Archive of SID

پژوهش‌های نوین در تصمیم‌گیری
دوره 4، شماره 2، تابستان 1398

رویکردی نوین برای محاسبه تراکم با ویژگی دسترسی‌پذیری ضعیف خطی خروجی‌های نامطلوب

مینا فولادوند[1]، علیرضا امیرتیموری[2]، سهراب کردرستمی[3*]

1- دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد رشت، رشت، ایران
2- استاد، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه،دانشگاه آزاد اسلامی،واحد رشت، رشت، ایران
3- استاد، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی،واحد لاهیجان، لاهیجان، ایران

دریافت: 97/1/17 پذیرش: 97/3/22

چکیده

در سال‌های اخیر، مسئله تراکم از موضوعات موردتوجه محققان بوده است. هنگامی‌که افزایش یک یا چند ورودی موجب کاهش یک یا چند خروجی شود، به‌طوری‌که سایر ورودی‌ها و خروجی‌ها بدون تغییر باشند (یا بالعکس)، اصطلاحاً تراکم رخ داده است. این مفهوم ازاین‌جهت در اقتصاد حائز اهمیت است که حذف تراکم باعث کاهش هزینه و افزایش خروجی می‌شود. از طرف دیگر، در فرآیند تولید یا ارائه خدمات، به‌طورمعمول، علاوه بر تولید خروجی مطلوب خروجی‌های نامطلوب نیز حاصل می‌شود. مفهوم تراکم در حضور عوامل نامطلوب متفاوت است، زیرا مایل به افزایش خروجی‌های مطلوب و کاهش خروجی‌های نامطلوب هستیم؛ لذا در حضور عوامل نامطلوب نمی‌توان تعاریف و نظریه‌های متداول را برای اندازه‌گیری تراکم به کار برد. در این مقاله، ضمن بررسی و مرور برخی مدل‌های تعیین تراکم با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها، روش جدیدی برای اندازه‌گیری تراکم با درنظرگرفتن خروجی‌های نامطلوب با فرض دسترسی‌پذیری ضعیف به فرم خطی ارائه شده و کاربرد این روش برای تحلیل اثر تراکم در حضور خروجی‌های نامطلوب روی عملکرد دانشکده‌های دانشگاه نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد تمامی واحدهای ناکارا دارای تراکم در ورودی هستند.

* نویسنده مسئول مقاله: E- mail: sohrabkordrostami@gmail.com

www.SID.ir

Archive of SID

واژگان کلیدی: تراکم؛ خروجی نامطلوب؛ دسترسی‌پذیری ضعیف؛ تحلیل پوششی داده‌ها؛ کارایی.

1- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها[1] یکی از پرکاربردترین روش‌ها در حوزه تصمیم‌گیری و سنجش عملکرد است که از زمان معرفی تاکنون، از جهات نظری و کاربردی توسعه یافته و به‌موجب ویژگی‌های منحصربه‌فردش در حوزه‌های مختلف علوم نفوذ کرده است [1-3]. تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) روشی غیر پارامتری است که با بهره‌گیری از مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی به ارزیابی عملکرد یک واحد تصمیم‌گیرنده می‌پردازد. هدف مدل‌های DEA ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری است و این عملکرد تحت تأثیر مقدار منابعی است که این واحدها مصرف می‌کنند. به‌طورمعمول با افزایش منابع ورودی، خروجی نیز افزایش می‌یابد، اما در برخی شرایط افزایش منابع ورودی منجر به کاهش خروجی می‌شود؛ به‌طور مثال، وقتی‌که تعداد کارگران در یک معدن زیاد شود، مقدار ماده معدنی استخراج‌شده توسط هر کارگر کاهش پیدا می‌کند. همچنین افزایش تعداد کارگران یک تولیدی کوچک موجب برخورد آن‌ها با یکدیگر می‌شود. این مطلب مثالی از تراکم است که کاهش تعداد کارگران موجب افزایش خروجی و میزان تولید می‌گردد [4]. در اغلب فرآیندهای تولید و ارائه‌ی خدمات، علاوه بر خروجی مطلوب، خروجی نامطلوب نیز تولید می‌شود. در این مقاله به موضوع تراکم در حضور خروجی‌های نامطلوب می‌پردازیم. به این منظور، ابتدا مروری بر مبانی نظری تحقیق خواهیم داشت و به‌اختصار به برخی مدل‌های مطرح در این زمینه اشاره خواهیم کرد. سپس با در نظر گرفتن فرض دسترسی‌پذیری ضعیف خروجی‌های نامطلوب، مدل امیرتیموری و همکاران [1، 6] معرفی می‌شود. در بخش چهارم، مفهوم تراکم و مدل‌های موجود در این زمینه موردبررسی قرار می‌گیرند. سپس در بخش پنج، با تلفیق مفهوم دسترسی‌پذیری ضعیف خطی ارائه‌شده توسط امیر تیموری و همکاران [1، 6] و مفهوم تراکم[2]، مدلی جدید برای محاسبه تراکم در حضور خروجی‌های نامطلوب با فرض دسترسی‌پذیری ضعیف به فرم خطی ارائه

1. Data Envelopment Analysis
2. Congestion

www.SID.ir

Archive of SID

می‌شود. نتایج حاصل از مدل جدید، در بخش شش و در مثالی با داده‌های واقعی، موردبحث و بررسی و مقایسه با روش‌های پیشین قرار می‌گیرد.

2- مروری بر مبانی نظری تحقیق

2-1- تحلیل پوششی داده‌ها در حضور خروجی‌های نامطلوب

در تحلیل پوششی داده‌ها که با مطالعه چارنز و همکاران [7] آغاز شد، هدف عبارت است از کمینه‌سازی ورودی‌ها و بیشینه‌کردن خروجی‌ها؛ درحالی‌که واحدها و سازمان‌هایی نظیر کارخانه‌ها، بیمارستان‌ها و... در فرآیند فعالیت و تولید ممکن است علاوه بر تولید خروجی‌های مطلوب موردنظر، خروجی‌های نامطلوبی مانند ذرات معلق در هوا، ضایعات و آلودگی و... تولید کنند. حضور چنین خروجی‌هایی تحت عنوان عوامل محیطی، نقش مهمی در برآورد میزان کارایی این واحدها دارد. در ارزیابی چنین واحدهایی، هدف، استفاده از روشی است که علاوه بر سازگاری با مفاهیم نظریه تولید، به کمک آن بتوان خروجی‌های نامطلوب را کاهش و خروجی‌های مطلوب را افزایش داد. ازجمله کارهای انجام‌شده در این زمینه می‌توان به مقاله‌های فار و پاسارکا [8]، هایلو و ویمن [9]، هایلو [10]، سیفورد و ژو [11]، فار و گراسکوف [12-13]، کاسمانن [5]، کاسمانن و پودینوسکی [14-15]، عزیزی و همکاران [16و 17] و کلهر و کاظمی متین [18] اشاره نمود.

هایلو و ویمن برای برخورد با فنّاوری شامل خروجی‌های نامطلوب، آن‌ها را به‌عنوان ورودی در نظر گرفته و شرط امکان‌پذیری آزاد را با این منطق که خروجی‌های نامطلوب و ورودی‌ها هر دو برای یک واحد تولیدی هزینه در بر دارند، بر آن‌ها تحمیل کردند [9]. سپس فار و گراسکوف نشان دادند که شرط اصلاح‌شده هایلو و ویمن، متناقض با قوانین فیزیکی و اصول استاندارد نظریه تولید است [12]. در رویکردی که کاسمانن با استفاده از فنّاوری امکان‌پذیری ضعیف ارائه کرد، به‌جای به کار بردن یک عامل انقباض یکسان در اصل امکان‌پذیری ضعیف، از عوامل کاهش متفاوت در مدل استفاده شد [5].

اخیراً امیرتیموری و همکاران مفهوم جدیدی از دسترسی‌پذیری ضعیف خروجی‌های نامطلوب به فرم خطی در تحلیل پوششی داده‌ها ارائه کرده‌اند که وجه

www.SID.ir

Archive of SID

تمایز آن از تحقیقات پیشین، امکان به صفر رسیدن خروجی نامطلوب در عین تولید خروجی مطلوب است [1، 6].

2-2- تراکم

مفهوم تراکم در موضوعات مختلفی قابل‌طرح و بررسی است. مفهوم اقتصادی تراکم برای نخستین بار توسط فار و سونسون در مقالات DEA ارائه شد [19]. فار و همکاران سطوح مختلف تراکم در اقتصاد را مطرح کردند. آن‌ها برای تعیین مقدار تراکم ورودی، نسبت دو اندازه کارایی فنی[1] فارل که یکی تحت دسترسی ضعیف ورودی‌ها و دیگری تحت دسترسی قوی را محاسبه می‌کند، پیشنهاد کردند [20-21]. سپس برمبنای کار فار، بیرنس برای توضیح تجزیه کارایی فنی، مثال‌هایی را روی معادن زغال‌سنگ به کار برد که در آن تأثیر تراکم به‌عنوان یک مؤلفه موردبحث قرار می‌گیرد [22-23]. کوپر و همکاران روشی بر اساس تحلیل پوششی داده‌ها برای تعیین تراکم معرفی کردند. آن‌ها موضوع تراکم را در صنعت چین بررسی کرده و ارتباط بین تراکم و استخدام اجباری سالیانه 16 تا 18 میلیون نیروی کار جدید برای جلوگیری از بیکاری توسط دولت چین را موردبررسی قرار دادند [24]. اسکل[2] مدل‌های شعاعی که به‌طور همزمان خروجی‌های مطلوب و نامطلوب را در نظر می‌گیرد، پیشنهاد کرد [25]. تون و ساهو یک ارتباط نظری بین تراکم و بازده به مقیاس ارائه کردند که قادر به تشخیص تراکم قوی و ضعیف است [26]. خدابخشی روشی برای تعیین منابع و تراکم در ورودی ارائه کرد که در آن از ترکیبات ورودی آزاد استفاده شده است [27]. فانگ در مقاله‌ای به محاسبه تراکم در حضور خروجی‌های نامطلوب پرداخت و دیدگاهی ارائه کرد که قادر به ایجاد تمایز بین واحدهای دارای تراکم و واحدهای تصمیم‌گیری کاملاً کارا (که در مدل‌های ارزیابی همگی کارا تشخیص داده می‌شوند) است [28]. راستگو و رستمی تراکم را تحت فرض دسترسی‌پذیری ضعیف خروجی‌های مطلوب و نامطلوب در یک شبکه دومرحله‌ای محاسبه کردند [29]. همچنین خدادادی و حقیقی در مقاله‌ای به بررسی

1. Technical efficiency
2. Scheel

www.SID.ir

Archive of SID

موضوع تراکم با در نظرگرفتن خروجی‌های نامطلوب پرداختند و دیدگاه و تعریف جدیدی از تراکم در حضور خروجی‌های نامطلوب ارائه کردند [30].

3- تحلیل پوششی داده‌ها در حضور خروجی‌های نامطلوب

در اغلب فرآیندهای تولیدی، علاوه بر حصول خروجی‌های مطلوب، خروجی‌های نامطلوبی نیز تولید می‌شود. تولیداتی مانند مواد مضر معلق در هوا، ضایعات و اثرات نامطلوب دیگری مانند آلودگی‌های صوتی ازجمله خروجی‌های نامطلوب هستند؛ ازاین‌رو، مدل‌بندی این نوع خروجی، همواره در نظریه‌های اقتصاد و تولید موردتوجه بوده است. در این بخش به‌اختصار به معرفی امیرتیموری و همکاران [6، 1] می‌پردازیم.

تعریف دسترسی‌پذیری ضعیف (تعریف شپارد): خروجی‌ها دسترسی‌پذیری ضعیف دارند، اگر کاهش یکنواخت خروجی‌های شدنی کماکان شدنی باشد [31]:

$$if\ (v,w) \in P(x), 0 \le \theta \le 1 \Rightarrow (\theta v, \theta w) \in P(x) \qquad (1)$$

این مفهوم عموماً به این معناست که اگر ورودی‌ها با اصل دسترسی‌پذیری ضعیف ثابت فرض شوند، در این صورت کاهش تولید خروجی مطلوب باید منجر به کاهش متناسب با آن در خروجی نامطلوب گردد.

3-1- دیدگاه امیرتیموری و همکاران

فرض کنید در یک فعالیت تولیدی، N ورودی برای تولید M خروجی مطلوب و J خروجی نامطلوب به کار برده شود. بردارهای ورودی، خروجی مطلوب و خروجی نامطلوب به ترتیب با بردارهای $x \in \mathbb{R}_+^N$ ، $v \in \mathbb{R}_+^M$ و $w \in \mathbb{R}_+^J$ نشان داده می‌شوند. امیر تیموری و همکاران با تعمیم تعریف دسترسی‌پذیری ضعیف مدلی ارائه کردند که در آن (برخلاف تعریف شپارد) امکان به صفر رسیدن خروجی نامطلوب در عین حفظ خروجی مطلوب وجود دارد [1، 6].

تعریف دسترسی‌پذیری ضعیف به فرم خطی: فرض کنید

$$T = P(x) = \left\{(x,v,w) \middle| \text{توسط } x \text{ تولید می‌شود } (v,w)\right\}$$

www.SID.ir

Archive of SID

خروجی‌ها به‌طور ضعیف دسترس‌پذیرند، اگر به ازای $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ و $(\boldsymbol{\alpha_M},\boldsymbol{\alpha_J}) \geq \mathbf{0}$ داشته باشیم: $\mathbf{0} \leq (\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\alpha_M},\boldsymbol{w}-\boldsymbol{\alpha_J}) \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ که در آن $\boldsymbol{\alpha_M} = (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha},\dots,\boldsymbol{\alpha})$ و $\boldsymbol{\alpha_J} = (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha},\dots,\boldsymbol{\alpha})$ بردارهایی به ترتیب متعلق به فضای M بُعدی و J بُعدی است و $\boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{0}$.

فنّاوری تولید امیرتیموری و همکاران تحت فرض دسترسی‌پذیری ضعیف خطی در اصول موضوعه زیر صدق می‌کند:

1- اصل شمول مشاهدات: $(x^k, v^k, w^k) \in T \quad k = 1,2,\dots,K$.

2- اصل امکان‌پذیری (دسترسی‌پذیری آزاد ورودی و خروجی مطلوب):

$$if (x,v,w) \in T \ \ and\ x' \geq x\ , y' \leq y\ , w' = w \Longrightarrow (x', y', w') \in T$$

3- اصل تحدّب: فنّاوری T بسته و محدب است.

4- اصل دسترسی‌پذیری ضعیف به فرم خطی:

$$(x,v,w) \in T \Longrightarrow 0 \leq \left(v-\alpha_M, w-\alpha_J\right) \in T:\ \alpha_M = (\alpha,\alpha,\dots,\alpha) \in \mathbb{R}_+^M \ and \ \ \alpha_J = (\alpha,\alpha,\dots,\alpha) \in \mathbb{R}_+^J \qquad (2)$$

5- اصل کمینه برونیابی: T کوچک‌ترین مجموعه ممکن است که در شرایط فوق صدق می‌کند.

قضیه: مجموعه امکان تولید واحدی که در اصول موضوعه‌ی فوق صدق می‌کند با ماهیت بازده به مقیاس متغیر به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} T = \{(x,v,w):\ \ & v_m \leq \textstyle\sum_{k=1}^K z^k (v_m^k - \alpha_m) \quad m = 1,2,\dots,M \\ & w_j = \textstyle\sum_{k=1}^K z^k \left(w_j^k - \alpha_j\right) \qquad j = 1,2,\dots,J \\ & x_n \geq \textstyle\sum_{k=1}^K z^k x_n^k \qquad\quad n = 1,2,\dots,N \\ & v_m^k \geq \alpha_m \qquad\quad m = 1,2,\dots,M \\ & w_j^k \geq \alpha_j \qquad\quad j = 1,2,\dots,J \\ & \textstyle\sum_{k=1}^K z^k = 1 \\ & z^k \geq 0 \qquad\quad k = 1,2,\dots,K\} \end{aligned} \qquad (3)$$

www.SID.ir

Archive of SID

جایی که $\alpha_m = \alpha$، m اُمین مؤلفه بردار α_M و $\alpha_j = \alpha$، j اُمین مؤلفه بردار α_J است. z^k برای $k = 1,2,\dots,K$ متغیرهای وزنی هستند که در قید آخر ترکیب محدب واحدهای تصمیم‌گیری را ایجاد می‌کنند.

برهان: رجوع شود به امیرتیموری و همکاران [6، 1].

فنّاوری ارائه‌شده به‌صورت 3 به دلیل وجود حاصلضرب z^k و α در قیود مربوط به خروجی مطلوب و خروجی نامطلوب غیرخطی است. با اعمال تغییر متغیر به‌صورت $\lambda^k = \alpha z^k$ و $\mu^k = (1-\alpha)z^k$، واضح است که خواهیم داشت: $z^k = \mu^k + \lambda^k$ که $\lambda^k \geq 0$ و μ^k آزاد در علامت است. حال می‌توانیم با اعمال این تغییر متغیرها به بازنویسی مجموعه امکان تولید بپردازیم. لذا مجموعه T به‌صورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
T = \{(x,v,w):\ & v_m \leq \textstyle\sum_{k=1}^{K} v_m^k(\mu^k+\lambda^k) - \sum_{k=1}^{K}\lambda^k && m = 1,2,\dots,M \\
& w_j = \textstyle\sum_{k=1}^{K} w_j^k(\mu^k+\lambda^k) - \sum_{k=1}^{K}\lambda^k && j = 1,2,\dots,J \\
& x_n \geq \textstyle\sum_{k=1}^{K} x_n^k(\mu^k+\lambda^k) && n = 1,2,\dots,N \\
& v_m^k(\mu^k+\lambda^k) \geq \lambda^k && m = 1,2,\dots,M, k = 1,2,\dots,K \\
& w_j^k(\mu^k+\lambda^k) \geq \lambda^k && j = 1,2,\dots,J, k = 1,2,\dots,K \\
& \textstyle\sum_{k=1}^{K}(\mu^k+\lambda^k) = 1 \\
& \lambda^k \geq 0 \quad k = 1,2,\dots,K\}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

4- تراکم در تحلیل پوششی داده‌ها

4-1- مفهوم تراکم

تعریف تراکم ورودی[1]: وقتی افزایش یک یا بیش از یک ورودی منجر به کاهش خروجی شود بدون اینکه سایر ورودی‌ها و خروجی‌ها بهبود یابند اصطلاحاً تراکم در ورودی رخ داده است و یا بالعکس [32].

4-2- مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها با داده‌های تحت کنترل

در مجموعه امکان تولید، فرض بر آن است که از ورودی‌ها به‌طور کامل استفاده می‌شود. به‌طورمعمول با افزایش ورودی انتظار افزایش خروجی را داریم، اما در حالت تراکم، هنگامی‌که تولید به حداکثر مقدار خود رسیده باشد، افزایش ورودی‌ها

1. Input Congestion

www.SID.ir

Archive of SID

باعث کاهش خروجی‌ها می‌شود. برای اندازه‌گیری تراکم با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها باید کارایی همه واحدهای تصمیم‌گیری محاسبه شود تا واحدهای ناکارا تعیین شوند، زیرا تراکم در واحدهای ناکارا اتفاق می‌افتد [4].

4-2-1- محاسبه تراکم به روش فار، گراسکوف و لاول (FGL)

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیری، m ورودی را برای تولید s خروجی به کار می‌برند .در این مدل با دیدگاه شعاعی، ابتدا با استفاده از مدل CCR خروجی محور، واحدهای تصمیم‌گیری مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. این مدل به‌صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&Max \ \ \varphi_O \\
&S.T \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \le x_{iO} && i = 1,2,\dots,m \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \ge \varphi_O y_{rO} && r = 1,2,\dots,s \\
&\quad s_i, d_r \ge 0 && i = 1,\dots,m \ \&\ r = 1,\dots,s \\
&\quad \lambda_j \ge 0 && j = 1,2,\dots,n
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

اگر $\varphi_o^* = 1$ و تمامی متغیرهای کمکی نظیر قیدهای ورودی و خروجی در بهینگی برابر صفر باشند، آنگاه واحد تصمیم‌گیری تحت ارزیابی کارا و در غیر این صورت، ناکاراست [7]. سپس برای واحدهای ناکارا مدل برنامه‌ریزی خطی زیر حل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\beta_o^* = \ Max\, \beta_o \\
&S.T \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le \tau\, x_{io} && i = 1,2,\dots,m \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} = \beta_o y_{ro} && r = 1,2,\dots,s \\
&\quad 0 \le \tau \le 1 \\
&\quad \lambda_j \ge 0 && j = 1,2,\dots,n
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

متغیر τ در این مدل برای مقیاس مناسب ترکیبات محدب ورودی‌های مشاهده‌شده به کار می‌رود. همچنین قید مربوط به خروجی‌ها به‌صورت تساوی است که این مفهوم تعبیر دسترسی‌پذیری ضعیف خروجی را نشان می‌دهد. سرانجام تراکم به‌صورت $C = \frac{\varphi_o^*}{\beta_o^*}$ تعریف می‌شود. در این فرمول، β_o^* جواب بهینه مدل فوق (مدل6) و φ_o^* مقدار کارایی واحد تحت ارزیابی در مدل CCR خروجی محور (مدل 5) است. اگر

www.SID.ir

Archive of SID

$C = 1$، تراکم در ورودی‌های واحد تحت ارزیابی وجود ندارد و اگر $C > 1$، آنگاه تراکم وجود دارد. این مدل تنها وجود یا عدم وجود تراکم در ورودی را تعیین می‌کند، اما میزان این تراکم را به‌دست نمی‌دهد [4].

4-2-2- محاسبه تراکم به روش کوپر و همکاران

در این مدل، ابتدا با استفاده از مدل BCC خروجی محور کارایی واحد تحت ارزیابی محاسبه می‌شود. این مدل به‌صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&Max \;\; \varphi_O + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i + \sum_{r=1}^{s} d_r\right) \\
&S.T \;\; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j + s_i = x_{iO} && i = 1,2,\dots,m \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j - d_r = \varphi_O y_{rO} && r = 1,2,\dots,s \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\
&\lambda_j \geq 0 && j = 1,2,\dots,n \\
&s_i, d_r \geq 0 && i = 1,\dots,m \;\&\; r = 1,\dots,s
\end{aligned} \tag{7}
$$

در این مدل، ε یک عنصر غیرارشمیدسی نامیده می‌شود و یک عدد حقیقی نیست، بلکه به‌صورت عددی که از هر عدد حقیقی مثبتی کوچک‌تر است، تعریف می‌شود. برای اجتناب از تخصیص مقدار به این عنصر، می‌توان مدل بالا را در یک پردازه دومرحله‌ای حل کرد؛ به این صورت که ابتدا با در نظر گرفتن φ_O در تابع هدف مقدار بهینه آن را محاسبه و سپس با قرار دادن این مقدار در مدل، مجموع متغیرهای کمکی s_i و d_r را بیشینه نمود. اگر $\varphi_o^* = 1$ و مقدار بهینه تمامی متغیرهای کمکی صفر باشد، آنگاه واحد تحت ارزیابی کارا و در غیر این صورت، ناکاراست [7]. ازآنجاکه ناکارایی، شرط لازم برای وجود تراکم است، لذا جواب بهینه مدل بالا $(\varphi_o^*, s_i^*, d_r^*)$ برای تعیین میزان ناکارایی فنی در ورودی به کار می‌رود:

$$
\begin{aligned}
&Max \;\; \sum_{i=1}^{m} \delta_i \\
&S.T \;\; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j + \delta_i = x_{iO} - s_i^* && i = 1,2,\dots,m \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j = \varphi_O y_{rO} + d_r^* && r = 1,2,\dots,s \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\
&\quad s_i^* \geq \delta_i && i = 1,2,\dots,m \\
&\lambda_j \geq 0 && j = 1,2,\dots,n
\end{aligned}
$$

www.SID.ir

Archive of SID

$$\delta_i \geq 0 \qquad i = 1,2,\dots,m \qquad (8)$$

تراکم در i اُمین ورودی به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$C_i = s_i^* - \delta_i^* \quad i = 1,2,\dots,m$$

4-3- مدل‌های تراکم در تحلیل پوششی داده‌ها در حضور خروجی‌های نامطلوب:
به‌طورمعمول برای بهبود عملکرد در حضور خروجی‌های نامطلوب باید خروجی مطلوب را افزایش و خروجی نامطلوب را کاهش داد. در مدل‌های پایه DEA تمامی خروجی‌ها به‌طور همزمان افزایش می‌یابند.

4-3-1- مدل فار و گراسکوف
فار و گراسکوف مدل زیر را به‌منظور افزایش خروجی‌های مطلوب و کاهش خروجی‌های نامطلوب با در نظر گرفتن عوامل φ_o و $\frac{1}{\varphi_o}$ و همچنین فرض بازده به مقیاس متغیر در نظر گرفتند [21]:

$$\begin{aligned} &Max \ \ \varphi_o \\ &S.T \ \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq x_{io} && i = 1,2,\dots,m \\ &\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq \varphi_o y_{ro} && r \in good\ outputs \\ &\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq \frac{1}{\varphi_o} y_{ro} && r \in bad\ outputs \\ &\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\ &\lambda_j \geq 0 \quad for && j = 1,2,\dots,n \end{aligned} \qquad (9)$$

پس از خطی‌سازی مدل بالا و تعیین کارایی واحد تحت ارزیابی، برای تعیین تراکم در واحدهای ناکارا از مدلی مشابه مدل کوپر استفاده کردند (برای اطلاعات بیشتر رجوع شود به [21]).

4-3-2- مدل محلاتی راینی برای محاسبه تراکم همزمان ورودی و خروجی نامطلوب
محلاتی راینی به‌منظور ارائه مدل برای تعیین تراکم در ورودی و خروجی‌های نامطلوب، برای تفکیک واحدهای کارا و ناکارا ابتدا در مدل فار و گراسکوف، طرفین

www.SID.ir

Archive of SID

قیدهای مربوط به خروجی مطلوب و نامطلوب را به ترتیب در φ_o و $\frac{1}{\varphi_o}$ ضرب و با تعریف متغیر $\varphi_o\lambda_j = \gamma_j$، مدل 5 را به‌صورت زیر اصلاح نمود [4]:

$$
\begin{aligned}
&Max \ \ \varphi_o \\
&S.T \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le x_{io} && i = 1,2,\dots,M \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge \varphi_o y_{ro} && r \in good\ outputs \\
&\sum_{j=1}^{n} \gamma_j y_{rj} \ge y_{ro} && r \in bad\ outputs \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\
&\sum_{j=1}^{n} \gamma_j = \varphi_o \\
&\varphi_o \ge 0 \ , \ \ \lambda_j \ge 0 && j = 1,2,\dots,n
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

برای تعیین تراکم در این روش، ابتدا جواب بهینه مدل 10 محاسبه می‌شود. اگر $(\phi_o^*, s_i^*, d_r^*, \gamma_j^*, \lambda_j^*)$ جواب بهینه این مدل باشد، به‌طوری‌که $\phi_o^* \neq 1$ یا متغیرهای کمکی[1] نظیر قیدهای ورودی و خروجی (s_i^*, d_r^*) در جواب بهینه ناصفر باشند، آنگاه واحد تحت ارزیابی ناکاراست. سپس برای محاسبه تراکم در این واحد ناکارا مدل زیر به کار برده می‌شود (برای اطلاعات بیشتر رجوع شود به[4]):

$$
\begin{aligned}
&Max \ \ \sum_{i=1}^{n} \delta_i \\
&S.T \ \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + \ \delta_i = x_{io} - s_i^* && i = 1,2,\dots,m \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} = \phi_o^* y_{ro} + d_r^* && r \in good\ outputs \\
&\sum_{j=1}^{n} \gamma_j y_{rj} = y_{ro} + d_r^* && r \in bad\ outputs \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\
&\sum_{j=1}^{n} \gamma_j = \varphi_o \\
&s_i^* \ge \delta_i && i = 1,2,\dots,m \\
&\delta_i, \lambda_j \ge 0 && j = 1,2,\dots,n \ , i = 1,2,\dots,m
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

در پایان، عبارت $C_i = s_i^* - \delta_i^* \quad i = 1,2,\dots,m$ برای محاسبه تراکم در i اُمین ورودی به کار برده شده است.

1. Slack variables

www.SID.ir

Archive of SID

5- مدل جدید برای ارزیابی تراکم در حضور خروجی‌های نامطلوب

اکنون برای ارائه مدل جدید محاسبه تراکم یک فرآیند دومرحله‌ای را معرفی می‌کنیم:

مجموعه امکان تولید امیرتیموری و همکاران با اصول موضوعه 1 تا 5 فنّاوری تولید را در نظر بگیرید [6، 1]. به‌منظور تهیه مدل ارزیابی کارایی در این مجموعه امکان تولید و با هدف افزایش خروجی مطلوب و کاهش خروجی نامطلوب به ترتیب قیدهای مربوط به خروجی مطلوب و نامطلوب فرمول‌بندی 4 را در عوامل φ_O و $\frac{1}{\varphi_O}$ ضرب می‌کنیم. با بیشینه‌سازی عامل φ_O مدل به‌صورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \varphi_O \\
&S.T. \quad \varphi_O v_m \le \sum_{k=1}^{K} v_m^k(\mu^k + \lambda^k) - \sum_{k=1}^{K} \lambda^k && m = 1,2,\dots,M \\
&\quad \frac{1}{\varphi_O} w_j = \sum_{k=1}^{K} w_j^k(\mu^k + \lambda^k) - \sum_{k=1}^{K} \lambda^k && j = 1,2,\dots,J \\
&\quad x_n \ge \sum_{k=1}^{K} x_n^k(\mu^k + \lambda^k) && n = 1,2,\dots,N \\
&\quad \varphi_O\, v_m^k(\mu^k + \lambda^k) \ge \lambda^k && m = 1,2,\dots,m \quad k = 1,2,\dots,K \\
&\quad \frac{1}{\varphi_O} w_j^k(\mu^k + \lambda^k) \ge \lambda^k && j = 1,2,\dots,J \quad k = 1,2,\dots,K \\
&\quad \sum_{k=1}^{K}(\mu^k + \lambda^k) = 1 \\
&\quad \lambda^k \ge 0 \quad k = 1,2,\dots,K
\end{aligned}
\tag{12}
$$

در این مدل، تغییرات خروجی‌ها به‌طور متناسب در دو جهت مخالف صورت می‌گیرد. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، به دلیل وجود عامل کسری $\frac{1}{\varphi_O}$ در قید خروجی نامطلوب، این مدل غیرخطی است. برای خطی‌سازی آن به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

با توجه به قید ششم مدل فوق داریم: $\sum_{k=1}^{K} \varphi_o(\mu^k + \lambda^k) = \varphi_o$. حال متغیرهایی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: $\varphi_o\lambda^k := \gamma^k$ و $\varphi_o\mu^k := \tau^k$. ازآنجاکه $\lambda^k \ge 0$، لذا $\gamma^k \le 0$ و τ^k متغیر آزاد است. اکنون با ضرب قیدهای مربوط به خروجی نامطلوب در عامل φ_o و اعمال تغییر متغیرهای بالا به مدل خطی زیر خواهیم رسید:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \varphi_O \\
&S.T. \quad \varphi_O v_m \le \sum_{k=1}^{K} v_m^k(\mu^k + \lambda^k) - \sum_{k=1}^{K} \lambda^k && m = 1,2,\dots,M \\
&\quad w_j = \sum_{k=1}^{K} w_j^k(\tau^k + \gamma^k) - \sum_{k=1}^{K} \gamma^k && j = 1,2,\dots,J \\
&\quad x_n \ge \sum_{k=1}^{K} x_n^k(\mu^k + \lambda^k) && n = 1,2,\dots,N \\
&\quad v_m^k(\tau^k + \gamma^k) \ge \lambda^k && m = 1,2,\dots,M, k = 1,2,\dots,K
\end{aligned}
$$

www.SID.ir

Archive of SID

$$\begin{aligned} & w_j^k(\mu^k + \lambda^k) \geq \gamma^k && j = 1,2,\dots,J, k = 1,2,\dots,K \\ & \sum_{k=1}^{K}(\mu^k + \lambda^k) = 1 \\ & \sum_{k=1}^{K}(\tau^k + \gamma^k) = \varphi_O \\ & \lambda^k, \gamma^k \geq 0 && k = 1,2,\dots,K \end{aligned} \quad (13)$$

در مدل بالا، φ_o^* میزان ناکارایی واحد تحت ارزیابی را نشان می‌دهد. اگر مقدار بهینه تابع هدف برابر با یک باشد، واحد تصمیم‌گیری تحت ارزیابی کارا و اگر این مقدار بزرگ‌تر از یک باشد، ناکاراست و میزان کارایی به‌صورت $\frac{1}{\varphi_o^*}$ خواهد بود. حال فرض کنید واحد تحت ارزیابی ناکاراست؛ همچنین فرض کنید متغیرهای کمکی مربوط به قیدهای خروجی مطلوب (قید اول) و ورودی (قید سوم) به ترتیب d_m،s_n و $(\varphi_o^*, s_n^*, d_m^*)$ جواب بهینه مدل خطی فوق باشد.

در فاز دوم برای تعیین تراکم در واحدهای ناکارا، مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \delta^* = Max \ \sum_{n=1}^{N}\delta_n \\ S.T. \quad & \varphi_o^* v_m + d_m^* = \sum_{k=1}^{K} v_m^k(\mu^k + \lambda^k) - \sum_{k=1}^{K}\lambda^k && m = 1,2,\dots,M \\ & w_j = \sum_{k=1}^{K} w_j^k(\tau^k + \gamma^k) - \sum_{k=1}^{K}\gamma^k && j = 1,2,\dots,J \\ & x_n - s_n^* = \sum_{k=1}^{K} x_n^k(\mu^k + \lambda^k) + \delta_n && n = 1,2,\dots,N \\ & v_m^k(\tau^k + \gamma^k) \geq \lambda^k && m = 1,2,\dots,m \quad k = 1,2,\dots,K \\ & w_j^k(\mu^k + \lambda^k) \geq \gamma^k && j = 1,2,\dots,J \quad k = 1,2,\dots,K \\ & \sum_{k=1}^{K}(\mu^k + \lambda^k) = 1 \\ & \sum_{k=1}^{K}(\tau^k + \gamma^k) = \varphi_o^* \\ & s_n^* \geq \delta_n && n = 1,2,\dots,N \\ & \lambda^k, \gamma^k \geq 0 && k = 1,2,\dots,K \end{aligned} \quad (14)$$

در واقع در مدل 14، بیشینه مجموع متغیرهای کمکی نظیر قید ورودی محاسبه می‌شود و قید $S_n^* \geq \delta_n$ موجب بیشینه‌شدن متغیرهای کمکی نظیر ورودی‌ها می‌شود. اکنون با استفاده از جواب‌های بهینه مدل‌های 13 و 14، تراکم در n اُمین مؤلفه ورودی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_n = s_n^* - \delta_n^* \quad n = 1,2,\dots,N \quad (15)$$

www.SID.ir

Archive of SID

6- کاربرد

همان‌گونه که اشاره شد تراکم یکی از مفاهیم اقتصادی است و هنگامی رخ می‌دهد که در آن، افزایش حداقل یک ورودی باعث کاهش حداقل یک خروجی، بدون بهبود در سایر ورودی‌ها و خروجی‌ها شود؛ بنابراین، تراکم نوعی ناکارایی است و لازم است واحدهای دارای تراکم تعیین‌شده و میزان تراکم آن‌ها معین شود. در این بخش، اثر تراکم روی کارایی را با یک مثال واقعی نشان می‌دهیم. داده‌ها در جدول 1 نشان داده‌شده‌اند [4].

واحدهای تصمیم‌گیری شامل 21 دانشکده دانشگاه آزاد اسلامی واحد زاهدان و اطلاعات مربوط به سال 1390 است. متغیرها با نظر و مشورت با صاحب‌نظران و مدیران انتخاب شده‌اند. متغیرهای ورودی به ترتیب عبارت‌اند از: تعداد دانشجویان ثبت نامی(X_1)، تعداد اعضای هیأت علمی(X_2) و تعداد واحدهای ارائه‌شده توسط اساتید مدعو (X_3). خروجی‌های مطلوب عبارت‌اند از: تعداد فارغ‌التحصیلان(V_1)، تعداد دانشجویان قبول‌شده در مقطع بالاتر(V_2) و تعداد کارهای پژوهشی و تحقیقاتی (V_3) (این امتیاز شامل مقالات، نوع چاپ آن‌ها، طرح‌های پژوهشی، تدوین کتاب و... بر اساس آیین‌نامه ارتقای اعضای هیأت علمی است). تعداد دانشجویان اخراجی نیز به‌عنوان خروجی نامطلوب (W) در نظر گرفته شده است [4].

جدول 1 داده‌های دانشکده‌های دانشگاه آزاد اسلامی واحد زاهدان

دانشکده	X_1	X_2	X_3	V_1	V_2	V_3	W
1	433	5	88	56	1	45	15
2	242	1	55	35	2	10	8
3	233	2	38	46	6	40	7
4	406	1	65	51	6	0	12
5	989	10	140	75	2	60	18
6	1276	9	145	148	2	60	22

www.SID.ir

Archive of SID

ادامه جدول 1

دانشکده	X_1	X_2	X_3	V_1	V_2	V_3	W
7	2190	6	165	189	2	20	25
8	634	6	82	68	4	40	18
9	757	4	78	103	2	10	12
10	650	12	64	25	2	130	20
11	525	6	90	43	8	120	21
12	1020	2	100	116	1	0	24
13	1718	11	140	111	4	50	24
14	1025	6	120	80	3	90	17
15	655	11	88	30	10	50	16
16	924	5	92	39	1	20	21
17	360	6	72	31	1	20	10
18	779	8	102	146	1	10	14
19	589	5	92	115	1	0	15
20	441	4	80	35	1	20	13
21	258	5	50	11	1	20	12

www.SID.ir

Archive of SID

نتایج حاصل از روش جدید و روش محلاتی راینی [4] در جدول 2 نشان داده شده است. این نتایج شامل نمره کارایی و میزان تراکم در واحدهای ناکارا است که با استفاده از نرم‌افزار GAMS محاسبه شده‌اند. همان‌گونه که در این جدول مشاهده می‌شود، در روش جدید از مجموع 21 دانشکده تحت ارزیابی، 12 دانشکده دارای نمره کارایی 1 و درنتیجه کارا هستند و 9 دانشکده دیگر ناکارا هستند. متوسط نمره کارایی روش جدید 0/8689 است. همچنین نتایج نشان می‌دهند که در روش جدید، واحدهای ناکارا همگی دارای تراکم در همه یا در برخی از ورودی‌ها هستند. از 9 دانشکده ناکارا، 8 دانشکده دارای تراکم در تعداد دانشجویان ورودی (X_1)، 8 دانشکده دارای تراکم در تعداد اعضای هیأت علمی (X_2) و تنها 2 دانشکده دارای تراکم در X_3 یعنی تعداد واحدهای ارائه‌شده به اساتید مدعو هستند. واحدهای 16 و 20 دارای تراکم در هر سه ورودی هستند؛ درحالی‌که واحد 8، تنها در ورودی اول و واحد 14 تنها در ورودی دوم دارای تراکم هستند. همچنین ضریب همبستگی بین ناکارایی و تراکم هریک از ورودی‌ها به ترتیب 0/545، 0/618 و 0/476 است که نشان می‌دهد تراکم ورودی‌ها و ناکارایی واحدهای تحت ارزیابی رابطه‌ای مستقیم دارند؛ به‌طوری‌که بین و تعداد دانشجوی ثبت نامی و نیز تعداد اعضای هیأت علمی رابطه قوی وجود دارد و رابطه بین ناکارایی و تعداد واحدهای ارائه‌شده به اساتید مدعو رابطهای ضعیف است. در روش محلاتی راینی برای تعیین تراکم 21 دانشکده موردمطالعه، تعداد واحدهای ناکارا 8 واحد است که از این تعداد 3 واحد دارای تراکم در تعداد دانشجویان ورودی (X_1)، 6 دانشکده دارای تراکم در تعداد اعضای هیأت علمی (X_2) و 6 دانشکده دارای تراکم در X_3 یعنی تعداد واحدهای ارائه‌شده به اساتید مدعو هستند. همچنین این روش همبستگی معناداری میان ناکارایی و تراکم ورودی‌ها را نشان نمی‌دهد [4]. مقایسه نتایج حاصل از روش جدید و روش محلاتی راینی نشان می‌دهد که روش جدید در تشخیص واحدهای ناکارا و تشخیص تراکم در ورودی‌ها و همبستگی میان ناکارایی و تراکم قوی‌تر عمل کرده است. اعتبار مدل ارائه‌شده بر اساس مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها و روابط منطقی ریاضی استوار است. همچنین نتایج عددی حاصل، اعتبار مدل را تضمین می‌نماید.

www.SID.ir

Archive of SID

جدول 2 نتایج حاصل از روش جدید و روش محلاتی راینی

داشت کده	ک در روش	ک در روش محلا	در روش	در روش محلا	در X_2 روش	در روش	در X_3 روش محلا	در روش	در روش
1	0/827	0/827	0/59	0	21/86	0/593	0	21/86	
2	1	1	0	0	0	0	0	0	
3	1	1	0	0	0	0	0	0	
4	1	1	0	0	0	0	0	0	
5	0/711	0/711	2/22	17/571	17/31	2/217	0	17/31	
6	1	1	0	0	0	0	0	0	
7	1	1	0	0	0	0	0	0	
8	0/806	0/806	0/38	0	0	0/377	0	0	
9	1	1	0	0	0	0	0	0	
10	1	1	0	0	0	0	0	0	
11	1	1	0	0	0	0	0	0	
12	1	1	0	0	0	0	0	0	
13	0/869	0/869	4/72	211/306	6/22	4/717	0	6/22	
14	0/969	1	0	0	9/67	0	0	0	
15	1	1	0	0	0	0	0	0	
16	0/676	0/403	1/33	63/496	2/67	0	59/50	0	
17	0/482	0/482	2/53	0	17/55	2/535	0	17/55	
18	1	1	0	0	0	0	0	0	
19	1	1	0	0	0	0	0	0	
20	0/479	0/479	0/14	0	15/32	0	1/12	16/59	
21	0/427	0/427	2/66	0	7/55	2/658	0	7/55	

www.SID.ir

Archive of SID

7- نتیجه‌گیری

بـدون شـک هـدف اصلی هـر مجموعه بهره‌برداری مؤثر و کارا از منابع موجود است و این امر مستلزم آگاهی مدیران و تصمیم‌گیرندگان از عملکرد واحدهای تحت ارزیابی است. روش تحلیل پوششی داده‌ها یکی از ابزارهای موردتوجه محققان برای ارزیابی عملکرد در سال‌های اخیر است. یکی از مسائل موردتوجه در تحلیل پوششی داده‌ها، مسئله تراکم است. تراکم زمانی رخ می‌دهد که افزایش یک یا چند ورودی موجب کاهش تمام یا برخی از خروجی‌ها شود (یا بالعکس). از طرفی، در اغلب فرآیندهای تولید و ارائه خدمات علاوه بر خروجی‌های مطلوب خروجی نامطلوب نیز ظاهر می‌شود که به‌طورمعمول مایل به افزایش خروجی مطلوب و کاهش خروجی نامطلوب هستیم. در این مقاله با مرور مدل‌های مطرح در موضوع تراکم به بررسی مسئله تراکم در حضور خروجی‌های نامطلوب پرداخته‌ایم و با تعمیم مدل امیرتیموری و همکاران [1، 6] و در نظر گرفتن فرض دسترسی‌پذیری ضعیف به فرم خطی، مدلی جدید برای محاسبه تراکم در ورودی‌ها ارائه شده است. استفاده از فرض دسترسی‌پذیری ضعیف خطی در مدل ارائه‌شده امکان به صفر رساندن خروجی نامطلوب را در عین حفظ خروجی مطلوب را ایجاد می‌کند و این وجه تمایز مدل جدید از مدل‌های پیشین است. سپس مدل مذکور برای بررسی اثر تراکم ورودی روی کارایی دانشکده‌های دانشگاه بکار رفته است. نتایج نشان می‌دهد که کلیه واحدهای ناکارا دارای تراکم در ورودی هستند و همبستگی مستقیم بین ناکارایی و تراکم در ورودی‌ها وجود دارد.

8- منابع

[1] Fouladvand, m., Undesirable Outputs in production process with weak disposability assumption in data envelopment analysis, Ph.D. thesis in Mathematics, Faculty of Science, Islamic Azad University, Science and Research Branch of Tehran (Giulan), 2017.

[2] Azar, A., Khosravani, F., Jalali, R., The Application of DEA in Selecting a Portfolio Consisting of the Most Efficient and the Most Inefficient Companies

www.SID.ir

Archive of SID

Now Present in Tehran Stock Market, Management Research in Iran,17 (1),2013, 1-19.

[3] Mirghafoori, H., Shafiee Roodposht, M., Naddafi, G., Financial Performance Evaluating with Grey Theory and Data Envelopment Analysis Technique Two Step approach (Case Study: Province Telecommunication Companies), Management Research in Iran,16 (4),2013, 189-205.

[4] Mohallati Rayeni, m., Study of the effect of congestion on undesired output using data envelopment analysis. Case Study: University Performance Evaluation, Quarterly Journal of Production and Operations,6(1), 2015,99-112.

[5] Kuosmanen, T., Weak Disposability in Nonparametric Production analysis with Undesirable Outputs, American Journal of Agricultural Economics, 87,2005,1077-1082.

[6] Amirteimoori, A., Fouladvand., M., Kordrostami, S., Efficiency measurement using nonparametric production analysis in the presence of undesirable outputs .Application to power plants, Operation Research and Decisions,3,2017, 5-20.

[7] Charnes, A., Cooper, W., Rhodes, E., Measuring the efficiency of decision making units, European Journal of Operational Research, 2,1978,429-444.

[8] Färe, R., Pasurka , Jr. C. A., Pollution Abatement activities and traditional productivity, Ecological Economics,62,2007,673-682.

[9] Hailu, A., Veeman,T., Non parametric Productivity Analysis with undesirable outputs: An allpication to the Canadian Pulp and Paper Industry, American Journal of Agricultural Economics,83,2001,605-616.

[10] Hailu, A., Nonparametric Productivity Analysis with Undesirable Outputs: Reply, American Journal of Agricultural Economics,85,2003,1075-1077.

[11] Seiford, L.M., Zhu, J., Modeling undesirable factors in efficiency evaluation, European Journal of Operational Research,142,2002,16-20.

[12] Färe, R., Grooskopf, S., A Comment on Weak Disposability in Nonparametric productivity with Undesirable Outputs,American Journal of Agricultural Economics, 91,2008,535-538.

www.SID.ir

Archive of SID

[13] Färe, R., Grooskopf, S., Non-parametric Productivity Analysis with undesirable outputs, American Gournal of Agricultural Economics,85,2003,1070-1074.

[14] Kuosmanen, T., Podinovski, V., Weak Disposability in Production Analysis: Reply, American Journal of Agricultural Economics,91,2009,539-545.

[15] Podinovski, V., Kuosmanen, T., Modelling weak disposability in data envelopment analysis under relaxed convexity assumptions,European Journal of Operational Research, 211,2011, 577-585.

[16] Azizi, H., Amirteimoori, A., Kordrostami, S., Measurement of the worst practice of decision-making units: Incorporating both undesirable outputs and non-discretionary inputs into imprecise DEA, Modern Researches in Decision Making,3(2),2018,197-222.

[17] Azizi, H., Amirteimoori, A., Kordrostami, S., A data envelopment analysis approach with efficient and inefficient frontiers for supplier selection in the presence of both undesirable outputs and imprecise data, Modern Researches in Decision Making,1 (2),2016,139-170.

[18] Kalhor A., Kazemi Matin R. Study the effects of abatement factors of weak disposability in network data envelopment analysis with undesirable outputs, Journal of operational reearch and its applications,15(1),2018,103-121.

[19] Färe, R., Svensson, L., Congestion of production factors, Econometrica,48,1980, 1745–1752.

[20] Färe, R., Grosskopf, S., Lovell, C.A.K., The Measurement of Efficiency of Production, Kluwer- Nijhoff Publishing, Boston,1985.

[21] Färe, R., Grooskopf, S., Lovell, C.A.K., Pasurka, Jr. C. A., Multilateral productivity comparisons when some outputs are undesirable : a nonparametric approach, The Review of Economics and Statistics,71,1989,90– 98.

[22] Byrnes, P., Fare, R., Grosskopf , S., Measuring productive efficiency: an application to Illinois strip mines, Management Science, 30,1984, 671–681.

www.SID.ir

Archive of SID

[23] Byrnes, P., Fare, R., Grosskopf, S., Lovell, C. A. K., The effect of unions on productivity: US surface mining of coal, Management Science,9,1988,1037–1053.

[24] Cooper, W.W., Deng, H., Gu, B., Li, S, Thrall, R.M., Using DEA to improve the management of congestion in Chinese industries (1981-1997), Socio-Economic Planning Sciences,35,2001,227-242.

[25] Scheel, H., Undesirable outputs in efficiency valuations, European Journal of Operational Research,132,2001,400–410.

[26] Tone, K. , Sahoo, B. K. , Degree of scale economies and congestion: a unified DEA approach, European Journal of Operational Research,158,2004,755–772.

[27] Khodabakhshi, M., A one model approach based on relaxed combinations of inputs for evaluating input congestion in DEA, Journal of Computational and Applied Mathematics,230,2009,443-450.

[28] Fang, L., Congestion measurement in nonparametric analysis under the weakly disposable technology, European Journal of Operational Research, 245,2015, 203-208.

[29] Rastgoo, R., Rostami Malkhalifeh, M., Congestion measurment in data envelopment analysis under weak disposability of desirable and desirable outputs in a two-phase network, Jornal of new reserches in athematics,2,2016,91-100.

[30] Khodadadi, M., Zare Haghighi, H.,Environmental Assessment and Congestion for DMUs With Undesirable Outputs,International ournal ofIndustrial Mathematics,9,2017, 307-318.

[31] Shephard,R., Theory of cost Production Function, Princeton University Press,1970.

[32] Wei, Q.L., Yan, H., Congestion and returns to scale in data envelopment analysis,European Journal of Operational Research,153,2004,641–660.

www.SID.ir