

# ارائه یک روش برای محاسبه‌ی ماتریس تبدیل وابسته به فرکانس خطوط انتقال به شکل هموار

رامین زحمتی<sup>۱</sup>، دانشجوی کارشناسی ارشد؛ رضا شریعتی‌نسب<sup>۲</sup>، دانشیار؛ حسین الیاسی<sup>۳</sup>، استادیار

۱- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه بیرجند - بیرجند - ایران - r.zahmati@birjand.ac.ir

۲- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه بیرجند - بیرجند - ایران - shariatinasab@birjand.ac.ir

۳- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه بیرجند - بیرجند - ایران - h\_eliasi@birjand.ac.ir

**چکیده:** مدل‌سازی خطوط انتقال جهت تحلیل رفتار گذرای الکترومغناطیسی، نیازمند محاسبه‌ی ماتریس تبدیل مدال در محدوده‌ی وسیع فرکانسی می‌باشد. در این مقاله یک چهارچوب جامع جهت محاسبه‌ی ماتریس تبدیل به شکل هموار ارائه شده است. بر این اساس، در هر فرکانس یک مجموعه جواب عمومی برای بردارهای ویژه‌ی متناظر با هر مقدار ویژه محاسبه می‌شود. سپس بر اساس یک معیار هموارکننده و یک الگوریتم بهینه‌سازی، در هر فرکانس مجموعه‌ی بردارهای ویژه به‌گونه‌ای انتخاب می‌شوند که از جهش‌های ناگهانی جلوگیری شده و همواربودن تابع برازش شده برای المان‌های مختلف ماتریس تبدیل تضمین شود. الگوریتم پیشنهادی روی یک سیستم سه‌فاز کابل زیرزمینی و خط هوایی به‌منظور به دست آوردن ماتریس تبدیل پیاده‌سازی شده است. نتایج شبیه‌سازی حاکی از موثربودن الگوریتم به‌کاررفته در محاسبه‌ی ماتریس تبدیل به شکل هموار و با دقت خیلی بالا می‌باشد. همچنین این الگوریتم در شرایطی که نرخ نمونه برداری فرکانس کاهش یابد، همچنان دقت قابل‌توجهی را از خود نشان خواهد داد؛ به‌طوری که قابلیت ردیابی قابل‌قبولی را در نرخ‌های نمونه‌برداری پایین از خود نشان می‌دهد.

**واژه‌های کلیدی:** ماتریس تبدیل مدال، مدل خط انتقال، مقادیر ویژه، نیوتون-رافسون، لونبرگ-مارکوارت.

## A Method for the Calculation of Frequency-Dependent Transmission-Line Smooth Transformation Matrix

Ramin Zahmati<sup>1</sup>, M.Sc. Student; Reza Shariatinasab<sup>2</sup>, Associate Professor; Hossein Eliasi<sup>3</sup>, Assistant Professor

1- Faculty of Electrical and Computer Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran, Email: r.zahmati@birjand.ac.ir

2- Faculty of Electrical and Computer Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran, Email: shariatinasab@birjand.ac.ir

3- Faculty of Electrical and Computer Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran, Email: h\_eliasi@birjand.ac.ir

**Abstract:** Modeling of transmission lines for the analysis of electromagnetic transient behavior requires the calculation of a modal transformation matrix in a wide range of frequencies. In this paper, a comprehensive framework for smooth calculating the transformed matrix is presented. Accordingly, at each frequency, a general set for eigen vectors corresponding to each eigen value is computed. Then, on the basis of a smoothing criterion and an optimization algorithm, at each frequency the set of eigen vectors are chosen arbitrarily, avoiding sudden mutations and smoothing the fitted function for different elements. The conversion matrix is guaranteed. The proposed algorithm is implemented on an underground cable 3 phases system and overhead line in order to obtain a transformation matrix. The simulation results indicate the effectiveness of the algorithm used to calculate the transformation matrix in a very smooth and precise manner. Also, this algorithm will continue to show significant accuracy in a situation where the frequency sampling rate is reduced, so that it exhibits acceptable tracking capability at low sampling rates.

**Keywords:** Modal transformation matrix, transmission line model, eigen values, newton-raphson, levenberg-marquardt.

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۶/۱۱/۰۱

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۷/۰۴/۲۶ و ۱۳۹۷/۰۶/۲۳

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۷/۱۰/۰۳

نام نویسنده مسئول: رضا شریعتی‌نسب

نشانی نویسنده مسئول: دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران.

## ۱- مقدمه

مدل‌های ارائه‌شده جهت تحلیل رفتار پدیده‌های گذرا در خطوط هوایی و کابل‌های زیرزمینی را می‌توان به دو حوزه‌ی فاز [۳-۱] و مدال [۶-۴] تقسیم کرد که اکثریت آن‌ها براساس تئوری تجزیه مدال [۷] می‌باشند. در تئوری مدال با استفاده از ماتریس تبدیل مدال،  $n$  فاز وابسته می‌تواند به صورت  $n$  فاز جدا از هم تحلیل شود. ماتریس تبدیل در خطوط هوایی و کابل‌های زیرزمینی برابر با ماتریس بردارهای ویژه به دست آمده از ماتریس ثابت انتشار است. از آنجایی که ماتریس تبدیل یک ماتریس وابسته به فرکانس بوده و منحصر به فرد نمی‌باشد؛ در نتیجه محاسبه‌ی آن با استفاده از روش‌های رایج مانند روش QR [۸] باعث جهش‌های ناگهانی و ناپیوستگی ماتریس تبدیل در رنج فرکانسی مورد نظر می‌گردد. از طرفی محاسبه‌ی گذرا در حوزه زمان نیازمند تقریب پارامترهای مدال سیستم با استفاده از توابع شعاعی جهت محاسبه کانال‌شن عددی است [۹]؛ بنابراین بایستی ماتریس تبدیل به صورت هموار و پیوسته در رنج فرکانسی مورد نظر محاسبه گردد. همچنین مدل‌سازی چند مقیاسی برای خطوط چند فاز، نیازمند محاسبه‌ی ماتریس تبدیل به صورت هموار می‌باشد [۱۰]. دقت در محاسبه‌ی ماتریس تبدیل از اهمیت بالایی در محاسبه‌ی مدل گذرای خطوط انتقال برخوردار است و خطا در محاسبه‌ی آن سبب خطا در محاسبه‌ی ماتریس تابع انتشار می‌شود. اگرچه ماتریس تابع انتشار دارای ماهیتی نمایی است، اما کوچک‌ترین خطا در محاسبه‌ی آن سبب ناپایداری و خروج از شرایط پسیو بودن مدل خط می‌شود [۱۱].

روش‌های مختلفی جهت محاسبه‌ی ماتریس تبدیل به صورت یک تابع هموار ارائه شده است؛ که می‌توان آن‌ها را با توجه به نحوه حل مسئله به دو دسته‌ی محاسبه‌ی مستقیم و پس‌پردازش تقسیم نمود. در روش محاسبه‌ی مستقیم هر مقدار ویژه و بردار ویژه متناظر با آن در یک مرحله با استفاده از یک الگوریتم تکرار عددی محاسبه می‌گردد. در اولین فرکانس، ماتریس تبدیل به وسیله‌ی یکی از روش‌های مر سوم محاسبه می‌شود. سپس برای فرکانس‌های بعدی نقطه شروع برابر با جواب الگوریتم در مرحله قبلی در نظر گرفته خواهد شد. اولین روش ارائه شده در این زمینه براساس الگوریتم ژاکوبین اصلاح شده است [۱۴]. این روش برای کابل‌های زیرزمینی از دقت خوبی برخوردار است، اما برای خطوط هوایی علی‌الخصوص خطوط چند مداره دقت کافی ندارد. روش دیگر در این زمینه، محاسبه‌ی ماتریس تبدیل با استفاده از الگوریتم نیوتون-رافسون<sup>۱</sup> (NR) می‌باشد؛ که علاوه بر کابل‌های زیرزمینی در خطوط هوایی چند مداره نیز قابل استفاده است [۱۲]. این روش در مدل خط وابسته به فرکانس در نرم‌افزار PSCAD/EMTDC به کار گرفته شده است. همگرایی این الگوریتم شدیداً وابسته به نقطه شروع می‌باشد؛ بنابراین افزایش فاصله بین فرکانس‌های متوالی باعث عدم همگرایی الگوریتم خواهد شد. در نتیجه بایستی تعداد نقاط در محدوده‌ی فرکانسی مورد نظر آن قدر زیاد گردد تا همگرایی الگوریتم را در تمامی فرکانس‌ها تضمین نماید. در [۱۳] با تبدیل مجموعه معادلات غیرخطی محاسبه‌ی ماتریس تبدیل به یک

مسئله بهینه‌سازی، آن را با استفاده از روش برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی<sup>۲</sup> (SQP) حل می‌نماید. این روش در فواصل فرکانسی بزرگ‌تر نسبت به روش NR قابل استفاده است. البته روش SQP به شدت نسبت به مقیاس‌بندی ماتریس ثابت انتشار حساس بوده و در روند محاسبات برای بسیاری از پیکربندی‌های کابل‌های زیرزمینی دچار ناپایداری عددی خواهد شد. آخرین روش ارائه‌شده در این زمینه بر اساس الگوریتم لونبرگ-مارکوارت<sup>۳</sup> (LM) است [۱۴]. این روش در مقایسه با روش NR همگرایی قوی‌تر، دقت بالاتر در حل مسئله و حساسیت کمتری نسبت به حدس اولیه دارد. در نتیجه با افزایش فاصله‌ی بین فرکانس‌های متوالی برخلاف روش NR همگرا خواهد شد. با توجه به اینکه ماتریس تبدیل در هر فرکانس منحصر به فرد نمی‌باشد، در نتیجه جواب نهایی با استفاده از هر یک از الگوریتم‌های ارائه‌شده در این دسته‌بندی وابسته به حدس اولیه (نقطه‌ی شروع) بوده و این الگوریتم‌ها با رسیدن به اولین جواب همگرا خواهند شد. در این روش‌ها هیچ تضمینی جهت محاسبه‌ی ماتریس تبدیل به صورت یک تابع هموار و پیوسته وجود ندارد. به خصوص زمانی که فاصله بین فرکانس‌های متوالی زیاد گردد؛ در این حالت اگر چه الگوریتم‌های اخیر همگرایی مسئله را تا حدی تضمین می‌نماید، اما در محاسبه‌ی ماتریس تبدیل دچار ناپیوستگی و جهش ناگهانی خواهند شد.

در روش پس‌پردازش ابتدا ماتریس تبدیل به وسیله‌ی یکی از روش‌های مر سوم (مانند روش QR) محاسبه می‌گردد. سپس با محاسبه‌ی مجدد و اصلاح ماتریس تبدیل به دست آمده، پیوستگی آن را در رنج فرکانسی مورد نظر حفظ می‌نماید. اولین روش ارائه‌شده در این زمینه با مقیاسه‌ی ضرب داخلی<sup>۴</sup> (IPC) دو ماتریس بردار ویژه به دست آمده در فرکانس مورد نظر و فرکانس قبلی، جابه‌جایی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی متناظر با آن‌ها را تشخیص می‌دهد [۱۲]. در [۱۵] برای تشخیص جابه‌جایی مقادیر ویژه از مقیاسه‌ی نرم بردارهای ویژه در فرکانس‌های متوالی استفاده می‌شود. سپس جابه‌جایی‌های تشخیص داده شده، برطرف می‌گردد. الگوریتم‌های ارائه‌شده در [۱۲] و [۱۵] جابه‌جایی مقادیر ویژه را به خوبی رفع می‌نمایند، اما ماتریس تبدیل در هر فرکانس به صورت جداگانه و بدون در نظر گرفتن مقدار آن در فرکانس قبلی محاسبه می‌گردد؛ که با توجه به منحصر به فرد نبودن بردار ویژه، این روش‌ها دچار ناپیوستگی و جهش ناگهانی در محاسبه‌ی ماتریس تبدیل خواهند شد.

در آخرین مطالعه‌ی انجام‌شده در این دسته‌بندی، ابتدا ماتریس بردارهای ویژه در فرکانس فعلی با استفاده از یک روش مرسوم محاسبه می‌گردد. در ادامه، فضای برداری حاصل از اجتماع فضاهای برداری ایجاد شده به وسیله‌ی اسپن هر یک از بردارهای ویژه در فرکانس فعلی محاسبه می‌شود. سپس متناظر با هر بردار ویژه در فرکانس قبلی، نزدیک‌ترین بردار ویژه در این فضای برداری انتخاب می‌گردد. به این ترتیب، برای هر بردار ویژه در فرکانس قبلی، وابسته خطی یکی از بردارهای ویژه در فرکانس فعلی که در ابتدا محاسبه شده است، انتخاب

پیشنهادی از لحاظ دقت محاسبه‌ی بردارهای ویژه و قابلیت ردیابی آن در کابل‌های زیرزمینی و خطوط هوایی برای حالت‌های مختلف نشان داده می‌شود. در حالی که روش‌های دیگر مانند NR و LM در رسیدن به اهداف فوق ناتوان هستند.

## ۲- محاسبه‌ی ماتریس تبدیل مدال

### ۲-۱- مدل خط انتقال در حوزه فاز

در حوزه‌ی فرکانس بردار ولتاژ و جریان در طول خط انتقال با  $n$  هادی، بر اساس معادلات دیفرانسیلی مرتبه‌ی دوم طبق روابط (۱) و (۲) توصیف می‌گردد [۱۷].

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \mathbf{ZY}V \quad (1)$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = \mathbf{YZ}I \quad (2)$$

که در این روابط  $V$  و  $I$  به ترتیب بردار ولتاژ هادی‌ها نسبت به زمین و بردار جریان هادی‌ها در فاصله‌ی  $x$  از سر فرستنده خط است.  $\mathbf{Y}$  و  $\mathbf{Z}$  نیز به ترتیب ماتریس‌های  $n \times n$  امپدانس سری و ادمیتانس شنت می‌باشد؛ که نحوه‌ی محاسبه‌ی آن‌ها در [۱۸، ۱۵] تشریح گردیده است. امپدانس برگشتی زمین نیز با فرض همگن و نیمه‌بی‌نهایت بودن آن بر اساس [۱۹، ۲۰] محاسبه شده است.

رابطه‌ی (۱) شامل  $n$  معادله‌ی وابسته به هم است، که می‌توان با استفاده از ماتریس تبدیل (ماتریس بردارهای ویژه‌ی ماتریس  $\mathbf{ZY}$ ) آن را به  $n$  معادله‌ی مستقل تبدیل نمود. به این علت که ماتریس‌های  $\mathbf{Z}$  و  $\mathbf{Y}$  متقارن هستند، در نتیجه مقادیر ویژه  $\mathbf{ZY}$  و  $\mathbf{YZ}$  برابر بوده و در صورتی که بردارهای ویژه  $\mathbf{ZY}$  و  $\mathbf{YZ}$  به ترتیب  $\mathbf{T}_V$  و  $\mathbf{T}_I$  نام‌گذاری گردد، خواهیم داشت:

$$\mathbf{T}_I' = \mathbf{T}_V^{-1} \quad (3)$$

در نتیجه ماتریس تبدیل به دست آمده از  $\mathbf{ZY}$  را می‌توان به عنوان ماتریس تبدیل برای رابطه‌ی (۲) نیز استفاده نمود [۲۱]. از طرفی با تعریف ماتریس ثابت انتشار در حوزه فاز ( $\mathbf{\Gamma}$ )، ماتریس ثابت انتشار، ثابت میرایی و سرعت انتشار در حوزه مدال به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\mathbf{\Gamma} = \sqrt{\mathbf{ZY}} \quad (4)$$

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{\gamma} \mathbf{T}_V \quad (5)$$

$$\gamma_i = \alpha_i + \beta_i \quad (6)$$

$$v_i = \frac{\omega}{\beta_i} \quad (7)$$

که در مد  $i$  ام،  $\gamma_i$  ثابت انتشار مدال،  $\alpha_i$  ثابت میرایی،  $\beta_i$  ثابت فاز و  $v_i$  سرعت انتشار است. با حل مستقیم معادلات (۱) و (۲)، مدل خط انتقال در حوزه‌ی فاز با استفاده از روابط (۸) و (۹) توصیف می‌گردد.

خواهد شد [۱۶]. فضای برداری ایجاد شده با استفاده از این روش برای انتخاب بردار ویژه در فرکانس فعلی، فضای برداری محدودی است. این در حالی است که بردار ویژه متناظر با هر مقدار ویژه منحصر به فرد نمی‌باشد، به طوری که می‌توان برای یک مقدار ویژه مجموعه‌ی از بردارهای ویژه مستقل خطی به دست آورد و اسپین هر یک از آن‌ها می‌تواند یک جواب مسئله باشد و این فضای جواب بزرگ‌تری را ایجاد خواهد کرد.

محدود بودن این فضای برداری می‌تواند منجر به انتخاب بردار ویژه در فرکانس فعلی گردد، که باعث ناهموار شدن ماتریس تبدیل می‌شود. همان‌طور که در [۱۶] نشان داده شده است، ماتریس تبدیل به دست آمده از این روش دارای ناپیوستگی و شکستگی می‌باشد. برای رفع این مشکل، فضای برداری ایجاد شده به وسیله اسپین هر یک از بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه نزدیک به هم را با فضای برداری ایجاد شده از اسپین بردارهای ویژه متناظر با همان مقادیر ویژه در فرکانس قبلی تقریب می‌زند؛ که این روش نیز باعث ایجاد خطا در محاسبه‌ی ماتریس تبدیل خواهد شد.

در این مقاله یک روش جدید جهت محاسبه‌ی ماتریس تبدیل به صورت یک تابع پیوسته و هموار برای خطوط هوایی و کابل‌های زیرزمینی ارائه شده است. در روش پیشنهادی جهت رفع مشکل جابه‌جایی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر با آن ابتدا با استفاده از روش IPC مقادیر ویژه به صورت پیوسته محاسبه می‌شود. سپس با حل معادلات حقیقی و خطی، مجموعه بردارهای ویژه برای هر مقدار ویژه محاسبه می‌گردد. در ادامه با استفاده از یک الگوریتم بهینه‌سازی هو شمند، مناسب‌ترین بردار ویژه جهت پیوسته و هموار بودن ماتریس تبدیل برای هر مقدار ویژه در هر فرکانس انتخاب خواهد شد.

در اکثر روش‌های محاسبه‌ی ماتریس تبدیل، برای حفظ پیوستگی ماتریس، تنها در حوالی جواب فرکانس قبلی به دنبال حل مسئله هستند. این مسئله باعث کاهش دقت و خطا در محاسبه‌ی ماتریس تبدیل به خصوص زمانی که فاصله‌ی بین فرکانس‌های متوالی بیشتر است می‌گردد؛ که این مسئله باعث خروج از شرایط پسیبودن در مدل خط، به خصوص در نرخ‌های پایین نمونه برداری می‌شود.

دقت محاسبه‌ی ماتریس تبدیل در روش پیشنهادی وابسته به نرخ نمونه برداری نمی‌باشد و روش ارائه شده می‌تواند با حل مستقیم معادلات مقدار ویژه، ماتریس تبدیل را با توجه به معیارهای معرفی شده بسیار دقیق‌تر از سایر روش‌ها محاسبه کند که در آن‌ها دقت محاسبه به نرخ نمونه برداری وابسته است.

مزیت دیگر روش پیشنهادی، محاسبه‌ی ماتریس تبدیل به هموارترین شکل با کمترین نرخ نمونه برداری فرکانسی است که در آن ماتریس تبدیل با انتخاب بهترین بردار ویژه از میان تمامی بردارهای ویژه ممکن با استفاده از یک الگوریتم بهینه‌سازی محاسبه می‌شود. علاوه بر این روش پیشنهادی می‌تواند قطری بودن ماتریس مقادیر ویژه را برخلاف دیگر روش‌ها تضمین کند. در این مقاله توانمندی روش

$$\mathbf{P}_R X_I - \mathbf{P}_I X_R - (\lambda_R X_I - \lambda_I X_R) = 0 \quad (21)$$

روابط (۲۰) و (۲۱) را می‌توان به صورت یک معادله‌ی ماتریسی بازنویسی نمود.

$$\mathbf{P}_C X_C - \lambda_C X_C = 0 \quad (22)$$

که در رابطه‌ی فوق

$$\mathbf{P}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_R & -\mathbf{P}_I \\ \mathbf{P}_I & \mathbf{P}_R \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$X_C = \begin{bmatrix} X_R \\ X_I \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\lambda_C = \begin{bmatrix} \lambda_R \mathbf{I} & -\lambda_I \mathbf{I} \\ \lambda_I \mathbf{I} & \lambda_R \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (25)$$

که  $\mathbf{I}$  ماتریس همانی،  $\mathbf{P}_C$  و  $\lambda_C$  ماتریس‌های حقیقی با ابعاد  $2n \times 2n$  و  $X_C$  برداری دارای  $2n$  مجهول است. رابطه‌ی (۲۲) شامل  $2n$  معادله و  $2n+2$  مجهول می‌باشد که با حل این دستگاه معادلات حقیقی می‌توان مقدار ویژه غالب و بردار ویژه متناظر با آن را برای ماتریس  $\mathbf{P}$  محاسبه نمود. اگر در هر فرکانس، صرفاً به حل معادله‌ی (۱۵) پرداخته شود و در به دست آوردن پاسخ در هر فرکانس به پاسخ‌های به دست آمده در فرکانس‌های قبلی توجه نگردد؛ همواربودن ماتریس تبدیل دچار مشکل خواهد شد. لذا لازم است به نوعی برای به دست آوردن پاسخ معادله‌ی (۱۵) در هر فرکانس، پاسخ این معادله در فرکانس‌های قبلی به منظور همواربودن ماتریس تبدیل، مدنظر قرار گیرد.

### ۲-۳- روش پیشنهادی

در روش پیشنهادی بردارهای ویژه ماتریس  $\mathbf{P}$  به صورت پس پردازش محاسبه می‌گردد. در این روش همان طور که در فلوچارت شکل ۱ نشان داده شده است، در اولین فرکانس، ماتریس تبدیل به وسیله‌ی یکی از الگوریتم‌های رایج محاسبه‌ی بردار ویژه به دست می‌آید. مانند دیگر روش‌ها در این دسته‌بندی برای فرکانس‌های بعدی ابتدا ماتریس بردارهای ویژه توسط یک روش رایج محاسبه می‌گردد؛ سپس با استفاده از روش IPC ارائه شده در [۱۲] (تشریح شده در پیوست الف) جابه‌جایی مقادیر ویژه بررسی خواهد شد. پس از حل مشکل جابه‌جایی مقادیر ویژه و اطمینان از پیوسته‌بودن آن‌ها برای هر مقدار ویژه، مجموعه‌ی بردارهای ویژه متناظر با آن محاسبه می‌شود. در نهایت با استفاده از یک الگوریتم بهینه‌سازی هوشمند بهترین جواب جهت پیوسته و همواربودن ماتریس تبدیل انتخاب می‌گردد. این مرحله برای همه‌ی مقادیر ویژه ماتریس  $\mathbf{P}$  در هر فرکانس تکرار خواهد شد.

مدل‌سازی گذرای خطوط هوایی و کابل‌های زیرزمینی نیازمند محاسبه‌ی مدهای ماتریس تابع انتشار با استفاده از ماتریس تبدیل است. ماتریس تبدیل در مدل گذرای خطوط هوایی و کابل زیرزمینی برابر با

$$\mathbf{Y}_c V_k - I_{km} = [\mathbf{Y}_c V_m - I_{mk}] \mathbf{H} \quad (8)$$

$$\mathbf{Y}_c V_m - I_{mk} = [\mathbf{Y}_c V_k - I_{km}] \mathbf{H} \quad (9)$$

که در روابط فوق

$$\mathbf{Y}_c = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{\Gamma} \quad (10)$$

$$\mathbf{H} = \exp(-\mathbf{\Gamma} l) \quad (11)$$

در روابط (۸) و (۹) اندیس‌های  $k$  و  $m$  نشان دهنده‌ی دو انتهای خط،  $\mathbf{H}$  ماتریس انتشار،  $\mathbf{Y}_c$  ادمیتانس مشخصه خط و  $l$  طول خط انتقال می‌باشد. با استفاده از ماتریس تبدیل، پارامترهای مدال سیستم برابر است با:

$$\mathbf{H}^{\text{mod}} = \mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{H} \mathbf{T}_V = \exp(-\gamma l) \quad (12)$$

$$\mathbf{Y}_c^{\text{mod}} = \mathbf{T}_I^{-1} \mathbf{Y}_c \mathbf{T}_I \quad (13)$$

پاسخ زمانی سیستم را می‌توان به طور مستقیم با استفاده از عکس تبدیل فوریه محاسبه نمود [۲۲]. همچنین به منظور کاهش زمان محاسبات، پارامترهای سیستم به وسیله‌ی بسط‌های کسری جزئی ماتریسی<sup>۵</sup> (MPFE) تقریب زده می‌شوند [۲۳]؛ بنابراین جهت دست یابی به یک تقریب مناسب بایستی ماتریس تبدیل و پارامترهای سیستم در حوزه مدال به صورت پیوسته و هموار محاسبه گردد.

### ۲-۲- مسئله‌ی مقادیر ویژه

جهت انتقال پارامترهای سیستم به حوزه‌ی مدال ابتدا بایستی ماتریس‌های تبدیل  $\mathbf{T}_I$  و  $\mathbf{T}_V$  محاسبه گردد که برای متغیرهای ولتاژ و  $\mathbf{T}_I$  برای متغیرهای جریان به کار گرفته می‌شوند. طبق رابطه‌ی (۳) با استفاده از  $\mathbf{T}_I$  می‌توان ماتریس تبدیل  $\mathbf{T}_V$  را محاسبه نمود؛ بنابراین تنها بایستی ماتریس تبدیل  $\mathbf{T}_V$  را با محاسبه‌ی بردارهای ویژه  $\mathbf{Z}\mathbf{Y}$  به دست آورد. جهت محاسبه‌ی  $\mathbf{T}_V$  با تعریف ماتریس  $\mathbf{P}$  به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Z}\mathbf{Y} \quad (14)$$

$$\mathbf{P}\mathbf{X} - \lambda\mathbf{X} = 0 \quad (15)$$

که در رابطه‌ی (۱۵) اگر بردار  $\mathbf{X}$  مخالف صفر باشد، آنگاه  $\lambda$  مقدار ویژه و  $\mathbf{X}$  بردار ویژه ماتریس  $\mathbf{P}$  خواهد بود. این رابطه شامل  $n$  معادله و  $n+1$  مجهول است که با استفاده از تعاریف زیر می‌توان آن را به  $2n$  معادله‌ی حقیقی تبدیل نمود:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_R + j\mathbf{P}_I \quad (16)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_R + j\mathbf{X}_I \quad (17)$$

$$\lambda = \lambda_R + j\lambda_I \quad (18)$$

با جای گذاری روابط (۱۶) تا (۱۸) در رابطه‌ی (۱۵) خواهیم داشت:

$$(\mathbf{P}_R + j\mathbf{P}_I)(\mathbf{X}_R + j\mathbf{X}_I) - (\lambda_R + j\lambda_I)(\mathbf{X}_R + j\mathbf{X}_I) = 0 \quad (19)$$

با تجزیه بخش حقیقی و موهومی رابطه‌ی (۲۰) خواهیم داشت:

$$\mathbf{P}_R \mathbf{X}_R - \mathbf{P}_I \mathbf{X}_I - (\lambda_R \mathbf{X}_R - \lambda_I \mathbf{X}_I) = 0 \quad (20)$$

نزدیک به هم باشد؛ رتبه‌ی ماتریس  $(P - \lambda I)$  برابر با  $n-m$  خواهد بود. می‌توان رابطه (۱۵) را با استفاده از  $n-m$  معادله بازنویسی نمود.

رابطه‌ی (۲۲) که با تفکیک بخش حقیقی و موهومی رابطه‌ی (۱۵) به‌دست آمده است، دارای  $2n$  معادله می‌باشد. در نتیجه مرتبه‌ی ماتریس ضرایب آن برای  $m$  مقدار ویژه نزدیک به هم برابر با  $2n-2m$  است. رابطه‌ی (۲۲) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی نمود:

$$AX_C = 0 \quad (27)$$

که در آن

$$A = (P_C - \lambda_C) \quad (28)$$

جهت حل دستگاه معادلات (۲۷) می‌توان ماتریس  $A$  را با جمع ضرایب هر سطر با سطرهای دیگر به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل نمود که این ماتریس، ماتریس  $A_T$  نامیده می‌شود. با توجه به این که رتبه‌ی ماتریس  $A$ ،  $2n-2m$  است، انتظار می‌رود ماتریس بالا مثلثی  $A_T$  در مجموع دارای  $2m$  سطر یا ستون صفر باشد. اگر تنها  $2m$  سطر آخر ماتریس  $A_T$  صفر شوند و مؤلفه‌های روی قطر اصلی در سطرهای دیگر غیر صفر باشند، آنگاه  $2m$  المان آخر بردار  $X_C$  را می‌توان به‌طور دلخواه انتخاب نمود و به‌وسیله‌ی معادله‌ی  $s = 2n - 2m - 1$ ، المان  $s$  ام بردار  $X_C$  و همچنین با استفاده از معادله‌ی سطر  $s-1$ ، مؤلفه‌ی  $s-1$  ام بردار  $X_C$  را محاسبه نمود. این روند تا محاسبه‌ی تمامی المان‌های بردار  $X_C$  ادامه خواهد داشت. در نتیجه به‌ازای هر مقدار دلخواهی که برای هر یک از  $2m$  المان آخر بردار  $X_C$  انتخاب می‌گردد، یک بردار ویژه برای مقدار ویژه  $\lambda$  به‌دست می‌آید. اجتماع زیر فضاهای اسپین شده به وسیله هر یک از بردارهای ویژه به‌دست آمده، مجموعه جواب مسئله برای مقدار ویژه  $\lambda$  است.

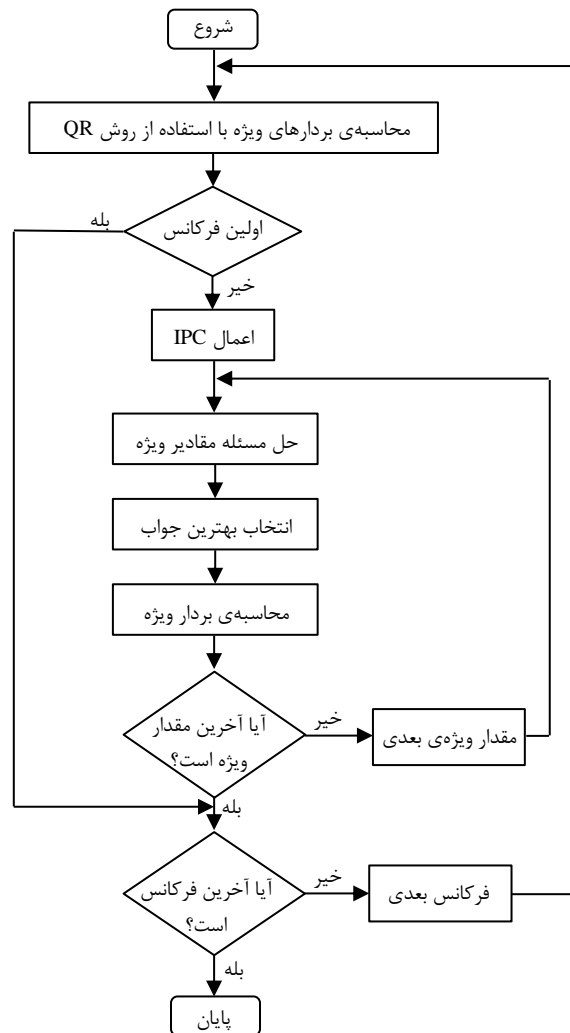
در صورت استفاده از الگوریتم‌های رایج در فرآیند بالامثلثی کردن ماتریس  $A$ ، ممکن است ستونی غیر از ستون آخر یا سطری از سطرهای ۱ تا  $s$  ماتریس  $A_T$  یا مؤلفه‌های روی قطر اصلی در این سطرها صفر گردد. در این شرایط نمی‌توان از روش فوق برای حل مسئله‌ی مقادیر ویژه استفاده کرد. جهت جلوگیری از بروز این مشکل، فرآیند بالا مثلثی کردن ماتریس  $A$  بایستی طبق مراحل زیر انجام شود.

گام اول) هر سطر ماتریس  $A$  که نشان‌دهنده‌ی یک معادله است، در ابتدا نرمالیزه شود.

گام دوم) در بالامثلثی کردن سطر  $z$  ام بزرگ‌ترین مؤلفه از لحاظ اندازه در سطرهای  $z$  تا  $2n$  انتخاب گردد؛ سپس با جابه‌جایی سطر و ستون، این مؤلفه در سطر و ستون  $z$  ام ماتریس  $A_T$  قرار گیرد. گام سوم) متناظر با جابه‌جایی صورت‌گرفته در ستون‌های ماتریس  $A_T$ ، مؤلفه‌های متناظر با آن‌ها در بردار  $X_C$  نیز جابه‌جا گردد.

گام چهارم) با جمع مضربی از سطر  $z$  ام با هر یک از سطرهای پایین آن، تمامی مؤلفه‌های  $z$  ام این سطرها صفر شود و این فرآیند برای تمامی سطرهای ماتریس  $A$  تکرار شود.

ماتریس مقادیر ویژه‌ی ماتریس  $P$  است. بنابراین نحوه‌ی محاسبه‌ی ماتریس تبدیل در خطوط هوایی و کابل‌های زیرزمینی مشابه خواهد بود. از این روش پیشنهادی در کابل‌های زیرزمینی و خطوط هوایی قابل-استفاده می‌باشد. در بخش‌های بعدی نحوه‌ی حل مسئله و انتخاب بهترین جواب تشریح شده است.



شکل ۱: فلوچارت روش پیشنهادی

### ۲-۳-۱- حل مسئله مقادیر ویژه

پس از محاسبه‌ی مقادیر ویژه و اطمینان از پیوستگی آن با استفاده از روش IPC، با معلوم بودن مقدار ویژه  $\lambda$ ، مجهولات رابطه‌ی (۱۵) تنها  $n$  مؤلفه‌ی بردار ویژه خواهد بود. در این حالت مسئله مقدار ویژه به یک دستگاه معادلات خطی تبدیل می‌گردد. برای هر مقدار ویژه خواهیم داشت:

$$\det(P - \lambda I) = 0 \quad (26)$$

طبق رابطه‌ی (۲۶) رتبه‌ی ماتریس ضرایب  $(P - \lambda I)$  کوچک‌تر از  $n$  می‌باشد؛ بنابراین دستگاه معادلات رابطه‌ی (۱۵) حداکثر دارای  $n-1$  معادله مستقل است. در صورتی که ماتریس  $P$  دارای  $m$  مقدار ویژه‌ی



داشته باشند. همچنین افزایش فواصل بین فرکانس‌های متوالی باعث ایجاد شکستگی در بردارهای ویژه می‌گردد. در این شرایط، به این علت که هدف رابطه (۳۱) نزدیک شدن به جواب در فرکانس قبلی می‌باشد، جهش‌های ناگهانی و شکستگی ماتریس تبدیل ایجاد می‌شود. همچنین در صورتی که همانند سایر روش‌هایی که تاکنون ارائه شده است، تنها یک فرکانس قبلی جهت دستیابی به بردار ویژه‌ی هموار در تابع هدف در نظر گرفته شود، شکستگی در منحنی قابل تشخیص نمی‌باشد. از این‌رو، لازم است رابطه‌ی (۳۱) به شکل زیر تصحیح شود:

$$W = X_C^{opt} - X_C^n \quad (32)$$

که در رابطه فوق

$$X_C^{opt} = 2X_C^{n-1} - X_C^{n-2} \quad (33)$$

در رابطه‌ی (۳۳)، بردار  $X_C$  در فرکانس  $n-2$  است. تصحیح رابطه‌ی  $W$  به فرم رابطه‌ی (۳۲) باعث هموارتر شدن ماتریس تبدیل خواهد شد. با استفاده از رابطه‌ی (۳۲) در تابع هدف الگوریتم بهینه‌سازی، اختلاف نرخ تغییرات مقدار مؤلفه‌های بردار ویژه کمینه می‌شود که این امر از بروز شکستگی در منحنی مؤلفه‌های بردار ویژه جلوگیری خواهد نمود.

به هم نزدیک شدن مقادیر ویژه در فرکانس‌های بالا باعث می‌شود که بردارهای ویژه‌ی متناظر با این مقادیر ویژه از استقلال خطی کمتری برخوردار باشند و همین موضوع منجر به غیرقطری شدن ماتریس  $\gamma$  می‌شود. برای رفع این مشکل با دستی بردارهای ویژه‌ی مقادیر ویژه‌ی نزدیک به هم مستقر خطی باشند [۱۵]. بدین منظور در روش پیشنهادی، یک قید در مرحله‌ی تولید جمعیت اولیه و تولید جمعیت جدید در فرآیند بهینه‌سازی در نظر گرفته شده است تا شرایط مستقل خطی بودن بردارهای ویژه‌ی متناظر با مقادیر ویژه‌ی نزدیک به هم را فراهم کند. بدین صورت که اگر بردار ویژه‌ی ایجاد شده توسط ذره‌ای در جمعیت تولید شده، نسبت به دیگر بردارهای ویژه‌ی به دست آمده در آن فرکانس وابسته خطی باشد، آن ذره حذف و ذره‌ی دیگر به صورت تصادفی انتخاب می‌شود و جایگزین آن می‌گردد تا شرط استقلال خطی بردارهای ویژه برآورده شود. به عبارت دیگر قطری شدن ماتریس ثابت انتشار مدال یک قید برای مسئله‌ی بهینه‌سازی می‌باشد که جواب‌داستن مسئله بهینه‌سازی مستلزم برآورده شدن قیود حاکم بر مسئله از جمله قید قطری شدن ماتریس ثابت انتشار مدال است. با توجه به اینکه مسئله‌ی بهینه‌سازی دارای جواب است، لذا قطری شدن ماتریس ثابت انتشار مدال با استفاده از روش پیشنهادی تضمین خواهد شد.

جهت تشریح بهتر روش پیشنهادی، یک مثال عددی در بخش پیوست‌ها آورده شده است. همچنین تضمین دقت روش پیشنهادی، هموار بودن ماتریس تبدیل و قطری بودن ماتریس ثابت انتشار مدال در قالب یک قضیه در بخش پیوست‌ها اثبات شده است.

طبق مراحل فوق مؤلفه‌های روی قطر اصلی ماتریس  $A_T$  در سطرهای ۱ تا  $s$  صفر نخواهد شد. همچنین این روش منجر به صفر شدن  $2m$  سطر آخر این ماتریس می‌گردد.

از آنجایی که مسئله‌ی مقادیر ویژه به صورت عددی حل می‌شود، ممکن است،  $2m$  سطر آخر ماتریس  $A_T$  دقیقاً برابر با صفر نباشند. لذا پارامتر  $\varepsilon$  جهت دقت محاسبات در نظر گرفته می‌شود، به طوری که اگر مؤلفه‌ی کمتر از مقدار این پارامتر باشد، این مؤلفه صفر در نظر گرفته می‌شود. مقدار  $\varepsilon$  در این مقاله برابر  $10^{-14}$  می‌باشد. براساس فرآیند مطرح شده در این بخش می‌توان رابطه‌ی (۲۷) را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$A_T X_C' = 0 \quad (29)$$

که در آن  $X_C'$  از جابه‌جایی مؤلفه‌های بردار  $X_C$  طبق مراحل تشریح شده به دست می‌آید.

### ۲-۳-۲- انتخاب بهترین جواب

پس از محاسبه‌ی ماتریس  $A_T$ ،  $2m$  متغیر مینا به دست خواهد آمد که می‌توان با اختیار هر مقدار دلخواهی، یک بردار ویژه متناظر با  $\lambda$  محاسبه نمود. متغیرهای مینا بایستی به گونه‌ای مقادیردهی شوند که ماتریس تبدیل به صورت پیوسته‌ترین و هموارترین حالت ممکن به دست آید. برای رسیدن به این هدف می‌توان از یک الگوریتم بهینه‌سازی هوشمند استفاده کرد. در این مقاله از الگوریتم ازدحام ذرات (PSO) استفاده شده است که در [۲۴] نحوه‌ی پیدا کردن پاسخ بهینه در الگوریتم PSO تشریح شده است. در این الگوریتم مجهولات مقادیر متغیرهای مینا و هدف بهینه‌سازی پیوستگی و هموار بودن ماتریس تبدیل است.

جمعیت اولیه‌ی در الگوریتم تکاملی برای  $2m$  متغیر مینا در بازه ۱- تا ۱ تولید می‌گردد. سپس برای هر ذره، بردار  $X_C$  محاسبه می‌شود. جهت نرمال بودن بردار ویژه و کاهش فضای جستجوی مسئله، جمعیت تولید شده پیش از برآزش نرمالیزه می‌گردد. به منظور هموار بودن ماتریس تبدیل، تابع هدف در فرکانس  $n$  ام را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$f = W^T W \quad (30)$$

به طوری که

$$W = X_C^n - X_C^{n-1} \quad (31)$$

در رابطه (۳۱)،  $X_C^n$  و  $X_C^{n-1}$  به ترتیب بردار  $X_C$  در فرکانس‌های  $n$  و  $n-1$  است. هدف تابع برآزش ( $f$ )، حفظ روند تغییرات بردار  $X_C$  در فرکانس‌های متوالی است.

مقادیر ویژه برای کابل‌های زیرزمینی دارای غلاف در فرکانس‌های بالا و همچنین برای هادی‌های متقارن یا ترنسپوز شده، نزدیک به هم خواهند شد. در این حالت بردارهای ویژه‌ی متناظر با مقادیر ویژه نزدیک به هم، به تغییرات ماتریس  $P$  حساس می‌شوند [۱۶، ۲۵]؛ که در این حالت ممکن است مؤلفه‌های این بردارهای ویژه جهش‌های ناگهانی

### ۳- نتایج عددی

در این بخش ماتریس تبدیل و پارامترهای مدال برای سیستم کابل زیرزمینی سه فاز دارای غلاف و خط هوایی دو مداره محاسبه و با روش‌های LM و NR مقایسه شود. همچنین عملکرد این الگوریتم‌ها از لحاظ دقت در محاسبات و توانایی آن‌ها در ردیابی، جهت به‌دست‌آوردن ماتریس تبدیل به‌صورت یک تابع هموار و پیوسته، مورد بررسی قرار گرفته است. کلیه‌ی مطالعات انجام شده در این بخش در رنج فرکانسی ۰/۱ تا ۱۰<sup>۹</sup> هرتز است.

#### ۳-۱- ماتریس تبدیل کابل زیرزمینی

در این بخش ابتدا مقادیر ویژه برای سیستم سه فاز کابل زیرزمینی (که مشخصات آن در بخش پیوسته‌ها ارائه شده است) با استفاده از الگوریتم پیشنهادی محاسبه می‌شود. سپس با استفاده از این مقادیر ویژه به‌دست‌آمده در هر فرکانس، ثابت میرایی مدال و سرعت انتشار موج کابل زیرزمینی در همان فرکانس تعیین می‌گردد.

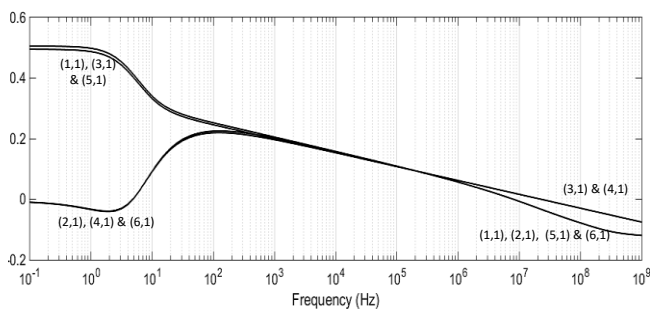
شکل‌های ۲ و ۳ به ترتیب ثابت میرایی و سرعت انتشار شش مدال سیستم کابل زیرزمینی را نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، منحنی‌ها کاملاً پیوسته بوده که نشان دهنده‌ی پیوستگی مقادیر ویژه به‌دست‌آمده با استفاده از این روش است. همچنین با استفاده از این روش سوئیچ‌زنی بین مقادیر ویژه مشاهده نمی‌گردد. همان‌طور که در بخش ۲-۳-۲ اشاره گردید، در فرکانس‌های بالا با کامل شدن حفاظت غلاف فلزی، مقادیر ویژه مربوط به مدهای غلاف داخلی و مد برگشتی زمین به یکدیگر نزدیک می‌شوند. در این مطالعه این مدها را به ترتیب با شماره‌های ۴، ۵ و ۶ مشخص شده‌اند.

#### شکل ۳: سرعت انتشار موج کابل زیرزمینی با استفاده از روش

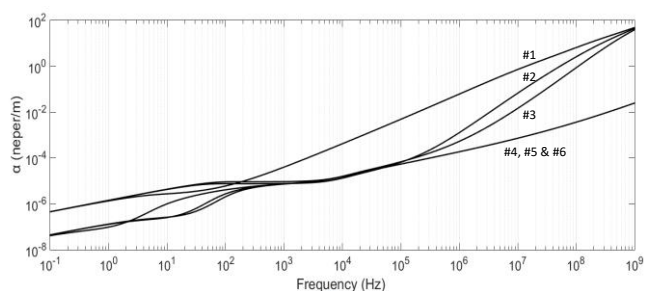
##### پیشنهادی

پس از محاسبه‌ی مقادیر ویژه به‌صورت پیوسته می‌توان بردارهای ویژه‌ی متناظر با آن‌ها را محاسبه نمود. شکل‌های ۴ و ۵ بخش حقیقی و موهومی ستون اول ماتریس تبدیل، متناظر با اولین مقدار ویژه و شکل-های ۶ و ۷ بخش حقیقی و موهومی ستون چهارم ماتریس تبدیل، متناظر با چهارمین مقدار ویژه را نشان می‌دهند. لازم به ذکر است که نرخ نمونه‌برداری در محاسبه‌ی ماتریس تبدیل با استفاده از روش پیشنهادی، ۱۰ points/decade می‌باشد.

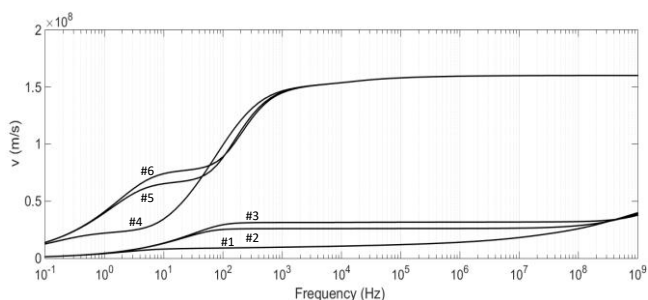
دیگر ستون‌های ماتریس تبدیل به‌دست‌آمده با استفاده از روش پیشنهادی به‌همین شکل پیوسته هستند. پیوستگی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی متناظر با آن باعث می‌گردد، کلیه‌ی پارامترهای مدال سیستم نیز به شکل پیوسته با شند. رفتار بی‌شتر المان‌های ماتریس تبدیل در فرکانس‌های مختلف، یا تقریباً برهم منطبق بوده یا در یک علامت منفی با یکدیگر تفاوت دارند. این ویژگی باعث کاهش محاسبات در تقریب ماتریس تبدیل به‌وسیله‌ی توابع شعاعی خواهد شد. همان‌طور که در [۱۶، ۲۵] اشاره شده است، انتظار می‌رود نزدیک شدن مقادیر ویژه به یکدیگر منجر به حساس تر شدن تغییرات بردارهای ویژه‌ی متناظر با آن‌ها نسبت به تغییرات ماتریس P شود. با استفاده از روش پیشنهادی، یکسان شدن مقادیر ویژه باعث بیشتر شدن متغیرهای مبنا در رابطه‌ی (۲۹) خواهد شد. از آنجایی که متغیرهای مبنا همان متغیرهای تصمیم‌گیری الگوریتم بهینه‌سازی می‌باشد؛ با افزایش تعداد متغیرهای مبنا، الگوریتم بهینه‌سازی بهتر می‌تواند به هدف خود که هموار کردن ماتریس تبدیل است، دست یابد.

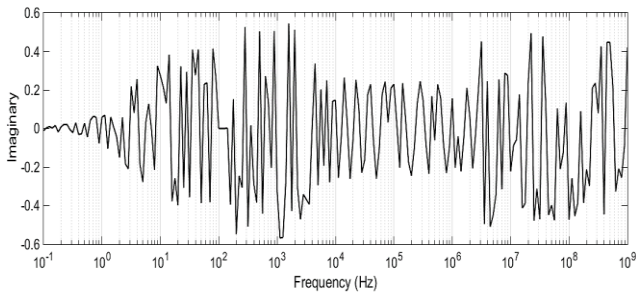


شکل ۴: بخش حقیقی مؤلفه‌های ستون اول ماتریس تبدیل به‌دست آمده با استفاده از روش پیشنهادی



شکل ۲: ثابت میرایی مدال کابل زیرزمینی با استفاده از روش پیشنهادی





شکل ۹: بخش موهومی چهارمین المان از چهارمین ستون ماتریس تبدیل محاسبه شده با استفاده از روش QR

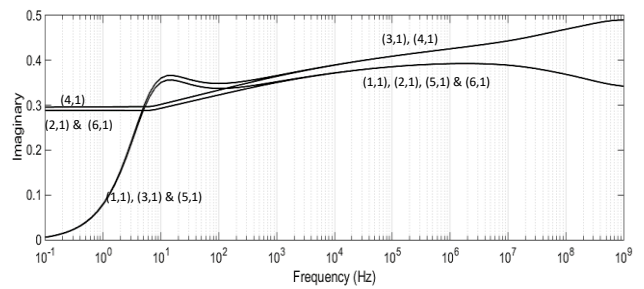
همان طور که مشاهده می شود، این منحنی ها ناپیوسته بوده و جهش های فراوانی دارند. دیگر المان های ماتریس تبدیل نیز به همین صورت ناپیوسته هستند. در نتیجه این مسئله باعث ناپیوستگی پارامترهای مدال به دست آمده با استفاده از این روش خواهد شد. همچنین این ناپیوستگی ها، برازش برداری پارامترهای مدال را دچار مشکل خواهد کرد.

### ۳-۲- ماتریس تبدیل خط هوایی

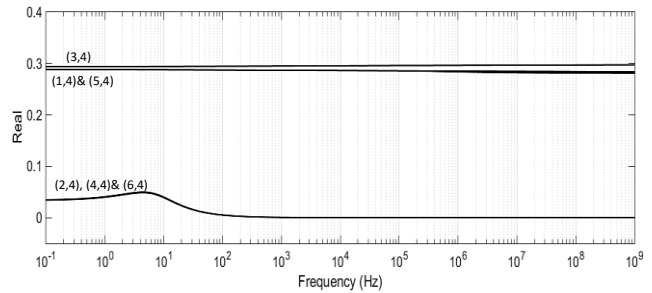
در این قسمت به محاسبه ی مقادیر ویژه و ماتریس تبدیل به صورت تابعی هموار برای یک خط هوایی دو مداره ی ۴۰۰kV با استفاده از الگوریتم پیشنهادی پرداخته می شود که مشخصات خط در بخش پیوسته ها آورده شده است.

شکل های ۱۰ و ۱۱ به ترتیب ثابت میرایی مدال و سرعت انتشار موج در خط هوایی را با استفاده از روش پیشنهادی نشان می دهد. در شکل های مذکور، شماره ی ۱ نشان دهنده ی مد برگشتی زمین و شماره های ۲ تا ۶ نشان دهنده ی مدهای هوایی خط مورد نظر است. ثابت میرایی و سرعت انتشار موج با استفاده از مقادیر ویژه ی ماتریس P طبق رابطه ی ۷ و ۸ محاسبه می شود. بنابراین هموار بودن آن ها نشان دهنده ی عدم بروز سوئیچ زنی در روش پیشنهادی است.

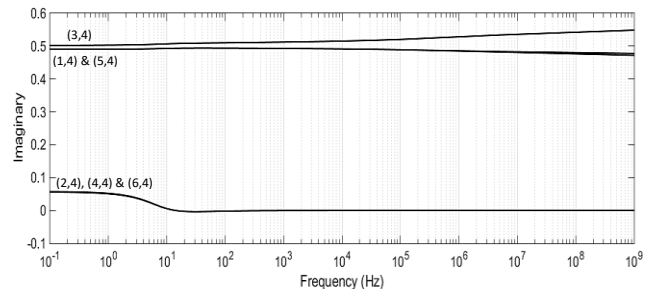
شکل های ۱۲ و ۱۳ بخش حقیقی و موهومی ستون اول ماتریس تبدیل، متناظر با اولین مقدار ویژه و شکل های ۱۴ و ۱۵ بخش حقیقی و موهومی ستون چهارم ماتریس تبدیل، متناظر با پنجمین مقدار ویژه را نشان می دهند. همان طور که مشاهده می شود بخش حقیقی و موهومی ماتریس تبدیل به دست آمده کاملاً هموار بوده و هیچ گونه شکستگی در منحنی ها مشاهده نمی شود. بردارهای ویژه ی به دست آمده متناظر با دیگر مدها نیز به همین صورت پیوسته می باشند. لازم به ذکر است که نرخ نمونه برداری در شکل های ۱۰ تا ۱۵، ۱۰ points/decade در نظر گرفته شده است.



شکل ۵: بخش موهومی مؤلفه های ستون اول ماتریس تبدیل به دست آمده با استفاده از روش پیشنهادی

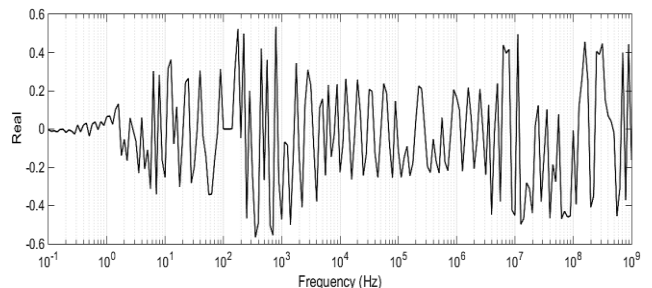


شکل ۶: بخش حقیقی مؤلفه های ستون چهارم ماتریس تبدیل به دست آمده با استفاده از روش پیشنهادی



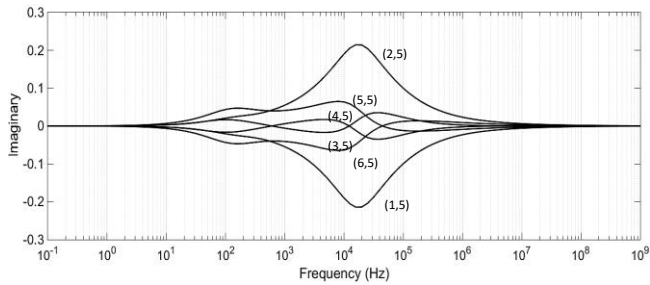
شکل ۷: بخش موهومی مؤلفه های ستون چهارم ماتریس تبدیل به دست آمده با استفاده از روش پیشنهادی

در ادامه، جهت مقایسه روش پیشنهادی با الگوریتم QR، ماتریس تبدیل  $T_V$  برای سیستم مورد نظر با این روش و با نرخ نمونه برداری ۲۰ points/decade محاسبه شده است. شکل های ۸ و ۹ به ترتیب نشان دهنده ی بخش حقیقی و موهومی مؤلفه ی  $T_V(4,4)$  می باشند.



شکل ۸: بخش حقیقی چهارمین المان از چهارمین ستون ماتریس تبدیل محاسبه شده با استفاده از روش QR





شکل ۱۵: بخش موهومی مؤلفه‌های ستون پنجم ماتریس تبدیل به‌دست آمده با استفاده از روش پیشنهادی

فرآیند محاسبه‌ی ماتریس تبدیل در خطوط هوایی، کابل‌های زیرزمینی و کابل‌های زیردریایی به‌طور کلی یکسان است و تنها نحوه‌ی محاسبه‌ی ماتریس‌های امیدانس سری و ادمیتانس شنت در آن‌ها متفاوت می‌باشد. از این‌رو روش پیشنهادی جهت محاسبه‌ی ماتریس تبدیل در کلیه‌ی خطوط انتقال قابل استفاده است.

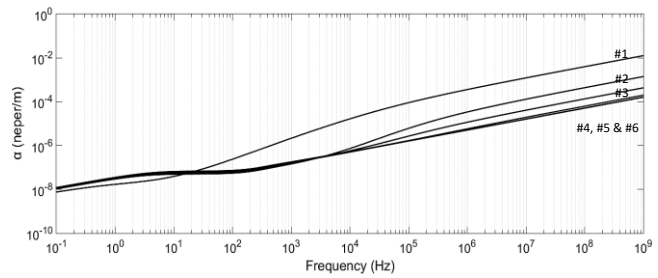
### ۳-۳-۳- ارزیابی روش پیشنهادی

در این قسمت، روش پیشنهادی با روش NR که در نرم‌افزارهای تحلیل گذرا مورد استفاده قرار می‌گیرد و همچنین با آخرین روش ارائه‌شده در این زمینه (LM) از لحاظ توانایی ردیابی در نرخ‌های پایین نمونه‌برداری و دقت ماتریس تبدیل به‌دست آمده در دو بخش زیر بررسی می‌گردد. همچنین نشان داده می‌شود که روش پیشنهادی نه تنها می‌تواند ماتریس تبدیل هموارتری را نسبت به روش‌های دیگر به‌دست آورد؛ بلکه دارای دقت محاسبه‌ی بیشتری نیز می‌باشد.

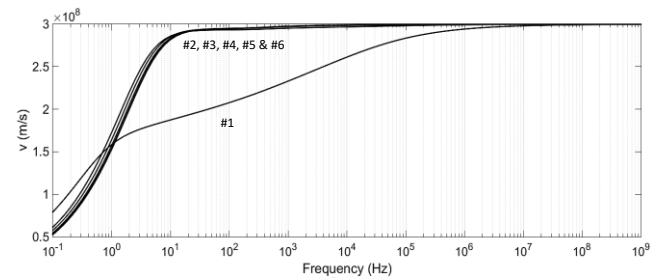
### ۳-۳-۱- توانایی ردیابی

با کاهش نرخ نمونه‌برداری، فاصله‌ی بین فرکانس‌های متوالی افزایش می‌یابد. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، این افزایش فاصله‌ی فرکانسی شکستگی و جهش المان‌های ماتریس تبدیل در محدوده‌ی فرکانسی موردنظر را به‌همراه دارد. جهت محاسبه‌ی تابع ماتریسی انتشار مدال، توانایی الگوریتم در حفظ پیوستگی و همواربودن در این شرایط بسیار حائز اهمیت است. از این‌رو جهت مقایسه‌ی توانایی ردیابی روش پیشنهادی با روش‌ها NR و LM، ماتریس تبدیل با نرخ‌های مختلف نمونه‌برداری برای سیستم کابل زیرزمینی محاسبه می‌شود.

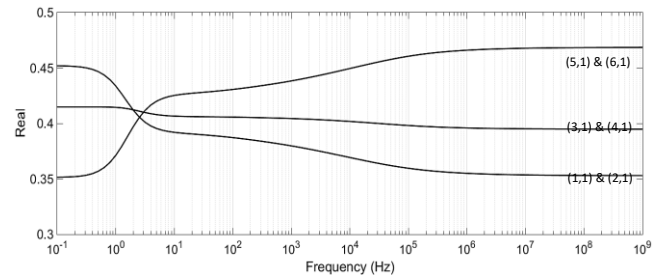
شکل ۱۶ اندازه‌ی مؤلفه‌های ستون دوم ماتریس تبدیل به‌دست آمده با استفاده از روش پیشنهادی و LM را در نرخ نمونه‌برداری ۱۰ points/decade نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، نتایج به‌دست آمده از روش پیشنهادی و LM مشابه بوده و توانسته‌اند ماتریس تبدیل را به‌صورت یک تابع هموار و پیوسته در این نرخ محاسبه کنند.



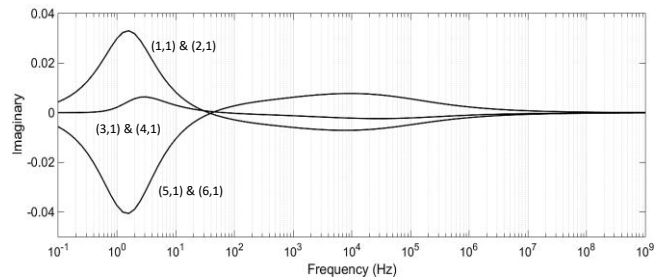
شکل ۱۰: ثابت میرایی مدال خط هوایی با استفاده از روش پیشنهادی



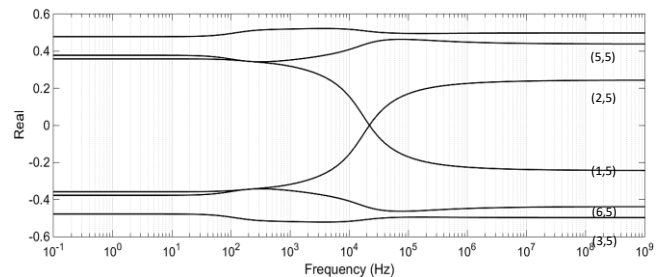
شکل ۱۱: سرعت انتشار موج خط هوایی با استفاده از روش پیشنهادی



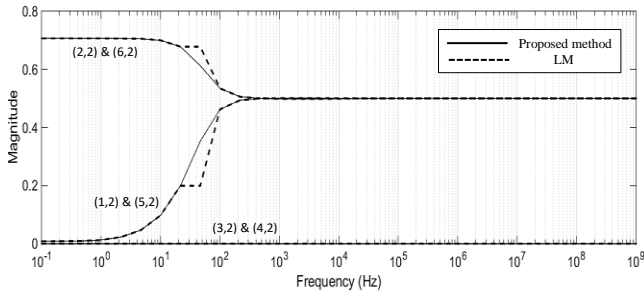
شکل ۱۲: بخش حقیقی مؤلفه‌های ستون اول ماتریس تبدیل به‌دست آمده با استفاده از روش پیشنهادی



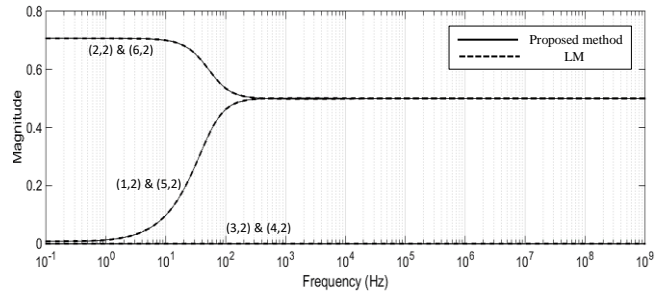
شکل ۱۳: بخش حقیقی مؤلفه‌های ستون اول ماتریس تبدیل به‌دست آمده با استفاده از روش پیشنهادی



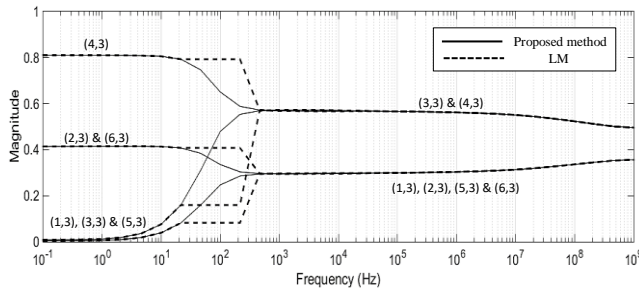
شکل ۱۴: بخش حقیقی مؤلفه‌های ستون پنجم ماتریس تبدیل به‌دست آمده با استفاده از روش پیشنهادی



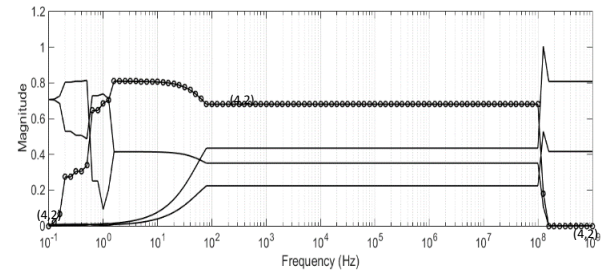
شکل ۱۸: اندازه مؤلفه‌های ستون دوم ماتریس تبدیل به دست آمده با استفاده از روش پیشنهادی و LM



شکل ۱۶: اندازه مؤلفه‌های ستون دوم ماتریس تبدیل به دست آمده با استفاده از روش پیشنهادی و LM



شکل ۱۹: اندازه مؤلفه‌های ستون سوم ماتریس تبدیل به دست آمده با استفاده از روش پیشنهادی و LM



شکل ۱۷: اندازه مؤلفه‌های ستون دوم ماتریس تبدیل به دست آمده با استفاده از روش NR

شکل ۱۷ اندازه‌ی مؤلفه‌های ستون دوم ماتریس تبدیل را در همان نرخ، با استفاده از روش NR نشان می‌دهد. این روش با کاهش نرخ نمونه‌برداری به دلیل دور شدن نقطه‌ی شروع الگوریتم از جواب مسئله قادر به همگرایی نمی‌باشد. همان‌طور که در شکل ۱۷ مشاهده می‌شود، ماتریس تبدیل به دست آمده در این شرایط ناپیوسته بوده و جهش‌های ناگهانی خواهد داشت. به‌طور کلی استفاده از این روش تنها در نرخ‌های نمونه‌برداری بالای ۴۰ points/decade مناسب است. روش LM برخلاف روش NR دارای جهش‌های ناگهانی نمی‌باشد. در نرخ‌های بالای نمونه‌برداری نتایج به دست آمده از روش NR مشابه با روش پیشنهادی و LM خواهد بود.

جهت مقایسه‌ی توانایی ردیابی روش پیشنهادی با LM ماتریس تبدیل در نرخ نمونه‌برداری ۳ points/decade محاسبه شده است. شکل‌های ۱۸ و ۱۹ به ترتیب ستون‌های ۲ و ۳ ماتریس تبدیل را نشان می‌دهد. با توجه به این که روش LM جهت دستیابی به یک ماتریس تبدیل پیوسته، تنها جواب در فرکانس قبلی را در نظر می‌گیرد، نمی‌تواند شکستگی منحنی را تشخیص دهد. همان‌طور که در شکل‌های ۱۸ و ۱۹ مشاهده می‌گردد، ماتریس تبدیل به دست آمده از این روش هموار نبوده و دارای شکستگی می‌باشد. در روش پیشنهادی با توجه به این که هدف الگوریتم بهینه‌سازی طبق رابطه‌ی (۳۱) حفظ پیوستگی بر اساس دو فرکانس قبلی است، این روش می‌تواند در نرخ‌های پایین نمونه‌برداری نیز ماتریس تبدیل را به‌صورت یک تابع پیوسته و بدون شکستگی به دست آورد.

### ۳-۳-۲- دقت محاسبه

با توجه به این که در روش‌های محاسبه‌ی ماتریس تبدیل یکی از اهداف، همواربودن این ماتریس است؛ از این رو در برخی روش‌ها، تقریبی از بردارهای ویژه‌ی ماتریس  $\mathbf{P}$  استفاده می‌شود [۱۶]. در روش‌های محاسبه‌ی مستقیم، به دلیل حل کردن مسئله‌ی مقادیر ویژه (بخش ۲-۲) هم‌زمان با در نظر گرفتن پیوستگی بردارهای ویژه، دقت آن در محاسبه‌ی ماتریس تبدیل کاهش خواهد یافت. در این بخش جهت ارزیابی دقت روش پیشنهادی در محاسبه‌ی ماتریس تبدیل در محدوده‌ی فرکانسی مورد نظر دو معیار پیشنهاد شده است:

۱. در حالت ایده‌آل ماتریس  $\tilde{\gamma}$  به دست آمده با استفاده از ماتریس تبدیل  $\mathbf{T}_V$  طبق رابطه‌ی (۵) قطری است؛ از این رو خطای محاسبات در هر فرکانس را می‌توان بزرگ‌ترین المان غیرقطری  $\frac{\tilde{\gamma}^2}{\|\mathbf{P}\|}$  در نظر گرفت. خطا در هر فرکانس برای هر یک از روش‌ها محاسبه می‌شود.

۲. در صورتی که ماتریس  $\tilde{\gamma}$  با صفر شدن المان‌های غیرقطری ماتریس  $\tilde{\gamma}$  به دست آید، خطا در هر فرکانس را می‌توان برابر با بزرگ‌ترین المان  $\frac{(\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}})}{\|\mathbf{P}\|}$  که  $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{T}_V^{-1} \tilde{\gamma}^2 \mathbf{T}_V$  می‌باشد، در نظر گرفته شود. مقدار خطا در دو نرخ نمونه‌برداری و بر اساس دو معیار ارائه شده، در هر فرکانس محاسبه شده است. اندازه و فرکانس بیشترین خطا و میانگین خطا در کل ناحیه‌ی فرکانسی برای کابل زیرزمینی و خط

$3/4 \times 10^{-5}$	۱۰۰ Hz	$3/7 \times 10^{-4}$	روش LM [۱۴]	معیار دوم
$1/5 \times 10^{-15}$	۴۰ kHz	$5/8 \times 10^{-15}$	روش پیشنهادی	

روش‌های که تاکنون جهت محاسبه‌ی ماتریس تبدیل ارائه شده‌اند، مبتنی بر یک الگوریتم تکرار عددی می‌باشند. با توجه به این که حدس اولیه‌ی در این الگوریتم‌ها برابر با رخ الگوریتم در فرکانس قبلی در نظر گرفته می‌شود، افزایش فاصله میان نمونه‌های فرکانس سبب کاهش دقت و ناکارآمدی آن‌ها در محاسبه‌ی ماتریس تبدیل می‌شود. روش پیشنهادی با حل مستقیم مسئله‌ی مقادیر ویژه به صورت تحلیلی (پیدا کردن مجموعه‌ی بردارهای ویژه‌ی متناظر با هر مقدار ویژه‌ی ماتریس **P**) توانسته است، ماتریس تبدیل را با دقت بسیار بالاتری نسبت به سایر روش‌ها که از الگوریتم‌های حل عددی استفاده کرده‌اند محاسبه کند که این مسئله به طور واضح در جدول‌های ۱ و ۲ نشان داده شده است.

دقت محاسبه‌ی ماتریس تبدیل در روش پیشنهادی برخلاف دیگر روش‌ها وابسته به نرخ نمونه‌برداری نمی‌باشد و در هر فرکانس به طور جداگانه مجموعه‌ی بردارهای ویژه‌ی متناظر با هر مقدار ویژه، طبق مراحل تشریح شده در بخش ۲-۳-۱، با حل مستقیم مجموعه معادلات خطی رابطه (۲۷)، به صورت تحلیلی و دقیق محاسبه می‌کند. به همین دلیل روش پیشنهادی همان‌طور که در جدول‌های ۱ و ۲ مشاهده می‌شود، در هر نرخ نمونه‌برداری می‌تواند ماتریس تبدیل را با دقت بالایی محاسبه کند، در حالی که دقت سایر روش‌ها با کاهش نرخ نمونه‌برداری، به شدت کاهش می‌یابد. همچنین نتایج به دست آمده از دو معیار معرفی شده در این بخش، نشان‌دهنده‌ی قطری بودن ماتریس  $\gamma$  به دست آمده با استفاده از روش پیشنهادی است.

#### ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله به منظور به دست آوردن یک ماتریس تبدیل هموار برای خطوط انتقال، یک استراتژی مبتنی بر روش پس پردازش ارائه شده است. بر این اساس در هر فرکانس غیر از فرکانس اول، ابتدا با اعمال IPC پیوستگی مقادیر ویژه حفظ می‌شود. سپس در مسئله‌ی مقادیر ویژه، یک مجموعه جواب برای بردارهای ویژه متناظر با هر مقدار ویژه تعیین می‌گردد. در ادامه به کمک یک الگوریتم بهینه‌سازی هوشمند و با در نظر گرفتن تابع هزینه مناسب، از بین جواب‌های به دست آمده برای بردارهای ویژه بهترین جواب تعیین می‌گردد. تابع هزینه به گونه‌ای در نظر گرفته شده است که هموار بودن ماتریس تبدیل در تمام فرکانس‌ها تضمین شود. این هموار بودن بر اساس بردار ویژه‌ی به دست آمده برای هر مقدار ویژه در دو فرکانس قبلی می‌باشد. آنچه در این مطالعه مورد توجه قرار گرفته است، محاسبه‌ی یک فضای برداری به عنوان مجموعه جواب برای بردارهای ویژه می‌باشد. یکی از مزیت‌های این روش دقت بالای آن در محاسبه‌ی ماتریس تبدیل به شکل هموار در نرخ‌های نمونه‌برداری

هوایی مورد مطالعه، به ترتیب در جدول‌های ۱ و ۲ با استفاده از روش‌های LM، NR و روش پیشنهادی ارائه شده است.

جدول ۱: خطای محاسبه‌ی ماتریس تبدیل کابل زیرزمینی

نرخ نمونه‌برداری	معیار سنجش دقت	روش	اندازه‌ی بیشترین خطا	فرکانس بیشترین خطا	میانگین خطا
3points/decade	معیار اول	روش NR [۱۲]	۰/۵۲	۶۳۱ MHz	۰/۱۵
		روش LM [۱۴]	$5/2 \times 10^{-2}$	۲۱۵ Hz	$4/3 \times 10^{-3}$
		روش پیشنهادی	$5/9 \times 10^{-15}$	۰/۲۱ Hz	$9 \times 10^{-16}$
معیار دوم	معیار دوم	روش NR [۱۲]	۱/۴	۲۵۱ MHz	۰/۹۱
		روش LM [۱۴]	$5/8 \times 10^{-2}$	۴۶/۴ Hz	$4/8 \times 10^{-3}$
		روش پیشنهادی	$5/3 \times 10^{-15}$	۰/۲۱ Hz	$9/4 \times 10^{-16}$
10points/decade	معیار اول	روش NR [۱۲]	$9/1 \times 10^{-5}$	۱/۱ kHz	$1/8 \times 10^{-6}$
		روش LM [۱۴]	$4/2 \times 10^{-8}$	۱ kHz	$2/8 \times 10^{-9}$
		روش پیشنهادی	$5/5 \times 10^{-15}$	۰/۱ Hz	$1 \times 10^{-15}$
معیار دوم	معیار دوم	روش NR [۱۲]	$5/1 \times 10^{-5}$	۱/۱ kHz	$1/1 \times 10^{-6}$
		روش LM [۱۴]	$1/9 \times 10^{-8}$	۱ kHz	$1/2 \times 10^{-9}$
		روش پیشنهادی	$1/1 \times 10^{-14}$	۰/۲ Hz	$1 \times 10^{-15}$

جدول ۲: خطای محاسبه‌ی ماتریس تبدیل خط هوایی

نرخ نمونه‌برداری	معیار سنجش دقت	روش	اندازه‌ی بیشترین خطا	فرکانس بیشترین خطا	میانگین خطا
3points/decade	معیار اول	روش NR [۱۲]	۴/۳	۱۲۵ kHz	۲/۰۷
		روش LM [۱۴]	$1/6 \times 10^{-3}$	۱۰۰ Hz	$2 \times 10^{-4}$
		روش پیشنهادی	$2/8 \times 10^{-15}$	۴۶۴ Hz	$2/1 \times 10^{-15}$
معیار دوم	معیار دوم	روش NR [۱۲]	۱/۷	۱ MHz	۱/۴
		روش LM [۱۴]	$4/4 \times 10^{-4}$	۱۰۰ Hz	$1 \times 10^{-5}$
		روش پیشنهادی	$4/1 \times 10^{-15}$	۴/۶۴ MHz	$1/6 \times 10^{-15}$
10points/decade	معیار اول	روش NR [۱۲]	۰/۴۴	۱۴/۷ kHz	۰/۱۶
		روش LM [۱۴]	$1/3 \times 10^{-3}$	۱۰۰ Hz	$1/1 \times 10^{-4}$
		روش پیشنهادی	$2/4 \times 10^{-15}$	۲/۵ kHz	$1/1 \times 10^{-15}$
معیار دوم	معیار دوم	روش NR [۱۲]	۰/۲۹	۱۶۷ kHz	$2/6 \times 10^{-2}$

### پیوست ب) مثال عددی

جهت تشریح روش پیشنهادی در این قسمت، بردار ویژه‌ی متناظر با اولین مقدار ویژه برای سیستم کابل زیرزمینی که مشخصات آن در پیوست (ج) آورده شده است، در فرکانس ۱ kHz محاسبه می‌شود. طبق فلوجارت شکل ۱، ابتدا اولین مقدار ویژه در این فرکانس محاسبه می‌شود که برابر است با:

$$\lambda^{(1)} = -4.18e-1 + 5.17e-2i \quad (ب-۱)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۲۸) ماتریس نرمالیزه شده‌ی  $A$ ، متناظر با اولین مقدار ویژه  $(\lambda^{(1)})$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4.10e-1 & 0 & -3.06e-2 & 0 & -2.73e-1 & \dots \\ -1.92e-4 & 1 & 0 & -5.18e-1 & 0 & -4.62e-1 & \dots \\ 0 & -3.06e-1 & 1 & -4.10e-1 & 0 & -3.06e-1 & \dots \\ 0 & -5.18e-1 & -1.92e-4 & 1 & 0 & -5.18e-1 & \dots \\ 0 & -2.73e-1 & 0 & -3.06e-1 & 1 & -4.10e-1 & \dots \\ 0 & -4.62e-1 & 0 & -5.18e-1 & -1.92e-4 & 1 & \dots \\ -1.24e-1 & 3.82e-2 & 0 & 3.84e-2 & 0 & 3.84e-2 & \dots \\ -1.84e-3 & -1.28e-1 & 0 & 6.50e-2 & 0 & 6.49e-2 & \dots \\ 0 & 3.84e-2 & -1.23e-1 & 3.82e-2 & 0 & 3.84e-2 & \dots \\ 0 & 6.50e-2 & -1.89e-3 & -1.28e-1 & 0 & 6.50e-2 & \dots \\ 0 & 3.84e-2 & 0 & 3.84e-2 & -1.24e-1 & 3.82e-2 & \dots \\ 0 & 6.49e-2 & 0 & 6.50e-2 & -1.89e-3 & -1.28e-1 & \dots \\ 1.24e-1 & -3.82e-2 & 0 & -3.84e-2 & 0 & -3.84e-2 & \dots \\ 1.89e-3 & 1.28e-1 & 0 & -6.50e-2 & 0 & -6.49e-2 & \dots \\ 0 & -3.84e-2 & 1.24e-1 & -3.82e-2 & 0 & -3.84e-2 & \dots \\ 0 & -6.50e-2 & 1.89e-3 & 1.28e-1 & 0 & -6.50e-2 & \dots \\ 0 & -3.84e-2 & 0 & -3.84e-2 & 1.23e-1 & -3.82e-2 & \dots \\ 0 & -6.49e-2 & 0 & -6.50e-2 & 1.89e-3 & 1.28e-1 & \dots \\ 1 & -4.10e-1 & 0 & -3.06e-1 & 0 & -2.73e-1 & \dots \\ -1.92e-4 & 1 & 0 & -5.18e-1 & 0 & -4.62e-1 & \dots \\ 0 & -3.06e-1 & 1 & -4.10e-1 & 0 & -3.06e-1 & \dots \\ 0 & -5.18e-1 & -1.82e-4 & 1 & 0 & -5.18e-1 & \dots \\ 0 & -2.73e-1 & 0 & -3.06e-1 & 1 & -4.10e-1 & \dots \\ 0 & -4.62e-1 & 0 & -5.18e-1 & -1.92e-4 & 1 & \dots \end{bmatrix}$$

جهت حل رابطه‌ی (۲۷)، ماتریس  $A$  بایستی طبق مراحل تشریح

شده در بخش ۲-۳-۱ بالا مثلثی شود؛ در این صورت ماتریس  $A$  به ماتریس بالامثلثی  $A_T$  تبدیل می‌شود:

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 1.24e-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.10e-1 & -3.82e-2 & \dots \\ 0 & 1.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.25e-2 & -4.15e-1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1.24e-1 & 0 & 0 & -3.06e-1 & -3.84e-2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1.02 & 0 & 0 & 5.26e-4 & -3.12e-1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1.24e-1 & -2.73e-1 & -3.84e-2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.02 & 4.61e-3 & -2.78e-1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1.29e-1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.02 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -3.84e-2 & -2.73e-1 & -3.84e-2 & -3.06e-1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2.78e-1 & 4.61e-3 & -3.11e-1 & 5.26e-4 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -3.84e-2 & -3.06e-1 & -3.82e-2 & -4.10e-1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -3.12e-1 & 5.26e-4 & -4.15e-1 & -1.25e-2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -3.82e-2 & -4.10e-1 & -3.84e-2 & -3.06e-1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -4.15e-1 & -1.25e-2 & -3.11e-1 & 5.26e-4 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -6.44e-2 & -4.62e-1 & -6.44e-2 & -5.19e-1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -4.71e-1 & 4.90e-3 & -5.27e-1 & -2.36e-3 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 7.86e-1 & -9.67e-2 & -7.58e-1 & 9.67e-2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 7.98e-1 & -3.45e-3 & -7.70e-1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (ب-۳)$$

پایین می‌باشد. کاهش نرخ نمونه‌برداری سبب افزایش سرعت محاسبات در تحلیل گذرا خطوط انتقال خواهد شد. همچنین استراتژی پیشنهادی می‌تواند با انتخاب بردارهای ویژه‌ی مستقل خطی برای مقادیر ویژه‌ی نزدیک به هم قطری‌بودن ماتریس تبدیل را تضمین کند.

روش پیشنهادی برخلاف سایر روش‌ها به محاسبه‌ی معکوس هیچ ماتریسی نیاز ندارد. این امر نشان‌دهنده‌ی پایداری عددی روش پیشنهادی است؛ زیرا محاسبه‌ی معکوس ماتریس خود مبتنی بر روش‌های عددی می‌باشد که موجب خطای محاسباتی خواهد شد. همچنین این امکان وجود دارد که ماتریس موردنظر معکوس پذیر نباشد که این مسئله در برخی مواقع منجر به ناپایداری عددی و یا عدم توانایی روش‌های دیگر در محاسبه‌ی ماتریس تبدیل می‌شود. روش پیشنهادی به دلیل همگرایی سریع، قابلیت اطمینان، دقت و پایداری عددی بالا در محاسبه‌ی ماتریس تبدیل، جهت به‌کارگیری در نرم‌افزارهای تحلیل گذرا مناسب است.

لازم به ذکر است که روش پیشنهادی برای به‌دست‌آوردن مدل عمومی خطوط انتقال کاربرد دارد. به عبارت دیگر، این مدل جهت تحلیل گذرای خطوط انتقال در وضعیت‌های مختلف مانند اتصال کوتاه و یا مدار باز نیز قابل استفاده است. همچنین استراتژی پیشنهادی قابلیت توسعه جهت دستیابی به اهداف دیگر مانند حداقل کردن بخش موهومی ماتریس تبدیل و محاسبه‌ی فرکانس بهینه جهت ثابت در نظر گرفتن آن را دارا است.

### پیوست‌ها

#### پیوست الف) روش IPC

روش IPC اولین بار در [۱۲]، جهت رفع مشکل جابه‌جایی مقادیر ویژه و ستون‌های ویژه‌ی متناظر با آن است. با توجه به این که بردارهای ویژه متناظر با یک مقادیر ویژه در فرکانس‌های متوالی تقریباً همبسته می‌باشند و بردارهای ویژه‌ی به‌دست‌آمده در هر فرکانس تقریباً عمود بر یکدیگر هستند؛ در نتیجه قوی‌ترین همبستگی به‌وسیله‌ی بردارهای ویژه‌ای که متعلق به مقادیر ویژه‌ی مشابه ایجاد خواهد شد.

در صورتی که  $T_V^T$  ترانهاده‌ی مزدوج ماتریس تبدیل به‌دست‌آمده توسط یک روش رایج در فرکانس فعلی و  $T_V$  ماتریس تبدیل در فرکانس قبلی باشد، آنگاه با محاسبه‌ی  $T_V^T \times T_V$  می‌توان جابه‌جایی مقادیر ویژه تشخیص داده شود؛ بنابراین اگر بزرگ‌ترین مؤلفه‌های ماتریس حاصل‌شده از رابطه‌ی فوق بر روی قطر اصلی قرار گیرد، جابه‌جایی رخ نداده است. در غیر این صورت اگر بزرگ‌ترین مؤلفه‌ی  $n$  امین سطر،  $m$  امین (  $m \neq n$  ) المان آن سطر باشد، جابه‌جایی صورت گرفته است. برای رفع آن باید  $n$  امین مقدار و بردار ویژه‌ی در جای  $m$  امین مقدار و بردار ویژه‌ی قرار گیرد.

در نتیجه بردار ویژه‌ی متناظر با اولین مقدار ویژه در فرکانس 1kHz، جهت همواربودن ماتریس تبدیل، با استفاده از ماتریس  $A_T$  برابر است با:

$$X = \begin{bmatrix} 0.2830 + 0.2872i \\ 0.2855 + 0.2848i \\ 0.2920 + 0.2990i \\ 0.2946 + 0.2966i \\ 0.2830 + 0.2872i \\ 0.2855 + 0.2848i \end{bmatrix} \quad (\text{ب-۹})$$

به همین ترتیب می‌توان مناسب‌ترین بردار ویژه را در هر فرکانس برای تمامی مقادیر ویژه محاسبه نمود. در نتیجه ماتریس تبدیل که برابر با ماتریس بردارهای ویژه در هر فرکانس است، به دست می‌آید. با استفاده از ماتریس‌های تبدیل به دست آمده در کل ناحیه‌ی فرکانسی مورد نظر، مدهای ماتریس تابع انتشار در هر فرکانس به طور دقیق و هموار جهت برازش برداری، به منظور استفاده در مدل خط قابل محاسبه است.

با توجه به این که فرآیند محاسبه‌ی بردار ویژه‌ی برای خط هوایی مشابه کابل زیرزمینی است، بردارهای ویژه برای خطوط هوایی نیز به همین صورت محاسبه می‌شود.

### پیوست ج

**قضیه:** ماتریس  $P$  قطری پذیر است و مسئله بهینه سازی دارای جواب می‌باشد؛ آنگاه روش پیشنهادی تضمین می‌کند:  
الف: افزایش دقت محاسبه‌ی ماتریس تبدیل  
ب: قطری بودن ماتریس ثابت انتشار در حوزه‌ی مدال (ماتریس مقادیر ویژه‌ی ماتریس  $P$ )  
ج: همواربودن ماتریس تبدیل در کل محدوده‌ی فرکانسی (ماتریس بردارهای ویژه‌ی ماتریس  $P$ )  
**اثبات:**

الف: حل مستقیم مسئله‌ی مقدار ویژه به صورت تحلیلی تضمین کننده‌ی دقیق تر بودن آن نسبت به سایر روش‌ها می‌باشد که این خود نیازمند اثبات امکان محاسبه‌ی مجموعه‌ی بردارهای ویژه تحت هر شرایط است. محاسبه‌ی مجموعه‌ی بردارهای ویژه‌ی متناظر با هر مقدار ویژه در هر فرکانس نیازمند به دست آوردن متغیرهای آزاد (مینا) در دستگاه معادلات رابطه‌ی (ج-۱) است.

$$A'x' = 0 \quad (\text{ج-۱})$$

به طوری که  $A'$  و  $P$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A' = P - \lambda I \quad (\text{ج-۲})$$

$$P = ZY \quad (\text{ج-۳})$$

رابطه‌ی (ج-۱) فرم مختلط رابطه‌ی (۲۷) و  $x'$  بردار ویژه‌ی (بردار مجهولات دستگاه معادلات) متناظر با مقدار ویژه  $\lambda$  است. از طرفی برای هر مقدار ویژه‌ی ماتریس  $P$  می‌توان نوشت:

$$\det(P - \lambda I) = \det(A') = 0 \quad (\text{ج-۴})$$

مشاهده می‌شود که حداقل دو سطر آخر ماتریس  $A_T$  در تمامی فرکانس‌ها برای مقدار ویژه مورد نظر صفر شده است. پس از بالامثلی شدن ماتریس  $A$ ، بردار مجهول  $X_c$  به  $X'_c$  (رابطه (۲۹)) تبدیل می‌شود.

$$X'_c = \begin{bmatrix} x^{(1)} & x^{(7)} & x^{(3)} & x^{(9)} & x^{(5)} & x^{(11)} & x^{(2)} & \dots \\ x^{(8)} & x^{(12)} & x^{(6)} & x^{(10)} & x^{(4)} & & & \end{bmatrix} \quad (\text{ب-۴})$$

با توجه به اینکه دو سطر ماتریس  $A$  صفر شده است، تعداد متغیرهای مینا جهت حل رابطه‌ی (۲۹) نیز برابر با ۲ درایه‌ی آخر بردار  $X'_c$  یعنی درایه‌های  $x^{(4)}$  و  $x^{(10)}$  است. در نتیجه با استفاده از سطر دهم ماتریس  $A_T$  طبق رابطه‌ی (۲۹) خواهیم داشت:

$$(7.98e-1)x^{(6)} + (-3.45e-3)x^{(10)} + (-7.70e-1)x^{(4)} = 0 \quad (\text{ب-۵})$$

در رابطه فوق  $x^{(4)}$  و  $x^{(6)}$  به ترتیب بخش حقیقی مؤلفه‌ی ۴ و ۶ بردار ویژه و  $x^{(10)}$  بخش موهومی مؤلفه‌ی ۴ام است. طبق رابطه‌ی فوق با انتخاب هر مقدار دلخواهی برای  $x^{(4)}$  و  $x^{(10)}$ ، می‌توان  $x^{(6)}$  را محاسبه نمود. به همین ترتیب با استفاده از سطرهای دیگر ماتریس  $A_T$ ، دیگر مؤلفه‌های بردار  $X'_c$  قابل محاسبه است.

به ازای هر مقدار متغیرهای مینا (در اینجا  $x^{(4)}$  و  $x^{(10)}$ ) یک بردار ویژه، متناظر با آن به دست می‌آید. بنابراین متناظر با مقادیر مختلف متغیرهای مینا، تمامی بردارهای ویژه‌ی ممکن متناظر با این مقدار ویژه‌ی مورد نظر ( $\lambda^{(1)}$ ) قابل محاسبه است. با استفاده از این متغیرهای مینا، حوزه‌ی وسیع‌تری از بردارهای ویژه نسبت به روش‌های دیگر وجود خواهد داشت که می‌توان با استفاده از آن‌ها ماتریس تبدیل را به هموارترین شکل ممکن به دست آورد.

فرم مختلط بردار ویژه‌ی بهینه‌ی متناظر با مقدار ویژه  $\lambda^{(1)}$  در فرکانس 1 kHz، با توجه به بردارهای ویژه‌ی دو فرکانس قبلی (رابطه (۳۳)) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$X^{opt} = 2X^{n-1} - X^{n-2} =$$

$$2 \times \begin{bmatrix} 0.2803 + 0.2900i \\ 0.2857 + 0.2854i \\ 0.2887 + 0.3012i \\ 0.2944 + 0.2964i \\ 0.2803 + 0.2900i \\ 0.2857 + 0.2854i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2748 + 0.2950i \\ 0.2862 + 0.2858i \\ 0.2826 + 0.3056i \\ 0.2945 + 0.2962i \\ 0.2748 + 0.2950i \\ 0.2862 + 0.2858i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2858 + 0.2851i \\ 0.2852 + 0.2849i \\ 0.2948 + 0.2967i \\ 0.2942 + 0.2966i \\ 0.2858 + 0.2851i \\ 0.2852 + 0.2850i \end{bmatrix} \quad (\text{ب-۶})$$

با استفاده از الگوریتم ازدحام ذرات، مقادیر متغیرهای مینای  $x^{(4)}$  و  $x^{(10)}$  به گونه‌ای تعیین می‌شود که بردار ویژه‌ی به دست آمده کمترین اختلاف را نسبت به  $X^{opt}$  داشته باشد. به این ترتیب، متغیرهای مینای به دست آمده برابر است با:

$$x^{(10)} = 0.2965 \quad (\text{ب-۷})$$

$$x^{(4)} = 0.2946 \quad (\text{ب-۸})$$



تولیدشده، یک بردار ویژه برای مقدار ویژه‌ی موردنظر ایجاد می‌کند. با اصلاح جمعیت تولیدشده، الگوریتم بهینه‌سازی به بهترین بردار ویژه جهت کمینه‌کردن تابع هدف رابطه‌ی (۳۲)، همگرا خواهد شد. طبق توضیحات ارائه شده در بخش ۲-۳-۲، تابع هدف الگوریتم بهینه‌سازی بر اساس دو فرکانس قبلی به‌گونه‌ای در نظر گرفته شده است که از میان بردار ویژه‌های به دست آمده (مجموعه جواب مسئله مقدار ویژه بر اساس متغیرهای آزاد به دست آمده) بردار ویژه‌ای را انتخاب می‌کند که همواربودن آن را نسبت به فرکانس‌های قبلی تضمین نماید. از آنجایی که مسئله‌ی بهینه‌سازی دارای جواب می‌باشد، پس همواربودن ماتریس تبدیل توسط الگوریتم بهینه‌سازی تضمین خواهد شد.

### پیوست (د) مشخصات کابل زیرزمینی

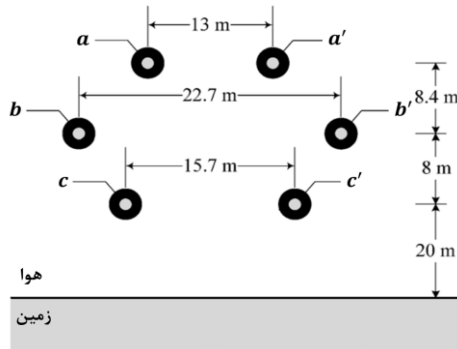
سیستم کابل زیرزمینی مورد مطالعه در این مقاله شامل سه کابل تک هسته‌ی هم‌مرکز و دارای غلاف است. پیکربندی کابل‌ها به صورت افقی بوده و در عمق ۱ m زمین با فاصله‌ی ۰/۳۵ cm نسبت به یکدیگر دفن شده‌اند. مقاومت ویژه‌ی زمین نیز ۱۰۰ Ω.m در نظر گرفته شده است. دیگر مشخصات مربوط به هر کابل در جدول ۳ بیان شده است.

جدول ۳: مشخصات کابل

شعاع هسته	۱/۹ cm
شعاع عایق اصلی	۳/۴۵ cm
شعاع خارجی غلاف	۳/۸۵ cm
شعاع عایق خارجی	۴/۲۵ cm
سطح مقطع هسته	۸ cm <sup>۲</sup>
مقاومت هسته (مسی)	۱/۷×۱۰ <sup>-۹</sup> Ωm
مقاومت غلاف (سربی)	۲/۱×۱۰ <sup>-۷</sup> Ωm
گذردهی الکتریکی عایق اصلی	۳/۵
گذردهی الکتریکی عایق خارجی	۴/۵

### پیوست (ه) مشخصات خط هوایی

در این مقاله خط هوایی دو مداره ۴۰۰ kV مورد بررسی قرار گرفته است. هر فاز آن دارای یک هادی است که شعاع داخلی و خارجی آن به ترتیب ۵/۸۶ و ۱۷/۵۵ میلی‌متر می‌باشد. مقاومت DC هر هادی ۰/۴۹۷ Ω/km است. مقاومت ویژه‌ی زمین ۱۰۰ Ω.m در نظر گرفته شده و آرایش هندسی فازها نیز مطابق شکل ۲۰ می‌باشد.



شکل ۲۰: آرایش هندسی فازهای خط هوایی دو مداره

با توجه به رابطه‌ی فوق، مرتبه‌ی ماتریس  $A'$  با ابعاد  $n \times n$  همواره کوچک‌تر از  $n$  می‌باشد. از طرف دیگر تعداد متغیرهای آزاد در دستگاه معادلات  $A'x' = 0$  برابر با پوچی ماتریس  $A'$  است [۲۶] و پوچی ماتریس  $A'$  از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\text{nullity}(A') = n - \text{rank}(A') \quad (ج-۵)$$

بنابراین دستگاه معادلات رابطه‌ی (ج-۱) به‌طور کلی حداقل دارای یک متغیر آزاد است. با توجه به قطری‌پذیربودن ماتریس  $P$ ، در صورتی که ماتریس  $P$  دارای  $m$  مقدار ویژه‌ی نزدیک به هم باشد مرتبه‌ی آن برابر با  $n-m$  خواهد بود [۱۵]. در نتیجه، دستگاه معادلات رابطه‌ی (ج-۱)،  $m$  متغیر آزاد خواهد داشت. دستگاه معادلات رابطه‌ی (ج-۱)، معادل با رابطه‌ی (۱۹) است. با جداسازی بخش حقیقی و موهومی دستگاه معادلات رابطه‌ی (ج-۱)، با استفاده از روابط (۱۹ تا ۲۵)، فرم حقیقی آن به صورت رابطه‌ی (۲۷) به دست می‌آید که این خود باعث می‌شود تعداد متغیرهای رابطه‌ی (۲۷) دو برابر رابطه‌ی (ج-۱) شود؛ بنابراین تعداد متغیرهای آزاد آن نیز دو برابر تعداد متغیرهای آزاد رابطه‌ی (ج-۱) خواهد بود. با به دست آوردن فرم پلکانی سطرهای ماتریس  $A$  و بازنویسی دستگاه معادلات (۲۷) به صورت رابطه‌ی (۲۹)، طبق مراحل تشریح شده در بخش ۳-۱، متغیرهای آزاد مسئله برابر با  $2m$  مؤلفه‌ی آخر بردار  $x'$  است. به‌ازای هر مقدار دلخواه در بازه‌ی ۱- تا  $1$  برای متغیرهای آزاد، یک بردار ویژه، متناظر با مقدار ویژه‌ی  $\lambda$  به دست می‌آید. در نتیجه تحت هر شرایطی امکان محاسبه‌ی مجموعه بردارهای ویژه برای ماتریس  $P$  وجود دارد.

ب: جهت قطری‌شدن ماتریس ثابت انتشار بایستی بردارهای ویژه‌ی ماتریس  $P$  (ستون‌های ماتریس تبدیل) در هر فرکانس مستقل خطی باشند [۲۷]. در روش پیشنهادی با در نظر گرفتن قیدی در مرحله‌ی تولید جمعیت اولیه و یا تولید جمعیت جدید در طی فرآیند بهینه‌سازی، مستقل خطی‌بودن بردارهای ویژه در یک فرکانس تضمین می‌شود. در صورتی که بردار ویژه‌ی ایجاد شده توسط ذره‌ای از جمعیت تولید شده وابسته خطی نسبت به دیگر بردارهای ویژه به دست آمده در آن فرکانس باشد، آن ذره حذف و ذره‌ی دیگر به صورت تصادفی انتخاب می‌شود و جایگزین آن می‌گردد تا شرط استقلال خطی بردارهای ویژه برآورده شود. به این ترتیب، بردار ویژه‌ی به دست آمده توسط الگوریتم بهینه‌سازی نسبت به بردارهای ویژه‌ی مربوط به سایر مقادیر ویژه در همان فرکانس مستقل خطی خواهد بود که این خود قطری‌شدن ماتریس ثابت انتشار مدال را تضمین می‌کند. به این ترتیب قطری‌شدن ماتریس ثابت انتشار مدال یک قید برای مسئله‌ی بهینه‌سازی می‌باشد. جواب‌داشته شدن مسئله بهینه‌سازی مستلزم برآورده شدن قیود حاکم بر مسئله از جمله قید قطری‌شدن ماتریس ثابت انتشار مدال می‌باشد. با توجه به اینکه مسئله‌ی بهینه‌سازی دارای جواب است، لذا قطری‌شدن ماتریس ثابت انتشار مدال در تئوری مدال تضمین خواهد شد.

ج: تعداد متغیرهای الگوریتم بهینه‌سازی برابر با تعداد متغیرهای آزاد مسئله است. در الگوریتم بهینه‌سازی جمعیت اولیه در بازه‌ی ۱- تا ۱ برای هر متغیر، به صورت تصادفی تولید می‌شود که هر ذره از جمعیت

## مراجع

- underground cables by optimization method," IEEE Trans. Power Del., vol. 17, no. 1, pp. 200–209, Jan. 2002.
- [14] A. I. Chrysochos, T. A. Papadopoulos and G. K. Papagiannis, "Robust Calculation of Frequency-Dependent Transmission-Line Transformation Matrices Using the Levenberg–Marquardt Method," IEEE Trans. Power Del., vol. 29, no. 4, pp. 1621–1629, Aug. 2014.
- [15] T. Noda, "Numerical technique for accurate evaluation of overhead line and underground cable constants," *Inst. Elect. Eng. Jpn. Trans. Elect. Electron. Eng.*, vol. 3, no. 5, pp. 549–559, 2008.
- [16] S. Fan, Y. Li, X. Li and L. Bi, "A method for the calculation of frequency-dependent transmission line transformation matrices," IEEE Trans. Power Syst., vol. 24, no. 2, pp. 552–560, May 2009.
- [17] L. M. Wedepohl, "Application of matrix methods to the solution of travelling-wave phenomena in polyphase systems," *Proc. Inst. Elect. Eng.*, vol. 110, pp. 2200–2212, Dec. 1963.
- [18] A. Hoshmeh and U. Schmidt, "A Full Frequency-Dependent Cable Model for the Calculation of Fast Transients," *Energies*, vol. 10, no. 8, p. 1158–1176, Jul. 2017.
- [19] A. Ametani, T. Yoneda, Y. Baba and N. Nagaoka, "An Investigation of Earth-Return Impedance between Overhead and Underground Conductors and Its Approximation," IEEE Trans. Electromagn. Compat, vol. 51, no. 3, pp. 860–867, Aug. 2009.
- [20] T. Theodoulidis, "Exact solution of pollaczek's integral for evaluation of earth-return impedance for underground conductors," IEEE Trans. Electromagn. Compat, vol. 54, no. 4, pp. 806–814, Aug. 2012.
- [21] A. Ametani, T. Ohno and N. Nagaoka, *Cable System Transients: Theory, Modeling and Simulation*, Wiley-IEEE Press, pp. 550–829, 2015.
- [22] J. P. Bickford, N. Mullineux and J. R. Reed, *Computation of Power System Transients*. London, U.K.: Peregrinus, 1976.
- [23] T. Noda, "Application of Frequency-Partitioning Fitting to the Phase-Domain Frequency-Dependent Modeling of Overhead Transmission Lines," in IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 30, no. 1, pp. 174–183, Feb. 2015.
- [۲۴] عباس کارگر، فهیمه صیاد شهرکی، جعفر سلطانی، «خازن‌گذاری بهینه در شبکه توزیع دارای اغتشاش هارمونیک برای تنظیم ولتاژ و کاهش تلفات با استفاده از PSO»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، دوره ۴۱، شماره ۱، صفحات ۳۳–۴۳، بهار ۱۳۹۰.
- [25] G. W. Stewart and J. G. Sun, *Matrix Perturbation Theory*. New York: Academic, 1990.
- [26] K. Singh, "General Vector Spaces," in *Linear Algebra: Step by Step*, Oxford, Oxford University Press, pp. 191–274, 2015.
- [27] J. A. Brandao Faria and J. F. Borges da Silva, "Wave Propagation in Polyphase Transmission Lines a General Solution to Include Cases Where Ordinary Modal Theory Fails," *IEEE Power Engineering Review*, Vols. PER-6, no. 4, pp. 45–46, 1986.
- [1] T. Noda, N. Nagaoka and A. Ametani, "Phase domain modeling of frequency-dependent transmission lines by means of an ARMA model," IEEE Trans. Power Delivery, vol. 11, pp. 401–411, Jan. 1996.
- [2] H. V. Nguyen, H. W. Dommel and J. R. Marti, "Direct phase-domain modeling of frequency-dependent overhead transmission lines," IEEE Trans. Power Delivery, vol. 12, pp. 1335–1342, July 1997
- [3] A. Morched, B. Gustavsen and M. Tartibi, "A universal model for accurate calculation of electromagnetic transients on overhead lines and underground cables," IEEE Trans. Power Del., vol. 14, no. 3, pp. 1032–1038, Jul. 1999.
- [4] L. Marti, "Simulation of transients in underground cables with frequency-dependent modal transformation matrices," IEEE Trans. Power Del., vol. 3, no. 3, pp. 1099–1110, Jul. 1988.
- [5] B. Gustavsen and A. Semlyen, "Simulation of transmission line transients using vector fitting and modal decomposition," IEEE Trans. Power Del., vol. 13, no. 2, pp. 605–614, Apr. 1998.
- [6] T. Kauffmann, I. Kocar and J. Mahseredjian, "New investigations on the method of characteristics for the evaluation of line transients," *Electric Power Systems Research*, vol. 160, pp. 243–250, 2018.
- [7] L. M. Wedepohl and S. E. T. Mohamed, "Multiconductor transmission lines. Theory of natural modes and fourier integral applied to transient analysis," *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of*, vol. 116, no. 9, pp. 1553–1563, September 1969.
- [۸] احسان دشتیان، مجید اخوت، حمید آرزومند، «تخمین کانال MIMO با استفاده از QRD و الگوریتم وفقی LMS»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، مقالات آماده انتشار، ۱۳۹۷.
- [9] T. Noda, "Application of Frequency-Partitioning Fitting to the Phase-Domain Frequency-Dependent Modeling of Underground Cables," IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 31, no. 4, pp. 1776–1777, Aug. 2016.
- [10] H. Ye and K. Strunz, "Multi-Scale and Frequency-Dependent Modeling of Electric Power Transmission Lines," IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 33, no. 1, pp. 32–41, 2018.
- [11] M. Y. Tomasevich and A. C. Lima, "Investigation on the limitation of closed-form expressions for wideband modeling of overhead transmission lines," *Electric Power Systems Research*, vol. 130, pp. 113–123, 2016.
- [12] L. M. Wedepohl, H. V. Nguyen and G. D. Irwin, "Frequency-dependent transformation matrices for untransposed transmission lines using Newton-Raphson method," IEEE Trans. Power Del., vol. 11, no. 3, pp. 1538–1546, Jul. 1996.
- [13] T. T. Nguyen and H. Y. Chan, "Evaluation of modal transformation matrices for overhead transmission lines and

## زیر نویس‌ها

- 1 Newton–Raphson
- 2 Sequential Quadratic Programming
- 3 Levenberg–Marquardt
- 4 Inner Product Comparing
- 5 Matrix Partial Fraction Expansion
- 6 Particle Swarm Optimization