani, S. Hosseini, I. Ghoytasi, and H. Golmohammadi, "Free vibration of deep curved FG nano-beam based on modified couple stress theory", *Steel and Composite Structures*, Vol. 26, Apr. 2018, p. 607–620.
- [5] M. A. De Rosa and N. M. Auciello, "Free vibrations of tapered beams with flexible ends", *Computers & Structures*, Vol. 60, No. 2, Jul. 1996, pp. 197–202.
- [6] D. S. Sophianopoulos, "The effect of joint flexibility on the free elastic vibration characteristics of steel plane frames", *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 59, No. 8, Aug. 2003, pp. 995–1008.
- [7] R. Attarnejad, N. Manavi, and A. Farsad, "Exact solution for the free vibration of a tapered beam with elastic end rotational restraints", in *Computational Methods*, G. R. Liu, V. B. C. Tan, and X. Han, Eds. Springer Netherlands, 2006, pp. 1993–2003.
- [8] S. A. Sina, H. M. Navazi, and H. Haddadpour, "An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams", *Materials & Design*, Vol. 30, No. 3, Mar. 2009, pp. 741–747.
- [9] Y. Huang and X.-F. Li, "A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, No. 11, May 2010, pp. 2291–2303.
- [10] A. Shahba, R. Attarnejad, M. T. Marvi, and S. Hajilar, "Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 42, No. 4, Jun. 2011, pp. 801–808.
- [11] A.-Y. Tang, J.-X. Wu, X.-F. Li, and K. Y. Lee, "Exact frequency equations of free vibration of exponentially non-uniform functionally graded Timoshenko beams", *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 89, No. Supplement C, Dec. 2014, pp. 1–11.
- [12] X. Wang and S. Li, "Free vibration analysis of functionally graded material beams based on Levinson beam theory", *Appl. Math. Mech.-Engl. Ed.*, Vol. 37, No. 7, Jul. 2016, pp. 861–878.
- [13] S. H. Hashemi, H. B. Khaniki, and H. B. Khaniki, "Free vibration analysis of functionally graded materials non-uniform beams", *International Journal of Engineering - Transactions C: Aspects*, Vol. 29, No. 12, Nov. 2016, p. 1734-1740.
- [14] M. Rezaiee-Pajand and A. R. Masoodi, "Exact natural frequencies and buckling load of functionally graded material tapered beam-columns considering semi-rigid connections", *Journal of Vibration and Control*, Vol. 24, No. 9, May. 2018, pp. 1787–1808.

[۱۵] سید علی احمدی، هادی پورشهسواری و جعفر اسکندری‌جم، "تحلیل کماتش سه بعدی پانل‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدمند (FGM) تحت بارگذاری حرارتی مختلف"، نشریه مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۱۴، شماره ۴۶، پاییز ۱۳۹۵، صفحه ۳۹–۵۰.

[۱۶] امید رحمانی و رضا بیات، "مدلسازی کنترل ارتعاشات تیر کامپوزیتی چند لایه با استفاده از لایه‌های مگنتواستریکتیو"، نشریه مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۱۵، شماره ۴۸، بهار ۱۳۹۶، صفحه ۲-۱۳.

[۱۷] امیر حشمت خدمتی بازکیایی، حمید دهقان طرزجانی و نادر محمدی، "ارتعاشات آزاد ورق نازک مواد مدرج تابعی بر بستر الاستیک وینکلر به کمک روش المان کوادراچر دیفرانسیلی"، نشریه مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۱۵، شماره ۴۹، تابستان ۱۳۹۶، صفحه ۸۹-۹۹.

[18] D. Ghazaryan, V. N. Burlayenko, A. Avetisyan, and A. Bhaskar, "Free vibration analysis of functionally graded beams with non-uniform cross-section using the differential transform method", J Eng Math, Vol. 110, No. 1, Jun. 2018, pp. 97-121.