

پایداری سازی هواپیمای جنگنده F-8 با استفاده از کنترل پیش‌بینی مبتنی بر مدل

ویسی، محمد^۱، سلطانپور، محمد رضا^{۲*}، خلیل‌پور، جعفر^۳

- ۱- مربی، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه پدافند هوایی خاتم‌الانبیاء (ص)
 - ۲- دانشیار، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری
 - ۳- دانشیار، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه پدافند هوایی خاتم‌الانبیاء (ص)
- (دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۱۰/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۹/۲۰)

چکیده

پایداری‌ساز هواپیما با استفاده از سطوح آیرودینامیکی متحرک قابل کنترل، هواپیما را پایدار می‌کند. در این مقاله، یک کنترل پیش‌بینی مبتنی بر مدل برای پایداری‌ساز هواپیمای جنگنده F-8 ارائه می‌گردد. در روش کنترلی پیشنهادی، بر اساس استراتژی افق خزشی، ضمن بهینه‌سازی در زمان واقعی، با استفاده از مدل خطی شده جنگنده F-8، تابع هدف کمینه گردیده و خروجی در بازه‌های زمانی آینده پیش‌بینی می‌شود. تابع هدف به صورت حاصل‌جمع از هزینه پایانی و مجموع هزینه‌های هر مرحله از پیش‌بینی، تعریف شده که نهایتاً فرم مربعی آن در الگوریتم کنترلی مورد استفاده قرار می‌گیرد. کمینه‌سازی تابع هدف، ورودی کنترل پایدار را نتیجه می‌دهد. ورودی کنترل پایدار به دست آمده، حالت‌های سیستم غیرخطی جنگنده F-8 را تحت شرایط اولیه متفاوت پایدار می‌سازد. در مراحل طراحی کنترلی کننده برای کاهش حجم محاسبات، ملاحظاتی در نظر گرفته شده است. اثبات ریاضی نشان می‌دهد که سیستم حلقه بسته با کنترل پیشنهادی، پایداری مجانبی دارد. نتایج شبیه‌سازی‌ها عملکرد مطلوب کنترل کننده پیشنهادی در پایداری‌ساز هواپیمای جنگنده F-8 را به خوبی نمایش می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: هواپیمای جنگنده F-8، کنترل پیش‌بینی مبتنی بر مدل، استراتژی افق خزشی، پایداری‌ساز، پلی‌توپ

Stabilization of the F-8 Fighter Aircraft Using Model-Based Predictive Control

Mohammad Veysi, Mohammad Reza Soltanpour, Jafar Khalilpour

Abstract

The aircraft stabilizer stabilizes the aircraft utilizing non-fixed and controllable aerodynamic surfaces. This paper presents a model-based predictive control for F-8 fighter aircraft stabilization. In the proposed control method, meanwhile the real-time optimization, the cost-function is minimized by means of the linearized model of F-8 fighter and the output is predicted in future interval times based on the receding horizon strategy. The cost-function is defined as the aggregate of terminal cost and summation of stage costs, that the quadratic form of cost-function is utilized in control algorithm, eventually. The cost-function minimization is giving rise to stable control input. The extracted stable control input stabilized the states of the nonlinear F-8 fighter system under the various initial conditions. The considerations are taken into account in the controller designing steps, to reduce the computational load. Mathematical proof investigates that the closed-loop system with the proposed control has asymptotic stability. The simulation results well demonstrate the favorable efficiency of the proposed controller in F-8 fighter aircraft stabilization.

Key words: F-8 Fighter Aircraft, Model-Based Predictive Control, Receding horizon strategy, Stabilization, Polytope.

* نویسنده پاسخگو، پست الکترونیک: m_r_soltanpour@yahoo.com

مقدمه

هواپیمای F-8 یک جنگنده تک‌موتوره فراصوت می‌باشد که توسط شرکت Vought به‌عنوان جایگزین جنگنده F-7 برای نیروی دریایی آمریکا ساخته شده است. طراحی کنترل پرواز برای جنگنده F-8 به دلیل دینامیک پیچیده و غیرخطی و متغیر بودن قیود آن، کاری بسیار دشوار است. یکی از وظایف چالش‌برانگیز سیستم کنترلی جنگنده F-8، پایدارسازی جنگنده می‌باشد. پایداری طولی^۱ یکی از فاکتورهای مهم برای پایداری جنگنده است. پدیده ناپایداری طولی جنگنده بیشتر به دلایلی همچون زاویه حمله^۲ زیاد، تغییر ناگهانی زاویه پیچ^۳ و یا وارد شدن ضربه به دم هواپیما رخ می‌دهد. این پدیده ایمنی پرواز را به‌طور جدی با خطر مواجه می‌سازد [1]. لذا جهت مقابله با خطر محتمل ناپایداری، وجود یک سیستم کنترلی پایدارساز بسیار ضروری می‌باشد.

در سال‌های اخیر، محققین عرصه کنترل پرواز، تحقیقات گسترده و متنوعی برای پایدارسازی انواع هواپیماهای جنگنده مدرن انجام داده‌اند. محققین در مرجع [2]، دو ناحیه پایداری و زیر-پایداری برای کنترل هواپیما در نظر گرفته‌اند به‌نحوی که سیستم در ناحیه زیر-پایدار رفتار آشوبناک^۴ دارد. روش کنترلی پیشنهادی، کنترل مودلغزشی پس‌گام تطبیقی^۵ می‌باشد. از ویژگی‌های مثبت این روش کنترلی، تلفیق کنترل پس‌گام و مودلغزشی است چرا که در روش مذکور، مقاوم نبودن کنترل پس‌گام و پدیده نامطلوب لرزش ورودی کنترل در کنترل مودلغزشی به‌خوبی مرتفع گردیده است. در این تحقیق، کران عدم قطعیت‌ها به‌صورت سعی و خطا تعیین شده است. مرجع [3]، پایداری جنگنده F-8 را تحت زاویه حمله بسیار زیاد و براساس زمان‌بندی گین کنترلی تحلیل نموده است. در روش کنترلی پیشنهادی، تغییرات زاویه حمله مدنظر بوده و عوامل دیگر مانند تغییرات سرعت زاویه‌ای پیچ که می‌تواند منجر به ناپایداری طولی جنگنده F-8 گردد، به‌صورت ضمنی در نظر گرفته شده است. نویسندگان در مرجع [4]، برای هواپیمای LET L410 ضمن در نظر گرفتن ترم‌های غیرخطی معادلات فضای حالت، مدل فازی تاکاگی-سونگو را استخراج کرده‌اند و ضمن تعیین شرایط پایداری به‌صورت نامساوی ماتریسی خطی^۶، یک کنترل‌کننده جبران‌ساز موازی توزیع‌یافته^۷ طراحی نموده‌اند. در این پژوهش، به‌علت آفلاین بودن کنترل، تغییرات پارامترهای ساختاری می‌تواند از دقت کنترل و میزان پایداری

هواپیما بکاهد. در مقاله [5]، تأثیر یخ‌زدگی هواپیما در معادلات دینامیکی وارد شده و نواحی پایداری هواپیما به‌ازای زوایای مختلف حمله و پیچ محاسبه شده است. در این تحقیق ابتدا براساس تئوری پایداری معادله دیفرانسیل^۸، نقاط تعادل هواپیما به‌دست آمده و سپس بر اساس تئوری همبستگی^۹، نواحی پایداری استخراج گردیده است. در مرجع [6]، جهت تضمین پایداری هواپیما و دستیابی به معادلات دینامیکی مورد اعتماد، با پردازش موازی، یک بهینه‌سازی عددی سنگین انجام گرفته و قیود پایداری دینامیکی هواپیما در زمان واقعی استخراج و در اختیار کنترل‌کننده قرار گرفته است. نتایج این تحقیق بسیار جذاب می‌باشد اما علی‌رغم موازی بودن پردازش، حجم بالای محاسبات بهینه‌سازی، پیاده‌سازی عملی این روش را با چالش مواجه خواهد کرد. *دانیل سیمون* از محققین عرصه کنترل اتوماتیک در دانشگاه لیشووپینگ کشور سوئد، در سال ۲۰۱۷ کتابی را به رشته تحریر در آورده است که در آن امکان محدود کردن مانورهای هواپیماهای جنگی توسط کنترل پیش‌بینی مبتنی بر مدل بررسی شده است [7]. در این مرجع از حل‌کننده‌های QP استفاده گردیده و تمامی مراحل بهینه‌سازی به‌صورت آنلاین انجام شده است، لذا حجم محاسبات روش پیشنهادی فوق‌العاده سنگین می‌باشد.

در مرجع [8]، به‌منظور پایدارسازی هواپیما از کنترل مودلغزشی مبتنی بر فیدبک حالت استفاده شده است. همچنین پایداری سراسری کنترل‌کننده پیشنهادی نیز اثبات گردیده است. ولی برای مقابله با لرزش ورودی کنترل چاره‌ای اندیشیده نشده است و از طرفی پایدارسازی هواپیما با استفاده از دو ورودی کنترل محقق گردیده است. مرجع [9]، هواپیمای مورد مطالعه در مرجع [8] را مورد بررسی قرار داده است و برای رفع پدیده نامطلوب لرزش ورودی کنترل از تابع اشباع به‌جای تابع علامت در روند طراحی کنترل‌کننده مودلغزشی استفاده کرده است و کنترل مودلغزشی را با کنترل PD تلفیق نموده است. اما همچنان برای پایدارسازی هواپیما نیاز به دو ورودی کنترل داریم. لازم به‌ذکر است که در مراجع [8-9] کران بالای عدم قطعیت‌ها به‌صورت سعی و خطا تعیین شده است. در مرجع [10]، در کنترل حلقه‌بسته از معادلات دینامیکی خطی‌سازی شده هواپیما استفاده شده است و دو کنترل‌کننده فازی و PID برای پایدارسازی هواپیما به‌کار گرفته شده است. کنترل‌کننده فازی عملکرد مناسب‌تری داشته و دارای حجم

کاهش تا حد امکان حجم محاسبات کنترل کننده، ملاحظاتی در نظر گرفته شده است که در پروسه طراحی به آنها اشاره گردیده است.

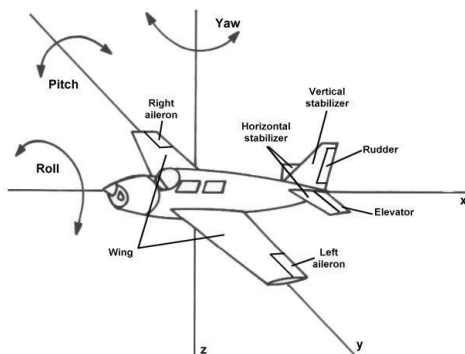
در ادامه، ساختار مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است: در بخش دوم، مسأله اصلی تحقیق و استراتژی کنترلی بیان گردیده است. بخش سوم مقاله، کنترل پیشنهادی و جزئیات پروسه طراحی کنترل کننده را تشریح نموده است. ضمناً در این بخش، پایداری مجانبی کنترل پیش‌بینی مبتنی بر مدل اثبات شده است. در بخش چهارم مقاله، به طور اجمالی مراحل طراحی کنترل کننده پیش‌بینی مبتنی بر مدل پیشنهادی برای پایداری جنگنده F-8، ذکر گردیده است. نتایج شبیه‌سازی در بخش پنجم مقاله بیان شده است. بخش ششم مقاله، مزایا و نوآوریهای کنترل پیشنهادی را تشریح می‌نماید و نهایتاً در بخش هفتم، نتایج مقاله ارائه می‌گردد.

بیان مسأله و استراتژی کنترلی

در ساختار جنگنده F-8 (شکل ۱)، دو سطح آیرودینامیکی پایداری، مطابق شکل ۲ وجود دارند که پایداری هواپیما را به صورت کلی در راستاهای عمودی و افقی ممکن می‌سازند.



شکل ۱- جنگنده F-8

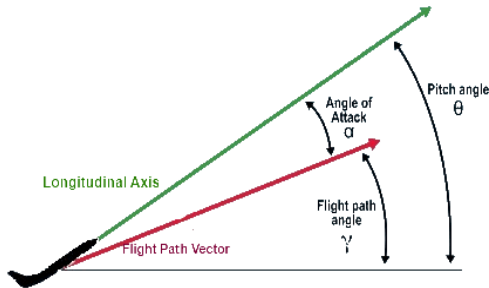


شکل ۲- پایداری‌سازهای عمودی و افقی

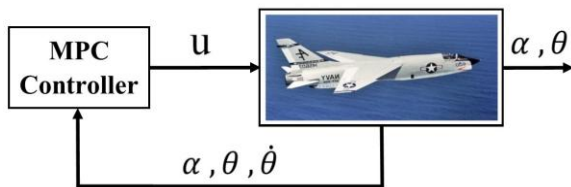
محاسبات نسبتاً پایی می‌باشد اما متأسفانه در این مرجع، در پایداری هواپیما تنها زاویه پیچ در نظر گرفته شده است و زاویه حمله در معادلات دینامیکی لحاظ نگردیده است و این موضوع، پیاده‌سازی عملی کنترل پیشنهادی را غیرممکن می‌سازد. استراتژی کنترلی پیشنهادی مرجع [11]، شامل دو کنترل کننده می‌باشد که بطور هم‌زمان کار می‌کنند. کنترل کننده اول، متغیرهای عمودی را پایداری می‌سازد و حاصل تلفیق کنترل کننده مودل‌غزشی ترمینالی و روش خطی‌سازی فیدبکی می‌باشد. کنترل کننده دوم، متغیرهای افقی و زاویه‌ای را پایداری می‌کند و در آن از روش کنترل انرژی استفاده می‌شود. از طرفی، سرعت‌های خطی و زاویه‌ای مورد نیاز توسط یک مشاهده‌گر مودل‌غزشی مرتبه دوم تخمین زده می‌شود. اگرچه ایده کنترلی این مرجع، بسیار جالب و متمایز از سایر تحقیقات در این زمینه می‌باشد اما حجم محاسبات ورودی کنترل بسیار بالا می‌باشد. مرجع [12] یک روش کنترل پیش‌بینی مبتنی بر مدل غیرخطی برای پایداری هواپیما ارائه داده است. در روش پیشنهادی، به علت استفاده از مدل غیرخطی هواپیما، حجم محاسبات ورودی کنترل فوق‌العاده بالا است.

با بررسی و تحلیل مقالات فوق، می‌توان دریافت که با وجود نوآوری‌های هر کدام از این مقالات و تحقیقات نظیر آنها، حجم سنگین محاسبات، آفلاین بودن پروسه کنترل و در نظر نگرفتن همه پارامترهای تعیین کننده در پایداری هواپیما، می‌تواند در پیاده‌سازی عملی این کنترل کننده‌ها، هدف نهایی کنترل یعنی پایداری هواپیما را با چالش مواجه نماید.

در این مقاله برای غلبه بر مشکلات فوق، یک کنترل کننده پایداری پیش‌بینی مبتنی بر مدل ارائه می‌گردد. کنترل پیش‌بینی مبتنی بر مدل دارای مزایای متعددی مانند: پروسه طراحی به شدت انعطاف‌پذیر، استفاده صریح از مدل تحت کنترل، مدیریت قیود مسأله و تنظیم ساده پارامترهای کنترلی می‌باشد [13-14]. با توجه به پیچیده و غیرخطی بودن معادلات دینامیکی هواپیمای جنگنده F-8، برای اجتناب از پیچیدگی و حجم بسیار سنگین محاسبات کنترل پیش‌بینی مبتنی بر مدل غیرخطی، براساس مدل خطی شده هواپیمای جنگنده F-8، یک کنترل کننده پیش‌بینی مبتنی بر مدل خطی طراحی می‌گردد. سپس ورودی کنترل حاصله از پایداری طراحی شده، به مدل غیرخطی هواپیمای جنگنده F-8 اعمال می‌شود. ضمن اثبات پایداری کنترل کننده پیشنهادی، برای



شکل ۳- زاویه حمله و زاویه پیچ

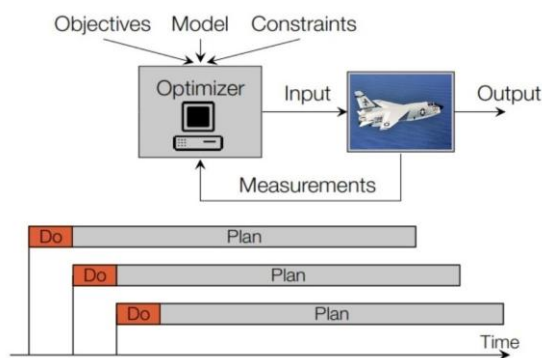


شکل ۴- سیستم کنترلی پایدارسازی جنگنده F-8

کنترل پیشنهادی

کنترل پیش‌بینی مبتنی بر مدل خطی پیشنهادی، مطابق شکل ۵ با استفاده از استراتژی افق خزشی (افق در حال ظهور) و به منظور پیش‌بینی خروجی فرآیند در بازه‌های زمانی آینده، به صورت واضح از مدل فرآیند (جنگنده F-8) جهت به حداقل رساندن تابع هدف، استفاده می‌کند و در نهایت به سیگنال کنترلی دست می‌یابد. ساختار کنترل، یک ساختار فیدبک حالت بوده و هدف کنترل، پایدارسازی می‌باشد. تابع هدفی که در مسأله بهینه‌سازی و در هر لحظه کمینه می‌شود، با رابطه (۴) تعریف می‌گردد [18]:

$$j = P(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} q(x_k, u_k) \quad (4)$$



شکل ۵- ساختار سیستم کنترل پیش‌بینی مبتنی بر مدل خطی پیشنهادی

عموماً پایدارسازها دارای سطوح متحرک کنترلی هستند. قسمت متحرک پایدارساز عمودی رادار^{۱۰} و قسمت متحرک پایدارساز افقی الویتور^{۱۱} نام دارد. در مراجع [15-17]، معادلات دینامیکی غیرخطی هواپیمای جنگنده F-8 با روابط (۱) بیان شده است:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \dot{\theta} - \alpha^2 \dot{\theta} - 0.088\alpha\dot{\theta} - 0.877\alpha + 0.47\alpha^2 + 3.846\alpha^3 \\ -0.215u + 0.28u\alpha^2 + 0.47u\alpha^2 + \alpha + 0.63u^3 - 0.019\theta^2 \\ \dot{\theta} = -0.396\dot{\theta} - 4.208\alpha - 0.47\alpha^2 - 3.564\alpha^3 - 20.967u \\ + 6.265u\alpha^2 + 46u^2 + 61.4u^3 \end{cases} \quad (1)$$

که در آن، α زاویه حمله، θ زاویه پیچ و u زاویه الویتور و ورودی کنترل می‌باشد. تفاوت زاویه حمله و زاویه پیچ در شکل ۳ مشخص است.

با خطی‌سازی معادلات دینامیکی غیرخطی رابطه (۱)، رابطه (۲) به دست می‌آید [15]:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \dot{\theta} - 0.877\alpha - 0.215u \\ \dot{\theta} = -0.396\dot{\theta} - 4.208\alpha - 20.967u \end{cases} \quad (2)$$

نمایش فضای حالت $(\dot{X}=AX + Bu)$ معادلات فوق، به صورت رابطه (۳) می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.877 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4.208 & 0 & -0.396 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.215 \\ 0 \\ -20.976 \end{bmatrix} u \quad (3)$$

براساس روابط (۱) تا (۳)، بلوک دیاگرام کنترلی پایدارساز جنگنده F-8 به صورت شکل ۴ قابل نمایش است. براساس این استراتژی کنترلی، از حالت‌های سیستم $(\alpha, \theta, \dot{\theta})$ فیدبک گرفته می‌شود و به صورت زمان واقعی در اختیار کنترل‌کننده پیش‌بینی مبتنی بر مدل قرار می‌گیرد و کنترل‌کننده نیز ورودی کنترل (u) را به جنگنده F-8 اعمال می‌کند و پایدارسازی جنگنده را موجب خواهد شد. زوایای پایدار شده حمله و پیچ، خروجی سیستم می‌باشند.

پس از این توضیح اجمالی، در بخش بعدی مقاله، جزئیات کنترل‌کننده پیش‌بینی مبتنی بر مدل پیشنهادی تشریح خواهد شد.

تابع هدف را می‌توان با رابطه (۶) بازنویسی کرد:

$$j = x^T_{t+N/t} p x_{t+N/t} + \sum_{k=0}^{N-1} x^T_{t+k/t} Q x_{t+k/t} + u^T_{t+k/t} R u_{t+k/t} \quad (6)$$

با ساده‌سازی رابطه (۶)، رابطه (۷) به دست می‌آید:

$$j = x^T_{t+N/t} p x_{t+N/t} + x^T_{t+0/t} Q x_{t+0/t} + x^T_{t+1/t} Q x_{t+1/t} + \dots + x^T_{t+N-1/t} Q x_{t+N-1/t} + u^T_{t+0/t} R u_{t+0/t} + u^T_{t+1/t} R u_{t+1/t} + \dots + u^T_{t+N-1/t} R u_{t+N-1/t} \quad (7)$$

با در نظر گرفتن بردارهای X و U به طوری که:

$$U = \begin{bmatrix} u_{t+0/t} \\ u_{t+1/t} \\ \vdots \\ u_{t+N-1/t} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_{t+0/t} \\ x_{t+1/t} \\ \vdots \\ x_{t+N/t} \end{bmatrix}$$

و با توجه به این که $x_{t+0/t} = x(t)$ و $u_{t+0/t} = u(t)$ داریم:

$$j = X^T \bar{Q} X + U^T \bar{R} U + x^T(t) Q x(t) \quad (8)$$

که در آن:

$$\bar{Q} = \text{blkdiag}(Q, \dots, Q, p) ; \bar{R} = \text{blkdiag}(R, \dots, R)$$

لازم به یادآوری است که در رابطه (۸)، بردار X شامل پیش‌بینی از حالت‌های سیستم تا N مرحله بعد و بردار U شامل متغیرهای بهینه‌سازی است. با توجه به قید مدل سیستم در رابطه (۵)، پیش‌بینی در k مرحله عبارت است از:

$$\begin{aligned} x_{t+k+1/t} &= A x_{t+k/t} + B u_{t+k/t} \\ k=0 &\rightarrow x_{t+1/t} = A x_{t+0/t} + B u_{t+0/t} \\ k=1 &\rightarrow x_{t+2/t} = A^2 x_{t+0/t} + A B u_{t+0/t} + B u_{t+1/t} \\ &\vdots \\ k=N-1 &\rightarrow \\ x_{t+N/t} &= A^N x_{t+0/t} + A^{N-1} B u_{t+0/t} + \dots + A B u_{t+N-2/t} + B u_{t+N-1/t} \end{aligned} \quad (9)$$

در رابطه (۴)، $P(x_N)$ را هزینه پایانی^{۱۲} و $q(x_k, u_k)$ را هزینه هر مرحله^{۱۳} از پیش‌بینی می‌نامند. متغیر x_N حالت سیستم در آخرین لحظه مرحله پایانی بوده و متغیرهای x_k و u_k به ترتیب حالت‌های سیستم و ورودی‌های کنترل می‌باشند که طبق تعریف عبارتند از:

$$x_k = x_{t+k/t} ; u_k = u_{t+k/t}$$

که به ترتیب، مقدار x و u در k مرحله بعد، به شرط این که در لحظه t باشیم را تعیین می‌کنند. N نیز افق پیش‌بینی^{۱۴} می‌باشد.

مسئله بهینه‌سازی در الگوریتم کنترل پیشنهادی به طور کلی، با روابط (۵) ارائه می‌شود [18]:

$$\text{minimize } P(x_{t+N/t}) + \sum_{k=0}^{N-1} q(x_{t+k/t}, u_{t+k/t})$$

Subject to :

$$x_{t+0/t} = x(t); \text{ feedback (1)}$$

$$x_{t+k+1/t} = A x_{t+k/t} + B u_{t+k/t}; \text{ system model (2)} \quad (5)$$

$$x_{t+k/t} \in \mathcal{X}; \text{ state constraints (3)}$$

$$u_{t+k/t} \in \mathcal{V}; \text{ input constraints (4)}$$

$$U_t = \{u_{t+0/t}, u_{t+1/t}, \dots, u_{t+N-1/t}\}; \text{ optimization variables (5)}$$

در قیود شماره ۳ و ۴، مجموعه‌های \mathcal{X} و \mathcal{V} پلی توپ هستند. در مرجع [18]، قید شماره ۱ فیدبک حالت‌های مدل خطی یا خطی‌سازی شده، قید شماره ۲ مدل خطی یا خطی‌سازی شده سیستم تحت کنترل، قید شماره ۳ قیود روی حالت‌های مدل خطی یا خطی‌سازی شده، قید شماره ۴ قیود روی ورودی کنترل اعمالی به مدل خطی یا خطی‌سازی شده و بالاخره قید شماره ۵ متغیرهای بهینه‌سازی می‌باشند. در صورتی که در مقاله پیش‌روی، قید شماره ۱ فیدبک حالت‌های مدل غیرخطی هواپیمای جنگنده F-8، قید شماره ۲ مدل خطی‌سازی شده هواپیمای جنگنده F-8، قید شماره ۳ قیود روی حالت‌های مدل غیرخطی هواپیمای جنگنده F-8، قید شماره ۴ قیود روی ورودی کنترل اعمالی به مدل غیرخطی هواپیمای جنگنده F-8 و بالاخره قید شماره ۵ متغیرهای بهینه‌سازی می‌باشند. در صورتی که در مسئله بهینه‌سازی رابطه (۵) از مدل غیرخطی هواپیمای جنگنده F-8 استفاده شود، به طور کلی روند طراحی کنترل کننده تغییر خواهد کرد و حجم محاسبات به طور فزاینده‌ای افزایش می‌یابد [19].

$$j = \frac{1}{2} U^T H U + x^T(t) F_1 U \quad (15)$$

با حل رابطه (۱۵)، رابطه (۱۶) به دست می‌آید:

$$U = -H^{-1} F_1^T x(t) \quad (16)$$

با تعریف $K = H^{-1} F_1^T$ داریم:

$$U = -K x(t) \quad (17)$$

با تعریف $u = U(I)$ و طبق استراتژی افق خزشی، فقط اولین مقدار پیش‌بینی را در نظر گرفته و رابطه (۱۸) مطرح می‌شود:

$$u = -[I \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] K x(t) \quad (18)$$

از آنجائی که در مسائل پایدارسازی فقط با بردار حالت‌های سیستم و بردار ورودی کنترل سر و کار داریم، لذا واضح است که قیود مسأله بهینه‌سازی رابطه (۵) نیز به‌درستی روی بردارهای حالت‌های سیستم و ورودی کنترل تعریف شده‌اند. قید روی ورودی کنترل را می‌توان با رابطه (۱۹) تعریف کرد:

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max} \quad (19)$$

برای رسیدن به فرمت تعریف‌شده برای یک پلی‌توپ، قید رابطه (۱۹) به فرمت رابطه (۲۰) بیان می‌شود:

$$\begin{cases} u(t) \leq u_{\max} \\ -u(t) \leq u_{\min} \end{cases} \quad (20)$$

در این مرحله از پروسه طراحی، به‌دنبال به‌دست آوردن پلی‌توپ v هستیم، پلی‌توپ مذکور با رابطه (۲۱) تعریف می‌گردد:

$$v = \{U \in \mathbb{R}^m \mid A_c U \leq b_c\} \quad (21)$$

در رابطه (۲۱)، m تعداد ورودی‌های کنترل بوده و ماتریس A_c و بردار b_c عبارتند از:

$$A_c = \begin{bmatrix} I \\ \dots \\ -I \end{bmatrix} ; \quad b_c = \begin{bmatrix} u_{\max} \\ \dots \\ -u_{\min} \end{bmatrix}$$

با توجه به قید ورودی کنترل در رابطه (۵)، u باید در طول افق پیش‌بینی، عضو مجموعه بسته و محدب v باشد، با نوشتن پیش‌بینی در k مرحله، روابط (۲۲) عنوان می‌شوند:

با توجه به رابطه (۹)، قید مدل سیستم را می‌توان با رابطه (۱۰) بیان نمود:

$$X = \begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ AB & B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & B \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix} x(t) \quad (10)$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix} \text{ و } S_1 = \begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ AB & B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & B \end{bmatrix} \text{ با تعریف}$$

رابطه (۱۰) به صورت رابطه (۱۱) بازنویسی می‌شود:

$$X = S_1 U + S_2 x(t) \quad (11)$$

نکته ۱: طبق مطالب بیان‌شده قبلی، هدف از بهینه‌سازی و کمینه کردن تابع هدف رابطه (۸) به‌دست آوردن سیگنال ورودی کنترل می‌باشد. لذا با توجه به رابطه (۸) واضح است که جمله سوم $(x^T(t) Q x(t))$ به بردار U وابسته نیست، بنابراین به منظور کاهش حجم محاسبات می‌توان این جمله را حذف نمود.

با در نظر گرفتن نکته ۱ و با جایگذاری رابطه (۱۱) در رابطه (۸)، رابطه (۱۲) به دست می‌آید:

$$j = (S_1 U + S_2 x(t))^T \bar{Q} (S_1 U + S_2 x(t)) + U^T \bar{R} U \quad (12)$$

با ساده‌سازی رابطه (۱۲) و در نظر نگرفتن جمله غیروابسته به بردار U رابطه (۱۳) به دست می‌آید:

$$j = U^T S_1^T \bar{Q} S_1 U + 2x^T(t) S_2^T \bar{Q} S_1 U + U^T \bar{R} U \quad (13)$$

با فاکتورگیری و ساده‌سازی رابطه (۱۳)، رابطه (۱۴) حاصل می‌شود:

$$j = U^T (S_1^T \bar{Q} S_1 + \bar{R}) U + x^T(t) (2S_2^T \bar{Q} S_1) U \quad (14)$$

در نهایت با تعریف $F_1 = 2(S_2^T \bar{Q} S_1)$ و $H = 2(S_1^T \bar{Q} S_1 + \bar{R})$ فرم مربعی تابع هزینه را به صورت رابطه (۱۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 &x_{t+k/t} \in \mathcal{X} \\
 &k = 0 \rightarrow A_{x_1} x(t) \leq b_{x_1} \\
 &k = 1 \rightarrow A_{x_1} \{Ax(t) + Bu(t)\} \leq b_{x_1} \\
 &\vdots \\
 &k = N - 1 \rightarrow \\
 &A_{x_1} \left\{ \begin{aligned} &A^N x(t) + A^{N-1} Bu(t) + \dots \\ &+ ABu_{t+N-2/t} + Bu_{t+N-1/t} \end{aligned} \right\} \leq b_{x_1}
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

در روابط (۲۷)، $x(t)$ در واقع همان $x_{t+0/t}$ است. با توجه به رابطه (۲۷)، پلی توپ \mathcal{X} یا به عبارتی قید روی حالت‌های سیستم را می‌توان با رابطه (۲۸) بازنویسی کرد:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{x_1} B & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{x_1} A^{N-1} B & A_{x_1} A^{N-2} B & \dots & A_{x_1} B \end{bmatrix}}_{A_x} \underbrace{\begin{bmatrix} u(t) \\ u_{t+1/t} \\ \vdots \\ u_{t+N-1/t} \end{bmatrix}}_U \leq \begin{bmatrix} b_{x_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{x_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_{x_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{x_1} \end{bmatrix}_W + \begin{bmatrix} -A_{x_1} \\ -A_{x_1} A \\ \vdots \\ -A_{x_1} A^N \end{bmatrix}_S x(t)$$

در رابطه (۲۸)، با تعریف $b_x = W + Sx(t)$ قید را به صورت $A_x U \leq b_x$ داریم. در مورد پروسه طراحی ورودی کنترل مطالب قابل بیان عبارتند از:

- ۱- ورودی کنترل (رابطه (۱۷)) خطی می‌باشد.
- ۲- در هر مرحله پیش‌بینی، شرایط اولیه $(x(t))$ مرتباً عوض می‌شود، لذا پلی توپ \mathcal{X} نیز مرتباً در حال تغییر است.
- ۳- با توجه به روند طراحی و جهت کاهش حجم محاسبات حلقه بهینه‌سازی، تمامی ماتریس‌ها و بردارهای ذکر شده، خارج از حلقه بهینه‌سازی و به صورت آفلاین در یک *م‌فایل فانکشن* محاسبه می‌گردند.

- ۴- ورودی کنترل الزاماً پایدارساز نیست، فقط و فقط در صورتی که افق پیش‌بینی برابر بی‌نهایت باشد می‌توان ادعا کرد که حتماً ورودی کنترل پایدارساز است. البته در این صورت، حجم محاسبات به شدت افزایش می‌یابد چراکه در محاسبات آفلاین، ابعاد ماتریس‌ها و بردارهای H ، F_1 ، A_c ، b_c

$$\begin{aligned}
 &u_{t+k/t} \in \mathcal{U} \\
 &k = 0 \rightarrow A_u u_{t+0/t} \leq b_u \\
 &k = 1 \rightarrow A_u u_{t+1/t} \leq b_u \\
 &\vdots \\
 &k = N - 1 \rightarrow A_u u_{t+N-1/t} \leq b_u
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

در روابط (۲۲)، $u_{t+0/t}$ در واقع همان $u(t)$ است. با توجه به رابطه (۲۲)، پلی توپ \mathcal{U} یا به عبارتی قید روی ورودی کنترل را می‌توان با رابطه (۲۳) بیان نمود:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_u \end{bmatrix}}_{A_c} \underbrace{\begin{bmatrix} u(t) \\ u_{t+1/t} \\ \vdots \\ u_{t+N-1/t} \end{bmatrix}}_U \leq \underbrace{\begin{bmatrix} b_u \\ \vdots \\ \vdots \\ b_u \end{bmatrix}}_{b_c}$$

در واقع در رابطه (۲۳)، قید به صورت $A_c U \leq b_c$ بوده و بردار U ، بردار مجهول می‌باشد. قید روی حالت‌های سیستم را می‌توان با رابطه (۲۴) تعریف کرد:

$$x_{\min} \leq x(t) \leq x_{\max}
 \tag{24}$$

قید رابطه (۲۴) با رابطه (۲۵) بازنویسی می‌شود:

$$\begin{cases} x(t) \leq x_{\max} \\ -x(t) \leq x_{\min} \end{cases}
 \tag{25}$$

پلی توپ \mathcal{X} با رابطه (۲۶) تعریف می‌شود:

$$\mathcal{X} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid A_x X \leq b_x\}
 \tag{26}$$

در تعریف رابطه (۲۶)، n تعداد حالت‌های سیستم بوده و ماتریس A_x و بردار b_x عبارتند از:

$$A_x = \begin{bmatrix} I & & & \\ & \dots & & \\ & & \dots & \\ & & & -I \end{bmatrix}; \quad b_x = \begin{bmatrix} x_{\max} \\ \vdots \\ -x_{\min} \end{bmatrix}$$

حالت‌های سیستم باید در طول افق پیش‌بینی عضو مجموعه بسته و محدب \mathcal{X} باشند، با توجه به قید حالت‌های سیستم و با نوشتن پیش‌بینی در k مرحله، خواهیم داشت:

$$x_{k+1} = \{Ax_k + Bv(x_k)\} \in \mathcal{X}_f$$

for all $x_k \in \mathcal{X}_f$

از طرفی:

$$\mathcal{X}_f \subseteq \mathcal{X}; v(x_k) \in \mathcal{V} \text{ for all } x_k \in \mathcal{X}_f$$

فرض ۳: هزینه پایانی، یک تابع لیاپانوف در \mathcal{X}_f است که رابطه (۲۹) را ارضاء می‌کند:

حال با توجه به تعاریف و فرض‌های بیان‌شده، قضیه پایدارى کنترل پیشنهادی تعریف می‌شود:

قضیه ۱: سیستم حلقه‌بسته با کنترل پیش‌بینی مبتنی بر مدل، تحت قانون کنترلی u_0^* پایدار مجانبی است و مجموعه \mathcal{X}_f برای سیستم $x(t+1) = Ax(t) + Bu_0^*$ مثبت تغییرناپذیر است.

اثبات قضیه ۱: در حالت بهینه^۲، بردارهای

$$U_t^* = \begin{bmatrix} u_0^* \\ u_1^* \\ \vdots \\ u_{N-1}^* \end{bmatrix} \text{ و } X_t^* = \begin{bmatrix} x_0^* \\ x_1^* \\ \vdots \\ x_N^* \end{bmatrix}$$

تابع هزینه J_t^* را به دست می‌دهد:

$$J_t^* = P(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} q(x_k, u_k^*) \quad (30)$$

با توجه به استراتژی خزشی می‌توان رابطه (۳۱) را نوشت:

$$J_t^* = P(x_N) + q(x_0, u_0) \quad (31)$$

اما در حالت زیر-بهینه^۲، بردارهای \tilde{X}_{t+1} و \tilde{U}_{t+1} عبارتند از:

$$\tilde{X}_{t+1} = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_N^* \\ \phi(x_N) \end{bmatrix}; \quad \tilde{U}_{t+1} = \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ \vdots \\ u_{N-1}^* \\ v(x_N) \end{bmatrix}$$

در بردارهای \tilde{X}_{t+1} و \tilde{U}_{t+1} ، طبق فرض ۲، $v(x_N)$ قانون کنترل محلی و $\phi(x_N) = Ax_N + Bv(x_N)$ می‌باشد. تابع هزینه \tilde{J}_{t+1} با رابطه (۳۲) بیان می‌شود:

$$\tilde{J}_{t+1} = P(\phi(x_N)) + q(x_N, v(x_N)) \quad (32)$$

A_x و b_x وابسته به بزرگی افق پیش‌بین است و بزرگ‌شدن ابعاد ماتریس‌ها و بردارهای مذکور، حجم محاسبات آنالیز در حلقه بهینه‌سازی را فوق‌العاده سنگین خواهد نمود.

$$P(x_{k+1}) - P(x_k) \leq -q(x_k, v(x_k)) \quad (29)$$

for all $x_k \in \mathcal{X}_f$

با توجه به مطالب بیان‌شده، می‌توان استنباط کرد که بی‌نهایت در نظر گرفتن افق پیش‌بینی به هیچ‌وجه راه مناسبی برای تضمین پایداری سیستم کنترلی پیشنهادی، خصوصاً در کاربردهای عملی، نمی‌باشد. لذا پایداری سیستم کنترلی پیشنهادی، باید تحت یک قضیه پایداری، با شرایط و فرض‌های منطقی، تضمین گردد.

تعریف ۱: مجموعه زیر را مجموعه دارای جواب N مرحله‌ای^{۱۵} می‌گویند.

$$\mathcal{X}_0 = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} \exists (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}) \\ \text{such that } x_k \in \mathcal{X}, u_k \in \mathcal{V} \\ k = 0, 1, \dots, N-1; x_N \in \mathcal{X}_f \\ \text{where } x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \end{array} \right. \right\}$$

در تعریف ۱، \mathcal{X}_f را مجموعه پایانی^{۱۶} می‌نامند.

نکته ۲: در واقع مجموعه تعریف ۱، شامل مجموعه نقاطی در فضای حالت است که به ناحیه پایداری می‌رسند و اصطلاحاً به این مجموعه نقاط، ناحیه جذب^{۱۷} می‌گویند.

تعریف ۲: مجموعه $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n$ را برای سیستمی به فرم $\Delta x(t) = f(x(t))$ مثبت تغییرناپذیر^{۱۸} گویند، اگر برای $t > 0$ و به ازای تمامی $x(0) \in \mathcal{W}$ جواب $x(t) \in \mathcal{W}$ باشد. اگر برای تمام $t \in R$ ، $x(0) \in \mathcal{W}$ منجر به $x(t) \in \mathcal{W}$ شود، \mathcal{W} را مجموعه تغییرناپذیر گویند [14].

فرض ۱: هزینه هر مرحله مثبت معین^{۱۹} بوده و فقط در مبدأ مقدار صفر دارد.

فرض ۲: مجموعه پایانی (\mathcal{X}_f) یک مجموعه مثبت تغییرناپذیر تحت قانون کنترل محلی ($v(x_k)$) است، به طوری که:

با توجه به مطالب عنوان شده، برای عبارت $\tilde{J}_{t+1}^* - j_t^*$ داریم:

مراحل طراحی کنترل پیشنهادی

به طور کلی مراحل طراحی کنترل پیش بینی مبتنی بر مدل پیشنهادی برای پایداری سازی جنگنده F-8 عبارتند از:

- ۱- زمان نمونه برداری $t^{۲۲}$ تعیین می شود.
- ۲- افق پیش بینی و قیود روی حالت های سیستم و ورودی کنترل تعریف می گردد.
- ۳- بردار شرایط اولیه حالت های سیستم $X_0(t)$ تعیین می شود.
- ۴- بردار حالت سیستم $X(t)$ در زمان t اندازه گیری می شود.
- ۵- با استفاده از روابط (۱۰) تا (۲۸)، ماتریس ها و بردارهای H, F_1, A_c, b_c, A_x و b_x محاسبه می گردند.
- ۶- با حل مسأله بهینه سازی رابطه (۵)، بردار U_t^* به دست می آید.
- ۷- اولین درایه بردار U_t^* ، یعنی u_t^* به جنگنده F-8 اعمال می گردد.
- ۸- پس از فرا رسیدن زمان نمونه برداری $t+1$ ، به مرحله ۴ ارجاع می گردد.

نتایج شبیه سازی

قبل از ارائه نتایج شبیه سازی، لازم به توضیح است که جعبه ابزار مورد استفاده در نرم افزار MATLAB، برای شبیه سازی مسائل کنترل پیش بینی مبتنی بر مدل، جعبه ابزار MPT^۳ می باشد که آخرین نسخه آن MPT3 است. در این مقاله، برای کاهش حجم محاسبات و به حداقل رساندن زمان شبیه سازی و همچنین به منظور تحلیل مراحل طراحی کنترل کننده پیش بینی مبتنی بر مدل، در محیط نرم افزار MATLAB کدنویسی انجام شده است و از جعبه ابزار MPT3، که به مراتب کدنویسی در آن ساده تر است، صرفاً جهت صحت سنجی نتایج شبیه سازی استفاده شده است.

در این شبیه سازی، زمان نمونه برداری 0.05 ثانیه در نظر گرفته شده است. مقادیر پارامترهای شرایط اولیه حالت های سیستم، افق پیش بینی و قیود روی حالت های سیستم و ورودی کنترل در جدول ۱ نمایش داده شده است. ماتریس ها و

$$\tilde{J}_{t+1}^* - j_t^* = P(\phi(x_N)) + q(x_N, v(x_N)) - P(x_N) - q(x_0, u_0) \quad (۳۳)$$

با مرتب سازی رابطه (۳۳)، رابطه (۳۴) به دست می آید:

$$\tilde{J}_{t+1}^* = j_t^* - q(x_0, u_0) + q(x_N, v(x_N)) + P(\phi(x_N)) - P(x_N) \quad (۳۴)$$

با توجه به برقراری رابطه $j_{t+1}^* \leq \tilde{J}_{t+1}^*$ ، می توان نوشت:

$$j_{t+1}^* \leq j_t^* - q(x_0, u_0) + q(x_N, v(x_N)) + P(\phi(x_N)) - P(x_N) \quad (۳۵)$$

رابطه (۳۵) به صورت رابطه (۳۶) بازنویسی می شود:

$$j_{t+1}^* - j_t^* \leq -q(x_0, u_0) + q(x_N, v(x_N)) + P(\phi(x_N)) - P(x_N) \quad (۳۶)$$

با توجه به این که عبارت $j_{t+1}^* - j_t^*$ معرف مشتق تابع لیاپانوف می باشد، لذا با منفی بودن سمت راست نامعادله رابطه (۳۶) می توان پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته را نتیجه گرفت. جمله $-q(x_0, u_0)$ منفی می باشد، بنابراین عبارت $q(x_N, v(x_N)) + P(\phi(x_N)) - P(x_N)$ نیز باید منفی باشد، لذا می توان نوشت:

$$q(x_N, v(x_N)) + P(\phi(x_N)) - P(x_N) \leq 0 \quad (۳۷)$$

با مرتب سازی رابطه (۳۷)، رابطه (۳۸) به دست می آید:

$$P(\phi(x_N)) - P(x_N) \leq -q(x_N, v(x_N)) \quad (۳۸)$$

با بازنویسی رابطه (۳۸)، رابطه (۳۹) به دست می آید:

$$P(x_{k+1}) - P(x_k) \leq -q(x_k, v(x_k)); x_k \in \mathcal{X}_f \quad (۳۹)$$

رابطه (۳۹) در واقع بیانگر فرض ۳ می باشد، بنابراین با منفی بودن سمت راست نامعادله رابطه (۳۶)، پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته با کنترل پیشنهادی، اثبات می گردد.

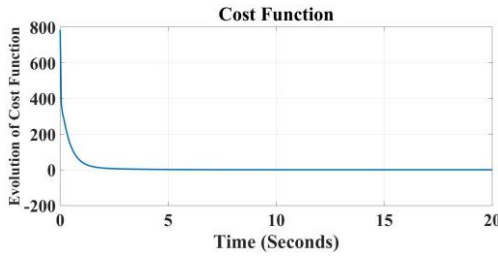
مشاهده تأثیر طول افق پیش‌بینی، مقادیر ۲، ۱۰، ۲۰ و ۲۰۰ برای افق پیش‌بینی در نظر گرفته می‌شود. پس از اعمال ورودی کنترل به سیستم غیرخطی جنگنده F-8 و اجرای شبیه‌سازی، به‌عنوان نمونه، حالت x_2 به‌ازای مقادیر متفاوت طول افق پیش‌بینی، در شکل ۹ نمایش داده شده است.

بردارهای H ، F_1 ، A_c ، b_c ، A_x و b_x به‌دست آمده از شبیه‌سازی، در پیوست ارائه گردیده است.

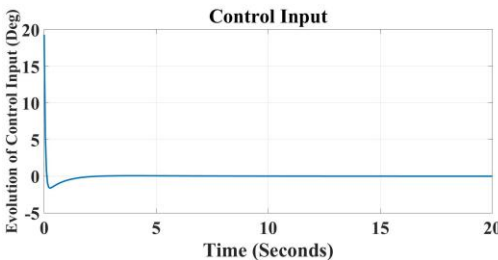
پس از اعمال مقادیر پارامترهای جدول ۱ و اجرای شبیه‌سازی، نمودار تابع هزینه و ورودی کنترل اعمال شده به جنگنده F-8 در شکل ۶ نمایش داده شده است.

جدول ۱ - مقادیر پارامترهای طراحی کنترل‌کننده

مقدار	پارامتر	مقدار	پارامتر
15	$\alpha_{max} (Deg)$	10	$\alpha_0 (Deg)$
15	$\theta_{max} (Deg)$	5	$\theta_0 (Deg)$
30	$\dot{\theta}_{max} (Deg / Sec)$	30	$\dot{\theta}_0 (Deg / Sec)$
-15	$\alpha_{min} (Deg)$	35	$u_{max} (Deg)$
-15	$\theta_{min} (Deg)$	-35	$u_{min} (Deg)$
-30	$\dot{\theta}_{min} (Deg / Sec)$	10	N

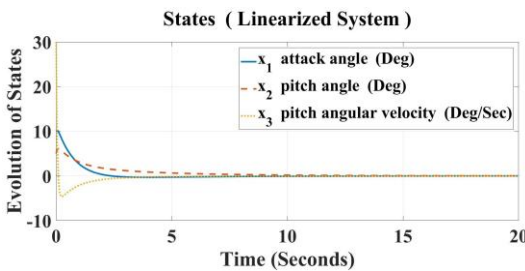


۶- الف) تابع هزینه

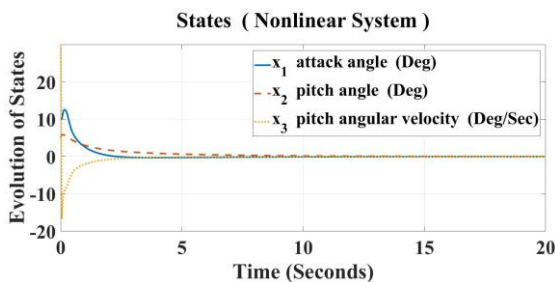


۶- ب) ورودی کنترل

شکل ۶ - تابع هزینه و ورودی کنترل اعمال شده به جنگنده F-8



شکل ۷ - حالت‌های سیستم خطی شده جنگنده F-8



شکل ۸ - حالت‌های سیستم غیرخطی جنگنده F-8

با دقت در شکل ۶، کمینه شدن تابع هزینه و پایداری ورودی کنترل قابل مشاهده است. ورودی کنترل پایدار به‌دست‌آمده به سیستم خطی شده جنگنده F-8 اعمال و طبق شکل ۷، حالت‌های سیستم خطی شده استخراج گردید.

پایداری حالت‌های سیستم خطی شده جنگنده F-8 در شکل ۷ مشخص می‌باشد. اما نکته قابل توجه این است که آیا ورودی کنترل پیش‌بینی مبتنی بر مدل پیشنهاد شده در این مقاله، که براساس مدل خطی شده جنگنده F-8 طراحی گردیده است، حالت‌های سیستم غیرخطی را نیز پایدار خواهد کرد؟ لذا برای پاسخ به سوال مهم، ورودی کنترل شکل ۶-ب، به سیستم غیرخطی جنگنده F-8 اعمال شده و حالت‌های سیستم غیرخطی مطابق شکل ۸ به‌دست آمد.

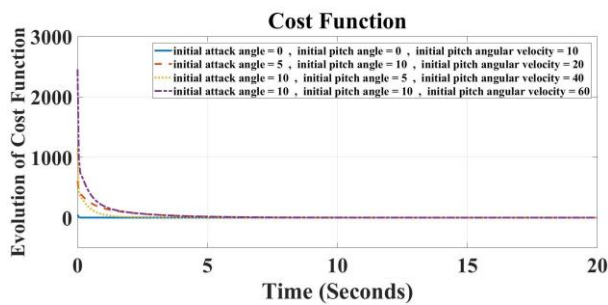
پایداری حالت‌های سیستم غیرخطی جنگنده F-8 در شکل ۸ مشخص می‌باشد، که این پایداری حالت‌های سیستم غیرخطی، در نهایت منجر به پایداری هواپیمای جنگنده F-8 خواهد گردید. فراجش ناچیز حالت x_1 و فراجش حالت x_3 به‌دلیل دینامیک پیچیده و غیرخطی رابطه (۱)، غیر قابل اجتناب است. با توجه به مطالب بیان شده در بخش سوم، طول افق پیش‌بینی، تأثیر فوق‌العاده‌ای در تضمین پایداری و همچنین در سرعت پایداری سیستم تحت کنترل دارد. لذا برای

غیرخطی می‌باشد به‌نحوی که در مواردی تغییر شرایط اولیه، ناپایداری سیستم کنترلی را در پی دارد. لذا برای آزمایش توانمندی کنترل پیشنهادی در مواجهه با تغییرات شرایط اولیه، طبق جدول ۳، در چهار دسته شرایط اولیه متفاوت حالت‌های سیستم غیرخطی، شبیه‌سازی‌هایی انجام شد و تابع هزینه و ورودی کنترل اعمال شده به جنگنده F-8 مطابق شکل ۱۰ و حالت‌های سیستم غیرخطی جنگنده F-8 طبق شکل ۱۱ استخراج گردید.

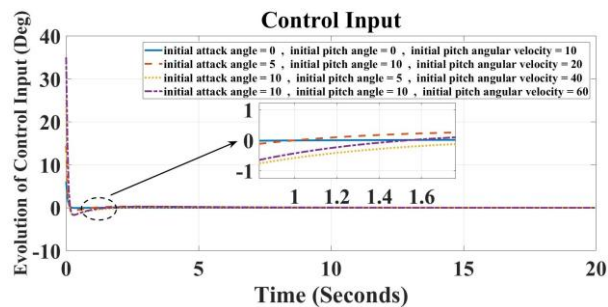
جدول ۳ - شرایط اولیه متفاوت حالت‌های سیستم غیرخطی

	α_0 (Deg)	θ_0 (Deg)	$\dot{\theta}_0$ (Deg / Sec)
1	0	0	10
2	5	10	20
3	10	5	20
4	10	10	20

با دقت در شکل‌های ۱۰ و ۱۱، کمینه شدن تابع هزینه و همگرایی آن به صفر و همچنین پایداری ورودی کنترل و حالت‌های سیستم غیرخطی جنگنده F-8 تحت شرایط اولیه متفاوت بیان شده در جدول ۳، قابل مشاهده است.

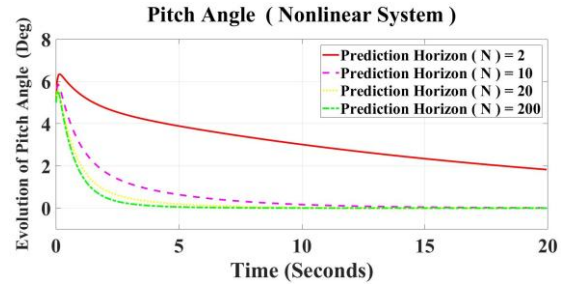


۱۰-الف) تابع هزینه



۱۰-ب) ورودی کنترل

شکل ۱۰ - تابع هزینه و ورودی کنترل اعمال شده به جنگنده F-8، به‌ازای شرایط اولیه متفاوت حالت‌های سیستم غیرخطی



شکل ۹ - زاویه پیچ در سیستم غیرخطی جنگنده F-8، به‌ازای افق‌های پیش‌بینی مختلف

عملکرد بسیار مطلوب کنترل‌کننده در پایداری حالت x_2 به‌ازای $N=200$ و همچنین کارایی ضعیف کنترل‌کننده به‌ازای $N=2$ قابل مشاهده است. برای تحلیل بهتر، پارامترهای مدت زمان اجرای کد MATLAB و مقدار نهایی تابع هزینه، به‌ازای مقادیر متفاوت طول افق پیش‌بینی در جدول ۲ نمایش داده شده است.

جدول ۲ - مقایسه پارامترهای مدت زمان اجرای کد و مقدار نهایی

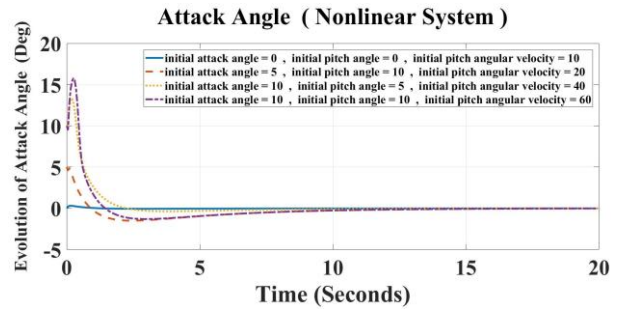
تابع هزینه	مقدار نهایی تابع هزینه	مدت زمان اجرای کد (ثانیه)	طول افق پیش‌بینی
$N = 2$	3.0664	3.470142	
$N = 10$	5.9235×10^{-4}	3.831848	
$N = 20$	4.0856×10^{-6}	4.675617	
$N = 200$	1.0963×10^{-8}	142.487665	

همانگونه که در جدول ۲ قابل مشاهده است، کمترین مقدار نهایی تابع هزینه به‌ازای $N = 200$ حاصل می‌گردد و به‌تبع در این شرایط، سریع‌ترین پایداری را برای ورودی کنترل و حالت‌های سیستم غیرخطی (با توجه به شکل ۹) خواهیم داشت. اما بابت این عملکرد بسیار مطلوب سیستم کنترلی باید هزینه حجم بالای محاسبات و مدت زمان زیاد اجرای کد (۱۴۲/۴۸۷۶۶۵ ثانیه) پرداخته شود. لذا باید یک تعامل منطقی مابین عملکرد کنترلی مطلوب (سرعت پایداری) و حجم محاسبات برقرار گردد. بنابراین با در نظر گرفتن همین تعامل منطقی، طبق جدول ۱، به‌درستی $N = 10$ برای پروسه شبیه‌سازی انتخاب گردیده است.

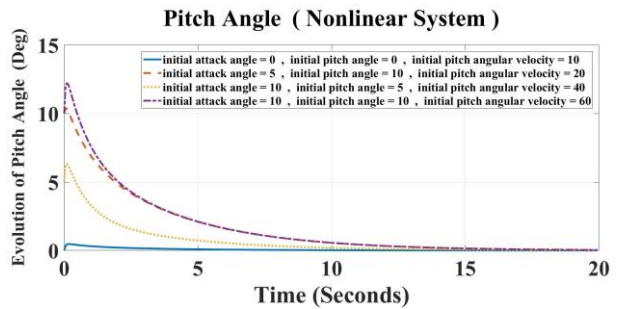
یک چالش قابل توجه در کنترل سیستم‌های غیرخطی، تأثیرپذیری سیستم کنترلی از شرایط اولیه حالت‌های سیستم

جدول ۱ مرجع [4] ذکر گردیده است. در شکل ۱۲، حالت‌های سیستم غیرخطی جنگنده F-8 به‌ازای کنترل‌کننده پیش‌بینی مبتنی بر مدل پیشنهادی با همان مقادیر پارامترهای جدول ۱ و کنترل‌کننده مرجع [4] نمایش داده شده است.

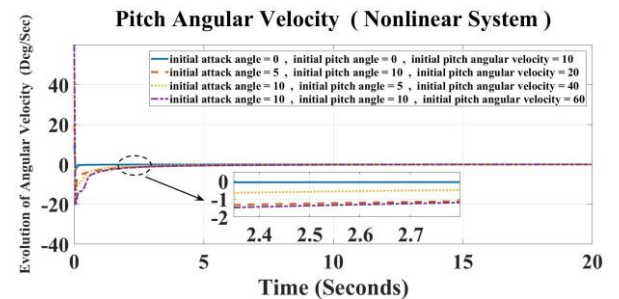
لازم به‌ذکر است که در این مرحله از شبیه‌سازی، مقادیر اولیه زاویه حمله برابر ۱۰ درجه، زاویه پیچ برابر ۵ درجه و سرعت زاویه‌ای در راستای زاویه پیچ، ۳۰ درجه بر ثانیه و همچنین طول افق پیش‌بین $N=10$ در نظر گرفته شده است. این مقادیر بیان‌شده، دقیقاً همان مقادیر مورد استفاده در مرحله قبل شبیه‌سازی برای کنترل پیشنهادی می‌باشد. با دقت در شکل ۱۲، می‌توان دریافت که کنترل‌کننده فازی ارائه‌شده در مرجع [4] نسبت به کنترل‌کننده پیش‌بینی مبتنی بر مدل پیشنهادی، عملکرد قابل قبولی در پایدارسازی حالت‌های سیستم غیرخطی هواپیمای جنگنده F-8 نداشته است، به‌نحوی که در ابتدای بازه شبیه‌سازی، دارای فراجاهش و فروجهش بیشتری بوده و در ادامه، عدم همگرایی مطلوب و نوسانات متعدد حالت‌ها قابل مشاهده است، که این نوسانات علاوه‌بر ناپایداری جنگنده F-8 می‌تواند آسیب‌دیدگی عملگرها را نیز به‌دنبال داشته باشد. در مقابل، فراجاهش و فروجهش کمتر و نرم و هموار بودن سیگنال حالت‌های سیستم در کنترل پیش‌بینی بر مدل، عملکرد مطلوب کنترل‌کننده پیشنهادی را نشان می‌دهد.



۱۱-الف) حالت x_1

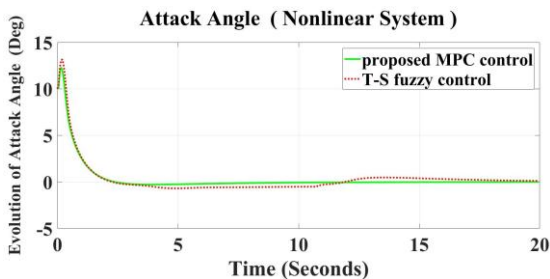


۱۱-ب) حالت x_2

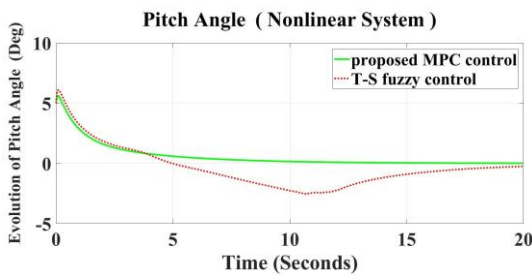


۱۱-ج) حالت x_3

شکل ۱۱- حالت‌های سیستم غیرخطی جنگنده F-8، به‌ازای شرایط اولیه متفاوت حالت‌های سیستم غیرخطی



۱۲-الف) حالت x_1



۱۲-ب) حالت x_2

برای ارزیابی عملکرد کنترل پیشنهادی، کنترل‌کننده فازی طراحی‌شده برای هواپیمای LET L410 در مرجع [4]، به‌هواپیمای جنگنده F-8 اعمال و شبیه‌سازی گردید. در مرجع [4] با تعریف سه تابع عضویت برای هرکدام از زاویه‌ای پیچ و حمله و با استفاده از تعداد ۹ قاعده فازی، مدل فازی تاکاگی-سوگنو^{۲۴} معادل با مدل غیرخطی هواپیمای LET L410 استخراج گردیده است، سپس با استفاده از کنترل‌کننده فازی پایدار مبتنی بر جبران‌ساز موازی توزیع‌یافته و با استخراج تعداد ۹ ماتریس پس‌خور کنترل‌کننده PDC به‌صورت برون‌خط، کنترل‌کننده فازی طراحی گردیده است. همچنین مقادیر پارامترهای هواپیمای LET L410 در

شبیه‌سازی، طبق توضیحات و نکات بیان‌شده در روند طراحی کنترل پیشنهادی در بخش ۳ مقاله، ملاحظاتی جهت کاهش حجم محاسبات در نظر گرفته شده است.

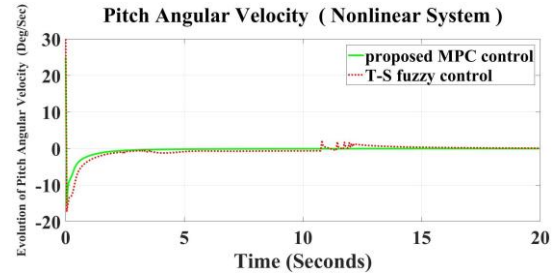
۳- پایداری مجانبی سیستم حلقه‌بسته با کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل پیشنهادی تحت قانون کنترلی u_0^* ، مطابق با قضیه ۱، اثبات گردیده است.

۴- برای پیاده‌سازی و اعمال کنترل پیشنهادی به هواپیمای جنگنده F-8، در محیط نرم‌افزار MATLAB کدنویسی انجام شده است و از جعبه ابزار MPT3 تنها جهت صحت‌سنجی نتایج شبیه‌سازی استفاده گردیده است.

۵- با توجه به بزرگی ابعاد ماتریس‌ها و بردارهای F_1 ، H ، A_x ، b_x و A_c ، b_c جهت کاهش حجم محاسبات حلقه بهینه‌سازی، تمامی ماتریس‌ها و بردارها به صورت آفلاین و در یک *م‌فایل فانکشن* و خارج از حلقه بهینه‌سازی محاسبه گردیده‌اند.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک کنترل‌کننده پیش‌بینی مبتنی بر مدل برای هواپیمای جنگنده F-8 طراحی گردید. با توجه به پیچیده و غیرخطی بودن معادلات دینامیکی هواپیمای جنگنده F-8، برای اجتناب از پیچیدگی و حجم فوق‌العاده سنگین محاسبات کنترل پیش‌بینی مبتنی بر مدل غیرخطی، بر اساس مدل خطی‌شده هواپیمای جنگنده F-8، یک کنترل‌کننده پیش‌بینی مبتنی بر مدل خطی طراحی گردید و ورودی کنترل به مدل‌های خطی‌شده و غیرخطی هواپیمای جنگنده F-8 اعمال شد. در شبیه‌سازی‌ها، پایداری حالت‌های مدل خطی‌شده و مدل غیرخطی مشاهده گردید. با اثبات ریاضی، پایداری مجانبی کنترل‌کننده پیشنهادی بررسی و اثبات شد. با محاسبه بسیاری از بخش‌های پروسه طراحی کنترل‌کننده به صورت آفلاین، حجم محاسبات بخش بهینه‌سازی آنلاین بسیار کاهش داده شد. لذا با توجه به مطالب فوق و انتخاب منطقی طول افق پیش‌بین، کنترل پیشنهادی دارای حجم محاسبات کم و قابلیت پیاده‌سازی عملی می‌باشد. به منظور تعیین دقیق طول افق پیش‌بین و به تبع آن کاهش بیشتر حجم محاسبات، محاسبه مقدار بهینه طول افق پیش‌بین با استفاده از الگوریتم‌های هوشمند کنترلی مانند کنترل فازی و شبکه‌های عصبی، پیشنهاد می‌گردد.



۱۲-ج) حالت x_3

شکل ۱۲- مقایسه حالت‌های سیستم غیرخطی جنگنده F-8 با اعمال کنترل‌کننده پیشنهادی و کنترل‌کننده مرجع [4]

مزایا و نوآوریهای کنترل پیشنهادی

در این بخش به طور خلاصه، مزایا و نوآوریهای کنترل‌کننده پیش‌بینی مبتنی بر مدل پیشنهادی ارائه و تشریح می‌گردد:

۱- قیود مسأله بهینه‌سازی رابطه (۵) باز-تعریف شده است، به طوری که در مسأله بهینه‌سازی رابطه (۵)، قید شماره (۱) فیدبک حالت‌های مدل غیرخطی هواپیمای جنگنده F-8، قید شماره (۲) مدل خطی‌سازی‌شده هواپیمای جنگنده F-8، قید شماره (۳) قیود روی حالت‌های مدل غیرخطی هواپیمای جنگنده F-8، قید شماره (۴) قیود روی ورودی کنترل اعمالی به مدل غیرخطی هواپیمای جنگنده F-8 و بالاخره قید شماره (۵) متغیرهای بهینه‌سازی می‌باشند. در صورتی که در قید شماره (۲) مسأله بهینه‌سازی رابطه (۵) از مدل غیرخطی هواپیمای جنگنده F-8 استفاده شود، به طور کلی روند طراحی کنترل‌کننده تغییر خواهد کرد و حجم محاسبات به طور فزاینده‌ای افزایش می‌یابد. لذا، کنترل پیش‌بینی پیشنهادی، مبتنی بر مدل خطی هواپیمای جنگنده F-8 طراحی گردیده است و پیچیدگی‌ها و حجم محاسباتی بسیار بالای کنترل پیش‌بینی مبتنی بر مدل غیرخطی را ندارد. با اعمال کنترل پیش‌بینی مبتنی بر مدل خطی هواپیمای جنگنده F-8 به مدل غیرخطی جنگنده، عملکرد بسیار مطلوب کنترل‌کننده پیشنهادی در شبیه‌سازی‌های چندمرحله‌ای قابل مشاهده است.

۲- با توجه به این که در کنترل پیشنهادی در هر لحظه از زمان و در هر مرحله از پیش‌بینی، یک مسأله بهینه‌سازی حل می‌شود، توجه ویژه به کاهش حجم محاسبات دارای اهمیت فوق‌العاده‌ای است. لذا در این مقاله، برای کاهش بیشتر حجم محاسبات و به حداقل رساندن زمان

پی‌نوشت

- constraints in aircraft multidisciplinary optimization.*” Aerospace Science and Technology. Vol. 68, No. 1, pp. 252-260, 2017.
- [7] Simon, Daniel. “*Fighter Aircraft Maneuver Limiting Using MPC: Theory and Application.*” Linköping University Electronic Press, 2017.
- [8] Yu-Chan, Chen, Ma Bao-Li, and Xie Wen-Jing. “*Robust stabilization of nonlinear PVTOL aircraft with parameter uncertainties.*” Asian Journal of Control. Vol. 19, No. 3, pp. 1239-1249, 2017.
- [9] Aguilar-Ibañez, Carlos. “*Stabilization of the PVTOL aircraft based on a sliding mode and a saturation function.*” International Journal of Robust and Nonlinear Control. Vol. 27, No. 5, pp. 843-859, 2017.
- [10] Lukman, H., S. Munawwarah, A. Azizan, F. Yakub, S. A. Zaki, and Z. A. Rasid. “*Enhancing the stabilization of aircraft pitch motion control via intelligent and classical method.*” In IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Vol. 270, No. 1, IOP Publishing, 2017.
- [11] Aguilar-Ibañez, Carlos, Miguel S. Suarez-Castanon, Julio Mendoza-Mendoza, Jose de Jesus Rubio, and Juan Carlos Martínez-García. “*Output-Feedback Stabilization of the PVTOL Aircraft System Based on an Exact Differentiator.*” Journal of Intelligent & Robotic Systems. pp. 1-12, 2018.
- [12] Petkar, S. J., Ankit A. Gupta, Vishwanath D. K., and Faruk S. Kazi. “*Robust Model Predictive Control of PVTOL Aircraft.*” IFAC-Papers On Line. Vol. 49, No. 1, pp. 760-765, 2016.
- [13] Mayne, David Q., James B. R., Christopher V. R., and Pierre O. S. “*Constrained model predictive control: Stability and optimality.*” Automatica. Vol. 36, No. 6, pp. 789-814, 2000.
- [14] Blanchini, F. “*Set invariance in control.*” Automatica. Vol. 35, No. 11, pp. 1747-1767, 1999.
- [15] Garrard, William L., and John M. Jordan. “*Design of nonlinear automatic flight control systems.*” Automatica. Vol. 13, No. 5, pp. 497-505, 1977.
- [16] Edwards, N. J., and C. J. Goh. “*Direct training method for a continuous-time nonlinear optimal feedback controller.*” Journal of Optimization Theory and Apps. Vol. 84, No. 3, pp. 509-528, 1995.
- [17] Abed, E. H., and Hsien-C., Lee. “*Nonlinear stabilization of high angle-of-attack flight*

- ۱ Longitudinal Stability
- ۲ Attack Angle
- ۳ Pitch Angle
- ۴ Chaotic Behavior
- ۵ Adaptive Back-stepping Sliding Mode Control
- ۶ Linear Matrix Inequality (LMI)
- ۷ Parallel Distributed Compensation (PDC)
- ۸ Theory of Differential Equation Stability
- ۹ Correlation Theory
- ۱۰ Rudder
- ۱۱ Elevator
- ۱۲ Terminal Cost
- ۱۳ Stage Cost
- ۱۴ Prediction Horizon
- ۱۵ N-Step Feasible Set
- ۱۶ Terminal Set
- ۱۷ Domain of Attraction
- ۱۸ Positive Invariant
- ۱۹ Positive Definite
- ۲۰ Optimal
- ۲۱ Sub-Optimal
- ۲۲ Sampling Time
- ۲۳ Multi-Parametric Toolbox
- ۲۴ Takagi-Sugeno (T-S) Fuzzy model

منابع و مراجع

- [1] Abed, Eyad H. “*Nonlinear stabilizing control of high angle of attack flight dynamics.*” University of Maryland College Park United States, 1988.
- [2] Su, Lei, Hong Yao, and Jun Du. “*Chaotic Analysis and Control of Longitudinal Flight Dynamics.*” Asian Journal of Control. Vol. 17, No. 5, pp. 1569-1579, 2015.
- [3] Qi, Xin, and Shi Zhongke. “*Bifurcation analysis and stability design for aircraft longitudinal motion with high angle of attack.*” Chinese Journal of Aeronautics. Vol. 28, No. 1, pp. 250-259, 2015.
- [4] Hušek, Petr, and Kashyapa Narenathreyas. “*Aircraft longitudinal motion control based on Takagi-Sugeno fuzzy model.*” Applied Soft Computing. Vol. 49, No. 1, pp. 269-278, 2016.
- [5] Qu, Liang, Yinghui Li, Haojun Xu, Dengcheng Zhang, and Guoqiang Yuan. “*Aircraft nonlinear stability analysis and multidimensional stability region estimation under icing conditions.*” Chinese Journal of Aeronautics. Vol. 30, No. 3, pp. 976-982, 2017.
- [6] Mieloszyk, J., and T. Goetzendorf-Grabowski. “*Introduction of full flight dynamic stability*

آنلاین در حلقه بهینه‌سازی را بسیار سنگین خواهد نمود. به‌گونه‌ای که به‌ازای $N=2$ ، ابعاد ماتریس‌ها و بردارهای F_1 ، H ، A_c ، b_c ، A_x و b_x به‌ترتیب 2×2 ، 3×2 ، 4×2 ، 4×1 ، 18×2 و 18×1 می‌باشد ولی به‌ازای $N=200$ ، ابعاد ماتریس‌ها و بردارهای مذکور به‌ترتیب 200×200 ، 3×200 ، 1206×200 و 1206×200 است.

$$A_c (20 \times 10) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b_c (20 \times 1) = \begin{bmatrix} 0.6109 \\ 0.6109 \\ 0.6109 \\ 0.6109 \\ 0.6109 \\ 0.6109 \\ 0.6109 \\ 0.6109 \\ 0.6109 \\ 0.6109 \\ 0.6109 \\ 0.6109 \\ 0.6109 \\ 0.6109 \\ 0.6109 \\ 0.6109 \\ 0.6109 \\ 0.6109 \\ 0.6109 \\ 0.6109 \end{bmatrix}; \quad b_x (66 \times 1) = \begin{bmatrix} 3.4908 \\ \vdots \\ 3.4907 \\ 3.4907 \\ 3.4904 \\ 3.4906 \\ 3.4909 \\ 3.4906 \\ 3.4909 \\ 3.4908 \\ 3.4904 \\ 3.4907 \\ 3.4904 \\ 3.4906 \\ 3.4909 \\ 3.4906 \\ 3.4906 \\ 3.4908 \\ 3.4904 \\ 3.4907 \\ 3.4907 \\ 3.4906 \\ 3.4909 \\ 3.4906 \\ 3.4904 \\ 3.4907 \\ 3.4907 \\ 3.4904 \\ 3.4906 \\ 3.4909 \\ 3.4906 \\ 3.4904 \\ 3.4907 \\ 3.4907 \\ 3.4909 \\ 3.4908 \\ 3.4907 \\ 3.4904 \\ 3.4904 \\ 3.4904 \\ 3.4906 \\ 3.4907 \\ 3.4907 \\ 3.4906 \\ 3.4909 \\ 3.4909 \\ 3.4906 \\ \vdots \\ 3.4908 \end{bmatrix}$$

dynamics using bifurcation control. In Control Conference, pp. 2235-2238. IEEE, 1990.

[18] Mayne, D. Q. "Model predictive control: Recent developments and future promise." Automatica. Vol. 50, No. 12, pp. 2967-2986, 2014.

[19] Grüne, L., and Jürgen P. "Nonlinear model predictive control." Nonlinear Model Predictive Control, pp. 45-69. Springer, Cham, 2017.

پیوست

با استفاده از مقادیر جدول ۱ و پس از اجرای شبیه‌سازی، ماتریس‌ها و بردارهای F_1 ، H ، A_c ، b_c ، A_x و b_x به‌صورت زیر می‌باشند:

$$H (10 \times 10) = 10^4 \times \begin{bmatrix} 1.7714 & 1.4078 & 1.2354 & 1.0582 & 0.8802 \\ 1.4078 & 1.6709 & 1.3026 & 1.1262 & 0.9459 \\ 1.2354 & 1.3026 & 1.5596 & 1.1861 & 1.0053 \\ 1.0582 & 1.1262 & 1.1861 & 1.4365 & 1.0572 \\ 0.8802 & 0.9459 & 1.0053 & 1.0572 & 1.3005 \\ 0.7053 & 0.7658 & 0.8216 & 0.8716 & 0.9150 \\ 0.5373 & 0.5898 & 0.6390 & 0.6842 & 0.7245 \\ 0.3796 & 0.4218 & 0.4618 & 0.4992 & 0.5333 \\ 0.2356 & 0.2653 & 0.2939 & 0.3209 & 0.3460 \\ 0.1082 & 0.1237 & 0.1388 & 0.1532 & 0.1669 \\ 0.7053 & 0.5373 & 0.3796 & 0.2356 & 0.1082 \\ 0.7658 & 0.5898 & 0.4218 & 0.2653 & 0.1237 \\ 0.8216 & 0.6390 & 0.4618 & 0.2939 & 0.1388 \\ 0.8716 & 0.6842 & 0.4992 & 0.3209 & 0.1532 \\ 0.9150 & 0.7245 & 0.5333 & 0.3460 & 0.1669 \\ 1.1508 & 0.7591 & 0.5635 & 0.3687 & 0.1794 \\ 0.7591 & 0.9872 & 0.5891 & 0.3887 & 0.1907 \\ 0.5635 & 0.5891 & 0.8096 & 0.4054 & 0.2006 \\ 0.3687 & 0.3887 & 0.4054 & 0.6185 & 0.2087 \\ 0.1794 & 0.1907 & 0.2006 & 0.2087 & 0.4149 \end{bmatrix}$$

$$F_1 (3 \times 10) = 10^4 \times \begin{bmatrix} 1.1175 & 1.2149 & 1.2570 & 1.2456 & 1.1835 \\ -0.4507 & -0.3730 & -0.3008 & -0.2347 & -0.1755 \\ -1.4791 & -1.3212 & -1.1558 & -0.9869 & -0.8182 \\ 1.0741 & 0.9221 & 0.7325 & 0.5112 & 0.2648 \\ -0.1238 & -0.0804 & -0.0458 & -0.0206 & -0.0052 \\ -0.6533 & -0.4958 & -0.3488 & -0.2154 & -0.0984 \end{bmatrix}$$

ابعاد ماتریس A_x ، 10×66 می‌باشد، که به‌علت بزرگی ابعاد این ماتریس، از ذکر آن اجتناب می‌گردد. طبق توضیحات پیش‌گفته، در محاسبات آفلاین، ابعاد ماتریس‌ها و بردارهای H ، F_1 ، A_c ، b_c ، A_x و b_x وابسته به بزرگی افق پیش‌بین است و بزرگ شدن ابعاد ماتریس‌ها و بردارهای مذکور، حجم محاسبات

Downloaded from joae.ir at 10:20 +0330 on Monday October 28th 2019