

طراحی رویتگر مرتبه کسری تطبیقی و مقاوم برای سیستم‌های لیپشیتز یک طرفه

مینا قدیمی^۱، دانشجوی کارشناسی ارشد؛ الهام امینی بروجنی^۲، استادیار

۱- گروه مهندسی برق و کامپیوتر، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران - std_ghadimi@khu.ac.ir

۲- گروه مهندسی برق و کامپیوتر، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران - e.amini.b@khu.ac.ir

چکیده: این مقاله به طراحی رویتگر تطبیقی برای سیستم‌های مرتبه کسری لیپشیتز یک طرفه پرداخته است. سیستم‌های لیپشیتز یک طرفه دسته وسیعی از سیستم‌های غیرخطی هستند که سیستم‌های لیپشیتز را نیز شامل می‌شوند. رویتگر طراحی شده به صورت هم‌زمان بردار حالت و پارامترهای ناشناخته سیستم را تخمین می‌زند و در برابر اغتشاش ورودی و اغتشاش محدود بر روی بهره رویتگر مقاوم است. با توجه به اینکه با به کارگیری روش H_∞ در طراحی رویتگر می‌توان به پایداری رویتگر در کنار عملکرد مطلوب دسترسی پیدا کرد، یک رویتگر H_∞ غیرشکننده برای این منظور طراحی و پایداری رویتگر بر مبنای قضیه لیاپانوف اثبات گردیده است. با به کارگیری نامساوی خطی ماتریسی ضمن کمینه‌سازی تأثیر اغتشاش در خطای تخمین، بهره رویتگر نیز به روش سیستماتیک به دست خواهد آمد. به منظور نمایش مؤثر بودن رویتگر پیشنهادی، دو مثال آورده شده و نتایج شبیه‌سازی آن ارائه و با پژوهشی جدید در این زمینه مقایسه شده است. در بخش نتیجه‌گیری نیز ضمن جمع‌بندی مطالب، پیشنهادهایی برای ادامه کار مطرح شده است.

واژه‌های کلیدی: پایداری لیاپانوف، رویتگر تطبیقی، سیستم‌های مرتبه کسری، لیپشیتز یک طرفه، نامساوی خطی ماتریسی.

Robust and Adaptive Fractional-Order Observer Design for One-sided Lipschitz Systems

M. Ghadimi¹, MSc Student; E. Amini Boroujeni², Assistant Professor

1- Electrical and Computer Engineering, Faculty of Engineering Department of Kharazmi university, Tehran, Iran, Email: std_ghadimi@khu.ac.ir

2- Electrical and Computer Engineering, Faculty of Engineering Department of Kharazmi university, Tehran, Iran, Email: e.amini.b@khu.ac.ir

Abstract: This paper presents adaptive observer design for one-sided Lipschitz systems. One-sided Lipschitz systems are a wide branch of nonlinear systems that include Lipschitz systems. Designed observer simultaneously estimate states and unknown parameters of the system and it is robust against input perturbation and limited observer gain disturbance. As using H_∞ observer will results in having desirable performance besides observer stability, a non-fragile H_∞ observer is presented and its stability is investigated based on Lyapunov theorem. Using linear matrix inequality causes minimizing the effect of disturbance on the estimation error addition to calculating the observer's gain systematically. Two examples are presented to show the efficiently and performance of the proposed observer and comparison with a new research in this field. Finally the conclusion of the paper and the useful suggestions for future researches in this field is presented.

Keywords: Lyapunov stability, adaptive observer, fractional-order systems, one-sided Lipschitz, linear matrix inequality (LMI).

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۶/۰۸/۱۵

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۶/۱۱/۰۳ و ۱۳۹۶/۱۲/۲۶

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۷/۰۲/۰۷

نام نویسنده مسئول: الهام امینی بروجنی

نشانی نویسنده مسئول: ایران - تهران - خیابان شهید مفتاح نرسیده به انقلاب - دانشگاه خوارزمی - دانشکده فنی و مهندسی - گروه برق و کامپیوتر - کد پستی ۱۴۹۱۱-۱۵۷۱۹.

۱- مقدمه

سیستم‌های لپشیتز یک‌طرفه و شبه لپشیتز یک‌طرفه^۱ مطرح شده است. در این مرجع نیز تخمین پارامترهای نامعلوم سیستم نادیده گرفته شده است. در مرجع [۲۳] به طراحی رویتگر برای سیستم‌های زمان گسسته لپشیتز یک‌طرفه مرتبه صحیح پرداخته شده است.

برای تخمین همزمان بردار متغیر حالت و بردار پارامتر از رویتگرهای تطبیقی^{۱۱} استفاده می‌گردد [۱۹]. در مرجع [۲۴] به طراحی رویتگر تطبیقی مرتبه صحیح برای سیستم‌های لپشیتز پرداخته شده است، در مرجع [۲۵] نیز این رویتگر برای سیستم‌های نامعین غیرخطی^{۱۲} در حضور دینامیک‌های مدل نشده و در مرجع [۲۶] برای سیستم‌های فازی طراحی شده است. طراحی رویتگر تطبیقی مقاوم در مرجع [۱۵] برای سیستم‌های لپشیتز مرتبه کسری گسترش یافته است اما این طراحی برای حالتی که سیستم لپشیتز یک‌طرفه باشد تعمیم داده نشده است. ثابت لپشیتز بسیاری از توابع معمولاً با افزایش فضای طراحی به‌طور چشمگیری افزایش می‌یابد و روش‌های طراحی رویتگر موجود، دینامیک خطا را برای سیستم‌هایی با ثابت لپشیتز کوچک پایدار می‌کند [۱۸]. برای بسیاری از سیستم‌های غیرخطی لپشیتز، ثابت لپشیتز یک‌طرفه به‌طور قابل توجهی کوچک‌تر از ثابت لپشیتز معمول است که آن را برای تخمین بخش غیرخطی مناسب‌تر می‌سازد [۲۷]. همچنین با توجه به جامع‌تر بودن سیستم‌های لپشیتز یک‌طرفه نسبت به سیستم‌های لپشیتز، گسترش و پیشرفت این تحقیقات برای سیستم‌های لپشیتز یک‌طرفه ضروری به‌نظر می‌رسد به‌گونه‌ای که اخیراً طراحی رویتگر تطبیقی برای سیستم‌های لپشیتز یک‌طرفه مرتبه صحیح در مرجع [۱۹] صورت گرفته و صورت مسئله برای سیستم‌های مرتبه کسری همچنان باز است.

با توجه به دانسته‌های نویسندگان این مقاله، طراحی‌های پیشین مربوط به سیستم‌های لپشیتز یک‌طرفه، بدون لحاظ اغتشاش خارجی وارد بر سیستم است. یکی از مشکلات اصلی در طراحی و کاربرد رویتگرها، رؤیت متغیرهای حالت در حین کار است که در این شرایط داده‌ها عموماً همراه با اغتشاش هستند. با توجه به اینکه وجود اغتشاش کوچک خارجی، هرچند دامنه کوچکی هم داشته باشد ممکن است موجب ناپایداری خطای تخمین شود [۱۵]. برای غلبه بر این مشکل در این مقاله رویتگر به‌گونه‌ای طراحی شده که در برابر این اغتشاش‌ها نیز مقاوم باشد.

در ادامه مقاله پس از عنوان مقدمات ریاضی مورد نیاز، بیان صورت مسئله و طراحی رویتگر مرتبه کسری در بخش سوم انجام شده است. در بخش چهارم کارایی رویتگر تطبیقی مقاوم در حضور اغتشاش ورودی با شبیه‌سازی بر روی دو مثال نشان داده شده است و در نهایت جمع‌بندی و نتیجه‌گیری در بخش پنجم صورت گرفته است.

۲- مقدمات ریاضی

در این قسمت به معرفی تعاریف و لم‌هایی که در این مقاله موردنیاز است، پرداخته می‌شود.

در دهه گذشته، مطالعات حساب دیفرانسیل مرتبه کسری^۱ بیشتر مورد توجه قرار گرفته است و نتایج دقیق و مختلفی در مورد این سیستم‌ها به‌دست آمده است [۴-۱]. بسیاری از سیستم‌های بین‌رشته‌ای را می‌توان با کمک سیستم‌های مرتبه کسری به‌خوبی توصیف کرد [۵، ۶]. همچنین کنترل‌کننده‌های مرتبه کسری [۴، ۳] تاکنون به‌منظور ارتقاء قابلیت اطمینان و عملکرد سیستم‌های کنترل حلقه بسته به‌کار گرفته شده‌اند. تخمین‌گرهای حالت نقش تعیین‌کننده‌ای در تئوری کنترل و تشخیص خطای سیستم‌های دینامیکی دارند [۷]. بسیاری از پژوهشگران حوزه مرتبه کسری تحقیقات خود را بر روی سیستم خطی انجام داده‌اند [۸، ۹]. مرجع [۱۰] در سال ۲۰۱۷ به طراحی رویتگر بهینه برای سیستم‌های مرتبه کسری خطی پرداخته است. بسیاری از رویتگرهای طراحی شده برای سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری مربوط به دسته‌ای از آن‌ها که شرط لپشیتز^۲ را دارا هستند می‌باشد [۸، ۱۵-۱۱]. رویتگری که با اعمال یک آشفستگی کوچک در بهره آن خطای تخمین واگرا می‌شود شکننده^۳ نامیده می‌شود [۱۶]. از طرفی با توجه به اینکه بهره رویتگر عموماً به‌صورت برون‌خطی^۴ محاسبه می‌شود و در بسیاری از کاربردهای عملی رویتگرها، بهره دستخوش تغییرات اندکی می‌شود لذا ضروری است که رویتگر بتواند تغییرات اندک بر روی بهره را تحمل نماید [۱۷]. برای نخستین‌بار در مرجع [۱۱] تخمین حالت سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری توسط رویتگر غیرشکننده^۵ مطرح شد. طراحی این رویتگر با استفاده از قضیه لیاپانوف^۶ مرتبه کسری در مرجع [۱۲] صورت گرفته است. با افزودن اغتشاش ورودی به سیستم در [۱۳] رویتگر مقاوم غیرشکننده به روش بازگشتی طراحی شده است و در نهایت در سال ۲۰۱۵ در مرجع [۱۴] مقایسه‌ای بین بازه قابل قبول برای حل نامساوی خطی در طراحی رویتگر مقاوم به روش لیاپانوف مرتبه کسری و لیاپانوف مرتبه صحیح صورت گرفت و نشان داده شد که لیاپانوف مرتبه صحیح بازه قابل قبول بیشتری دارد.

بیشتر معادلات غیرخطی، شرط پیوستگی لپشیتز با یک ثابت لپشیتز مشخص را به‌صورت محلی در ناحیه‌ای کوچک از فضای حالت برآورده می‌کنند و این شرط تقریباً هرگز برای کل فضا برقرار نیست و اکثر نتایجی که با استفاده از پیوستگی لپشیتز به‌دست آمده، به‌صورت محلی است [۱۸]. یکی از دسته‌های دیگر سیستم‌های غیرخطی، سیستم‌های لپشیتز یک‌طرفه^۷ است که سیستم‌های لپشیتز خود زیرمجموعه‌ای از این دسته‌اند [۱۹]. طراحی رویتگر برای سیستم‌های مرتبه کسری لپشیتز یک‌طرفه در تعدادی از پژوهش‌ها مورد توجه قرار گرفته است. در [۲۰، ۲۱] رویتگر مرتبه کسری غیرشکننده در دو حالت مرتبه کامل و کاهش مرتبه‌یافته برای سیستم‌های غیرخطی لپشیتز یک‌طرفه طراحی شده است. با این حال رویتگر طراحی شده در این مراجع تنها حالت‌های سیستم را تخمین می‌زند و اطلاعاتی در مورد پارامترهای نامعلوم سیستم نمی‌دهد. در مرجع [۲۲] یک نمونه متفاوت از رویتگر با استفاده از مشتق کیوتو^۸ و پایداری میتگ لفلر^۹ برای

$F(x(t)): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times r}$ تابعی غیرخطی است که شرط لپیشیتز را داراست [۳۱]:

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| < \gamma_1 \|x_1 - x_2\| \quad (۸)$$

$\gamma_1 > 0$ ثابت لپیشیتز و معلوم است.

$f(x(t)): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابع غیرخطی لپیشیتز یک طرفه است [۳۱]:

$$\langle f(x_1) - f(x_2), x_1 - x_2 \rangle \leq \gamma_2 \|x_1 - x_2\|^2 \quad (۹)$$

که در آن $\langle \cdot \rangle$ نشانگر عملگر ضرب داخلی است و γ_2 ثابت لپیشیتز یک طرفه است. همچنین شرط محدودیت داخلی مربعی^{۱۶} را نیز دارد [۳۱]:

$$(f(x_1) - f(x_2))^T (f(x_1) - f(x_2)) \leq \delta \|x_1 - x_2\|^2 + \varphi \langle f(x_1) - f(x_2), x_1 - x_2 \rangle \quad (۱۰)$$

که در آن δ و φ ثابت و معلوم هستند.

فرض می‌شود که بردار پارامتر تکه‌ای ثابت و نامعلوم θ و بردار اغتشاش $d(t)$ هر دو دارای کران محدود هستند به صورتی که بردار پارامتر ثابت و نامعلوم θ شرط زیر را داراست:

$$\|\theta\| \leq \gamma_3 \quad (۱۱)$$

γ_3 اسکالر ثابت و معلوم است. اغتشاش نیز به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$D = \left\{ d(t) = \int_0^\infty d(t)^T d(t) \leq \beta^2 \right\} \quad (۱۲)$$

که $\beta > 0$ کران بالای قابل قبول برای اغتشاش است.

رویتر مقاوم و غیرشکننده لیونبرگر^{۱۷} به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{cases} D^q \hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + f(\hat{x}(t)) + bF(\hat{x}(t))\hat{\theta} \\ \quad + \tilde{L}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (۱۳)$$

که $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار تخمین حالت، $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار تخمین خروجی و $\hat{\theta}(t) \in \mathbb{R}^r$ بردار تخمین پارامتر است. همچنین بهره رویتر به صورت:

$$\tilde{L} = L + \Delta L(t) \quad (۱۴)$$

لحاظ شده است. L ماتریس بهره رویتر بوده و $\Delta L(t)$ اغتشاش جمع‌پذیر روی بهره رویتر با کران شناخته شده $\|\Delta L(t)\| \leq r$ است.

با فرض خطای تخمین رویتر به صورت $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ دینامیک خطای سیستم به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$D^q e(t) = A_{cl}e(t) + b \left[F(x(t))\theta - F(\hat{x}(t))\hat{\theta} \right] + \tilde{f} + d(t) \quad (۱۵)$$

که در آن ماتریس $A_{cl} = A - \tilde{L}C$ تعریف شده و $\tilde{f} = f(x(t)) - f(\hat{x}(t))$ می‌باشد.

قضیه: قانون تطبیق پارامتر زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{\hat{\theta}} = T^{-1} F(\hat{x}(t))^T C (x(t) - \hat{x}(t))$$

تعاریف اولیه حسابان کسری از قبیل مشتق و انتگرال ریمن لیوویل^{۱۳} و تابع گاما^{۱۴} که در مراجع مختلفی مانند [۲۱] و [۵] آمده است، دانسته فرض می‌شود.

تعریف [۲۸]: معادله دیفرانسیل مرتبه کسری غیرخطی زیر که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ است:

$${}_t D_t^q x(t) = f(x(t)) \quad (۱)$$

با توجه به مدل پیوسته توزیع فرکانسی انتگرال گیر مرتبه کسری به صورت (۲) قابل نمایش است.

$$\begin{cases} \frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z(\omega, t) + f(x(t)) \\ x(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) z(\omega, t) d\omega \end{cases} \quad (۲)$$

که در آن $\mu(\omega)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mu(\omega) = \frac{\sin(q\pi)}{\pi} \omega^{-q} \quad (۳)$$

لم ۱ (مکمل شور^{۱۵}) [۲۹]: نامساوی خطی ماتریسی:

$$\begin{bmatrix} Z(x) & W(x) \\ W^T(x) & R(x) \end{bmatrix} < 0 \quad (۴)$$

که در آن $Z(x) = Z^T(x)$ ، $R(x) = R^T(x)$ و $W(x)$ به x بستگی دارد با:

$$\begin{cases} R(x) < 0 \\ Z(x) - W(x)R^{-1}(x)W^T(x) < 0 \end{cases} \quad (۵)$$

معادل است.

لم ۲ [۱۱]: x و y دو بردار حقیقی با بعد یکسان هستند. آنگاه برای هر اسکالر $\varepsilon > 0$ نامساوی زیر برقرار است:

$$2x^T y \leq \varepsilon x^T x + \varepsilon^{-1} y^T y \quad (۶)$$

لم ۳ [۳۰]: هر تابع پیوسته روی یک مجموعه فشرده به صورت یکنواخت پیوسته است. به طور خاص، اگر تابعی در فاصله محدود و بسته از اعداد حقیقی پیوسته باشد در آن فاصله یکنواخت پیوسته نیز خواهد بود.

لم ۴ [۳۰]: هرگاه تابعی روی مجموعه محدود E به صورت یکنواخت پیوسته باشد، روی این مجموعه محدود نیز خواهد بود.

۳- بیان صورت مساله و طراحی رویتر تطبیقی H_∞

سیستم غیرخطی مرتبه کسری به صورت زیر مفروض است:

$$\begin{cases} D^q x(t) = Ax(t) + f(x(t)) + bF(x(t))\theta + d(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (۷)$$

که در آن $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت، $y(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار خروجی، $\theta \in \mathbb{R}^r$ بردار پارامترهای نامعلوم، $b \in \mathbb{R}^{(n \times m)}$ ماتریس ثابت و $d(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار اغتشاش محدود است. A و C ماتریس‌های سیستم و با ابعاد مناسب هستند. همچنین $0 < q < 1$ می‌باشد.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & -2 \int_0^\infty \omega \mu(\omega) z^T(\omega, t) P z(\omega, t) d\omega + \\ & 2e^T(t) A_{cl}^T P e(t) + 2\tilde{f}^T P e(t) + 2\gamma_{F\theta}^T b^T P e(t) \\ & + 2d^T P e(t) + 2\tilde{\theta}^T T \dot{\tilde{\theta}} \end{aligned} \quad (21)$$

با اضافه و کم کردن عبارت $F(\hat{x}(t))\theta$ در قسمت چهارم معادله (۲۱) و جایگذاری $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ می‌توان آن را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} 2(F(x(t))\theta - F(\hat{x}(t))\hat{\theta})^T b^T P e(t) = \\ 2(F(x(t))\theta - F(\hat{x}(t))\theta)^T b^T P e(t) + \\ 2(F(\hat{x}(t))\tilde{\theta})^T b^T P e(t) \end{aligned} \quad (22)$$

با استفاده از لم ۲ در قسمت اول رابطه (۲۲) با ثابت $\varepsilon_1 > 0$ نامساوی زیر نتیجه خواهد شد:

$$\begin{aligned} 2(F(x(t))\theta - F(\hat{x}(t))\theta)^T b^T P e(t) \leq \\ \varepsilon_1 (F(x(t))\theta - F(\hat{x}(t))\theta)^T (F(x(t))\theta - F(\hat{x}(t))\theta) \\ + \varepsilon_1^{-1} e^T(t) P b b^T P e(t) \end{aligned} \quad (23)$$

که با استفاده از شرط لیپشیتز (۸) و شرط (۱۱) عبارت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} (F(x(t))\theta - F(\hat{x}(t))\theta)^T (F(x(t))\theta - F(\hat{x}(t))\theta) = \\ \theta^T (F(x(t)) - F(\hat{x}(t)))^T (F(x(t)) - F(\hat{x}(t))) \\ \leq \theta^T \gamma_1^2 \|e\|^2 \leq \gamma_1^2 \gamma_3^2 \|e\|^2 \end{aligned} \quad (24)$$

با جایگذاری نامساوی (۲۴) در (۲۳) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} 2(F(x(t))\theta - F(\hat{x}(t))\theta)^T b^T P e(t) \leq \\ \varepsilon_1 \gamma_1^2 \gamma_3^2 \|e\|^2 + \varepsilon_1^{-1} e^T P b b^T P e \end{aligned} \quad (25)$$

بنابراین رابطه (۲۱) به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -2 \int_0^\infty \omega \mu(\omega) z^T(\omega, t) P z(\omega, t) d\omega \\ & + 2e^T(t) A_{cl}^T P e(t) + 2\tilde{f}^T P e(t) + \varepsilon_1 \gamma_1^2 \gamma_3^2 \|e\|^2 \\ & + \varepsilon_1^{-1} e^T P b b^T P e + 2(F(\hat{x}(t))\tilde{\theta})^T b^T P e + \\ & + 2d^T P e(t) + 2\tilde{\theta}^T T \dot{\tilde{\theta}} \end{aligned} \quad (26)$$

از آنجا که θ ثابت تکه‌ای فرض شده است، بنابراین $\dot{\theta} = 0$ و $\dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}$ خواهد بود. لذا با در نظر گرفتن قانون تطبیقی به فرم $b^T P = C$ و برقراری تساوی $\tilde{\theta} = T^{-1} F(\hat{x}(t))^T C(x(t) - \hat{x}(t))$ رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$(F(\hat{x}(t))\tilde{\theta})^T b^T P e + \tilde{\theta}^T T \dot{\tilde{\theta}} = 0 \quad (27)$$

با استفاده از تساوی (۲۷) رابطه (۲۶) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -2 \int_0^\infty \omega \mu(\omega) z^T(\omega, t) P z(\omega, t) d\omega + \\ & X^T \begin{bmatrix} \Lambda_1 & P & P \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{bmatrix} X \end{aligned} \quad (28)$$

که در آن $T = T^T$ ماتریس مثبت معین دلخواه است. اگر اعداد مثبت و حقیقی $\varepsilon_4, \varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1$ و ماتریس $P = P^T$ و همچنین ماتریس M وجود داشته باشد به صورتی که نابرابری‌های ماتریسی خطی زیر برقرار گردد:

Optimize η and L

Subject to

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & P + \frac{\rho \varepsilon_3 - \varepsilon_2}{2} I & P & P & P b \\ * & -\varepsilon_3 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\eta I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_4 I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_1 I \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \rho I_n & b^T P - C \\ * & \rho I_n \end{bmatrix} > 0 \quad (17)$$

که:

$$\phi_{11} = PA + A^T P - MC - C^T M^T +$$

$$(\varepsilon_2 \gamma_2 + \varepsilon_3 \delta + \varepsilon_1 \gamma_1^2 \gamma_3^2 + 1)I + \varepsilon_4 r^2 C^T C$$

و $\gamma_3, \gamma_2, \gamma_1$ به ترتیب ثابت‌های تعریف شده در (۸)، (۹) و (۱۱) هستند و ϕ و δ نیز در شرط محدودیت داخلی مربعی (۱۰) ذکر شده‌اند و ρ عددی مثبت و کوچک در نظر گرفته شده است. آنگاه بهره روی‌تگر $L = P^{-1} M$ دینامیک خطای تخمین (۱۵) را پایدار خواهد کرد.

اثبات: با استفاده از تعریف بیان شده دینامیک خطای سیستم (۱۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z(\omega, t) + A_{cl} e(t) + \tilde{f} + \\ \quad b [F(x(t))\theta - F(\hat{x}(t))\hat{\theta}] + d(t) \\ e(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) z(\omega, t) d\omega \end{cases} \quad (18)$$

تابع لیاپانوف به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$V(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) z^T(\omega, t) P z(\omega, t) d\omega + \tilde{\theta}^T T \tilde{\theta} \quad (19)$$

که در آن $T, P > 0$ ماتریس‌هایی مثبت معین و $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ است. با گرفتن مشتق از $V(t)$ و استفاده از رابطه (۱۸) عبارت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \int_0^\infty \mu(\omega) \{-\omega z^T(\omega, t) + e^T(t) A_{cl}^T + \tilde{f}^T \\ & + \gamma_{F\theta}^T b^T + d^T(t)\} P z(\omega, t) d\omega \\ & + \int_0^\infty \mu(\omega) z^T(\omega, t) P \{-\omega z(\omega, t) \\ & + A_{cl} e(t) + \tilde{f} + b \gamma_{F\theta} + d(t)\} d\omega \\ & + 2\tilde{\theta}^T T \dot{\tilde{\theta}} \end{aligned} \quad (20)$$

که $\gamma_{F\theta} = [F(x(t))\theta - F(\hat{x}(t))\hat{\theta}]$ در نظر گرفته شده است. رابطه

فوق با بهره‌گیری از $e(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) z(\omega, t) d\omega$ به این صورت ساده می‌شود:

شود:

با استفاده از نامساوی (۳۲) و (۳۴) می توان شرط کافی برای پایداری را به صورت زیر خلاصه کرد:

$$X^T \begin{bmatrix} \Lambda_2 + I & P + \frac{\varphi \varepsilon_3 - \varepsilon_2}{2} I & P \\ * & -\varepsilon_3 I & 0 \\ * & 0 & -\eta I \end{bmatrix} X < 0$$

که معادل نامساوی زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} \Lambda_2 + I & P + \frac{\varphi \varepsilon_3 - \varepsilon_2}{2} I & P \\ * & -\varepsilon_3 I & 0 \\ * & 0 & -\eta I \end{bmatrix} < 0 \quad (35)$$

برای برقراری نامساوی (۳۵) لازم است رابطه زیر ارضا شود:

$$PA_{cl} + A_{cl}^T P + (\varepsilon_2 \gamma_2 + \varepsilon_3 \delta + \varepsilon_1 \gamma_1^2 \gamma_3^2 + 1)I + \varepsilon_1^{-1} P b b^T P < 0 \quad (36)$$

با استفاده از لم ۲ و شرط $\|\Delta L(t)\| \leq r$ نامساوی:

$$PA_{cl} + A_{cl}^T P < 0 \quad (37)$$

معادل است با:

$$P(A - LC) + (A - LC)^T P - C^T \Delta L(t)^T P - P \Delta L(t) C \leq A^T P + PA - PLC - C^T L^T P + \varepsilon_4 r^2 C^T C + \varepsilon_4^{-1} P^2 < 0 \quad (38)$$

که $\varepsilon_4 > 0$ است. بنابراین نامساوی (۳۶) را به صورت زیر می توان جایگزین کرد:

$$A^T P + PA - PLC - C^T L^T P + (\varepsilon_2 \gamma_2 + \varepsilon_3 \delta + \varepsilon_1 \gamma_1^2 \gamma_3^2 + 1)I + \varepsilon_1^{-1} P b b^T P + \varepsilon_4 r^2 C^T C + \varepsilon_4^{-1} P^2 < 0 \quad (39)$$

با تعریف $M = PL$ و بهره گیری از لم مکمل شور نامساوی (۱۶) به دست می آید. از آنجا که برای حل نامساوی (۱۶) شرط برقراری تساوی $b^T P = C$ ذکر شده، حل همزمان این دو رابطه مورد نیاز است که به منظور افزایش بازه قابل قبول^{۱۸} پاسخها، با توجه به مرجع [۱۵] معادله $b^T P = C$ را می توان با LMI (۱۷) جایگزین کرد.

با توجه به روش پیشنهادی در مرجع [۱۴] کاهش همزمان و متناسب نرم بهره رویتگر و تأثیر اغتشاش در خطای تخمین (η) در حل نامساوی های (۱۶) و (۱۷) مورد نیاز است که به طور خلاصه تحت عنوان بهینه سازی L و η نام برده شده است. با توجه به تساوی $L = P^{-1} M$ ، $\|L\| \leq \|P^{-1}\| \|M\|$ خواهد بود. لذا برای کاهش $\|L\|$ لازم است $\|M\|$ و $\|P^{-1}\|$ مینیمم شود. نامساوی های زیر برای تعیین این مرز معرفی می شوند:

$$\|M\| \leq K_S \rightarrow \begin{bmatrix} K_S I & M^T \\ M & K_S I \end{bmatrix} > 0 \rightarrow \|L\| \leq K_p K_S \quad (40)$$

$$\|P^{-1}\| \leq K_p \rightarrow \begin{bmatrix} P & I \\ I & K_p I \end{bmatrix} > 0$$

که $\Lambda_1 = PA_{cl} + A_{cl}^T P + \varepsilon^{-1} P b b^T P + \varepsilon \gamma \gamma^T I$ است و بردار $X = [e(t) \quad \tilde{f} \quad d(t)]^T$ تعریف شده است.

با استفاده از شرط (۹) عبارت $\gamma_2^T e(t) - e^T(t) \tilde{f} \geq 0$ برای خطای تخمین برقرار است که می توان آن را به صورت نامساوی خطی زیر بیان کرد:

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{f} \\ d(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma_2 I & -\frac{1}{2} I & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{f} \\ d(t) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (29)$$

با اعمال شرط (۱۰) بر روی تابع غیرخطی عبارت $\delta e^T(t) e(t) + \varphi e^T(t) \tilde{f} - \tilde{f}^T \tilde{f} \geq 0$ زیر قابل بازنویسی است:

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{f} \\ d(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta I & \frac{\varphi}{2} I & 0 \\ * & -I & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{f} \\ d(t) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (30)$$

با اضافه کردن رابطه (۲۹) با وزن اسکالر مثبت ε_2 و رابطه (۳۰) با وزن اسکالر ε_3 به سمت راست عبارت زیر حاصل می شود:

$$\dot{V}(t) \leq -2 \int_0^\infty \omega \mu(\omega) z^T(\omega, t) P z(\omega, t) d\omega + X^T \begin{bmatrix} \Lambda_2 & \Lambda_3 & P \\ * & -\varepsilon_3 I & 0 \\ * & 0 & 0 \end{bmatrix} X \quad (31)$$

که

$$\Lambda_2 = PA_{cl} + A_{cl}^T P + (\varepsilon_2 \gamma_2 + \varepsilon_3 \delta + \varepsilon_1 \gamma_1^2 \gamma_3^2)I + \varepsilon_1^{-1} P b b^T P$$

و $\Lambda_3 = P + \frac{\varphi \varepsilon_3 - \varepsilon_2}{2} I$ در نظر گرفته شده است. با توجه به $\int_0^\infty \omega \mu(\omega) z^T(\omega, t) P z(\omega, t) d\omega > 0$ شرط کافی برای $\dot{V} < 0$ به صورت زیر به دست می آید:

$$X^T \begin{bmatrix} \Lambda_2 & P + \frac{\varphi \varepsilon_3 - \varepsilon_2}{2} I & P \\ * & -\varepsilon_3 I & 0 \\ * & 0 & 0 \end{bmatrix} X < 0 \quad (32)$$

اثر اغتشاش خارجی روی پایداری خطا با استفاده از نرم H_∞ $e(t)$ نسبت به $d(t)$ به صورت:

$$\eta = \sup_{d(t) \neq 0} \frac{\|e(t)\|_2^2}{\|d(t)\|_2^2} \quad (33)$$

مینیمم می شود. $\eta > 0$ عددی مثبت است. با استفاده از شرط (۳۳) برای پایداری مقاوم رویتگر تساوی (۳۴) حاصل می شود [۳۲].

$$\dot{V}(t) + e^T(t) e(t) - \eta d^T(t) d(t) < 0 \quad (34)$$

است. رویتگر (۱۳) جهت تخمین متغیرهای حالت با کمک جعبه ابزار *NINTEGER* در لحظه ۰/۴ به کار گرفته شده است. حد اغتشاش بهره رویتگر به صورت زیر برابر ۲ لحاظ شده است:

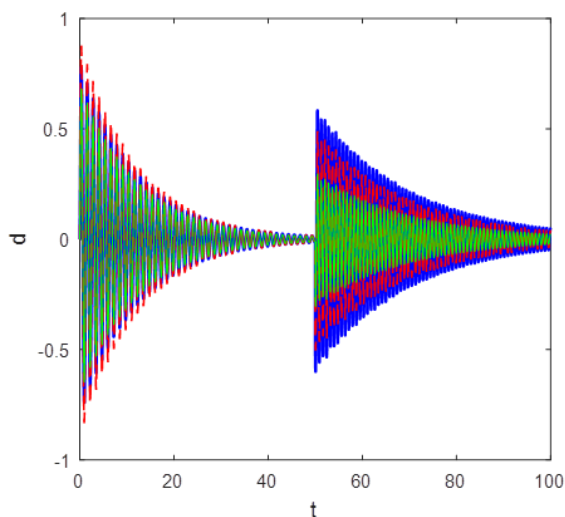
$$\Delta L(t) = D_L F_L(t) E_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \sin t & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

ثابت لیپشیتز یک طرفه برای تابع غیرخطی (۴۴) برابر ۳ به دست آمده است. این تابع غیرخطی محدودیت مربعی درونی را نیز با ثابت‌های φ و δ به ترتیب برابر ۱/۷ و ۱-ارضا می‌کند. همچنین ثابت‌های γ_3, γ_1 و ρ به ترتیب برابر ۱، ۱/۲ و ۰/۰۱۲ در نظر گرفته شده‌اند.

از حل همزمان نامساوی‌های خطی بهره رویتگر از $L = [168.0424 \quad 168.0377 \quad 336.0754]^T$ و پارامتر $\eta = 0.8238$ و

ماتریس متقارن و مثبت $P = 10^3 \begin{bmatrix} 3.3321 & -0.6510 & -1.3401 \\ -0.6510 & 6.1014 & -2.7252 \\ -1.3401 & -2.7252 & 2.0326 \end{bmatrix}$

به دست آمده است. اغتشاش اعمال شده با توجه به شرط (۱۲) در ثانیه ابتدایی به صورت $d(t) = [0.8 \quad 0.9 \quad 0.7]^T e^{-0.08t} \sin(5t)$ وارد شده است. همچنین در ثانیه ۶۰ اغتشاش $d(t) = [7.2 \quad 6 \quad 3.6]^T e^{-0.05t} \sin(8t) u(t - 60)$ نیز به سیستم اضافه شده که در آن تابع پله واحد است. این اغتشاش در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱: اغتشاش اعمال شده به سیستم

پارامتر $\theta = 1 - 0.5u(t - 40)$ لحاظ شده است. تخمین این پارامتر در حضور اغتشاش در شکل ۲ آورده شده است.

استفاده از $\min(w_1 \eta + w_2 K_P + w_3 K_S)$ برای حل نامساوی‌های (۱۶) و (۱۷) موجب کاهش متناسب و همزمان $\|L\|$ و η با توجه به ضرایب w_1, w_2, w_3 خواهد شد. □

تذکر: از آنجا که $f(x(t))$ تابعی پیوسته بوده و $x(t) \in L_\infty$ است، با استفاده از لم ۳ نتیجه می‌شود که $f(x(t))$ به صورت یکنواخت پیوسته است. همچنین با توجه به لم ۴ $f(x(t)) \in L_\infty$ خواهد بود. اثبات همگرایی $e(t)$: فرض می‌شود که $\mu > 0$ وجود دارد به صورتی که نامساوی (۴۱) را برقرار می‌کند:

$$\begin{bmatrix} \Lambda_2 + I & P + \frac{\varphi \varepsilon_3 - \varepsilon_2}{2} I & P \\ * & -\varepsilon_3 I & 0 \\ * & 0 & -\eta I \end{bmatrix} < -\mu I \quad (41)$$

آنگاه نامساوی زیر برقرار خواهد بود:

$$\dot{V} \leq -\mu X^T X \quad (42)$$

با انتگرال‌گیری از نامساوی (۴۲):

$$\mu \int_0^t X^T X \leq V(0) - V(t) \quad (43)$$

برقرار می‌شود که در آن $V(t) \in L_\infty$ و $V(0)$ محدود است، بنابراین $X \in L_2$ و در نتیجه $e(t) \in L_2$ خواهد بود. با توجه به تذکر ۱ و این که تابع $f(x(t))$ به صورت لیپشیتز در نظر گرفته شده است $\dot{e}(t) \in L_\infty$ خواهد بود. بنابراین با استفاده از لم باربالات^{۱۹} [۳۳] $e(t) \rightarrow 0$ می‌رود.

۴- شبیه‌سازی

در این قسمت به منظور اعتبارسنجی و تحلیل رفتار رویتگر طراحی شده، دو مثال ارائه شده است.

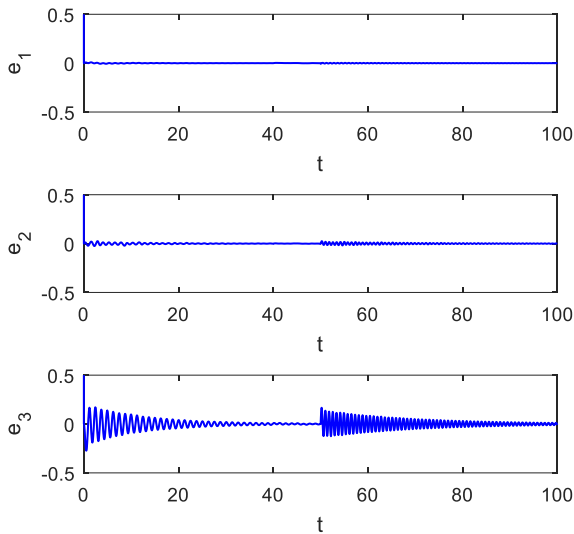
۴-۱- مثال اول

مدل غیرخطی مرجع [۳۴] در حالت مرتبه کسری و با افزودن پارامتر نامعلوم به صورت زیر پیشنهاد شده است:

$$\begin{bmatrix} D^q x_1(t) \\ D^q x_2(t) \\ D^q x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0.9 & 0 \\ 0 & -1 & 0.4 \\ 0.48 & 0.3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(x_2(t)) + 8v(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \sin x_1 \theta + d(t) \quad (44)$$

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

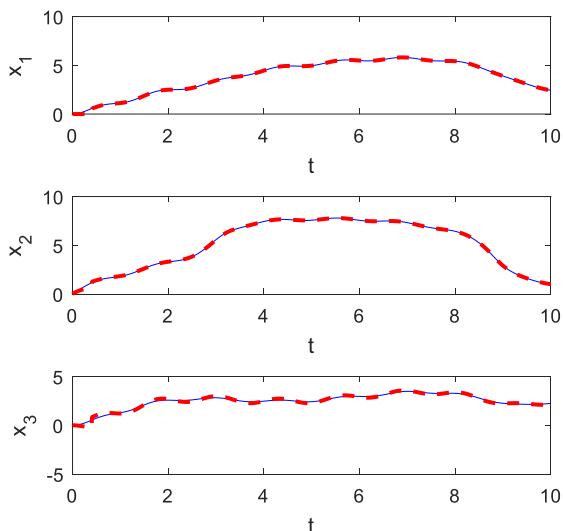
ورودی سیستم به صورت $v(t) = \sin(0.35t)$ در نظر گرفته شده‌اند. با استفاده از جعبه ابزارهای *YALMIP* و *LMI* به حل همزمان نامساوی‌های (۱۶) و (۱۷) پرداخته و بهره رویتگر به دست آورده شده



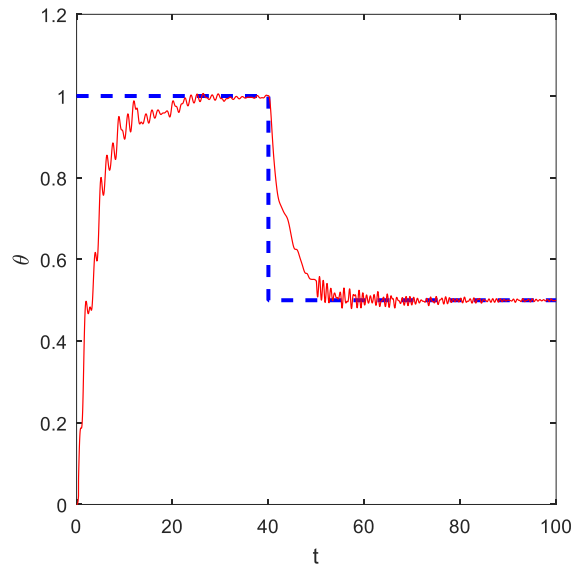
شکل ۴: خطای تخمین متغیرهای حالت توسط رویتگر

خطای تخمین رویتگر جهت وضوح بیشتر دقت تخمین، در شکل ۴ رسم شده است. با توجه به نرم اغتشاش ورودی و η حاصل از طراحی رویتگر مطلوب، خطای تخمین در بازه قابل قبول بوده و بیانگر مقاوم بودن تخمین همزمان حالت و پارامتر نامعلوم سیستم توسط رویتگر طراحی شده می‌باشد.

به‌منظور نمایش بهتر عملکرد رویتگر در لحظات اولیه، تخمین متغیرهای حالت سیستم و خطای تخمین ۱۰ ثانیه ابتدایی در شکل‌های ۵ و ۶ آورده شده است.



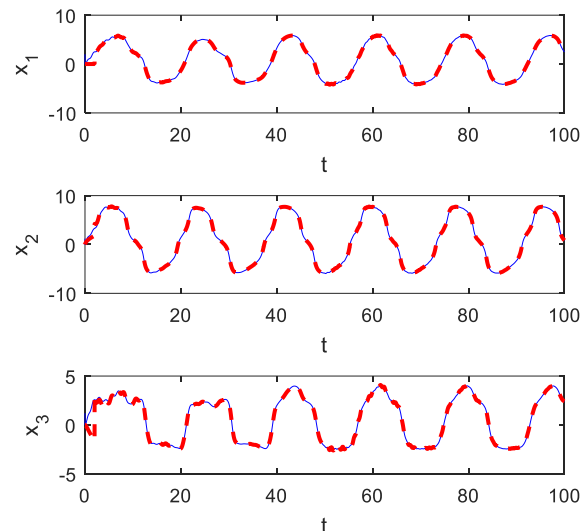
شکل ۵: متغیرهای حالت سیستم (خط پیوسته - آبی) و تخمین متغیرهای حالت توسط رویتگر (خط چین - قرمز) در ۱۰ ثانیه ابتدای تخمین



شکل ۲: مقدار واقعی پارامتر θ (خط چین - آبی) و تخمین پارامتر توسط رویتگر تطبیقی (خط پیوسته - قرمز)

همانطور که مشاهده می‌شود پارامتر θ توسط رویتگر به خوبی تخمین زده شده است. همچنین از ثانیه ۷۰ به بعد که اغتشاش اعمالی به سیستم به صفر میل کرده است تخمین با سرعت بیشتر و خطای کمتری به مقدار واقعی همگرا شده است.

نتایج حاصل از تخمین متغیرهای حالت در حضور اغتشاش در شکل ۳ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود علی‌رغم وجود اغتشاش بهره رویتگر و اغتشاش ورودی تخمین حالت‌های سیستم به خوبی صورت گرفته است.

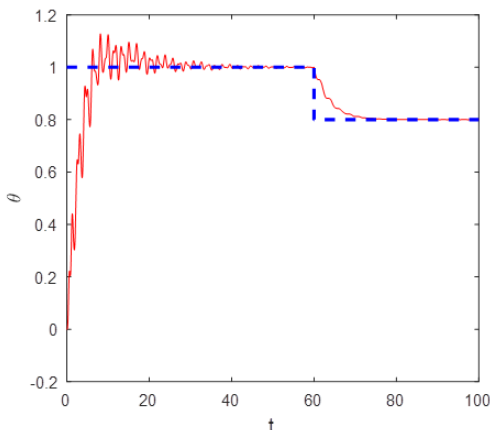


شکل ۳: متغیرهای حالت سیستم (خط پیوسته - آبی) و تخمین متغیرهای حالت توسط رویتگر (خط چین - قرمز)

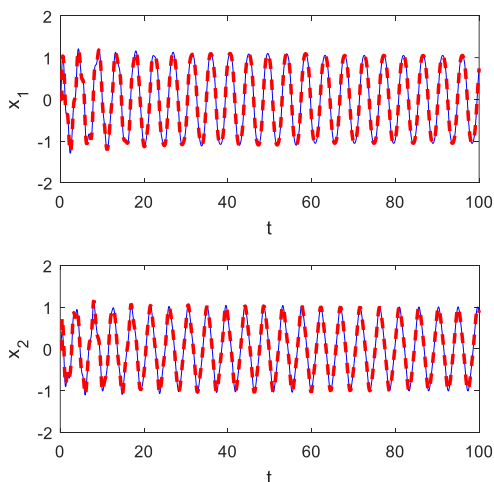
به صورت ۲۰۰- و ۱۹۹- ناحیه طراحی \bar{d}_r برابر $5/9372$ به دست می آید. همچنین ثابت‌های سیستم غیرخطی (۴۶) به ترتیب γ_1 ، γ_2 و γ_3 برابر ۱، $0/6$ و $1/5$ فرض شده است. حد اغتشاش بهره روینگر برابر ۲ و دینامیک این اغتشاش به فرم زیر لحاظ شده است:

$$\Delta L(t) = D_L F_L(t) E_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

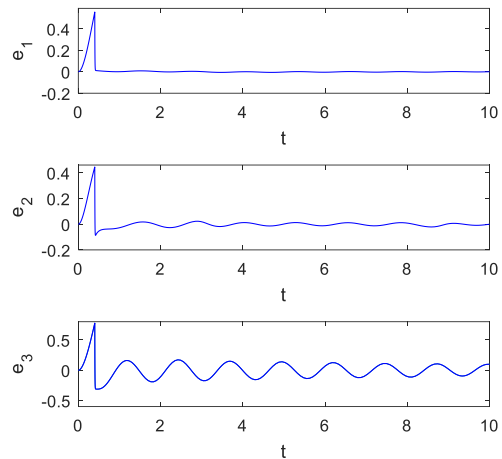
همچنین $\theta = 1 - 0.2u(t - 60)$ در نظر گرفته شده است. از حل همزمان نامساوی (۱۶) و (۱۷) (با فرض ρ برابر $0/012$) بهره روینگر $L = [73.3228 \quad 83.5524]^T$ و $\eta = 0.8531$ به دست آورده شده است. نتایج حاصل از تخمین پارامتر نامعلوم θ در حضور اغتشاش $d(t) = [1.5 \quad 1.2]^T e^{-0.08t} \sin(5t)$ و اعمال روینگر در لحظه $0/4$ در شکل ۷ آورده شده است. در این مثال نیز تخمین پارامتر در حضور و عدم حضور اغتشاش نشان داده شده است. در ادامه تخمین متغیرهای حالت سیستم در حضور اغتشاش در شکل ۸ و خطای حاصل از تخمین در شکل ۹ نشان داده شده است.



شکل ۷: مقدار واقعی θ (خط چین- آبی) و تخمین پارامتر توسط روینگر تطبیقی (خط پیوسته- قرمز)



شکل ۸: متغیرهای حالت سیستم (خط پیوسته- آبی) و تخمین متغیرهای حالت توسط روینگر (خط چین- قرمز)



شکل ۹: خطای تخمین متغیرهای حالت توسط روینگر در ۱۰ ثانیه ابتدایی تخمین

۴-۲- مثال دوم

مدل غیرخطی مرتبه کسری حرکت یک جسم در مختصات دکارتی [۲۰] به صورت زیر ارائه شده است:

$$D^q X(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} -x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin x_2(t) \theta + d(t) \quad (46)$$

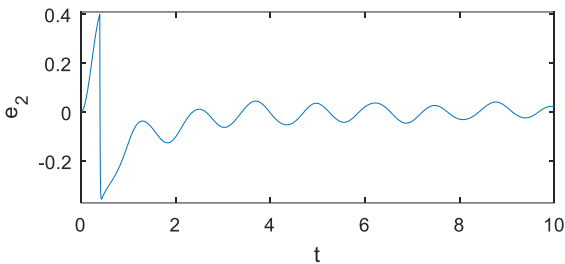
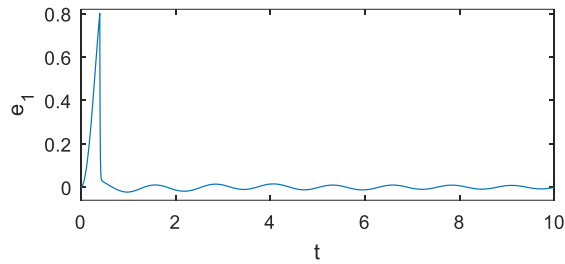
$$Y(t) = [1 \quad 0] X(t)$$

$X = [x_1 \quad x_2]^T$ در نظر گرفته شده است. همانطور که در [۲۳، ۳۵] بیان شده است تابع غیرخطی $\begin{bmatrix} -x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix}$ لیپشیتز محلی است و روی مجموعه $\mathbb{D} = \{X \in \mathbb{R}^2 : \|X\| \leq d_r\}$ ثابت لیپشیتز آن $3d_r^2$ است. با افزایش شعاع ناحیه لیپشیتز \mathbb{D} ، ثابت لیپشیتز با سرعت زیادی افزایش می‌یابد. به منظور افزایش بازه طراحی بهتر است از ویژگی لیپشیتز یک طرفه بودن تابع غیرخطی مورد نظر استفاده کرد. این تابع غیرخطی ویژگی لیپشیتز یک طرفه را در کل فضای $\mathbb{D} = \{X \in \mathbb{R}^2\}$ داراست. از طرف دیگر می‌توان این تابع غیرخطی را روی مجموعه $\mathbb{D} = \{X \in \mathbb{R}^2 : \|X\| \leq \bar{d}_r\}$ دارای محدودیت مربعی درونی با ثابت‌های δ و φ در نظر گرفت که شعاع این مجموعه در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\bar{d}_r = \min \left(\sqrt{-\frac{\varphi}{4}}, \sqrt{\delta + \frac{\varphi^2}{4}} \right), \varphi < 0 \quad (47)$$

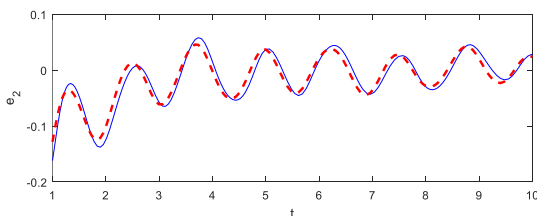
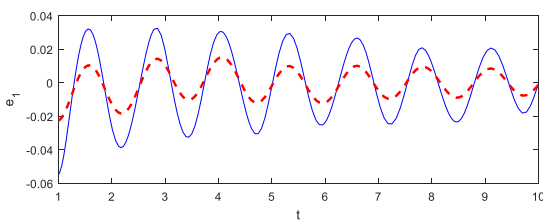
$$\delta + \frac{\varphi^2}{4} > 0$$

بنابراین مجموعه مورد نظر برای طراحی از اشتراک دو مجموعه \mathbb{D} و \mathbb{D} به دست آمده و برابر با \mathbb{D} خواهد بود. با در نظر گرفتن φ و δ به ترتیب

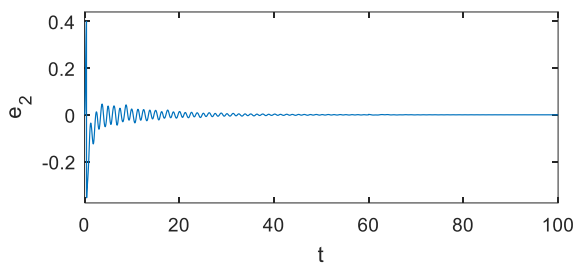
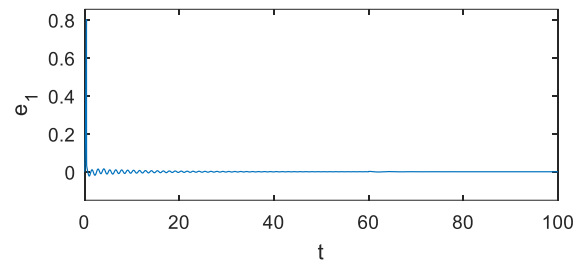


شکل ۱۱: خطای تخمین متغیرهای حالت توسط روینگر در ۱۰ ثانیه ابتدای تخمین

به منظور مقایسه عملکرد روینگر پیشنهادی، در ادامه به طراحی روینگر مرجع [۱۵] پرداخته شده است. برای طراحی این روینگر در ناحیه‌ای با شعاع $5/9372$ لازم است ثابت لپشیتز $105/7511$ در نظر گرفته شود. همچنین با توجه به این که ثابت لپشیتز در نامساوی (۲۱) این مرجع، با توان دوم ظاهر شده، LMI مورد نظر جواب قابل قبولی ندارد. لذا ناحیه پایداری برای روینگر لپشیتز یک طرفه بزرگتر از ناحیه پایداری روینگر لپشیتز است. برای طراحی روینگر لپشیتز ناحیه طراحی به $d_r = 1$ کاهش داده شد. شکل ۱۲ خطای تخمین متغیرهای حالت توسط این دو روینگر بعد از زمان گذرا را نشان می‌دهد.

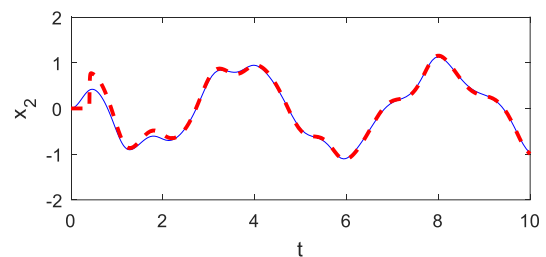
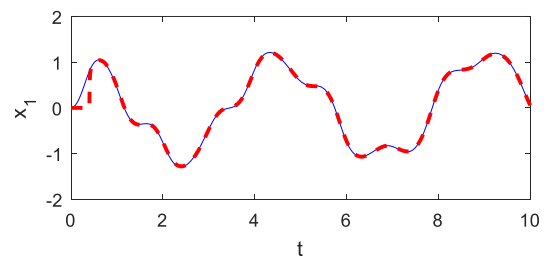


شکل ۱۲: خطای تخمین متغیرهای حالت توسط روینگر لپشیتز یک طرفه (خط چین - قرمز) و خطای تخمین متغیرهای حالت توسط روینگر مرجع [۱۵] (خط پیوسته - آبی)



شکل ۹: خطای تخمین متغیرهای حالت توسط روینگر

به منظور نمایش بهتر عملکرد روینگر در لحظات اولیه، تخمین متغیرهای حالت سیستم و خطای تخمین ۱۰ ثانیه ابتدایی در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ آورده شده است. با توجه به اینکه دامنه اغتشاش در ۱۰ ثانیه ابتدایی تخمین به $1/5$ نیز می‌رسد، روینگر پیشنهادی در مقابل این اغتشاش مقاوم عمل کرده است.



شکل ۱۰: متغیرهای حالت سیستم (خط پیوسته - آبی) و تخمین متغیرهای حالت توسط روینگر (خط چین - قرمز) در ۱۰ ثانیه ابتدای تخمین

[2] A. S. Ammour, S. Djennoune, W. Aggoune and M. Bettayeb, "Stabilization of fractional-order linear systems with state and input delay," *Asian J. Control*, vol. 17, no. 5, pp. 1946-1954, 2015.

[3] Y. Luo, Y. Q. Chen, H. S. Ahn and Y. G. Pi, "Fractional order robust control for cogging effect compensation in PMSM position servo systems: Stability analysis and experiments," *Control Eng. Practice*, vol. 18, no. 9, pp. 1022-1036, 2010.

[4] T. Sangpet and S. Kuntanapreeda, "Force control of an electrohydraulic actuator using a fractional order controller," *Asian J. Control*, vol. 15, no. 3, pp. 764-772, 2012.

[5] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York, 1999.

[6] R. Hilfer, *Application of Fractional Calculus in Physics*, World Science Publishing, Singapore, 2000.

[7] A. Zemouche and M. Boutayeb, "Nonlinear-observer-based synchronization and unknown input recovery," *IEEE Transaction on Circuits Systems*, vol. 56, no. 8, pp. 1720-1731, 2008.

[8] I. N'doye, M. Zasadzinski, M. Darouach and N. E. Radhy, "Observer-based control for fractional-order continuous - time systems," *Proc of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 1932-1937, Shanghai, China, December 2009.

[9] D. Matignon and B. D. Novel, "Observer-based controllers for fractional differential systems," *Proceedings of the 36th Conference on Decision & Control*, vol. 5, pp. 4967-4972, December 1997.

[۱۰] بهروز صفری نژادبان و مجتبی اسد، «ارائه دو فیلتر کالمن مرتبه کسری جدید برای سیستم‌های مرتبه کسری خطی در حضور نویز اندازه‌گیری خطی»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، جلد ۴۷، شماره ۲، ۶۰۷-۵۹۵، ۱۳۹۶.

[11] E. A. Boroujeni and H. R. Momeni, "Non-fragile nonlinear fractional order observer design for a class of nonlinear fractional order systems," *Signal Process*, vol. 92, no. 10, pp. 2365-2370, 2012.

[12] E. A. Boroujeni and H. R. Momeni, "Lyapunov based design of a nonlinear resilient fractional order observer," *In Proc: 21st Iranian Conference on Electrical Engineering*, pp. 1-5, Mashhad, Iran, May 2013.

[13] E. A. Boroujeni and H. R. Momeni, "An iterative method to design optimal non-fragile H_∞ observer for Lipschitz nonlinear fractional order systems," *Nonlinear Dynamics*, vol. 80, no. 4, pp. 1801-1810, 2015.

[14] E. A. Boroujeni, H. R. Momeni and M. Sojoodi, "An LMI approach to resilient H_∞ fractional order observer design for Lipschitz fractional order nonlinear systems using continuous frequency distribution," *Modares Journal of Electrical Engineering*, vol. 12, no. 1, pp. 1-10, 2012.

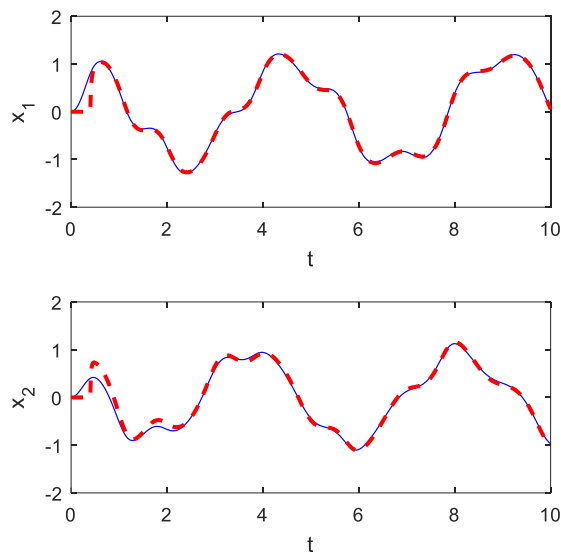
[15] I. N'doye and M. Darouach, " H_∞ adaptive observer for fractional-order systems," *Int. J. Adapt. Control Signal Process*, vol. 31, no. 3, pp. 314-331, 2017.

[16] C. S. Jeong, E. E. Yaz, A. Bahakeem and Y. I. Yaz, "Resilient design of observers with general criteria using LMIs," *The 25th American Control Conference*, pp. 111-116, Minnesota, USA, June 2006.

[17] M. Pourgholi and V. Johari Majd, "A novel robust proportional-integral (PI) adaptive observer design for chaos synchronization," *Chin. Phys. B*, vol. 20, no. 12, 120503, pp. 1-7, 2011.

[18] M. Abbaszadeh and H. J. Marquez, "Design of nonlinear state observers for one-Sided Lipschitz systems," February 2013, <https://arxiv.org/abs/1302.5867>.

همچنین تخمین متغیرهای حالت توسط روباتیک مرجع [۱۵] که در لحظه ۰/۴ به سیستم وارد شده، در شکل ۱۳ آورده شده است.



شکل ۱۳: متغیرهای حالت سیستم (خط پیوسته- آبی) و تخمین متغیرهای حالت روباتیک مرجع [۱۵] (خط چین-قرمز)

همان‌طور که در شکل ۱۲ مشاهده می‌شود خطای تخمین متغیر حالت x_1 توسط روباتیک مرجع [۱۵] بیشتر از روباتیک طراحی شده در این مرجع می‌باشد. این امر به دلیل وجود اغتشاش در بهره روباتیک و غیرشکننده بودن روباتیک طراحی شده در این مقاله است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی مثال اول و دوم بیانگر عملکرد مقاوم و دقیق تخمین حالت و پارامترهای نامعلوم توسط روباتیک تطبیقی غیرشکننده و مقاوم طراحی شده در این مقاله می‌باشد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از مدل پیوسته توزیع فرکانسی انتگرال‌گیر مرتبه کسری و لیاپانوف غیرمستقیم، قید پایداری روباتیک برای سیستم غیرخطی مرتبه کسری لپیشیتز یک‌طرفه به صورت نامساوی خطی ماتریسی به دست آمده است. در طراحی ارائه شده در این مقاله، کران بالای اغتشاشات بیرونی وارد شده به سیستم، کران بالای آشفتگی‌های بهره و کران بالای پارامترهای نامعلوم سیستم از دانسته‌های مساله فرض شده است. یکی از پیشنهادات برای ادامه کار تعیین حداکثر مقدار قابل تحمل این تغییرات در صورتی که روباتیک بتواند پایداری خود را حفظ نماید با استفاده از LMI است. همچنین گسترش طراحی به دسته وسیع‌تری از سیستم‌های غیرخطی نیز یکی دیگر از پیشنهادات موجود برای ادامه کار است.

مراجع

[1] Y. Li, Y. Q. Chen and H. S. Ahn, "Fractional-order iterative learning control for fractional-order linear systems," *Asian J. Control*, vol. 13, no. 1, pp. 54-63, 2011.

- with control constraints,” 20th Iranian Conference on Electrical Engineering, pp. 910-915, Tehran, Iran, May 2012.
- [27] M. Y. Xu, G. D. Hu and Y. B. Zhao, “Reduced-order observer design for one-sided Lipschitz non-linear systems,” *IMA Journal of Mathematical Control & Information*, vol. 26, no. 3, pp. 299–317, 2009.
- [28] J. C. Trigeassou, N. Maamri, J. Sabatier and A. Oustaloup, “A Lyapunov approach to the stability of fractional differential equations,” *Signal Processing* 91, vol. 91, no.3, pp. 437–445, 2011.
- [29] F. Chen and W. Zhang, “LMI criteria for robust chaos synchronization of a class of chaotic systems,” *Nonlinear Analysis TMA* 67, vol. 67, no. 12, pp. 3384–3393, 2007.
- [30] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, New York: McGraw-Hill, 1976.
- [31] E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [32] S. Boyd, L.E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
- [33] J. J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1991.
- [34] F. Cacace, A. Germani and C. Manes, “An observer for a class of nonlinear systems with time varying observation delay,” *Systems & Control Letters*, vol. 51, no. 5, pp. 305–312, 2010.
- [35] W. Zhang, H. Su, H. Wang and Z. Han, “Full-order and reduced-order observers for one-side nonlinear systems using Riccati equations,” *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, vol. 17, no. 12, pp. 4968–4977, 2012.
- [19] M. Karkhaneh and M. Pourgholi, “Adaptive observer design for one-Sided Lipschitz class of nonlinear systems,” *Modares Journal of Electrical Engineering*, vol. 11, no. 4, pp. 45-51, 2012.
- [20] Y. H. Lan, L. L. Wang, L. Ding and Y. Zhou, “Full-order and reduced-order observer design for a class of fractional-order nonlinear systems,” *Asian Journal of Control*, vol. 18, no. 5, pp. 1-11, 2016.
- [21] Y. H. Lan, W. J. Li, Y. Zhou and Y. P. Luo, “Non-fragile observer design for fractional-order one-sided Lipschitz nonlinear systems,” *International Journal of Automation and Computing*, vol. 10, no. 4, pp. 296-302, 2013.
- [22] A. Jmal, O. Naifar, A. B. Makhlof, N. Derbel and M. A. Hammami, “On observer design for nonlinear Caputo fractional-order systems,” vol. 20, no. 5, pp. 1-8, 2018.
- [23] M. Benallouch, M. Boutayeb and M. Zasadzinski, “Observer design for one-sided Lipschitz discrete-time systems,” *Systems and Control Letters*, vol. 61, no. 9, pp. 879–886, 2012.
- [24] M. Pourgholi and V. J. Majd, “Robust adaptive observer design for Lipschitz class of nonlinear systems,” *International Journal of Computer, Electrical, Automation, Control and Information Engineering*, vol. 6, no. 3, pp. 275-279, 2012.
- [۲۵] محمد مهدی عارفی، «طراحی یک روینگر مقاوم برای دسته وسیعی از سیستم‌های غیرخطی در حضور دینامیک‌های مدل نشده»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، جلد ۴۷، شماره ۲، ۶۲۷–۶۲۱، ۱۳۹۶.
- [26] M. H. Asemani, V. J. Majd and S. Mobayen, “Robust H_∞ observer - based control of uncertain T-S fuzzy systems

زیر نویس ها

- ¹¹ Adaptive observer
¹² Uncertain nonlinear systems
¹³ Riemman-Liouville
¹⁴ Gamma function
¹⁵ Schur complement
¹⁶ Quadratic inner boundedness
¹⁷ Luenberger-type
¹⁸ Feasible region
¹⁹ Barbalat

- ¹ Fractional differential calculus
² Lipschitz
³ Fragile
⁴ Off-line
⁵ Non-fragile
⁶ Lyapunov
⁷ One-sided Lipschitz
⁸ Caputo
⁹ Mittag-Leffler
¹⁰ Quasi-one sided Lipschitz