

پایدارسازی محلی کلاسی از سیستم‌های غیرخطی سوئیچ ضربه‌ای با محدودیت نرم سیگنال کنترل: رویکرد نامساوی‌های ماتریسی

محسن قلعه‌نوئی^۱، دانشجوی دکتری؛ محمدرضا اکبرزاده توتونچی^۲، استاد؛ ناصر پریرز^۳، استاد

۱- گروه برق - دانشکده مهندسی - دانشگاه فردوسی مشهد - مشهد - ایران - ghalehnoie.mohsen@mail.um.ac.ir

۲- گروه برق - دانشکده مهندسی - دانشگاه فردوسی مشهد - مشهد - ایران - akbazar@um.ac.ir

۳- گروه برق - دانشکده مهندسی - دانشگاه فردوسی مشهد - مشهد - ایران - n-pariz@um.ac.ir

چکیده: این مقاله، پایدارسازی کلاسی از سیستم‌های غیرخطی سوئیچ ضربه‌ای با محدودیت نرم سیگنال کنترل را مطالعه می‌کند. به دلیل همین محدودیت، تنها کافی است که شرایط پایداری و فرضیات مربوط به دینامیک‌های غیرخطی بر روی یک زیرفضای شامل مبدأ برقرار باشند. البته، این فرضیات به گونه‌ای است که اغلب سیستم‌های واقعی را پوشش می‌دهد. هدف در این مقاله، طراحی سیگنالی است که بتواند همگرایی نمایی مسیرهای حالت به یک کران غایی به اندازه کافی کوچک را در حضور نایقینی‌ها تضمین نماید. لذا در ابتدا، برای یک سیستم کلی غیرخطی، شرایطی ارائه می‌شود که تضمین‌کننده همگرایی همه مسیرهای حالت شروع شده از یک زیرفضای جذب به یک کران غایی است. این شرایط برحسب یک تابع لیاپانوف مشترک و حداقل زمان توقف بوده و تنها کافی است بر روی زیرفضای جذب برقرار باشد. در بخش دوم، با استفاده از تابع لیاپانوف تریبلی و بهره‌گیری از فیدبک حالت، شرایط بیان شده در بخش اول، به صورت مجموعه‌ای از نامساوی‌های خطی یا دوخطی بازنویسی می‌شود. همچنین یک مسأله بهینه‌سازی ارائه می‌گردد که با حل آن، علاوه بر تعیین پارامترهای سیگنال کنترل، بزرگ‌ترین ناحیه همگرایی و کوچک‌ترین کران غایی به دست می‌آید. در نهایت، چند مثال شهودی به منظور نشان دادن کارایی روش پیشنهادی ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: سیستم سوئیچ ضربه‌ای، محدودیت نرم، نایقینی، نامساوی ماتریسی، ناحیه جذب، کران غایی.

Local Stabilization for a Class of Nonlinear Impulsive Switched Systems with Norm-Bounded Input: A Matrix Inequality Approach

M. Ghalehnoie¹, Ph.D. Candidate; M.R. Akbarzadeh-Tootoonchi², Professor; N. Pariz¹, Professor

1- Electrical Department, Engineering Faculty, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran, Email: ghalehnoie.mohsen@mail.um.ac.ir

2- Electrical Department, Engineering Faculty, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran, Email: akbazar@um.ac.ir

3- Electrical Department, Engineering Faculty, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran, Email: n-pariz@um.ac.ir

Abstract: This paper investigates stabilization for a class of nonlinear impulsive switched systems with norm-bounded input constraint. Due to this constraint, it is only enough that the stabilization criteria and assumptions related to the nonlinearities be met on a subspace containing the origin. Certainly, these assumptions are such that they covers most of real-world systems. The purpose of this paper is to design a norm-bounded control that guarantees the exponential convergence of trajectories to a sufficient small ultimate bound in presence of uncertainties. Therefore, firstly, we present the stability criteria for a general model that ensures the convergence of all trajectories starting from a region of attraction to an ultimate bound. These conditions are in terms of a common Lyapunov function candidate and the minimum dwell-time, and it is enough to be valid on the region of attraction. Secondly, using the common quadratic Lyapunov function candidate and using the state-feedback approach, the established conditions are reformulated as a set of linear or bilinear matrix inequalities. Besides, to achieve the control parameters along with the largest convergence area and smallest ultimate bound, we propose an optimization problem. Finally, some illustrative examples are presented to demonstrate the proposed approach.

Keywords: Impulsive switched system, norm-boundedness, uncertainty, matrix inequality, region of attraction, ultimate bound.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۶/۰۸/۰۵

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۶/۰۹/۲۳ و ۱۳۹۶/۱۲/۲۷

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۷/۰۴/۲۶

نام نویسنده مسئول: محمدرضا اکبرزاده توتونچی

نشانی نویسنده مسئول: ایران - مشهد - میدان آزادی - دانشگاه فردوسی مشهد - دانشکده مهندسی - گروه برق - قطب علمی رباتیک و پردازش هوشمند اطلاعات.

۱- مقدمه

در اغلب فرآیندهای نوین، دینامیک‌های پیوسته و گسسته زمان به شدت در یکدیگر درهم تنیده شده و خانواده پیچیده‌ای از سیستم‌ها، به نام سیستم‌های هایبرید، را تشکیل داده‌اند. سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای، کلاس چالش‌برانگیزی از این خانواده است. این کلاس شامل تعداد متناهی زیرسیستم و یک قانون سوئیچ می‌باشد، به گونه‌ای که متغیرهای حالت در زمان سوئیچ ممکن است دچار جهش شوند [۱]. سیستم‌های سوئیچ و ضربه‌ای دارای کاربردهای فراوانی در کنترل و مدل‌سازی فرآیندهای واقعی بوده که از آن جمله می‌توان به بوم‌شناسی جمعیت [۲]، سیستم‌های مکانیکی [۳]، فرآیندهای شیمیایی [۴] و سیستم‌های آشوب [۵، ۶] اشاره داشت.

وجود همزمان سوئیچ و ضربه، سبب پیچیدگی بیشتر این کلاس نسبت به سیستم‌های سنتی شده است [۱] و لذا محققان تلاش‌های فراوانی را صرف حل مسائل بنیادین کنترل در این حیطه نموده‌اند. در بسیاری از این تحقیقات، راهکارهای گوناگونی مبتنی بر انواع مختلف کاندیدای تابع لیاپانوف ارائه شده است. به عنوان مثال، می‌توان به تابعی لیاپانوف-کراسوفسکی [۷-۹] و یا گسسته شده کاندیدای تابع لیاپانوف [۱۰، ۱۱] اشاره نمود.

از دیدگاهی دیگر، در پاره‌ای از مطالعات، یک کاندیدای لیاپانوف مشترک برای همه زیرسیستم‌ها در نظر گرفته می‌شود [۱۲]. در مقابل، گروهی دیگر از تحقیقات، تکنیک توابع لیاپانوف چندگانه را استفاده می‌نمایند [۶، ۸، ۱۰، ۱۳-۱۶]. در تکنیک لیاپانوف چندگانه، برای هر زیرسیستم، یک تابع لیاپانوف مجزا در نظر گرفته می‌شود که تنها کافی است مشتق زمانی آن در هنگام فعال بودن هر زیرسیستم غیرمثبت باشد و در سایر زمان‌ها، این مشتق می‌تواند مثبت باشد. بدین ترتیب، اگر چه در این تکنیک، تعداد پارامترها بیشتر شده ولی معمولاً شرایطی با محافظه‌کاری کمتر حاصل خواهد شد.

از دیدگاه قاعده سوئیچ نیز می‌توان تحقیقات انجام‌شده را به دو گروه تقسیم نمود: (۱) آنهایی که پایداری تحت هر قاعده سوئیچ دلخواه را بررسی می‌کنند و (۲) آنهایی که قواعد سوئیچ مقید را در نظر دارند. از آنجا که پایداری و پایدارسازی تحت هر قاعده سوئیچ دلخواه همواره ممکن نیست [۱۷]، اغلب تحقیقات کاربردی، سیگنال‌های سوئیچی را در نظر دارند که در آنها، یا حداقل/حداکثر زمان بین دو سوئیچ متوالی (زمان توقف) [۱۸-۲۰] و یا میانگین آن [۷-۱۰، ۲۱-۲۳] مشخص است. معمولاً در هنگام بررسی سیستم‌های غیرخطی که دارای فرضیاتی به صورت سراسری هستند و یا در هنگام بررسی سیستم‌های خطی، تکنیک میانگین دوره توقف دارای محافظه‌کاری کمتری است.

با این حال، لازم به ذکر است که در روش‌های مبتنی بر میانگین دوره توقف، تضمینی وجود ندارد که مسیرهای حالت برای همه لحظات آتی، درون یک زیرفضای معین باقی بماند. لذا هنگامی که شرایط، مبتنی بر فرضیاتی است که فقط درون یک زیرفضا معتبر است (و خارج از این زیرفضا ممکن است برقرار نباشد)، تکنیک میانگین دوره توقف

کارایی خود را از دست می‌دهد. این در حالی است که با مفروض بودن حداقل و یا حداکثر زمان مربوط به دوره توقف می‌توان تضمین نمود که مسیر حالت، درون زیرفضا باقی بماند.

از دیدگاه عملی، بویژه جایی که دستکاری در قانون سوئیچ خارج از اختیار است، طراحی یک قانون کنترل پایدارکننده حائز اهمیت می‌باشد. اغلب مطالعات در این حیطه، دارای دو محدودیت عمده هستند. اولاً، اشباع محرک‌ها را در نظر نمی‌گیرند. ثانیاً، شرایط پایداری به صورت سراسری و بر روی کل فضای حالت، پیشنهاد شده است و لذا فرضیات تصور شده نیز به صورت سراسری هستند. این امر می‌تواند محافظه‌کاری زیادی به دنبال داشته باشد. این مسأله زمانی بیشتر جلوه می‌نماید که نرم‌سیگنال کنترل (برای جلوگیری از اشباع محرک‌ها) محدود بوده و مطالعه سیستم در یک زیرفضا اجتناب‌ناپذیر است.

بر اساس دانش نویسندگان، فعالیت‌های محدودی در زمینه سیستم‌های سوئیچ و ضربه‌ای انجام شده است که اشباع محرک‌ها را بررسی کرده باشند [۲۰، ۲۴-۲۷]. به هر صورت، در عمل چندین جنبه از سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای وجود دارد که باید به طور همزمان در مطالعات مدنظر باشد که عبارتند از: غیرخطی‌های شناخته‌شده و فرضیات عملی برای آنها، نایقینی‌های مختلف، و محدودبودن نرم‌سیگنال کنترل. تا به این لحظه، این جنبه‌ها به طور همزمان مورد توجه قرار نگرفته‌اند. از طرف دیگر، در بسیاری از روش‌هایی که دینامیک‌های غیرخطی پیوسته زمان را در نظر دارند، شرط لیپ‌شیتز به صورت سراسری برای این دینامیک‌ها تصور شده و در نتیجه شرایط استخراج شده (که شامل ماتریس‌هایی از ثوابت لیپ‌شیتز هستند) نیز به صورت سراسری می‌باشند. اما، در بسیاری از سیستم‌های دنیای واقعی، ممکن است شرط لیپ‌شیتز در کل فضا برقرار نبوده و یا اینکه برای برقراری آن، نیازمند ماتریس ثوابت بسیار بزرگ هستند به گونه‌ای که شرایط بیان‌شده به یک مسأله حل‌نشده تبدیل می‌گردد.

توجه داشته باشید، با محدودبودن نرم‌سیگنال کنترل (به منظور جلوگیری از اشباع محرک‌ها)، رسیدن به یک سیگنال پایدارساز سراسری، عملاً دشوار و نشدنی است [۲۰، ۲۷]. لذا، در نظر گرفتن شرایط لیپ‌شیتز به صورت سراسری می‌تواند محافظه‌کارانه باشد. رویکرد کمتر محافظه‌کارانه این است که این فرضیات بر روی زیرفضایی شامل مبدأ در نظر گرفته شود، یعنی جایی که در آن، نرم‌سیگنال کنترل نیز محدود است. بنابراین، در این مقاله، بر روی پایدارسازی محلی تمرکز شده است و فرضیات مربوط به دینامیک‌های غیرخطی، به صورت محلی بر روی یک زیرفضای شامل مبدأ بیان شده‌اند. در نظر گرفتن منابع مختلفی از نایقینی‌های صفرنشونده در مدل مورد بررسی، دیگر تفاوت عمده این مقاله با سایر فعالیت‌ها است. به همین دلیل، روش پیشنهادی در این مقاله، همگرایی مسیرهای حالت سیستم به یک کران غایی (و نه همگرایی به خود مبدأ) را بررسی می‌نماید.

در این مقاله، در ابتدا برای یک مدل جامع‌تر، شرایط پایداری محلی به گونه‌ای ارائه می‌شود که تضمین‌کننده همگرایی مسیرهای

داده می‌شوند. علاوه بر این، بیضی گون $\mathcal{E}(P, r)$ که بر حسب ماتریس $P > 0$ و اسکالر حقیقی مثبت $r > 0$ ساخته می‌شود، به صورت $\{x \in \mathbb{R}^n | x^T P x \leq r\}$ تعریف می‌گردد. نماد «*» نیز در نامساوی‌های ماتریسی بیانگر بخش‌های متقارن است. تأکید می‌گردد که در هر کجای مقاله که ابعاد ماتریس به صراحت بیان نشده است، فرض بر این است که آن ماتریس‌ها دارای ابعاد مناسب برای اعمال جبری هستند. همچنین، در سرتاسر مقاله، تابع لیاپانوف V بر حسب متغیرهای حالت x می‌باشد. به منظور ساده‌نویسی، در این مقاله به جای نماد $V(x(t))$ ، از نماد $V(t)$ استفاده می‌شود.

۲- بیان مسأله

در این مقاله، پایدارسازی سیستم غیرخطی سوئیچ ضربه‌ای زیر بررسی می‌گردد که در آن بردار ورودی $u(t) \in \mathbb{R}^m$ دارای محدودیت نرم است:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g_i(x, u), & t \neq t_k, k \in \mathbb{N}^+ \\ x(t^+) = C_i x(t), & t = t_k, k \in \mathbb{N}^+ \end{cases} \quad (1)$$

که در آن،

$$\begin{aligned} g_i(x, u) &= (A_i + \Delta A_i)x + (B_i + \Delta B_i)u(t) \\ &+ f_{ci}(x, u) + \phi_i(t) \end{aligned} \quad (2)$$

بیانگر دینامیک پیوسته زمان مربوط به زیرسیستم i است.

در سیستم (۱) دنباله زمانی $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} := \{t_1, t_2, \dots, t_k, \dots\}$ یک دنباله اکیداً افزایشی از لحظات ضربه بوده که توسط قاعده سوئیچ $\sigma(t): \mathbb{R}^+ \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ شکل می‌یابد. این قاعده سوئیچ، لحظه فعال شدن هر یک از m زیرسیستم موجود را تعیین می‌کند. همچنین، $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ بیانگر زیرسیستم فعال می‌باشد. در لحظات ضربه، هنگامی که یک زیرسیستم به زیرسیستم دیگر سوئیچ می‌نماید، بردار حالت $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بر اساس ماتریس جهش $C_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و به صورت ناگهانی دچار جهش می‌گردد. فرض بر این است که بردار حالت $x(t)$ در لحظات ضربه از سمت چپ پیوسته باشد. به عبارت دیگر:

$$x(t_k) = x(t_k^-) = \lim_{\zeta \rightarrow 0^+} x(t_k - \zeta). \quad (3)$$

به علاوه، حد راست بردار حالت $x(t)$ در لحظه ضربه t_k ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x(t_k^+) = \lim_{\zeta \rightarrow 0^+} x(t_k + \zeta). \quad (4)$$

در سیستم (۱)، ماتریس‌های A_i ، B_i و C_i ، ماتریس‌های معلوم و ثابتی هستند. همچنین، تابع $f_{ci}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ معلوم بوده و بیانگر دینامیک‌های غیرخطی و شناخته شده در زیرسیستم i است به گونه‌ای که $f_{ci}(0, 0) = 0$ می‌باشد. ماتریس‌های ΔA_i ، ΔB_i و $\phi_i(t)$ نیز نشان‌دهنده انواع مختلفی از ناپیچینی‌ها و اغتشاشات ناشناخته برای زیرسیستم i است. علاوه بر این موارد، فرض می‌شود که حداقل زمان مابین دو سوئیچ متوالی τ_{min} شناخته شده است. به بیان دیگر:

$$\tau_{min} := \inf_{k \in \mathbb{N}^+} (t_k - t_{k-1}), \quad (5)$$

حالت به یک کران غایی باشد. این شرایط بر حسب یک کاندیدای تابع لیاپانوف بیان شده و از تکنیک حداقل دوره توقف استفاده می‌گردد. سپس با به کارگیری تابع لیاپانوف تربیعی و استفاده از فیدبک حالت، این شرایط به صورت مجموعه‌ای از نامساوی‌های ماتریسی خطی و دوخطی برای سیستم مورد نظر بازنویسی می‌شود.

در کنار این موارد، به منظور دستیابی به کوچک‌ترین کران غایی به همراه بزرگ‌ترین ناحیه جذب، یک مسأله بهینه سازی معرفی می‌شود که قیود آن، نامساوی‌های ماتریسی خطی و دوخطی هستند. این مسأله توسط جعبه‌ابزارهایی نظیر PENBMI [۲۸] قابل حل می‌باشد. از طرف دیگر، از آنجا که همه بخش‌های دوخطی در قیود، شامل یک متغیر اسکالر است، الگوریتم‌های مبتنی بر نامساوی‌های خطی نیز برای حل این مسأله بهینه‌سازی وجود دارد [۲۷].

به طور خلاصه، نوآوری‌های روش ارائه شده به ترتیب اهمیت عبارت است از: (۱) در نظر گرفتن محدودیت نرم برای ورودی کنترل در حوزه سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای و در نتیجه جلوگیری از اشباع محرک‌ها. (۲) در نظر گرفتن ساختار کاملی از سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای که در بردارنده همزمان دینامیک‌های غیرخطی شناخته شده و انواع مختلفی از ناپیچینی‌های صفرنشونده است. بدین ترتیب، این ساختار طیف وسیعی از سیستم‌ها و فرآیندهای واقعی را پوشش خواهد داد. (۳) ارائه شرایط پایداری به صورت محلی که کاربرد این شرایط را در موارد متعددی امکان پذیر می‌نماید. از آن جمله می‌توان به مواردی اشاره کرد که دینامیک‌های غیرخطی، شرط لپ‌شیتز را به صورت محلی برآورده می‌نمایند و یا آنهایی که فضای مجاز برای متغیرهای حالت، به دلیل مسائل عملیاتی یا فیزیکی محدود شده است. (۴) توسعه یک مسأله بهینه سازی به منظور دستیابی به بزرگ‌ترین ناحیه جذب و کوچک‌ترین کران غایی؛ و در نظر گرفتن جنبه‌های مختلف عملی در این مسأله بهینه‌سازی.

ادامه این مقاله بدین صورت سازمان‌دهی شده است. در بخش ۲، توصیف مسأله مورد نظر به همراه پیش‌نیازها آورده شده است. نتایج اصلی این مقاله، شامل شرایط پایدار سازی و مسأله بهینه سازی، در بخش ۳ شرح داده شده است. در این بخش و در قضیه ۱، ابتدا با الهام از روش‌های بیان شده در [۲۹، ۳۰] و به ویژه روش بیضی گون جاذب در [۲۷]، شرایط پایداری برای سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای توسعه داده شده است. سپس در نتیجه ۱، به منظور ارائه راهکاری نظام‌مند جهت یافتن سیگنال کنترل، این شرایط به صورت مجموعه‌ای از نامساوی‌های ماتریسی بازنویسی می‌شود. نتایج شبیه سازی، به منظور تأیید قضایای توسعه داده شده، در بخش ۴ دیده می‌شود. در نهایت، نتیجه‌گیری در بخش ۵ آورده شده است.

علائم و نشانه‌ها: علائم استفاده شده در نگارش مقاله کاملاً استاندارد هستند. به عنوان نمونه، برای نمایش ماتریس متقارن معین (یا نیمه معین) مثبت A ، از نماد $A > 0$ (یا $A \geq 0$) استفاده می‌شود. همچنین ماتریس‌های یکه و صفر، به ترتیب با نمادهای I و 0 نمایش

توجه به این زیرفضاها بیان می‌شوند: (الف) مجموعه داخلی Ω_1 که مسیره‌های حالت در نهایت به این مجموعه همگرا می‌شود و (ب) مجموعه خارجی $\Omega_2 \supset \Omega_1$ که نه تنها سیگنال کنترل بر روی آن دارای نرُم محدود است بلکه همه مسیره‌های حالتی که از زیرفضای Ω_2 شروع شده باشد، علاوه بر همگرایی غایی به زیرفضای Ω_1 همواره درون زیرفضای Ω_2 باقی می‌ماند. به بیان دیگر، فضای Ω_2 یک مجموعه نامتغیر مثبت است. شرایط بیان شده در این بخش، نه تنها وجود چنین ویژگی را تضمین می‌کند بلکه پایداری غایی سیستم را نیز برآورده می‌سازد. لذا، در ابتدا، شرایط کافی پایداری برای سیستم جامع زیر که در آن قاعده سوئیچ، شرط (۵) را برآورده می‌کند، ارائه می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_i(x(t)), & t \neq t_k, k \in \mathbb{N}^+ \\ x(t^+) = g_i(x(t)), & t = t_k, k \in \mathbb{N}^+ \end{cases} \quad (9)$$

در سیستم (۹)، توابع برداری f_i و g_i به ترتیب دینامیک‌های پیوسته زمان و گسسته زمان مربوط به زیرسیستم i هستند. در اینجا نیز، زیرسیستم فعال i ، توسط قاعده سوئیچ $\sigma(t)$ تعیین می‌شود. در ادامه و برای سیستم (۹)، نشان داده می‌شود که همه مسیره‌های حالت شروع شده از زیرفضای خارجی:

$$\Omega_2 = v(V, r) := \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) \leq r\} \quad (10)$$

در نهایت به زیرفضای درونی:

$$\Omega_1 = v(V, \delta) := \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) \leq \delta\} \quad (11)$$

همگرا می‌شوند که در آن V یک کاندیدای تابع لیاپانوف مناسب است به گونه‌ای که $V(x) = c$ به ازای هر $c > 0$ یک منحنی بسته باشد. همچنین $r > \delta > 0$ اسکالره‌های حقیقی و مثبت هستند. لازم به ذکر است که علت بیان ناحیه جذب خارجی Ω_2 و کران غایی Ω_1 بر حسب کاندیدای لیاپانوف V ، سهولت تبدیل شرایط استخراج شده به مجموعه‌ای از نامساوی‌های ماتریسی خطی و دوخطی در هنگام بررسی سیستم (۱) می‌باشد.

قضیه ۱: اسکالره‌های حقیقی و مثبت $0 < \delta < r$ را در نظر بگیرید. فرض کنید که یک کاندیدای تابع لیاپانوف مناسب V ، اسکالره‌های حقیقی و مثبت ρ ، $\mu \geq 1$ و $\delta' > \delta$ وجود داشته باشند به گونه‌ای که $V(x) = c$ به ازای هر $c > 0$ یک منحنی بسته بوده و همچنین شرایط زیر برقرار باشد:

$$\dot{V} \leq -\rho V, \quad \forall x \in v(V, r) \setminus v(V, \delta), \quad (12)$$

$$V(t_k^+) \leq \mu V(t_k), \quad \forall x \in v(V, r) \setminus v(V, \delta), \quad (13)$$

$$V(t_k^+) \leq \delta', \quad \forall x \in v(V, \delta), \quad (14)$$

$$\alpha := \rho - \ln \mu / \tau_{min} > 0, \quad (15)$$

جایی که τ_{min} در (۵) تعریف شده است. آنگاه سیستم (۹) پایدار غایی با باند غایی $v(V, \delta)$ به ازای همه شرایط اولیه $x_0 \in v(V, r)$ می‌باشد. به علاوه، سیستم (۹) به صورت نامی به مجموعه نامتغیر مثبت $v(V, \delta')$ همگرا می‌شود.

همچنین، فرض‌های زیر در مورد سیستم (۱) مدنظر می‌باشد:

فرض ۱ [۲۷]: نایقینی‌ها، فرم ماتریسی زیر را برآورده می‌کنند:

$$[\Delta A_i(t) \quad \Delta B_i(t) \quad \phi_i(t)] = D_i F_i [E_{ai} \quad E_{bi} \quad E_{\phi i}], \quad (6)$$

که در آن ماتریس‌های D_i, E_{ai}, E_{bi} و $E_{\phi i}$ ثابت و معلوم بوده و ماتریس $F_i(t)$ یک ماتریس نامعلوم و متغیر با زمان است، به گونه‌ای که برای هر $t \in \mathbb{R}^+$ شرط $F_i^T(t) F_i(t) \leq I$ برقرار است.

فرض ۲ [۲۷]: تابع $f_{ci}(x, u)$ شرط محلی زیر را بر روی دامنه $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ (که مبدأ دستگاه مختصات را در بردارد) برآورده می‌کند:

$$f_{ci}^T f_{ci} \leq x^T M_i^T M_i x + u^T N_i^T N_i u \quad (7)$$

که در آن، ماتریس‌های ثابت M_i و N_i دارای ابعاد مناسب هستند.

نکته ۱: در اغلب مطالعات انجام شده، فرض ۲ به چشم می‌خورد؛ با این تفاوت که شرط لیب‌شیتز تنها بر روی متغیر x در نظر گرفته می‌شود. همچنین این مطالعات فرض می‌کنند که این شرط بر روی کل فضای \mathbb{R}^n برقرار است. در مورد چنین سیستم‌هایی، می‌توان $\mathbb{D} = \mathbb{R}^n$ و $N_i = 0$ را در نظر گرفت. بنابراین، فرض موردنظر در این مقاله (یعنی فرض ۲)، این دسته از سیستم‌ها را نیز پوشش می‌دهد.

نکته ۲: در نظر گرفتن فرض ۲، به صورت محلی و بر حسب هر دو متغیر x و u ، دامنه کاربرد نتایج استخراج شده را به تعداد بی‌شتری از سیستم‌های واقعی گسترش می‌دهد. به طور نمونه در مورد سیستم‌هایی که دینامیک‌های غیرخطی، نه تنها تابعی از متغیر حالت است بلکه تابعی از ورودی کنترل نیز می‌باشد.

نکته ۳: با در نظر گرفتن فرض‌های ۱ و ۲، دینامیک پیوسته زمان $g_i(x, u)$ کلاسی از سیستم‌های غیرخطی را شکل می‌دهد که می‌توان اغلب سیستم‌های واقعی را با این ساختار مدل‌سازی نمود [۲۷].

پیش از توسعه نتایج اصلی، صورت خاصی از نامساوی [۲۷]، ارائه می‌شود. این لم به همراه لم‌های مشهور مکمل شور [۳۱] و لم-اس [۲۷] در استخراج شرایط پایداری به صورت نامساوی‌های ماتریسی کاربرد دارند.

لم ۱ [۳۲]: ماتریس‌های حقیقی D, E و F با ابعاد مناسب را در نظر بگیرید. اگر $F^T F \leq I$ باشد، آنگاه به ازای هر اسکالر حقیقی مثبت $\gamma > 0$ ، نامساوی زیر برقرار است:

$$DFE + E^T F^T D^T \leq \gamma D D^T + \gamma^{-1} E^T E. \quad (8)$$

۳- نتایج اصلی

در این بخش و در ابتدا، اقدام به توسعه شرایط پایداری برای یک سیستم سوئیچ ضربه‌ای جامع‌تر می‌شود. در حقیقت، روش ارائه شده، توسعه‌ای از روش بی‌ضی‌گون جاذب به سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای غیرخطی می‌باشد [۲۷]. البته تغییرات عمده‌ای در این روش اعمال شده است تا بتواند مسائل عملی بیشتری را پوشش دهد.

در روش ارائه شده، به دلیل حضور نایقینی‌ها و همچنین محدود بودن نرُم سیگنال کنترل، به ترتیب دو زیرفضا در نظر گرفته شده و شرایط با

غیرخطی با نایقینی‌های صفرنشونده می‌باشد. البته تغییرات چشمگیری در شرایط بیان شده وجود دارد. در قضیه ۱، شرایط ارائه شده برای پایداری باید بر روی مجموعه خارجی برقرار باشد در حالی که در روش‌های مشابه، این شرایط بایستی بر روی کل فضای \mathbb{R}^n برقرار باشد. این تفاوت، سبب سادگی پاره‌ای از فرضیات ضروری در آینده می‌گردد. به‌طور مثال، کافی است تا شرط لیپ‌شیتز مربوط به غیرخطی‌های معلوم به‌صورت محلی برقرار باشند. از دیگر تفاوت‌های موجود مابین قضیه ۱ و مراجع مذکور، وجود شرط (۱۴) می‌باشد. در واقع، به‌دلیل وجود اثر ضربه، در مقایسه با [۲۹، ۳۰]، شرط (۱۴) در کنار سایر شرایط و به‌منظور تضمین پایداری در هنگام ضربه در نزدیکی مبدأ، اضافه شده است.

به‌هر حال، یافتن یک کاندیدای تابع لیاپانوف V به‌گونه‌ای که کوچک‌ترین کران غایی و بزرگ‌ترین مجموعه جذب را به‌دنبال داشته باشد، شرط اساسی در قضیه ۱ محسوب می‌گردد. حال که شرایط پایداری برای سیستم جامع (۹) بیان گردید، این آمادگی وجود دارد که با در نظر گرفتن یک کنترل‌کننده فیدبک حالت، شرایط بیان شده در قضیه ۱ را برای سیستم (۱) بازنویسی نمود و روشی نظام‌مند برای یافتن تابع لیاپانوف ارائه کرد.

برای این منظور، سیگنال کنترل زیر را در نظر بگیرید:

$$u(t) = u_{\sigma}(t) \quad (22)$$

که در آن $u_i = K_i x$ ، $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ سیگنال‌های کنترل مناسبی هستند که توسط قاعده سوئیچ $\sigma(t)$ با یکدیگر ترکیب شده‌اند. براساس این قاعده سوئیچ، ورودی کنترل u_i هنگامی فعال می‌شود که زیرسیستم i فعال باشد. همچنین تابع لیاپانوف تربیعی $V = x^T P x$ که در آن P یک ماتریس معین مثبت با ابعاد مناسب است را در نظر داشته باشید. بایستی توجه داشت که تحت این تابع لیاپانوف، زیرفضای خارجی $\Omega_2 = \nu(V, r)$ معادل بیضی‌گون $\mathcal{E}(P, r)$ بوده و زیرفضای داخلی $\Omega_1 = \nu(V, \delta)$ نیز معادل بیضی‌گون $\mathcal{E}(P, \delta)$ می‌باشد. همچنین، در طول بازه‌های زمانی که زیرسیستم i فعال است، مشتق زمانی تابع لیاپانوف V به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = g_i^T(x, u_i) P x + x^T P g_i(x, u_i), \quad (23)$$

که در آن $g_i(x, u_i)$ در (۲) تعریف شده است و ΔB_i و ΔA_i نایقینی‌هایی هستند که در فرض ۱ تعریف شده‌اند. جایگزینی این موارد در (۲۳)، رابطه زیر را به‌دنبال دارد:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & x^T (A_i^T P + P A_i + K_i^T B_i^T P + P B_i K_i \\ & + E_{ai}^T F_i^T D_i^T P + P D_i F_i E_{ai} + K_i^T E_{bi}^T F_i^T D_i^T P \\ & + P D_i F_i E_{bi} K_i) x + f_{ci}^T P x + x^T P f_{ci} \\ & + E_{\phi i}^T F_i^T D_i^T P x + x^T P D_i F_i E_{\phi i}. \end{aligned} \quad (24)$$

با استفاده از نامساوی-1 و فرض ۲ نتیجه می‌شود:

$$f_{ci}^T P x + x^T P f_{ci} \leq \zeta_i x^T P P x + \zeta_i^{-1} f_{ci}^T f_{ci} \leq x^T (\zeta_i P P + \zeta_i^{-1} M_i^T M_i + \zeta_i^{-1} K_i^T N_i^T N_i K_i) x \quad (25)$$

برهان: در ابتدا نشان داده می‌شود که پیش از همگرایی به کران غایی $v(V, \delta)$ ، مقدار تابع لیاپانوف به‌صورت نمایی کاهش می‌یابد. برای این منظور فرض می‌شود که این همگرایی در طول بازه زمانی $[t_k, t_{k+1}]$ رخ دهد.

در ابتدا، روند تغییرات تابع لیاپانوف V ، در طول بازه زمانی $(t_0, t_k]$ بررسی می‌گردد. بر اساس شرط (۱۲) به‌ازای هر $t \in (t_0, t_1]$ داریم:

$$V(t) \leq V(t_0) \exp(-\rho(t - t_0)), \quad (16)$$

که نتیجه زیر را به‌دنبال دارد:

$$V(t_1) \leq V(t_0) \exp(-\rho(t_1 - t_0)), \quad (17)$$

و در نتیجه، با توجه به (۱۳) داریم:

$$V(t_1^+) \leq \mu V(t_0) \exp(-\rho(t_1 - t_0)). \quad (18)$$

با ادامه همین روند برای بازه‌های زمانی $(t_1, t_2]$ ، $(t_2, t_3]$ ، ... و $(t_{k-1}, t_k]$ خواهیم داشت:

$$V(t_k^+) \leq \mu^k V(t_0) \exp(-\rho(t_k - t_0)). \quad (19)$$

که اگر حداقل زمان توقف برابر τ_{min} در نظر گرفته شود، آنگاه تعداد واقعی سوئیچ‌ها کوچک‌تر یا مساوی $(t_k - t_0) / \tau_{min}$ خواهد بود. بنابراین، رابطه (۱۹) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \frac{V(t_k^+)}{V(t_0)} & \leq \mu^{(t_k - t_0) / \tau_{min}} \exp(-\rho(t_k - t_0)) \\ & = \exp\left(\frac{t - t_0}{\tau_{min}} \ln \mu\right) \exp(-\rho(t_k - t_0)) \\ & = \exp\left(-\left(\rho - \frac{\ln \mu}{\tau_{min}}\right)(t_k - t_0)\right). \end{aligned} \quad (20)$$

بدین ترتیب، با توجه به شرط (۱۵) و رابطه (۲۰) می‌توان نتیجه گرفت که مقدار تابع لیاپانوف در طول بازه زمانی $(t_0, t_k]$ ، به‌صورت نمایی و با نرخ $\alpha < \rho$ کاهش می‌یابد. در طول بازه $(t_k, t_{\delta}]$ نیز، با توجه به (۱۲)، نرخ کاهش تابع لیاپانوف از α بیشتر است. در نتیجه اگر اولین زمان همگرایی به کران $v(V, \delta)$ به‌صورت $t_{\delta} \in (t_k, t_{k+1})$ نامیده شود، آنگاه برای هر $t \in (t_0, t_{\delta}]$ به‌دست می‌آید:

$$V(t) \leq \mu^k V(t_0) \exp(-\rho(t - t_0)). \quad (21)$$

با توجه به شرط (۱۲)، مسیر حالت برای تمام زمان‌های $t \in (t_{\delta}, t_{k+1}]$ درون این کران $v(V, \delta)$ باقی خواهد ماند و پس از جهش در زمان t_{k+1}^+ مسیر حالت درون فضای $v(V, \delta')$ باقی می‌ماند (به رابطه (۱۴) توجه شود). از آنجایی که $\delta' < r$ است، مجدداً مسیر حالت به‌صورت نمایی به کران $v(V, \delta)$ همگرا شده و همین روند تا انتها ادامه خواهد یافت. بدین ترتیب، $v(V, r)$ یک مجموعه جذب بوده و $v(V, \delta')$ مجموعه‌ای متغیر مثبت است. همچنین $v(V, \delta)$ کران غایی محسوب شده و یک مجموعه جذب خواهد بود. بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود. \square

نکته ۴: روش پیشنهادی در قضیه ۱، تلفیق و توسعه‌ای از روش‌های ارائه شده در [۲۷، ۲۹، ۳۰] برای سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای

با ضرب ماتریس $diag(P^{-1}, I, I, I)$ از سمت چپ و راست در نامساوی ماتریسی (۳۶)، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} -\psi_i & P^{-1}M_i^T & W_i^T N_i^T & P^{-1}E_{ai}^T & W_i^T E_{bi}^T \\ * & \zeta_i I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \zeta_i I & 0 & 0 \\ * & * & * & \gamma_{ai} I & 0 \\ * & * & * & * & \gamma_{bi} I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (38)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \psi_i = & -\tau_{1i}P^{-1} + \tau_{2i}P^{-1} + \rho P^{-1} + P^{-1}A_i^T \\ & + A_i P^{-1} + P^{-1}K_i^T B_i^T + B_i K_i P^{-1} + \zeta_i I \\ & + (\gamma_{\phi i} + \gamma_{ai} + \gamma_{bi})D_i^T D_i, \end{aligned} \quad (39)$$

$$W_i^T = P^{-1}K_i^T, \quad (40)$$

می‌باشد. لذا، اگر به‌ازای هر $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ نامساوی‌های ماتریسی (۳۵) و (۳۸) برقرار باشند، رابطه (۱۲) برقرار خواهد بود.

حال، به‌منظور یافتن معادلی برای شرط (۱۳) به‌صورت نامساوی‌های ماتریسی، تابع لیاپانوف $V = x^T P x$ در (۱۳) جایگذاری می‌شود. بدین ترتیب رابطه (۱۳)، معادل رابطه زیر به‌ازای هر $x \in \mathcal{E}(P, r) \setminus \mathcal{E}(P, \delta)$ خواهد بود:

$$x^T(t_k^+) P x(t_k^+) \leq \mu x^T(t_k) P x(t_k), \quad (41)$$

با استفاده از تابع جهش مربوط به زیرسیستم i از (۱) نتیجه می‌شود که $x(t_k^+) = C_i x(t_k)$ لذا از (۴۱) می‌توان نتیجه گرفت که به‌ازای هر $x \in \mathcal{E}(P, r) \setminus \mathcal{E}(P, \delta)$ باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$x^T(t_k) (C_i^T P C_i - \mu P) x(t_k) \leq 0. \quad (42)$$

مشابه آنچه که در مورد روابط (۳۲) و (۳۳) بیان شد، با اعمال لم-اس، شرط (۴۲) (که بر اساس توضیحات فوق معادل شرط (۱۳) برای سیستم (۱) است) برآورده می‌شود، اگر اسکالرهایی مثبت τ_{3i} و τ_{4i} وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که روابط:

$$-\tau_{3i}r + \tau_{4i}\delta \geq 0, \quad (43)$$

$$\tau_{3i}P - \tau_{4i}P - (C_i^T P C_i - \mu P) \geq 0 \quad (44)$$

برقرار باشند. با استفاده از لم مکمل شور برای نامساوی (۴۴) و سپس ضرب کردن این حاصل در ماتریس $diag(P^{-1}, I)$ (از سمت چپ و راست) نامساوی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \tau_{3i}P^{-1} - \tau_{4i}P^{-1} + \mu P^{-1} & P^{-1}C_i^T \\ * & P^{-1} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (45)$$

بدین ترتیب نشان داده شد که شرط (۱۳) با نامساوی‌های ماتریسی (۴۳) و (۴۵) معادل می‌گردد. به‌طور مشابه، با جایگذاری:

$$V(t_k^+) = x^T(t_k^+) P x(t_k^+) = x^T(t_k) C_i^T P C_i x(t_k) \quad (46)$$

در رابطه (۱۴) و سپس اعمال لم-اس می‌توان نتیجه گرفت که رابطه (۱۴) نیز برقرار است، اگر اسکالرهایی مثبت τ_{5i} وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که روابط:

$$\delta' - \tau_{5i}\delta \geq 0, \quad (47)$$

$$\tau_{5i}P - C_i^T P C_i \geq 0 \quad (48)$$

که در آن ζ_i یک اسکالر حقیقی مثبت است. با استفاده از لم ۱ نیز می‌توان نامساوی‌های زیر را نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} E_{\phi i}^T F_i^T D_i^T P x + x^T P D_i F_i E_{\phi i} \\ \leq \gamma_{\phi i} x^T P D_i D_i^T P x + \gamma_{\phi i}^{-1} E_{\phi i}^T E_{\phi i} x, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} x^T E_{ai}^T F_i^T D_i^T P x + x^T P D_i F_i E_{ai} x \\ \leq \gamma_{ai} x^T P D_i D_i^T P x + \gamma_{ai}^{-1} x^T E_{ai}^T E_{ai} x, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} x^T K_i^T E_{bi}^T F_i^T D_i^T P x + x^T P D_i F_i E_{bi} K_i x \\ \leq \gamma_{bi} x^T P D_i D_i^T P x + \gamma_{bi}^{-1} x^T K_i^T E_{bi}^T E_{bi} K_i x, \end{aligned} \quad (28)$$

که در آن‌ها $\gamma_{\phi i}$ و γ_{bi} ، γ_{ai} اسکالرهایی حقیقی مثبت و دلخواهی می‌باشند. با جایگذاری روابط (۲۵) الی (۲۸) در رابطه (۲۴)، کران بالایی به‌صورت زیر برای مشتق تابع لیاپانوف بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq x^T (\Psi_i + \zeta_i^{-1} M_i^T M_i + \zeta_i^{-1} K_i^T N_i^T N_i K_i \\ + \gamma_{ai}^{-1} E_{ai}^T E_{ai} + \gamma_{bi}^{-1} K_i^T E_{bi}^T E_{bi} K_i) x \\ + \gamma_{\phi i}^{-1} E_{\phi i}^T E_{\phi i} x, \end{aligned} \quad (29)$$

جایی که:

$$\begin{aligned} \Psi_i = A_i^T P + P A_i + K_i^T B_i^T P + P B_i K_i + \zeta_i P P \\ + (\gamma_{\phi i} + \gamma_{ai} + \gamma_{bi}) P D_i D_i^T P, \end{aligned} \quad (30)$$

می‌باشد. لذا اگر به‌ازای هر $x \in \Omega := \mathcal{E}(P, r) \setminus \mathcal{E}(P, \delta)$ شرط زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned} x^T (\Psi_i + \zeta_i^{-1} M_i^T M_i + \zeta_i^{-1} K_i^T N_i^T N_i K_i + \gamma_{ai}^{-1} E_{ai}^T E_{ai} \\ + \gamma_{bi}^{-1} K_i^T E_{bi}^T E_{bi} K_i + \rho P) x \leq -\gamma_{\phi i}^{-1} E_{\phi i}^T E_{\phi i} x, \end{aligned} \quad (31)$$

می‌توان نتیجه گرفت که به‌ازای هر $x \in \Omega$ شرط $\dot{V} \leq \rho x^T P x = \rho V$ برقرار است. به‌عبارت دیگر با برقراری رابطه (۳۱) به‌ازای هر $x \in \Omega$ شرط (۱۲) نیز برقرار خواهد بود.

بر اساس لم-اس، اگر اسکالرهایی حقیقی مثبت τ_{1i} و τ_{2i} وجود داشته باشد، به‌گونه‌ای که دو شرط زیر برقرار باشد:

$$-\gamma_{\phi i}^{-1} E_{\phi i}^T E_{\phi i} - \tau_{1i}r + \tau_{2i}\delta \geq 0, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \tau_{1i}P - \tau_{2i}P \\ - (\Psi_i + \zeta_i^{-1} M_i^T M_i + \zeta_i^{-1} K_i^T N_i^T N_i K_i \\ + \gamma_{ai}^{-1} E_{ai}^T E_{ai} + \gamma_{bi}^{-1} K_i^T E_{bi}^T E_{bi} K_i + \rho P) \geq 0. \end{aligned} \quad (33)$$

آنگاه دستگاه نامساوی‌های ماتریسی:

$$\begin{aligned} x^T P x \leq r, \\ x^T P x \geq \delta, \end{aligned} \quad (34)$$

که معادل زیرفضای $\Omega := \mathcal{E}(P, r) \setminus \mathcal{E}(P, \delta)$ می‌باشد، شرط (۳۱) و در نتیجه شرط (۱۲) را برآورده می‌نماید. افزون‌بر این، با استفاده از لم مکمل شور، روابط (۳۲) و (۳۳) به‌ترتیب معادل روابط زیر هستند:

$$\begin{bmatrix} -\tau_{1i}r + \tau_{2i}\delta & E_{\phi i}^T \\ * & \gamma_{\phi i} I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} -\Pi_i & M_i^T & K_i^T N_i^T & E_{ai}^T & K_i^T E_{bi}^T \\ * & \zeta_i I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \zeta_i I & 0 & 0 \\ * & * & * & \gamma_{ai} I & 0 \\ * & * & * & * & \gamma_{bi} I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (36)$$

که در آن:

$$\Pi_i = -\tau_{1i}P + \tau_{2i}P + \Psi_i + \rho P. \quad (37)$$

اسکالره‌های حقیقی و مثبت ρ ، $\mu \geq 1$ ، $\delta' > \delta$ ، ζ_i ، τ_{ji} ، γ_{ai} و $\gamma_{\phi i}$ که در آن $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ و $j \in \{1, 2, \dots, 6\}$ است وجود داشته باشند به گونه‌ای که شرایط (۳۵)، (۳۸)، (۴۳)، (۴۵)، (۴۷)، (۴۹) و (۵۰) به ازای هر $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ برقرار باشد. آنگاه سیستم حلقه بسته (۱) تحت قاعده کنترل (۲۲) با $u_i = K_i x = W_i L^{-1} x$ به ازای هر شرط اولیه $x(t_0) \in \mathcal{E}(L^{-1}, r)$ به بیضی گون $\mathcal{E}(L^{-1}, \delta')$ همگرا می‌شود. به علاوه، اگر شرایط (۵۳) و (۵۴) نیز برقرار باشد، سیگنال کنترل طراحی شده دارای نُرم محدود بوده و شرط $\|u\|^2 = u^T u \leq u_{max}^2$ به ازای هر $x(t) \in \mathcal{E}(L^{-1}, r)$ برقرار است.

نکته ۶: همان‌طور که در برهان قضیه ۱ دیده می‌شود، مقدار کاندیدای تابع لیاپانوف به صورت نمایی و مطابق رابطه زیر کاهش می‌یابد:

$$V(t) \leq V(t_0) \exp(-\alpha(t - t_0)), \quad (55)$$

که در آن، متغیر α در رابطه (۱۵) تعریف شده است. از آنجا که $V = x^T P x$ است، می‌توان در نتیجه ۱، کران بالایی برای نُرم متغیرهای حالت به صورت زیر بدست آورد:

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}} \|x(t_0)\| \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(t - t_0)\right). \quad (56)$$

۳-۱- بهینه‌سازی مقادیر و نکات عملی دیگر

به منظور دستیابی به کوچک‌ترین بیضی گون جاذب (یا همان حداقل کران غایی)، می‌توان اندازه δ یا $trace\{L\}$ و یا هر دو را حداقل نمود. برای کاهش بار محاسبات و بدون از دست دادن کلیت، در ادامه $\delta = 1$ فرض شده و سپس تلاش می‌شود که با محدود کردن $trace\{L\}$ اندازه بیضی گون جاذب حداقل گردد. در واقع، کاهش این ویژگی از ماتریس L سبب کاهش جمع مربعات قطره‌های بیضی گون می‌گردد [۲۷].

به هر حال، در صورت ثابت بودن اسکالر r حداقل سازی $trace\{L\}$ سبب کاهش اندازه بیضی گون خارجی نیز می‌شود. بنابراین، به منظور حداکثر کردن بیضی گون خارجی، باید مقدار r را به طور همزمان حداکثر نمود. در کنار این موارد، به منظور کاهش اندازه مجموعه نامتغیر $\mathcal{E}(P, \delta')$ مقدار پارامتر δ' بایستی حداقل گردد.

از سوی دیگر، در پایدارسازی عملی بایستی اطمینان حاصل شود که همه مسیرهای حالت به یک فضای محدود و از پیش تعیین شده همگرا می‌گردند. در مورد توابع لیاپانوف تربیعی، این فضا به صورت بیضی گون $\mathcal{E}(Q_{in}, 1)$ در نظر گرفته می‌شود که در آن Q_{in} یک ماتریس متقارن معین مثبت و از پیش معلوم است. از آنجایی که ماتریس Q_{in} ، متقارن و معین مثبت است، می‌توان برای آن و یا برای معکوس آن ریشه دوم تعیین نمود. به طور مثال، ماتریس X_{in} را می‌توان به گونه‌ای تعیین کرد که $X_{in}^T X_{in} = Q_{in}^{-1}$ باشد. در روش پیشنهاد شده در نتیجه ۱، به منظور حصول اطمینان از همگرایی مسیرهای حالت به زیرفضای $\mathcal{E}(Q_{in}, 1)$ ، بایستی شرط زیر برقرار باشد:

$$\mathcal{E}(P, \delta = 1) \subseteq \mathcal{E}(Q_{in}, 1) \subseteq \mathcal{E}(P, r) \quad (57)$$

برقرار باشند. مجدداً با اعمال لم مکمل شور برای نامساوی (۴۸) و سپس ضرب کردن نتیجه حاصل در ماتریس $diag(P^{-1}, I)$ (از سمت چپ و راست)، می‌توان نامساوی ماتریسی زیر را نتیجه گرفت:

$$\begin{bmatrix} \tau_{5i} P^{-1} & P^{-1} C_i^T \\ * & P^{-1} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (49)$$

به طور خلاصه، با در نظر گرفتن نامساوی‌های ماتریسی (۳۵)، (۳۸)، (۴۳)، (۴۵)، (۴۷) و (۴۹)، روابط (۱۲) الی (۱۴) برای سیستم (۱) تحت سیگنال کنترل (۲۲) تحقق می‌یابد. لذا، اگر شرط (۱۵) نیز صحیح باشد، آنگاه طبق قضیه ۱، همه مسیرهای حالت در سیستم (۱) تحت ورودی کنترل (۲۲)، به ازای هر شرط اولیه $x_0 \in \mathcal{E}(P, r)$ نه تنها درون بیضی گون خارجی $\mathcal{E}(P, r)$ باقی می‌ماند، بلکه به صورت نمایی به بیضی گون نامتغیر $\mathcal{E}(P, \delta')$ نیز همگرا خواهد شد.

نکته ۵: مشاهده می‌شود که نامساوی‌های به دست آمده، همگی نامساوی‌های ماتریسی خطی و یا دوخطی هستند. لذا به منظور استفاده از جعبه ابزارهای موجود برای این دسته از نامساوی‌های ماتریسی، شرط غیرخطی (۱۵) بایستی بازنویسی شود. با توجه به اینکه $\mu \geq 1$ است و در نتیجه $1 - \ln(\mu) \leq \mu - 1$ است، شرط (۱۵) را می‌توان با شرط خطی ولی تا حدودی محافظه کارانه زیر جایگزین نمود:

$$\rho - (\mu - 1)/\tau_{min} > 0, \quad (50)$$

به هر حال، در عمل همواره حداکثر بزرگی سیگنال کنترل محدود می‌باشد [۲۷]. برای این منظور، غالباً از نامساوی زیر بهره گرفته می‌شود:

$$\|u\|^2 = u^T u \leq u_{max}^2, \quad (51)$$

جایی که u_{max} یک اسکالر حقیقی مثبت و از پیش معلوم می‌باشد. لذا در ادامه، شرایط کافی دیگری برای تضمین این محدودیت ارائه می‌شود. با توجه به روابط (۲۲) و (۵۱)، به منظور داشتن یک سیگنال کنترل با نُرم محدود، عبارت زیر باید به ازای هر $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ و برای هر $x \in \mathcal{E}(P, r)$ برقرار باشد:

$$\|u_i\|^2 = u_i^T u_i = x^T K_i^T K_i x \leq u_{max}^2. \quad (52)$$

با اعمال روندی مشابه با آنچه در قبل آورده شد، معادل شرط (۵۲)، دو نامساوی ماتریسی خطی زیر خواهد بود:

$$u_{max}^2 - \tau_{6i} r \geq 0, \quad (53)$$

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & W_i^T \\ * & \tau_{6i} I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (54)$$

که در آن اسکالری حقیقی و مثبت است. به عبارت دیگر، اگر به ازای هر $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ، نامساوی‌های (۵۳) و (۵۴) برآورده شوند، محدود بودن نُرم سیگنال کنترل (۲۲) تضمین می‌گردد. در نظر گرفتن توضیحات فوق و همچنین $L = P^{-1}$ و $W_i = K_i P^{-1} = K_i L$ ، می‌توان بر اساس قضیه ۱، نتیجه زیر را توسعه داد.

نتیجه ۱: ثابت‌های حقیقی و مثبت $0 < \delta < r$ و u_{max} را در نظر بگیرد. فرض کنید که ماتریس معین مثبت L ، ماتریس‌های W_i

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (64)$$

$$f_c(x) = (0.1x_1x_2 \quad 0.1x_2^2)^T, \quad C = -1.1 \times I_{2 \times 2}.$$

بوده و نایقینی‌ها توسط ماتریس‌های:

$$D = 0.1 \times I_{2 \times 2}, \quad F(t) = \text{diag}(\sin(t), \cos(t)), \quad (65)$$

$$10E_\phi = E_b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

معرفی شده باشد. واضح است که ماتریس $f_c(x)$ شرط لیپ شیتز را بر روی کل فضای \mathbb{R}^n برآورده نمی‌کند؛ ولی بر روی زیرفضای:

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \leq 10\} \quad (66)$$

رابطه زیر برقرار است:

$$f_c^T f_c = 0.01x_1^2(x_1^2 + x_2^2) \leq (x_1^2 + x_2^2) = x^T x \quad (67)$$

بدین ترتیب، ثابت‌های لیپ‌شیتز، $M = I_{2 \times 2}$ و $N = 0$ بوده و بایستی مجموعه جذب به‌گونه‌ای انتخاب گردد که درون زیرفضای \mathbb{D} جای داشته باشد. برای این منظور، زیر فضای مطلوب $\mathcal{E}(Q_{out}, 1)$ که در آن $Q_{out} = \text{diag}(0.01, 1 \times 10^{-10})$ است در نظر گرفته می‌شود. باید توجه داشت که بر اساس تجزیه مقادیر تکین مربوط به ماتریس‌های معین مثبت، اندازه قطرهای بیضی‌گون $\mathcal{E}(Q_{out}, 1)$ متناسب با معکوس جذر مقادیر ویژه ماتریس Q_{out} می‌باشد. از طرف دیگر، مطابق رابطه (۶۶)، زیرفضای مجاز در راستای محور x_2 نامحدود است. لذا، در واقعیت مقدار ویژه Q_{out} در راستای x_2 صفر است. ولی از آنجاکه در قید (۶۲)، معکوس Q_{out} استفاده می‌شود، این مقدار ویژه، بسیار کوچک انتخاب شده است تا ضمن معکوس‌پذیر بودن، قطر بیضی‌گون حاصل در این راستا بسیار بزرگ باشد و در نتیجه فضای مجاز در این راستا محدود نگردد. در کنار زیرفضای مجاز، زیرفضای جاذب مطلوب، به‌صورت $\mathcal{E}(Q_{in}, 1)$ با $Q_{in} = \text{diag}(10, 10)$ در نظر گرفته می‌شود.

علاوه‌بر این، در این شبیه‌سازی، دنباله زمان‌های ضربه به صورت $\{0.3, 0.7, 1/1, 1/6, 2/2, 2/8, 3/4, \dots\}$ فرض می‌گردد. در این دنباله، حداقل زمان توقف (τ_{min}) 0.3 ثانیه است. با در نظر گرفتن u_{max} برابر 100 ، مسأله بهینه‌سازی (۶۳) به‌منظور یافتن بهره کنترل‌کننده مناسب حل می‌شود. پارامترهای مطلوب به‌دست آمده عبارت است از:

$$L = \begin{bmatrix} 0.0061 & -0.0035 \\ -0.0035 & 0.0069 \end{bmatrix}, \quad r = 16293, \quad (68)$$

$$K = [-6.9595 \quad -9.1851], \quad \delta' = 1.2102.$$

شکل ۱ باقی‌ماندن مسیر حالت درون بیضی‌گون $\mathcal{E}(L^{-1}, r)$ ، به‌ازای شرایط اولیه گوناگون و برای همه زمان‌های آتی را نشان می‌دهد. همچنین این مسیرهای حالت پس از مدتی و برای اولین مرتبه به بیضی‌گون جذب $\mathcal{E}(L^{-1}, \delta)$ همگرا شده و پس از آن درون مجموعه نامتغیر مثبت $\mathcal{E}(L^{-1}, \delta')$ باقی خواهد ماند. در شکل ۲، هر یک از متغیرهای حالت و همچنین سیگنال کنترل به‌ازای شرط اولیه $x(0) = (0 \quad 8.5)^T$ به صورت مجزا نمایش داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، اندازه سیگنال کنترل از حد تعیین شده کمتر است.

و از آنجا که $\mathcal{E}(P, r) = \mathcal{E}(r^{-1}P, 1)$ است، آنگاه شرط (۵۷) نیز زمانی که عبارت $rP^{-1} \leq Q_{in}^{-1} \leq rP^{-1}$ برآورده شود، معتبر خواهد بود. لذا در مسأله بهینه‌سازی، بایستی دو شرط زیر نیز گنجانده شود:

$$L \leq Q_{in}^{-1}, \quad (58)$$

$$\begin{bmatrix} L & X_{in}^T \\ * & rI \end{bmatrix} \geq 0 \quad (59)$$

که در آن، عبارت (۵۹) از اعمال لم مکمل شور بر روی شرط $rP^{-1} = X_{in}^T X_{in} \leq rP^{-1}$ به‌دست آمده است.

علاوه‌بر این موارد، مجدداً یادآور می‌شود که شرایط بیان‌شده به‌صورت محلی هستند و بر همین اساس، فرض ۲ به‌صورت محلی منظور شده است. این حالت برای بسیاری از سیستم‌های غیرخطی واقعی نیز صدق می‌کند که در آنها شرط لیپ شیتز بر روی کل فضای \mathbb{R}^n برقرار نبوده، درحالی‌که ممکن است بتوان این شرط را به‌صورت محلی و بر روی یک زیردامنه $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ در نظر گرفت. چنین شرط لیپ‌شیتزی در روند استخراج کران بالای مربوط به تابع لیاپانوف تریبیعی مورد توجه بوده است. لذا به‌منظور اطمینان از معتبربودن روابط (۳۵) و (۳۸)، شرط زیر بایستی برقرار باشد:

$$\mathcal{E}(P, r) = \mathcal{E}(r^{-1}P, 1) \subseteq \mathcal{E}(Q_{out}, 1) \subseteq \mathbb{D}, \quad (60)$$

که در آن $Q_{out} > 0$ یک ماتریس معین مثبت مطلوب است، به‌گونه‌ای که $\mathcal{E}(Q_{out}, 1) \subseteq \mathbb{D}$ بزرگترین بیضی‌گون ممکن درون \mathbb{D} باشد. شرط فوق نیز هنگامی حاصل می‌گردد که عبارت زیر برقرار باشد:

$$rP^{-1} \leq Q_{out}^{-1}. \quad (61)$$

لذا در مسأله بهینه‌سازی مورد نظر، به همراه سایر قیود، قید زیر نیز لحاظ می‌گردد:

$$Q_{out}^{-1} - rL \geq 0. \quad (62)$$

با در نظر گرفتن توضیحات بیان‌شده در بالا، به‌منظور دستیابی همزمان به پارامترهای کنترلی مطلوب به همراه رسیدن به بزرگ‌ترین بیضی‌گون جذب و کوچک‌ترین کران غایی، مسأله بهینه‌سازی زیر تعریف می‌شود:

$$\min.: \text{trace}\{L\} + \omega_1 \delta' - \omega_2 r$$

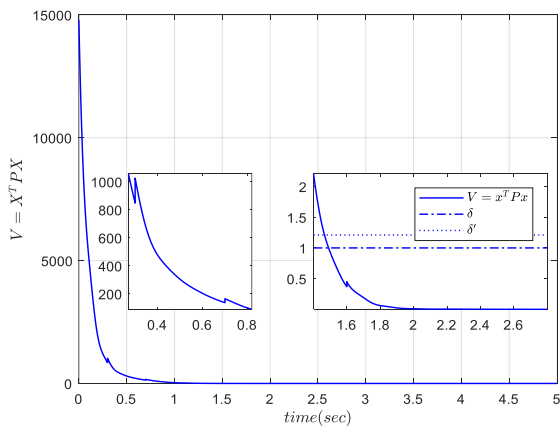
$$\text{s.t.} : r \geq 1, \mu \geq 1, \delta' > 1, (35), (38), (43), (45), (47), (49), (50), (53), (54), (58), (59), (62) \quad (63)$$

که در آن ω_1 و ω_2 ضرایب مصالحه می‌باشند.

۴- شبیه‌سازی

در ادامه، با استفاده از دو مثال عددی و یک مثال عملی، کارایی نتایج بخش ۳ بررسی می‌شود. در این مثال‌ها، دینامیک‌های غیرخطی، شرط لیپ‌شیتز را بر روی \mathbb{R}^n برآورده نمی‌کنند ولی به‌دلیل مشتق‌پذیر بودن و پیوسته‌بودن، می‌توان در یک زیرفضای محدود اطراف مبدأ، ماتریس ثوابت لیپ‌شیتز را (به‌گونه‌ای که فرض ۲ برقرار باشد) به‌دست آورد.

مثال ۱: فرض کنید که سیستم (۱) تنها شامل یک زیر سیستم با پارامترهای معلوم زیر:



شکل ۳: مقدار تابع لیاپانوف در طول زمان برای مثال ۱.

در اینجا نیز هیچ کدام از زیرسیستم‌ها بر روی کل فضای \mathbb{R}^2 ، شرط لپ شیتز را برآورده نمی‌کند ولی می‌توان نشان داد که زیرسیستم اول بر روی زیرفضای $\mathbb{D}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 + x_2| \leq 2\}$ و با $M_1 = I$ و $N_1 = 0$ و زیرسیستم دوم بر روی زیرفضای $\mathbb{D}_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_2| \leq 4\}$ و با $M_2 = 1.5 \times I$ و $N_2 = 0$ فرض ۲ را برآورده خواهند نمود. لذا با در نظر گرفتن دو بیضی‌گون:

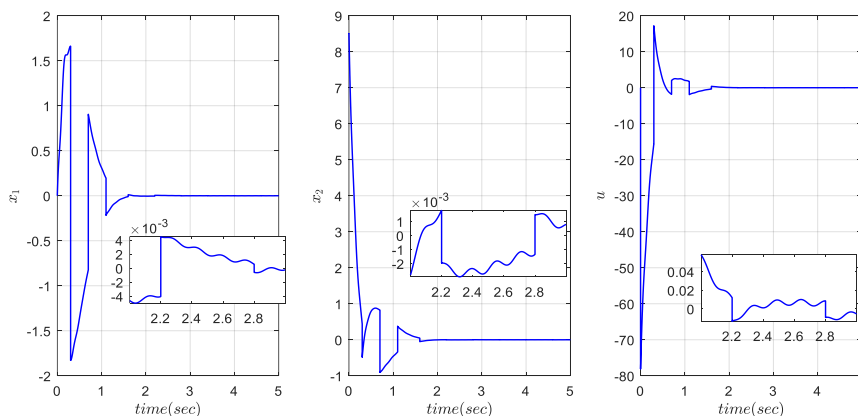
$$\mathcal{E}(Q_1^{out}, 1) \subset \mathbb{D}_1, \quad \mathcal{E}(Q_2^{out}, 1) \subset \mathbb{D}_2 \quad (71)$$

که در آن:

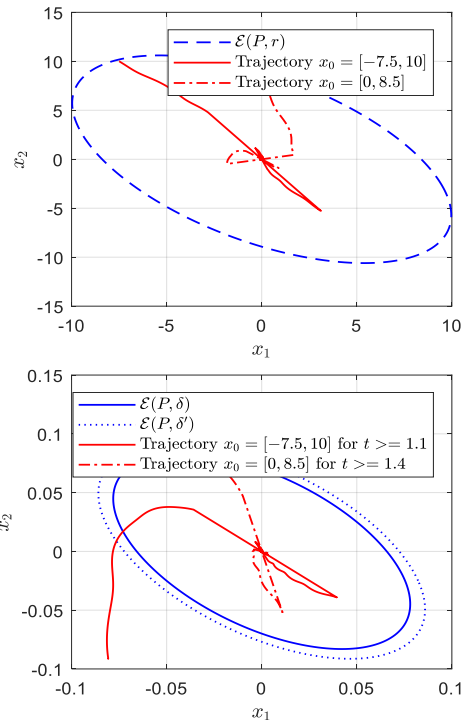
$$Q_1^{out} = \begin{bmatrix} 0.2550 & 0.2450 \\ 0.2450 & 0.2550 \end{bmatrix}, \quad (72)$$

$$Q_2^{out} = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.0625 \end{bmatrix}$$

می‌باشد، اقدام به طراحی کنترل کننده می‌شود. دو زیر فضای \mathbb{D}_1 و \mathbb{D}_2 به همراه بیضی‌گون‌های خارجی مطلوب در شکل ۴ نشان داده شده است. دقت نمایید که ماتریس‌های Q_1^{out} و Q_2^{out} به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که تقریباً اشتراک دو زیرفضای \mathbb{D}_1 و \mathbb{D}_2 پوشش داده شود. به منظور طراحی کنترل کننده و شبیه سازی، فرض می‌شود که هر زیرسیستم پس از گذشت ۰/۵ ثانیه به دیگری سوئیچ می‌نماید ($\tau_{min} = 0.5$) و فضای همگرایی مطلوب $\mathcal{E}(Q_{in}, 1)$ نیز، مشابه مثال ۱ در نظر گرفته می‌شود. همچنین، به منظور بررسی اثر محدود کردن نرم سیگنال کنترل، سه دیدگاه مختلف بررسی می‌گردد، (الف)



شکل ۴: (چپ و وسط) همگرایی متغیرهای حالت در مثال ۱ به نزدیکی مبدأ. (راست) سیگنال کنترل که دارای نرم تعیین شده می‌باشد.



شکل ۵: (بالا) ناحیه جذب و (پایین) کران غایی در مثال ۱.

به عبارت دیگر، $|u| \leq u_{max} = 100$ می‌باشد. علاوه بر این، شکل ۳ تغییرات تابع لیاپانوف را در طول زمان نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که مقدار تابع لیاپانوف، قبل از رسیدن به ناحیه جذب، در فاصله زمانی مابین دو سوئیچ متوالی، به صورت نمایی کاهش داشته ولی در زمان‌های سوئیچ افزایش می‌یابد.

مثال ۲: سیستم (۱)، شامل دو زیرسیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (69)$$

$$B_1 = B_2 = (0 \ 1)^T, \quad C_1 = -C_2 = -1.1 \times I_{2 \times 2},$$

$$f_{c1}(x) = 0.5 \begin{bmatrix} x_1 x_2 + x_1^2 \\ x_1 x_2 + x_2^2 \end{bmatrix}, \quad f_{c2}(x) = 0.3 \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad E_{a1} = E_{a2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_{b1} = E_{b2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E_{\phi 1} = E_{\phi 2} = (0.1 \ 0.1)^T, \quad (70)$$

$$F(t) = \text{diag}(\sin(t), \cos(t)).$$

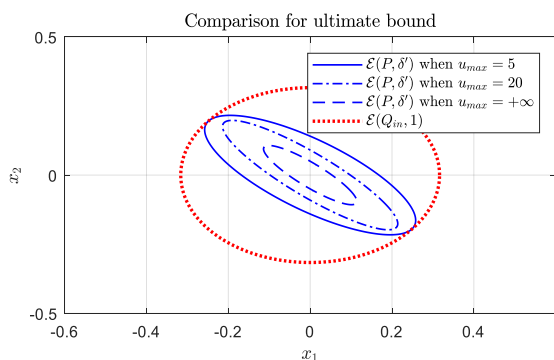
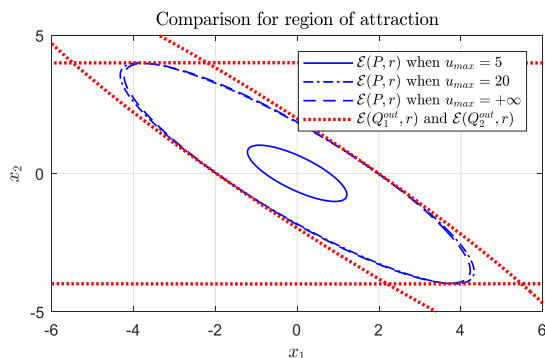
شکل ۶ مقایسه بین سیگنال‌های کنترل در این سه دیدگاه را در یک شبیه‌سازی نشان می‌دهد، جایی که در شروع کار زیرسیستم اول فعال بوده و زیرسیستم‌ها هر ۰/۵ ثانیه به یکدیگر سوئیچ می‌نمایند. سه سیگنال کنترل، به‌ازای شرط اولیه یکسان $x(0) = (-1 \ 1)^T$ (که در ناحیه جذب مربوط به هر سه دیدگاه قرار دارد) ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که نرم سیگنال کنترل در دیدگاه‌های (ب) و (ج) از حد تعیین‌شده کمتر است. با تحلیل دو شکل ۵ و ۶ می‌توان نتیجه گرفت که رسیدن به کران غایی کوچک‌تر به همراه ناحیه جذب وسیع‌تر مستلزم اعمال سیگنال کنترل بزرگ‌تر می‌باشد. لذا همواره در طراحی باید بین این موارد مصالحه نمود. همچنین شکل ۷ تغییرات متغیرهای حالت را در سه دیدگاه (الف)، (ب) و (ج) نشان می‌دهد. همان‌طور که دیده می‌شود، همگرایی به ناحیه کوچکی نزدیک به مبدأ رخ داده و به‌دلیل وجود نایقینی‌های صفرنشونده، همچنان نوساناتی در اطراف مبدأ وجود دارد. کنترل‌کننده‌ها با تنظیم سیگنال کنترل سعی می‌کنند تا این کران غایی را به اندازه کافی کوچک نمایند.

مثال ۳: در اینجا، روش معرفی‌شده به موتور جریان مستقیم با تحریک سری GE752 اعمال می‌شود. معادلات دینامیکی حاکم بر این موتورها، از روابط زیر تبعیت می‌نمایند [۲۷، ۳۳]:

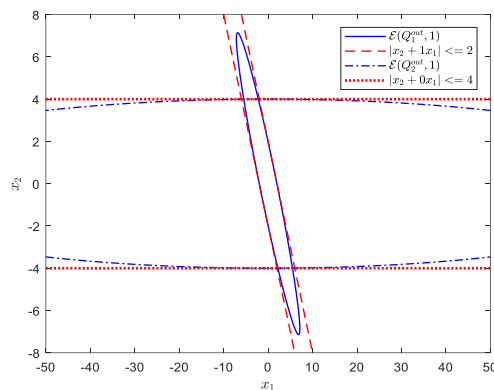
$$L \frac{di_a(t)}{dt} = V(t) - Ri_a(t) - Ki_a(t)\omega(t) - \eta_1(t), \quad (76)$$

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = Ki_a^2(t) - B_m\omega(t) - T_L - \eta_2(t),$$

که در آن، $\omega(t)$ سرعت زاویه‌ای شفت موتور، $i_a(t)$ جریان موتور، $R = R_a + R_f$



شکل ۵: (بالا) مقایسه ناحیه جذب و (پایین) مقایسه کران غایی به‌ازای محدودیت‌های مختلف بر روی نرم سیگنال کنترل در مثال ۲.



شکل ۴: زیرفضاهای مطلوب برای هر زیرسیستم در مثال ۲.

نامحدودبودن نرم سیگنال کنترل، (ب) محدودیت $u_{max} = 20$ و (ج) محدودیت سختگیرانه $u_{max} = 5$. نتایج حاصل از حل مسأله (۶۳)، برای هر یک از این سه دیدگاه، به‌ترتیب به قرار زیر است:

$$L = \begin{bmatrix} 0.0107 & -0.0089 \\ -0.0089 & 0.0095 \end{bmatrix}, \quad \delta' = 1.2100, \quad r = 1665.1002, \quad (73)$$

$$K_1 = [-79.2338 \quad -95.3655],$$

$$K_2 = [-39.0539 \quad -47.0369].$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.0377 & -0.0310 \\ -0.0310 & 0.0322 \end{bmatrix}, \quad \delta' = 1.2149, \quad r = 495.4596, \quad (74)$$

$$K_1 = [-5.8141 \quad -9.6800],$$

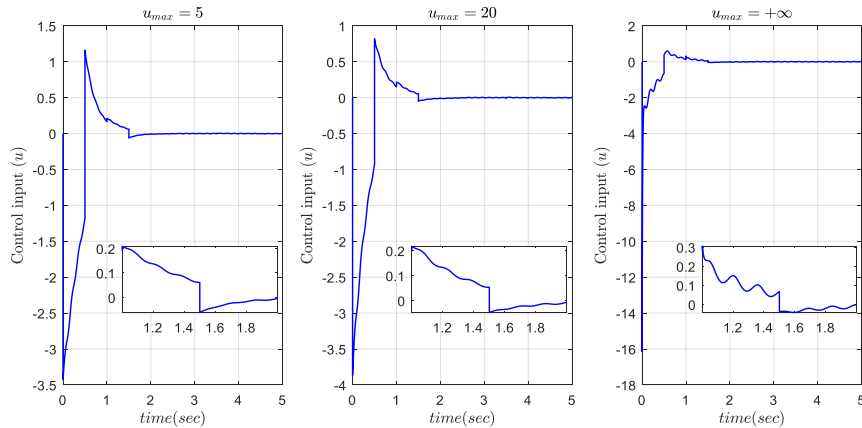
$$K_2 = [-7.3230 \quad -10.3304].$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.0548 & -0.0348 \\ -0.0348 & 0.0385 \end{bmatrix}, \quad \delta' = 1.2125, \quad r = 26.8931, \quad (75)$$

$$K_1 = [-4.0053 \quad -7.4266],$$

$$K_2 = [-4.2190 \quad -7.1102].$$

مقایسه بین ناحیه جذب و کران غایی، حاصل از اعمال این سه دیدگاه، در شکل ۵ آورده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، فضای جذب به‌دست‌آمده در دو دیدگاه (ب) و (ج) کاملاً با یکدیگر تفاوت داشته و تأییدکننده مطلب بیان‌شده در بخش مقدمه است؛ یعنی با اعمال محدودیت بر روی نرم سیگنال کنترل، ناحیه جذب محدودتر خواهد شد. با این اوصاف اگر به ناحیه جذب مربوط به دو دیدگاه (الف) و (ب) توجه شود، مشهود است که بر خلاف انتظار، پس از حذف محدودیت بر روی نرم سیگنال کنترل، ناحیه جذب چندان تفاوتی ندارد. علت این موضوع، محدودشدن فضای مجاز توسط بیضی‌گون‌های $\mathcal{E}(Q_2^{out}, 1)$ و $\mathcal{E}(Q_1^{out}, 1)$ است، به‌گونه‌ای که علی‌رغم افزایش اندازه سیگنال کنترل، ناحیه جذب نمی‌تواند توسعه پیدا نماید. البته باید توجه داشت که با حذف یا کاهش محدودیت بر روی سیگنال کنترل، کران غایی می‌تواند کوچک‌تر شود. به‌رحال در هر سه دیدگاه، کران غایی در فضای همگرایی مطلوب $\mathcal{E}(Q_{in}, 1)$ قرار دارد. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که در صورت کاهش فضای مطلوب $\mathcal{E}(Q_{in}, 1)$ ، به‌منظور رسیدن به ناحیه جذب وسیع‌تر، باید محدودیت بر روی سیگنال کنترل کاهش یابد.



شکل ۶: مقایسه سیگنال کنترل در سه دیدگاه مطرح شده در مثال ۲.

کران بالای f_c ، بر روی فضایی که $|x_1| \leq I_r$ باشد، عبارت است از:

$$f_c^T f_c \leq (x_1 \ x_2) \text{diag} \left(K^2 \left(\frac{I_r}{J} \right)^2, K^2 \left(\frac{I_r}{L} \right)^2 \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (۸۱)$$

و بنابراین ماتریس ثوابت لیپ‌شیتز به صورت زیر می‌باشد:

$$M = M^T = \text{diag}(K I_r / J, K I_r / L), \quad N = 0. \quad (۸۲)$$

علاوه بر محدودیت $|x_1| \leq I_r$ ، عوامل دیگری نیز محدوده جستجو را کاهش می‌دهند که عبارتند از حداکثر سرعت دوران شفت و حداکثر توان مکانیکی موتور. با توجه به پارامترهای مورد نظر که در جدول ۱ آورده شده است، در این مثال $Q_{out} = \text{diag}(I_r^{-2}, \omega_r^{-2})$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین برای دقت عملکرد این موتور، همگرایی مسیر حالت به کران $Q_{in} = \text{diag}(10, 10)$ لحاظ می‌گردد که معادل حداکثر خطایی در حدود ۰/۳ برای هر دو پارامتر سرعت و جریان است. همچنین فرض می‌شود که تنها پارامترهای موتور که در آن‌ها نایقینی وجود دارد، ضریب اصطکاک B_m و مقاومتهای اهمی R است. علاوه بر این، سایر نایقینی‌های مربوط به افت ولتاژ و نایقینی‌های مربوط به گشتاورها محدود فرض می‌شوند. میزان این نایقینی‌ها به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$D = 0.1 \times I_{2 \times 2}, E_a = I_{2 \times 2}, E_\phi = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, E_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (۸۳)$$

مجموع اندوکتانس آرمیچر و تحریک، J و B_m به ترتیب ممان اینرسی روتور و ضریب اصطکاک، $K = K_e K_f$ ضریب ثابت شامل ثابت‌های موتور و تحریک، η_1 بیان گر نایقینی‌هایی همانند افت ولتاژ جاروبک‌ها، η_2 بیان گر نایقینی‌هایی همانند گشتاور باد، T_L گشتاور بار متصل به شفت و ولتاژ تغذیه موتور می‌باشد. با انتخاب متغیرهای کمکی:

$$x_1 = i_a - I_r, \quad x_2 = \omega - \omega_r, \quad u = V - V_r \quad (۷۷)$$

و اعمال آنها در (۷۶)، معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= -(R + K\omega_r)x_1 - K I_r x_2 - K x_1 x_2 + u - \eta_1, \\ J\dot{x}_2 &= 2K I_r x_1 - B_m x_2 + K x_1^2 - \eta_2, \end{aligned} \quad (۷۸)$$

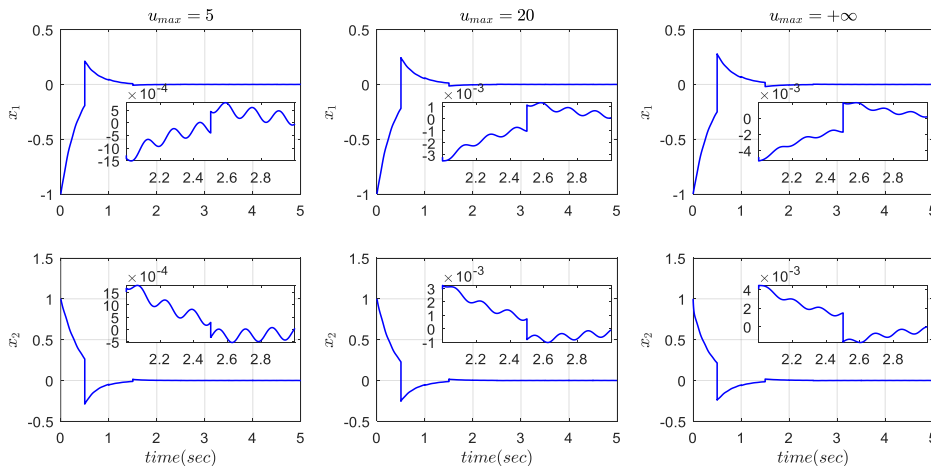
که در آن I_r ، ω_r و V_r به ترتیب جریان، سرعت دوران و ولتاژ مرجع مورد نیاز در حالت تعادل می‌باشد. این سیستم را می‌توان به صورت (۱) بیان نمود. پارامترهای این سیستم عبارتند از:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R + K\omega_r}{L} & -\frac{K}{L} I_r \\ \frac{2K}{J} I_r & -\frac{B_m}{J} \end{bmatrix}, \quad B = (-1/L \ 0)^T \quad (۷۹)$$

$$f_c = K \begin{pmatrix} -x_1 x_2 / L & x_1^2 / J \end{pmatrix}$$

که در آن:

$$f_c^T f_c = K^2 (x_1 / J)^2 x_1^2 + K^2 (x_1 / L)^2 x_2^2 \quad (۸۰)$$



شکل ۷: مقایسه روند همگرایی متغیرهای حالت در سه دیدگاه مطرح شده در مثال ۲.

جدول ۱: پارامترهای موتور جریان مستقیم با تحریک سری GE752 [۳۴].

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
R	$1/3 \Omega$	L	$330 mH$
J	$1 Kg.m^2$	B_m	$0.05 N.m.s$
K	0.0055	$P_{mech,max}$	$752 kW$
ω_{max}	$110 rad.s^{-1}$	I_r	$250 A$
ω_r	$50 rad.s^{-1}$	V_r	$393/75 Vdc$

همچنین در این مثال فرض می شود که بار T_L به گونه‌ای است که در فواصل زمانی نامشخص ولی با حداقل فاصله زمانی τ_{min} برابر با 0.5 ثانیه، سرعت دوران را دچار جهش می کند، به گونه‌ای که در سیستم دینامیکی مورد نظر ماتریس جهش به صورت زیر باشد:

$$C = \text{diag}(1, -1). \quad (84)$$

با اعمال روش پیشنهادی به این سیستم، پارامترهای طراحی عبارت است از:

$$L = \begin{bmatrix} 0.0963 & -0.0086 \\ -0.0086 & 0.0038 \end{bmatrix}, \quad (85)$$

$$r = 450108.05,$$

$$W = [-0.0870 \quad -0.0211].$$

نتایج شبیه سازی به ازای $x_0 = [-200 \quad +25]$ در شکل ۸ نشان داده شده است که بیان گر همگرایی سیستم به کران غایی می باشد.

۵- نتیجه

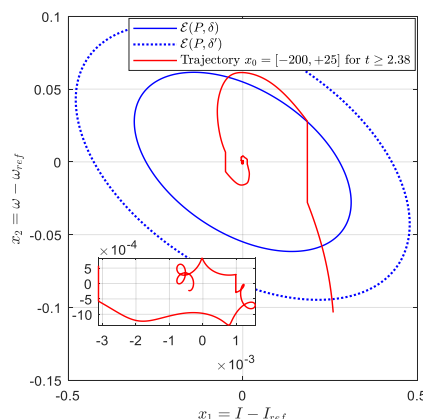
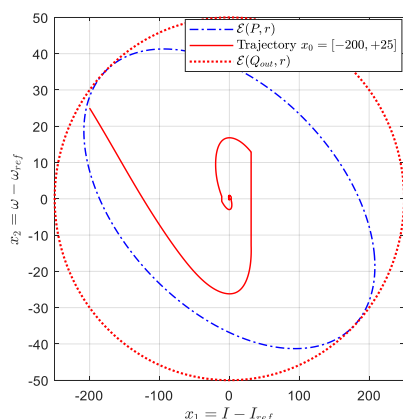
در این مقاله، مسئله مقید بودن نرم سیگنال کنترل برای سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای در حضور انواع مختلفی از ناپیچینی‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. برای این گونه از سیستم‌ها، دستیابی به یک سیگنال کنترل سراسری، غیرممکن و یا بسیار دشوار است. لذا، این مقاله شرایط کافی پایداری را به صورت محلی بررسی می کند. برای این منظور، در ابتدا برای یک سیستم جامع تر، شرایط کلی بر حسب یک تابع لیاپانوف مشترک بیان شده است. این شرایط نسبت به روش‌های ارائه شده در سایر تحقیقات مزایایی دارد که عبارت است از: (الف) در نظر گرفتن همگرایی به کران غایی که کاربرد آنها را در مواجهه با

ناپیچینی‌های صفرنشونده غیرخطی عملی تر می نماید. (ب) در نظر گرفتن زیرفضای بیرونی که بایستی شرایط بر روی آن برقرار باشد. بدین ترتیب، این امکان فراهم می شود تا در هنگام توسعه به سیستم‌هایی که دینامیک‌های غیرخطی آنها شرایط مورد نظر را در یک زیرفضای محدود برآورده می کنند، تضمین اعتبار نتایج وجود داشته باشد. (ج) محدود در نظر گرفتن جهش در کران غایی (به جای صفرشدن جهش‌ها) در هنگام همگرایی به مبدأ و در نتیجه گسترده تر شدن دامنه کاربرد شرایط پیشنهادی.

در گام اول هیچ پیشنهادی برای چگونگی یافتن تابع کاندیدی لیاپانوف ارائه نشده است، لذا در مرحله بعد، سیستم مورد نظر به گونه‌ای در نظر گرفته می شود که دینامیک‌های غیرخطی آن دارای شرط لیبشیتز نسبت به هر دو متغیر حالت و متغیر ورودی بوده و ناپیچینی‌های خطی و غیرخطی در آن صفرنشونده ولی با نرم محدود باشد. سپس شرایط پیشنهاد شده در بخش اول، به صورت مجموعه‌ای از نامساوی‌های ماتریسی خطی و دوخطی بازنویسی شده به گونه‌ای که بتوان از آنها در یک مسأله بهینه سازی به عنوان قیود استفاده نمود. لازم به ذکر است که طیف وسیعی از سیستم‌ها به صورت تعریف شده در این مقاله قابل مدل سازی می باشند.

همچنین، مسأله بهینه سازی دارای مزایایی است که عبارت است از: (الف) قیود مسأله به صورت خطی و دوخطی بوده و تابع هدف یک مسأله خطی است؛ لذا به کمک ابزارهای موجود به راحتی قابل حل می باشد. (ب) از آنجایی که در جملات دوخطی، یکی از متغیرها اسکالر می باشد، لذا می توان از الگوریتم‌های مبتنی بر نامساوی‌های ماتریسی خطی نیز برای حل مسأله بهینه سازی پیشنهادی بهره گرفت. (ج) جنبه های مختلف کاربردی از جمله همگرایی به یک کران از پیش تعیین شده در این مسأله دیده شده است.

به عنوان گام بعدی در این تحقیق، امید است که بتوان نتایج به دست آمده را به انواع دیگری از ناپیچینی‌ها، توابع جهش و دینامیک‌های غیرخطی توسعه داد. به عنوان نمونه، با توجه به اینکه در قضیه ۱، جهش‌ها در نزدیکی مبدأ به صورت محدود (و نه صفرنشونده) منظور شده است، به نظر می رسد که می توان در تابع جهش، ناپیچینی‌های



شکل ۸: (چپ) باقی ماندن مسیر حالت درون بیضی گون خارجی. این بیضی گون، درون کران مورد نظر قرار دارد و در نتیجه برقراری فرض ۲ تضمین می شود. (راست) همگرایی کران غایی و باقی ماندن درون آن برای سایر زمان‌های آتی.

[15] Hui Ye, A.N. Michel and Ling Hou, "Stability theory for hybrid dynamical systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 43, no. 4, pp. 461-474, 1998.

[16] J. Hespanha, "Uniform stability of switched linear systems: extensions of LaSalle's invariance principle," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 49, no. 4, pp. 470-482, 2004.

[17] H. Lin and P.J. Antsaklis, "Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 54, no. 2, pp. 308-322, 2009.

[18] F. Xu, L. Dong, D. Wang, X. Li and R. Rakkiyappan, "Globally exponential stability of nonlinear impulsive switched systems," *Math. Notes*, vol. 97, no. 5-6, pp. 803-810, 2015.

[19] H. Xu and K.L. Teo, "Exponential stability with L2-gain condition of nonlinear impulsive switched systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 55, no. 10, pp. 2429-2433, 2010.

[20] Y. Chen, S. Fei and K. Zhang, "Stabilization of impulsive switched linear systems with saturated control input," *Nonlinear Dyn.*, vol. 69, no. 3, pp. 793-804, 2012.

[21] M.-L. Chiang and L.-C. Fu, "Robust output feedback stabilization of switched nonlinear systems with average dwell time," *Asian J. Control.*, vol. 16, no. 1, pp. 264-276, 2014.

[22] B. Wang, H. Zhang, G. Wang, C. Dang and S. Zhong, "Asynchronous control of discrete-time impulsive switched systems with mode-dependent average dwell time," *ISA Trans.*, vol. 53, no. 2, pp. 367-372, 2014.

[23] X. Zhao, L. Zhang, P. Shi and M. Liu, "Stability and stabilization of switched linear systems with mode-dependent average dwell time," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 57, no. 7, pp. 1809-1815, 2012.

[24] L. Lu and Z. Lin, "Design of switched linear systems in the presence of actuator saturation," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 53, no. 6, pp. 1536-1542, 2008.

[25] A. Benzaouia, O. Akhrif and L. Saydy, "Stabilisation and control synthesis of switching systems subject to actuator saturation," *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 41, no. 4, pp. 397-409, 2010.

[26] W. Ni and D. Cheng, "Control of switched linear systems with input saturation," *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 41, no. 9, pp. 1057-1065, 2010.

[27] A. Poznyak, A. Polyakov and V. Azhmyakov, *Attractive Ellipsoids in Robust Control*, Springer International Publishing, Cham, 2014.

[28] M. Kocvara and M. Stingl, *PENNON: Software for Linear and Nonlinear Matrix Inequalities*, in: M.F. Anjos, J.B. Lasserre (Eds.), *Handb. Semidefinite, Conic Polynomial Optim.*, Springer US, pp. 755-791, 2012.

[29] Jin Lu and L.J. Brown, "A multiple Lyapunov functions approach for stability of switched systems," in: *Proc. 2010 Am. Control Conf.*, *IEEE*, pp. 3253-3256, 2010.

[30] H. Yang, B. Jiang and J. Zhao, "On finite-time stability of cyclic switched nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 60, no. 8, pp. 2201-2206, 2015.

[31] K. Derinkuyu and M.Ç. Pinar, "On the S-procedure and some variants," *Math. Methods Oper. Res.*, vol. 64, no. 1, pp. 55-77, 2006.

[32] L. V. Hien and V.N. Phat, "Exponential stabilization for a class of hybrid systems with mixed delays in state and control," *Nonlinear Anal. Hybrid Syst.*, vol. 3, no. 3, pp. 259-265, 2009.

[۳۳] الهه اسدیان و سعید بلوچیان، «کنترل مقاوم-تطبیقی مدل مرتبه کسری موتور سری جریان مستقیم»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، جلد ۴۷، شماره ۳، شماره پیاپی ۸۱، صفحه ۸۱۷-۸۲۷، پاییز ۱۳۹۶.

[34] General Electric company, "High-Torque DC Drilling Motor, Vertical Drilling Motor, GEK-91584D" GE752 datasheet, 2005, <http://pdfstream.manualsonline.com/3/3b063b6b-2b86-424f-8cea-3d2ac288d1aa.pdf>.

خطی و یا غیرخطی صفرنشونده را نیز لحاظ نمود. همچنین در نظر گرفتن لحظات سوئیچ وابسته به متغیرهای حالت و استفاده از تکنیک توابع لیاپانوف چندگانه، می‌تواند از دیگر گام‌های پیشنهادی برای ادامه این تحقیق باشد.

مراجع

[1] W.M. Haddad, V. Chellaboina and S.G. Nersesov, *Impulsive and Hybrid Dynamical Systems: Stability, Dissipativity, and Control*, Princeton University Press, 2006.

[2] J. Jiao, S. Cai and L. Chen, "Dynamics of a plankton-nutrient chemostat model with hibernation and it described by impulsive switched systems," *J. Appl. Math. Comput.*, vol. 53, no. 1-2, pp. 583-598, 2017.

[3] M. Posa, M. Tobenkin and R. Tedrake, "Stability analysis and control of rigid-body systems with impacts and friction," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 61, no. 6, pp. 1423-1437, 2015.

[4] M. Barkhordari Yazdi, M.R. Jahed-Motlagh, S.A. Attia and J. Raisch, "Modal exact linearization of a class of second-order switched nonlinear systems," *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, vol. 11, no. 4, pp. 2243-2252, 2010.

[5] T. Fang and J. Sun, "Stability of complex-valued impulsive and switching system and application to the Lü system," *Nonlinear Anal. Hybrid Syst.*, vol. 14, pp. 38-46, 2014.

[6] J. Li, R. Ma and G.M. Dimirovski, "Adaptive impulsive observers for a class of switched nonlinear systems with unknown parameter," *Asian J. Control.*, vol. 19, no. 3, pp. 1153-1163, 2017.

[7] Y. Tian, Y. Cai, Y. Sun and H. Gao, "Finite-time stability for impulsive switched delay systems with nonlinear disturbances," *J. Franklin Inst.*, vol. 353, no. 14, pp. 3578-3594, 2016.

[8] Y.-E. Wang, X.-M. Sun, W. Wang and J. Zhao, "Stability properties of switched nonlinear delay systems with synchronous or asynchronous switching," *Asian J. Control.*, vol. 17, no. 4, pp. 1187-1195, 2015.

[۹] نصراله اعظم بالعی و محمد حسین شفیع، «تحلیل پایداری سیستم-های سوئیچ‌شونده خطی گسسته‌زمان با در نظر گرفتن تأخیر زمانی و عدم قطعیت پارامترها»، *مجله کنترل دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی*، جلد ۹، شماره ۴، صفحه ۷۷-۸۵، ۱۳۹۴.

[10] X. Zhao, P. Shi, Y. Yin and S.K. Nguang, "New results on stability of slowly switched systems: a multiple discontinuous lyapunov function approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 62, no. 7, pp. 3502-3509, 2016.

[11] W. Xiang and J. Xiao, "Stabilization of switched continuous-time systems with all modes unstable via dwell time switching," *Automatica*, vol. 50, no. 3, pp. 940-945, 2014.

[۱۲] محمدرضا رضائی آل، علی وحیدیان کامیاد و ناصر پریز، «کنترل بهینه سیستم‌های سوئیچ‌شونده خطی ناخودگردان: رهیافت نامساوی ماتریسی خطی»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، جلد ۴۴، شماره ۱، شماره پیاپی ۲۷، صفحه ۱۱-۲۱، بهار ۱۳۹۳.

[13] L. Gao and D. Wang, "Input-to-state stability and integral input-to-state stability for impulsive switched systems with time-delay under asynchronous switching," *Nonlinear Anal. Hybrid Syst.*, vol. 20, pp. 55-71, 2016.

[14] M.S. Branicky, "Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 43, no. 4, pp. 475-482, 1998.