



## بررسی ناپایداری و رفتار ارتعاشی میکرو تیر ژيروسکوپ با در نظر گرفتن گستردگی جرم گواه

مهدی مجاهدی<sup>۱\*</sup> و رسول بینا<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> استادیار، گروه دانشکده مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی گلپایگان

<sup>۲</sup> فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، گروه دانشکده مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی گلپایگان

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۲/۲۵؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۶/۱۰/۱۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۳/۰۲

### چکیده

در پژوهش حاضر رفتار ارتعاشی میکرو تیر ژيروسکوپ با ساختار تیر بررسی می‌شود. میکرو ژيروسکوپ دارای یک تیر یک سرگیردار و یک جرم گواه گسترده‌ای است که توسط میدان الکتریکی تحریک می‌شود. بر مبنای گستردگی جرم گواه یک مدل و فرمولاسیون توسعه یافته برای بررسی ناپایداری و رفتار ارتعاشی میکرو ژيروسکوپ ارائه می‌شود. با در نظر گرفتن جرم گواه به صورت گسترده، توزیع نیروهای الکترو-استاتیک از حالت متمرکز به گسترده تغییر یافته و گشتاورهای ناشی از آن نیز در رفتار ژيروسکوپ تأثیرگذار خواهد بود. معادلات حاصل با کمک روش گالرکین کاهش مرتبه یافته و از طریق روش‌های تحلیلی و عددی حل می‌گردند. پارامتر بی بعد مهمی تحت عنوان پارامتر بی بعد طول، در این پژوهش معرفی می‌شود. این پارامتر عبارت از طول جرم گواه گسترده نسبت به طول میکرو تیر است. اثر این پارامتر در رفتار استاتیکی، دینامیکی، ارتعاشی و فرکانس‌های طبیعی سیستم بررسی می‌شود. در طول محاسبات و نتیجه‌گیری مشخص خواهد شد که با افزایش این پارامتر بی بعد، اختلاف در نتایج حاصل از فرض متمرکز به گسترده بیشتر خواهد شد.

**کلمات کلیدی:** میکروالکترومکانیک؛ میکرو ژيروسکوپ؛ ناپایداری؛ پارامتر بی بعد طول.

## Investigation of Instability and Vibration Behavior of Microbeam-Gyroscope with Considering Distribution of Proof Mass

M. Mojahedi<sup>1,\*</sup>, R. Bina<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Assis. Prof., Mech. Eng., Golpayegan Univ. of Tech., Golpayegan, Iran.

<sup>2</sup> MSc., Mech. Eng., Golpayegan Univ. of Tech., Golpayegan, Iran.

### Abstract

In this research, vibration behavior of a microgyroscope including beam structure is investigated. microgyroscope consists of a microcantilever beam and distributed proof mass that is actuated by electrostatic force. A developed model and formulation based on the distributed assumption for proof mass are presented to investigate the instability and vibration behavior of beam microgyroscope. Considering distributed assumption for proof mass, electrostatic force changes from concentrated force to distributed force and produces a moment that is effective on the mechanical behavior of the gyroscope. The equations of motion are reduced by Galerkin's method and solved via numerical and analytical techniques. An important nondimensional parameter named as nondimensional length parameter is presented which it is the ratio of the proof mass length to beam length. Effects of the nondimensional length parameter on the static, dynamic, vibration behaviors and natural frequency of the microsystem are investigated. Results show that by increasing the nondimensional parameter, the differences between the results of concentration and distribution hypothesizes for proof mass increase.

**Keywords:** MEMS, Microgyroscopes, Pull-in Instability, Nondimensional Length Parameter.

\* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۳۱۵۷۲۴۳۱۶۷؛ فکس: ۰۳۱۵۷۲۴۰۰۶۷

آدرس پست الکترونیک: [moghajehi62@gmail.com](mailto:moghajehi62@gmail.com) [moghajehi@gut.ac.ir](mailto:moghajehi@gut.ac.ir)

## ۱- مقدمه

یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین انواع میکرو ژيروسکوپ‌ها، نوع ارتعاشی آن است. قابلیت کوچک‌سازی، تولید انبوه در پروسه‌های سری و جایگزینی المان‌های ارتعاشی به‌جای قسمت‌های دورانی، از دلایل عمده پرکاربرد بودن این نوع از میکرو ژيروسکوپ‌ها است [۱، ۲]. در میکرو ژيروسکوپ‌های ارتعاشی جرم گواه در دو جهت عمود برهم اولیه (محرک) و ثانویه (شناسایی) نوسان می‌نماید؛ در صورتی که جرم گواه<sup>۱</sup> دچار ارتعاشات شده و قاب متصل به آن شروع به دوران نماید، ارتعاشاتی در جهت عمود بر ارتعاشات اولیه ایجاد می‌شود که با اندازه‌گیری این ارتعاشات، سرعت زاویه‌ای قاب دورانی مشخص می‌شود [۳]. روش‌های مختلفی جهت تحریک و شناسایی این نوع از ژيروسکوپ‌ها وجود دارد. به‌طور کلی روش الکترواستاتیک، جهت تحریک و شناسایی حرکت به علت داشتن مکانیزم حرکتی سریع و بزرگ‌نمایی مناسب، مطلوب به نظر می‌آید [۴]. یک میکرو تیر-ژيروسکوپ از یک یا چند جرم گواه متصل به یک پایه و یا قاب دورانی تشکیل شده است. علت استفاده از جرم گواه، افزایش اینرسی و نیروی کوریولیس<sup>۲</sup> ایجاد شده به منظور افزایش حساسیت سیستم است. این ژيروسکوپ در اثر تحریک یک عامل خارجی در جهت اولیه، دچار ارتعاشات خمشی اولیه شده و با دوران قاب متصل به جرم گواه و در اثر نیروی کوریولیس، ارتعاشاتی در جهت ثانویه و عمود بر جهت اولیه ایجاد می‌شود. جهت اولیه با نام محرک و جهت ثانویه با نام شناسایی شناخته می‌شود. با اندازه‌گیری ارتعاشات جهت شناسایی توسط یک سنسور، دوران قاب اندازه‌گیری می‌شود. حرکت هر دو جهت به‌صورت خمشی است. در سازهایی نظیر تیر، سختی خمشی کمتر از فشاری و کششی است و با صرف انرژی کمتری، دامنه ارتعاشی بالاتری قابل حصول بوده و حساسیت سیستم افزایش می‌یابد. در میکرو ژيروسکوپ‌هایی که از طریق الکترواستاتیک تحریک و شناسایی می‌شود، ترکیبی از یک حسگر و یک عملگر ارتعاشی مشاهده می‌شود. قسمت عملگر این میکرو ژيروسکوپ، توسط میدان الکترو-استاتیک ترکیبی ثابت (ناشی از پتانسیل الکتریکی مستقیم)

و متناوب (ناشی از پتانسیل الکتریکی متناوب) است که به جرم گواه اعمال شده و موجب ارتعاش آن، حول موقعیت تعادلی می‌شود. با توجه به ارتعاش اولیه و دوران سیستم، ارتعاش ثانویه در بخش حسگر فعال می‌شود. با اندازه‌گیری ارتعاش ثانویه می‌توان حرکت زاویه‌ای سیستم را با استفاده از پردازش این ارتعاش محاسبه و بررسی کرد. این اندازه‌گیری توسط میدان الکترواستاتیک و از طریق تغییرات ظرفیت خازنی روی جرم گواه، قابل سنجش است. از آنجاکه سیستم با استفاده از میدان‌های الکترواستاتیک تحریک و شناسایی می‌شود و تحت ارتعاشات رزونانسی در دو جهت خمشی قرار دارد، بررسی پدیده‌های ناپایداری کششی و ارتعاشی در این سیستم ضروری است [۵-۸].

در زمینه میکرو ژيروسکوپ‌ها، پژوهش‌های زیادی انجام شده است. برای دستیابی به رزونانس و افزایش حساسیت سیستم لازم است که فرکانس‌های جهت‌های تحریک و شناسایی تنظیم شود. انصاری [۹] به بررسی یک میکرو-ژيروسکوپ با جرم گهواره‌ای<sup>۴</sup> پرداخت. این مجموعه شامل، چهار تیر بوده که درون یک قاب قرار گرفته و جرم گواه در مرکز این قاب قرار دارد. ارتعاشات مجموعه در اثر دوران پایه و اعمال نیروی کوریولیس به‌صورت خمشی و پیچشی بوده و مکانیزم به کار رفته جهت شناسایی و تحریک حرکت از نوع پیزوالکتریک است. به علت وجود خمش و پیچش همیشگی در دو تیر، دوران‌های ثانویه به‌راحتی اندازه‌گیری می‌شود. بی‌هادبی‌هاده و همکاران [۱۰]، به بررسی ارتعاش یک میکرو تیر ژيروسکوپ پیرو-پیزو-الکتریک فعال و از طریق پایش ارتعاش با استفاده از یک سنسور پیزوالکتریک در جهت شناسایی، میزان دوران پایه اندازه‌گیری می‌شود. ارتعاش موجود در تیر به‌کاررفته، به صورت زوج نیروی خمشی و پیچشی است. با کمک اصل همپلتون مدل‌سازی ریاضی سیستم انجام و با کمک روش جمع مودها<sup>۵</sup> معادلات حاکم حل می‌شود. در این پژوهش همچنین، اثراتی نظیر دوران روی فرکانس بی‌بعد بررسی گردیده است. هونگ و همکاران [۴]، حساسیت میکرو ژيروسکوپ‌ها را با تطبیق فرکانس‌های طبیعی در دو

<sup>3</sup> Capacitance<sup>4</sup> Rocking mass<sup>5</sup> Mode summation<sup>1</sup> Proof mass<sup>2</sup> Coriolis force

از بار الکتریکی گسترده روی آن محاسبه می‌شود. سپس از طریق اصل همپلتون تعمیم‌یافته، معادلات حرکت به دست می‌آید. در ادامه معادلات بی‌بعد شده و پارامتر بی‌بعد مهمی معرفی می‌شود که نشان‌دهنده نسبت طول جرم گواه به طول تیر است. معادلات یک‌بار به صورت استاتیکی حل شده و ولتاژ ناپایداری محاسبه می‌شود و سپس از طریق حل دینامیکی معادلات و استفاده از روش تحلیلی مقیاس‌های چندگانه و عددی، پاسخ ارتعاشی محاسبه شده و در نهایت اختلاف نتایج حاصل از فرض نقطه‌ای جرم گواه با جرم گسترده، برای مقادیر مختلف پارامتر بی‌بعد طول جرم گواه، مقایسه می‌شود. اهداف پژوهش جاری به صورت زیر است:

- ارائه یک مدل جدید با تکیه بر گستردگی جرم گواه، جهت بررسی عملکرد میکروژيروسکوپ‌ها.
- تحلیل استاتیکی و ناپایداری سیستم بر مبنای مدل جدید و محاسبه خطای مدل‌های پیشین.
- تعیین فرکانس طبیعی میکروژيروسکوپ بر مبنای مدل جدید و محاسبه خطای مدل‌های پیشین.
- مطالعه ارتعاش سیستم بر مبنای مدل جدید و محاسبه خطای مدل‌های پیشین.

## ۲- الگوسازی سیستم

مدل پژوهش حاضر شامل، یک تیر یک سرگیردار با جرم گواه گسترده و صلب است. در مدل تیر از فرضیات تیر اویلر - برنولی استفاده می‌شود. در تیر اویلر - برنولی صفحات عمود بر محور طولی، پس از خمش، همچنان بر محور طولی عمود می‌مانند. از روش جنبشی کرشلف جهت تعیین بردار انحناء و محاسبه انرژی کرنشی تیر استفاده می‌شود. در تیر یک سر-گیردار کشیدگی لایه وسط وجود نداشته و ترم انرژی کرنشی ناشی از کشیدگی لایه وسط صفر است. مکانیزم تحریک سیستم به صورت الکترواستاتیک بوده و به علت قابل توجه بودن ابعاد جرم گسترده در مقایسه با فاصله بین صفحات تحریک، میدان‌های حاشیه‌ای قابل صرف نظر کردن است. مکانیزم شناسایی نیز از طریق یک خازن انجام می‌شود. مدل ساده سیستم به صورت ساده شده، در شکل ۱ نشان داده شده است. در این سیستم، مقدار جرم گواه با  $M$ ، طول آن با  $l$ ، جرم بر واحد طول میکروتیر  $m$  و طول آن  $L$  است؛ همچنین مقدار دوران پایه با  $\Omega$  نشان داده می‌شود.

جهت تحریک و شناسایی افزایش دادند. جئونگ [۱۱] دریافت که اختلاف بین فرکانس‌های طبیعی در دو جهت تحریک و شناسایی و اثر ضریب میرایی، از مهم‌ترین عوامل در میزان حساسیت میکروژيروسکوپ‌ها است. قومم و همکاران [۸، ۱۲]، به بررسی رفتار یک میکروژيروسکوپ یک سرگیردار پرداختند. مدل ایشان شامل، یک جرم متمرکز و یک تیر یک‌سرگیردار بوده که با ولتاژ مستقیم تحریک می‌شود و ارتعاشاتی را در جهت عمود بر جهت اولیه ایجاد می‌نماید. مجاهدی و همکاران [۶، ۱۳]، به بررسی رفتار ارتعاشی یک میکروژيروسکوپ با تغییر شکل اولیه پرداختند. در مدل‌سازی انجام شده، موارد غیرخطی ناشی از نیروهای الکترواستاتیک، میدان حاشیه‌ای، هندسه تغییر شکل یافته و ترم‌های اینرسی لحاظ شده است. در سیستم‌های میکروالکترومکانیک، جرم گواه به منظور افزایش حساسیت و اعمال تحریک الکترواستاتیک روی آن مورد استفاده قرار گرفته است. در همین زمینه شریفی نسب و مجاهدی [۱۴]، ارتعاشات غیرخطی میکروژيروسکوپ‌های دارای جرم گواه را با در نظر گرفتن تئوری کوپل تنش اصلاحی، مورد مطالعه قرار دادند. از طرفی برای میکروژيروسکوپ‌های دارای جرم گواه با طول قابل توجه، بینا و مجاهدی [۱۵] نشان دادند که فرض نقطه‌ای به کار رفته برای جرم گواه، در مدل‌سازی میکروژيروسکوپ‌ها، منجر به خطای قابل توجهی در محاسبه میزان دامنه ارتعاش و ولتاژ ناپایداری می‌شود، از این رو لازم است، در مدل‌سازی و به دست آوردن معادلات، جرم گواه به صورت گسترده در نظر گرفته شود و نیروی وارد بر آن به جای نقطه‌ای به صورت توزیع شده لحاظ گردد. در میکروژيروسکوپ‌های ارتعاشی طول جرم گواه قابل توجه است؛ اما با این وجود در پژوهش‌های پیشین جرم گواه متصل به میکروژيروسکوپ، به صورت متمرکز فرض گردیده است. در پژوهش حاضر، با فرض گستردگی جرم گواه و نیروی اعمال شده روی آن، یک مدل کامل‌تر برای میکروژيروسکوپ‌های ارتعاشی دارای جرم گواه معرفی می‌شود و بر مبنای این مدل، رفتار ارتعاشی و ناپایداری این نوع از میکروژيروسکوپ‌های ارتعاشی، مورد مطالعه قرار گرفته و خطاهای ناشی از فرض نقطه‌ای بودن جرم گواه برای طول‌های مختلف محاسبه می‌شود. بدین منظور ابتدا با در نظر گرفتن طول جرم گسترده، نیروها و گشتاورهای معادل ناشی

پس از اعمال ولتاژ مستقیم، سیستم دارای انحنای اولیه می‌گردد.

جهت به‌دست آوردن معادله‌های حاکم سیستم، به ترتیب مراحل زیر انجام می‌شود:

- بردار انحناء بر اساس آنالوژی جنبشی کرشوف<sup>۱</sup> [۱۶] تعیین می‌شود.

- انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم تعیین گردیده و بر اساس آن چگالی لاگرانژین [۶]، تعیین می‌شود. در محاسبه انرژی جنبشی جرم گواه به‌صورت گسترده در نظر گرفته شده و انرژی جنبشی خطی و دورانی آن در محاسبات وارد می‌شود.

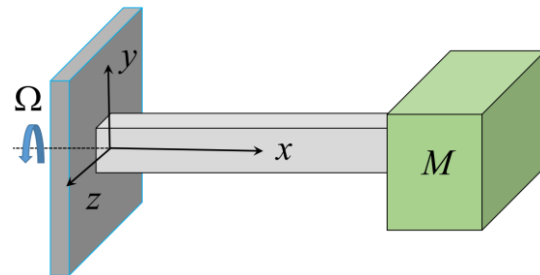
- در محاسبات مربوط به نیروهای عمومی از اصل کار مجازی استفاده می‌شود.

- نیروها و گشتاورهای موجود در سیستم با کمک انتگرال‌گیری بر روی طول جرم گواه گسترده تعیین می‌شود. به‌عبارت‌دیگر جرم گواه به بخش‌های کوچکی تقسیم شده و هر بخش به‌عنوان جرم متمرکز فرض می‌گردد. سپس نسبت به انتگرال‌گیری روی نیروی اعمال شده به جزء متمرکز [۱۷] و روی طول جرم گسترده اقدام می‌شود. برای محاسبه نیروها و گشتاورهای ناشی از آن، با در نظر گرفتن شکل ۳ نیرو و گشتاور اعمالی به یک المان محاسبه و پس از انتگرال‌گیری روی طول جرم گسترده، مقدار کل نیروها و گشتاورهای اعمالی تعیین می‌شود.

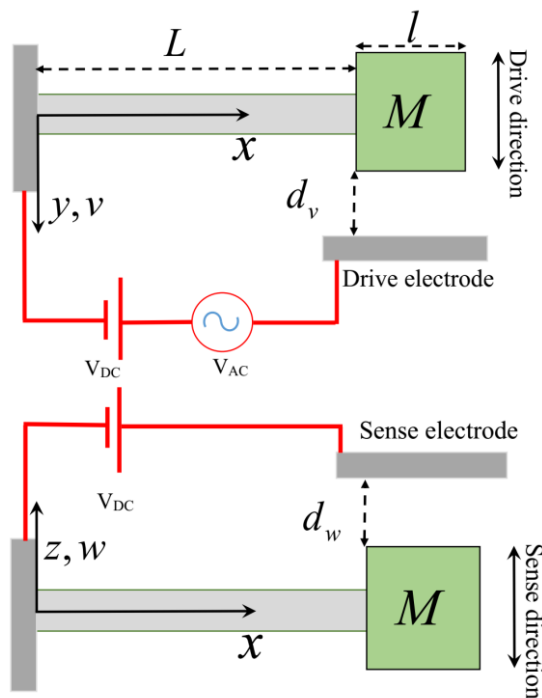
مطابق شکل ۳ نیروهای اعمالی بر المان مشخص شده به طول  $d\xi$  مطابق مرجع [۱۸] به‌صورت رابطه (۱) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} dF_2 &= \frac{\epsilon b (V_{DCv} + V_{ACv})^2}{2} \frac{d\xi}{(d_v - v - \xi \tan\psi)^2} \delta_L \\ dF_3 &= \frac{\epsilon h V_{DCw}^2}{2} \frac{d\xi}{(d_w - w + \xi \tan\theta)^2} \delta_L \\ dM_2 &= \xi dF_2 \\ dM_3 &= \xi dF_3 \end{aligned} \quad (1)$$

در شکل ۲، دو نما از یک میکرو ژيروسکوپ در دو صفحه مختلف نشان داده شده است. محور  $y$  بیانگر حرکت در راستای تحریک و محور  $z$  بیانگر حرکت در راستای شناسایی است.



شکل ۱- نمایی از یک میکرو ژيروسکوپ با ساختار تیر



شکل ۲- نمایی از یک میکرو تیر ژيروسکوپ با جرم گسترده در انتها در دو جهت تحریک و شناسایی

مجموعه ژيروسکوپ در راستای تحریک با دو نیروی حاصل از ولتاژهای مستقیم و متناوب تحریک گردیده و حرکت در جهت شناسایی از طریق یک ولتاژ مستقیم مشخص می‌شود.

<sup>1</sup> Kirchhoff's Kinetic Analogy

$$M_3 = \frac{\varepsilon A_w}{2} V_{DCw}^2 \left\{ \frac{1}{w'(d_w - w - lw')} + \frac{1}{lw'} \ln \left( 1 - \frac{lw'}{d_w - w} \right) \right\} \delta_L \quad (2)$$

مقادیر  $A_w$  و  $A_v$  به ترتیب بیانگر، مساحت مقطع جرم گسترده در صفحه تحریک و شناسایی است. با مشخص شدن مقادیر نیروهای ناپایستار سیستم، مقدار نیروهای عمومی در جهات تحریک و شناسایی مطابق رابطه (۳) تعیین می‌شود:

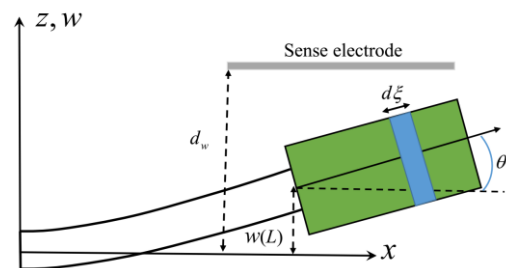
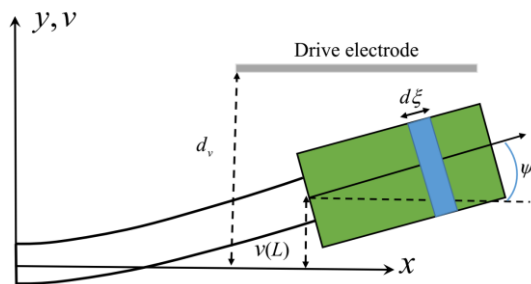
$$Q_v = (F_2 - c_2 \dot{v}) + M_2 \frac{\Delta v'}{\Delta v} \\ Q_w = (F_3 - c_3 \dot{w}) + M_3 \frac{\Delta w'}{\Delta w} \quad (3)$$

$Q_w$  و  $Q_v$  نیروهای عمومی و  $\Delta v$  و  $\Delta w$  جابجایی‌های مجازی است. با توجه به انرژی جنبشی و پتانسیل و نیروهای عمومی به‌دست آمده و اصل همیلتون تعمیم یافته حذف عبارتهای کوچک اینرسی، معادلات حرکت تعیین می‌شود:

$$(m + M\delta_L(x))(\ddot{v} - \Omega\dot{w} - 2\Omega\dot{w} - \Omega^2 v) + c_2 \dot{v} + D_3 v^{(IV)} \\ = \frac{\varepsilon A_v}{2} \frac{(V_{DCv} + V_{ACv})^2}{(d_v - v)^2 - lv'(d_v - v)} \delta_L(x) \\ + \frac{\varepsilon A_v}{2} (V_{DCv} + V_{ACv})^2 \left\{ \frac{1}{v'(d_v - v - lv')} + \frac{1}{lv'^2} \ln \left( 1 - \frac{lv'}{d_v - v} \right) \right\} \frac{\Delta v'}{\Delta v} \delta_L(x) \\ - \frac{Ml}{2} \left\{ w'\dot{\Omega}\delta_L(x) + \dot{w}\Omega\delta_L'(x) + w\Omega\delta_L'(x) - \ddot{v}\delta_L'(x) - \frac{l}{2} (\ddot{v}'\delta_L'(x) + \ddot{v}''\delta_L(x)) \right\} \\ (m + M\delta_L(x))(\ddot{w} + \Omega v + 2\Omega\dot{v} - \Omega^2 w) + c_3 \dot{w} + D_2 w^{(IV)} \\ + \frac{\varepsilon A_w}{2} \frac{(V_{DCw})^2}{(d_w - w)^2 - lw'(d_w - w)} \delta_L(x) \\ + (V_{DCw})^2 \left\{ \frac{1}{w'(d_w - w - lw')} + \frac{1}{lw'^2} \ln \left( 1 - \frac{lw'}{d_w - w} \right) \right\} \frac{\Delta w'}{\Delta w} \delta_L(x) \\ + \frac{Ml}{2} \left\{ v'\dot{\Omega}\delta_L(x) + \dot{v}\Omega\delta_L'(x) + v\Omega\delta_L'(x) + \ddot{w}\delta_L'(x) + \frac{l}{2} (\ddot{w}'\delta_L'(x) + \ddot{w}''\delta_L(x)) \right\} \quad (4)$$

که در رابطه (۴):

$D_2$ : گشتاور سطح حول محور  $v$ .



شکل ۳- نمایشی از المان بندی جرم گسترده جهت محاسبه نیرو و گشتاورهای اعمالی در جهات تحریک و شناسایی

اشاره به این نکته ضروری است که روابط گفته شده بر اساس روابط حاکم بر نیروهای الکترواستاتیک اعمال شده به جرم متمرکز نوشته شده‌اند.

در روابط فوق،  $b$  و  $h$  به ترتیب بیانگر بعد عرضی جرم گسترده در صفحه تحریک و شناسایی است.  $\varepsilon$  بیانگر ضریب تراوایی خلا<sup>۱</sup> است.  $V_{DCv}$  بیانگر ولتاژ مستقیم در راستای تحریک،  $V_{DCw}$  بیانگر ولتاژ مستقیم در راستای شناسایی،  $V_{ACv}$  بیانگر ولتاژ متناوب در راستای تحریک و  $\delta_L$  دلتای دیراک است. جهت محاسبه مقادیر نهایی مربوط به نیروها و گشتاورهای الکترواستاتیک از روابط (۱) در بازه طول جرم گسترده از 0 تا  $l$ ، انتگرال‌گیری می‌شود. نتیجه مطابق رابطه (۲) خواهد بود:

$$F_2 = \frac{\varepsilon A_v}{2} \frac{(V_{DCv} + V_{ACv})^2}{(d_v - v)(d_v - v - lv')} \delta_L(x) \\ F_3 = \frac{\varepsilon A_w}{2} \frac{V_{DCw}^2}{(d_w - w)(d_w - w - lw')} \delta_L(x) \\ M_2 = \frac{\varepsilon A_v}{2} (V_{DCv} + V_{ACv})^2 \left\{ \frac{1}{v'(d_v - v - lv')} + \frac{1}{lv'} \ln \left( 1 - \frac{lv'}{d_v - v} \right) \right\} \delta_L$$

<sup>1</sup> Vacuum Permittivity

حال با داشتن معادله‌های حاکم بی‌بعد به بررسی رفتار استاتیکی و ارتعاشی سیستم پرداخته می‌شود. جهت بررسی ناپایداری استاتیکی به ترتیب مطابق زیر اقدام می‌شود:  
در معادلات حاکم، مقادیر وابسته به زمان برابر صفر فرض می‌شود.

جهت حل معادله حاصل‌شده، خیز استاتیکی در دو جهت تحریک و شناسایی مطابق رابطه (۸) فرض می‌شود:

$$\begin{aligned} v_s(x) &= q_v \varphi(x) \\ w_s(x) &= q_w \varphi(x) \end{aligned} \quad (۸)$$

$\varphi(x)$  شکل مود تیر یک سرگیردار است [۱۹].

در گام بعد با کمک روش گالرکین معادله حاصل شده، کاهش مرتبه یافته و سپس حل می‌شود.

جهت بررسی ارتعاشی سیستم، مراحل زیر به ترتیب انجام می‌گیرد:

مقادیر مربوط به خیز مطابق رابطه (۸) در معادلات ارتعاشی حاکم یعنی روابط (۶) و (۷) جایگزین می‌شود:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= v_s(x) + v_d(x, t) \\ w(x, t) &= w_s(s) + w_d(x, t) \end{aligned} \quad (۹)$$

که در آن:

- $v_s$ : خیز استاتیکی در راستای تحریک
- $w_s$ : خیز استاتیکی در راستای شناسایی
- $v_d$ : خیز دینامیکی در راستای تحریک
- $w_d$ : خیز دینامیکی در راستای شناسایی

معادله به دست آمده با توجه به معادله استاتیکی حاکم، ساده‌سازی می‌گردد.

رابطه (۷) در معادله حاصل‌شده حاکم می‌شود:

$$\begin{aligned} v_d(x, t) &= q_v(t) \varphi(x) \\ w_d(x, t) &= q_w(t) \varphi(x) \end{aligned} \quad (۱۰)$$

### ۱-۲- تحلیل ارتعاشات خطی

در مرحله بعد، با استفاده از روش گالرکین، معادلات حاصل شده کاهش مرتبه می‌یابند. معادلات حاصل شده در حالت خطی به صورت پارامتریک در جهت تحریک و شناسایی مطابق رابطه (۱۱) و (۱۲) خواهد بود:

$$\begin{aligned} M_v \ddot{q}_v + K_v q_v + C_{rv} \dot{q}_v - \kappa_{rv} \dot{q}_w \\ = (V_{r1} \cos^2 \Omega t + V_{r2} \cos \Omega t) q_v \\ + V_{r3} \cos^2 \Omega t + V_{r4} \cos \Omega t \end{aligned} \quad (۱۱)$$

$$M_w \ddot{q}_w + K_w q_w + C_{rw} \dot{q}_w + \kappa_{rw} \dot{q}_v = 0 \quad (۱۲)$$

که ضرایب آن مطابق رابطه (پ.۱) است.

$D_3$ : گشتاور سطح حول محور  $z$

$c_2$ : میرایی در راستای تحریک

$c_3$ : میرایی در راستای شناسایی

$v$ : جابه‌جایی در راستای تحریک

$w$ : جابه‌جایی در راستای شناسایی

با کمک پارامترهای بی‌بعد مناسب، معادلات حاکم بی‌بعد می‌گردد. پارامترهای بی‌بعد مطابق رابطه (۵) است:

$$\begin{aligned} \hat{v} = \frac{v}{L}, \quad \hat{w} = \frac{w}{L}, \quad \hat{x} = \frac{x}{L}, \quad \hat{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \Omega_r = \tau \Omega, \\ M_r = \frac{M}{mL}, \quad \tau = \sqrt{\frac{mL^4}{D_2}}, \quad c_{r2} = \frac{c_2 \tau}{m}, \quad c_{r3} = \\ \frac{c_3 \tau}{m}, \quad d = \frac{d_v}{d_w}, \quad \beta = \frac{D_3}{D_2}, \quad V_{DCv} = \sqrt{\alpha_v} V_{DCv}, \\ \gamma = \frac{l}{L}, \quad \alpha_v = \frac{\varepsilon A_v L^3}{2D_2 d_v^3}, \quad \alpha_w = \frac{\varepsilon A_w L^3}{2D_2 d_w^3} \end{aligned} \quad (۵)$$

در معادلات نهایی بی‌بعد، جهت ساده‌نویسی از نوشتن علامت " ^ " صرف‌نظر می‌شود و از بسط تیلور جهت ساده‌سازی نیروها و گشتاورها حول پارامتر بی‌بعد طول جرم گواه، استفاده می‌شود.

پس از انجام مراحل یادشده، نتیجه حاصل، مطابق معادله‌های (۶) و (۷) به ترتیب برای جهت‌های تحریک و شناسایی است:

$$\begin{aligned} (1 + M_r \delta_1(s)) \left( \ddot{v} - \frac{1}{d} \dot{\Omega}_r w - \frac{2}{d} \Omega_r \dot{w} - \Omega_r^2 v \right) + c_{r2} \dot{v} + \beta v^{(IV)} = (V_{DCv} + V_{ACv})^2 \left\{ \frac{1}{(1-v)^2} + \frac{\gamma v'}{(1-v)^3} + \frac{\gamma^2 v'^2}{(1-v)^4} + \frac{\gamma^3 v'^3}{(1-v)^5} \right\} \delta_1(x) + (V_{DCv} + V_{ACv})^2 \left\{ \frac{\gamma(4\gamma v' - 3v + 3)}{6(1-v)^3} \right\} \frac{\Delta v'}{\Delta v} \delta_1(x) - \frac{M_r \gamma}{2} \left\{ \frac{w'}{d} \dot{\Omega}_r \delta_1(x) + \frac{\dot{w}}{d} \Omega_r \delta_1'(x) + \frac{w}{d} \dot{\Omega}_r \delta_1'(x) - \ddot{v} \delta_1'(x) - \frac{\gamma}{2} (\ddot{v}' \delta_1'(x) + \ddot{v}'' \delta_1(x)) \right\} \end{aligned} \quad (۶)$$

$$\begin{aligned} (1 + M_r \delta_1(s)) (\ddot{w} + d \dot{\Omega}_r v + 2d \Omega_r \dot{v} - \Omega_r^2 w) + c_{r3} \dot{w} + w^{(IV)} = V_{DCw}^2 \left\{ \frac{1}{(1-w)^2} + \frac{\gamma w'}{(1-w)^3} + \frac{\gamma^2 w'^2}{(1-w)^4} + \frac{\gamma^3 w'^3}{(1-w)^5} \right\} \delta_1(x) + V_{DCw}^2 \left\{ \frac{\gamma(4\gamma w' - 3w + 3)}{6(1-w)^3} \right\} \frac{\Delta w'}{\Delta w} \delta_1(x) + \frac{M_r \gamma}{2} \left\{ d \dot{v} \Omega_r \delta_1'(x) + d \dot{\Omega}_r v \delta_1'(x) + d \dot{\Omega}_r v' \delta_1(x) + \ddot{w} \delta_1'(x) + \frac{\gamma}{2} (\ddot{w}' \delta_1'(x) + \ddot{w}'' \delta_1(x)) \right\} \end{aligned} \quad (۷)$$

سه دسته معادلات (۱۸)، (۱۹) و (۲۰) برای جابه‌جایی جهت تحریک و شناسایی به‌دست می‌آید که این معادلات دی کوپله هستند:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: D_0 q_{v0} + \omega^2 q_{v0} &= 0 \\ D_0 q_{w0} + \omega^2 q_{w0} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: D_0 q_{v1} + \omega^2 q_{v1} &= -2D_0 D_1 q_{v0} + \\ V_2 \left( \frac{1}{2} \exp i \Omega T_0 + cc \right) q_{v0} &+ V_3 \left( \frac{1}{4} \exp 2i \Omega T_0 + \frac{1}{4} + \right. \\ &\left. cc \right) \\ D_0 q_{w1} + \omega^2 q_{w1} &= -2D_0 D_1 q_{w0} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2: D_0 q_{v2} + \omega^2 q_{v2} &= -2D_0 D_1 q_{v1} - \\ (D_1^2 + 2D_0 D_1) q_{v0} + \kappa_v D_0 q_{w0} &- 2\mu_v D_0 q_{v0} + \\ V_1 \left( \frac{1}{4} \exp 2i \Omega T_0 + \frac{1}{4} + cc \right) q_{v0} &+ V_2 \left( \frac{1}{2} \exp i \Omega T_0 + \right. \\ &\left. cc \right) q_{v1} + V_4 \left( \frac{1}{2} \exp i \Omega T_0 cc \right) \\ D_0 q_{w2} + \omega^2 q_{w2} &= -2D_0 D_1 q_{w1} - \\ (D_1^2 + 2D_0 D_1) q_{w0} - \kappa_w D_0 q_{v0} &- \\ 2\mu_w D_0 q_{w0} \end{aligned} \quad (20)$$

حل مجموعه معادلات (۱۸) نتایج زیر را به دنبال دارد:

$$\begin{aligned} q_{v0} &= A_v(T_1, T_2) \exp i \omega T_0 + cc \\ q_{w0} &= A_w(T_1, T_2) \exp i \omega T_0 + cc \end{aligned} \quad (21)$$

روابط (۲۱) در مجموعه معادلات (۱۹) جایگزین شده و از نتیجه حذف ترم‌های دیرپای آن، روابط (۲۲) به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} A_v &= A_v(T_2) \\ A_w &= A_w(T_2) \end{aligned} \quad (22)$$

با حذف ترم‌های دیرپای از معادلات (۱۹) و حل آن، نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} q_{v1} &= B_1 A_v(T_2) \exp i (\Omega + \omega) T_0 \\ &+ B_2 \bar{A}_v(T_2) \exp i (\Omega - \omega) T_0 \\ &+ B_3 \exp 2i \Omega T_0 + B_4 + cc \\ q_{w1} &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

با جایگزینی روابط (۲۱) تا (۲۳) در معادلات (۲۰) و حذف عبارت‌های دیرپای روابط (۲۴) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} -2D_2 i \omega A_v + \kappa_v i \omega A_w - 2\mu_v i \omega A_v &+ \\ \frac{V_1 \bar{A}_v}{4} \exp 2i \sigma T_1 + \frac{V_1 A_v}{2} + \frac{V_4}{2} \exp i \sigma T_1 &+ \\ \frac{V_2 \bar{A}_v B_2}{2} \exp 2i \sigma T_1 + \frac{V_2 A_v B_2}{2} &+ \\ + V_2 B_4 \exp i \sigma T_1 + \frac{V_2 A_v B_1}{2} &+ \\ + \frac{V_2 B_3}{2} \exp i \sigma T_1 = 0 & \\ 2D_2 i \omega A_w + \kappa_w i \omega A_v + 2\mu_w i \omega A_w & \end{aligned} \quad (24)$$

در صورتی که روال ذکر شده بدون در نظر گرفتن ولتاژ متناوب تکرار گردد، معادله فرکانسی جهت تعیین فرکانس-های طبیعی سیستم به‌دست می‌آید.

ولتاژ متناوب به‌صورت  $V_{Acv} = V \cos \Omega t$  فرض می‌شود. معادلات ارتعاشی حاکم با استفاده از دو روش عددی و تحلیلی، حل می‌گردد. روش عددی، روش رانگ کوتا و روش تحلیلی، روش مقیاس‌های چندگانه است. روش مقیاس‌های چندگانه در حل معادلات دیفرانسیلی ارتعاشی کوپل و غیرکوپل مورد استفاده قرار می‌گیرد [۲۰-۲۲].

جهت حل معادلات (۱۱) و (۱۲)، فرکانس ولتاژ تحریک در محدوده رزونانس سیستم (رزونانس اولیه) فرض می‌شود. از طرفی تغییر متغیرهای (۱۳) انجام می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{V_{ri}}{M_v} &= \varepsilon^2 V_i \quad i = 1, 4 \\ \frac{V_{ri}}{M_v} &= \varepsilon V_i \quad i = 2, 3 \\ \frac{\kappa_{rj}}{M_j} &= \varepsilon^2 \kappa_j \quad \frac{C_{rj}}{M_j} = 2\varepsilon^2 \mu_j \quad j = v, w \\ \frac{K_j}{M_j} &= \omega^2 \quad j = v, w \end{aligned} \quad (13)$$

که  $\varepsilon$  پارامتر کوچک در بسط اغتشاشات است؛ بنابراین معادلات حاکم در جهت‌های تحریک و شناسایی به فرم رابطه (۱۴) تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_v + \omega^2 q_v + 2\varepsilon^2 \mu_v \dot{q}_v - \varepsilon^2 \kappa_v \dot{q}_w &= \\ = (\varepsilon^2 V_1 \cos^2 \Omega t + \varepsilon V_2 \cos \Omega t) q_v &+ \\ + \varepsilon V_3 \cos^2 \Omega t + \varepsilon^2 V_4 \cos \Omega t \end{aligned} \quad (14)$$

$$\ddot{q}_w + \omega^2 q_w + 2\varepsilon^2 \mu_w \dot{q}_w + \varepsilon^2 \kappa_w \dot{q}_v = 0 \quad (15)$$

حال در مرحله بعد، فرکانس ولتاژ در محدوده فرکانس طبیعی اول قرار می‌گیرد و رزونانس اولیه بررسی می‌شود [۲۳]:

$$\Omega = \omega + \varepsilon^2 \sigma \quad (16)$$

که  $\sigma$  پارامتر انحراف از رزونانس است.

در مرحله بعد، پاسخ معادلات به‌صورت رابطه (۱۸) فرض می‌گردد:

$$\begin{aligned} q_v &= q_{v0} + \varepsilon q_{v1} + \varepsilon^2 q_{v2} \\ q_w &= q_{w0} + \varepsilon q_{w1} + \varepsilon^2 q_{w2} \end{aligned} \quad (17)$$

با جایگزینی رابطه (۱۷) در معادلات (۱۴) و (۱۵) و استفاده از سه مقیاس زمانی  $T_0$ ،  $T_1$  و  $T_2$ ، معادلات در حالت مقیاس چندگانه حاصل می‌گردند. بدین منظور ضرایب توان‌های مشابه  $\varepsilon$  جداسازی می‌شود. با دسته‌بندی ضرایب  $\varepsilon$ ،

$$E_1 = -\frac{\varepsilon V_2}{6\omega^2} a_v, E_2 = -\frac{\varepsilon V_3}{6\omega^2}, E_3 = -\frac{\varepsilon V_2}{6\omega^2} a_v \quad (30)$$

همچنین  $a_v$  و  $a_w$  دامنه‌ها و  $\Phi_1$  و  $\Phi_2$  فازهای ارتعاشی جهات تحریک و شناسایی هستند.

### ۲-۲- تحلیل ارتعاشات غیرخطی

در این مرحله، ارتعاشات غیرخطی مورد توجه قرار می‌گیرد. با در نظر گرفتن عبارتهای غیرخطی، معادلات ارتعاشی غیرخطی، با استفاده از روش گالکین، کاهش مرتبه می‌یابند. معادلات حاصل شده به صورت پارامتریک در جهت تحریک و شناسایی مطابق رابطه (۳۱) و (۳۲)، به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$M_v \ddot{q}_v + K_v q_v + C_{rv} \dot{q}_v - \kappa_{rv} \dot{q}_w + \hat{\alpha}_{2v} q_v^2 + \hat{\alpha}_{3v} q_v^3 = (V_{r1} \cos^2 \Omega t + V_{r2} \cos \Omega t) q_v + V_{r3} \cos^2 \Omega t + V_{r4} \cos \Omega t \quad (31)$$

$$M_w \ddot{q}_w + K_w q_w + C_{rw} \dot{q}_w + \kappa_{rw} \dot{q}_v + \hat{\alpha}_{2w} q_w^2 + \hat{\alpha}_{3w} q_w^3 = 0 \quad (32)$$

حال معادلات فوق از طریق دو روش عددی و تحلیلی حل می‌گردند. در بررسی عددی از روش رانگ-کوتای مرتبه ۴ استفاده می‌شود و برای حل تحلیلی، از روش مقیاس‌های چندگانه مشابه با تعیین پاسخ ارتعاشی خطی استفاده می‌شود. ابتدا ضرایب رابطه (۳۱) و (۳۲)، به صوت ضرایب رابطه (۱۳) و رابطه (۳۳) در نظر گرفته می‌شود:

$$\hat{\alpha}_{2j} = \varepsilon^2 \alpha_{2j} / M_j, j = v, w$$

$$\hat{\alpha}_{3j} = \varepsilon^2 \alpha_{3j} / M_j, j = v, w \quad (33)$$

سپس با استفاده از سه مقیاس زمانی  $T_0, T_1$  و  $T_2$  و بهره‌گیری از بسط ارائه شده در رابطه (۱۷)، معادلات در حالت مقیاس چندگانه حاصل می‌گردند. بدین منظور ضرایب توان‌های مشابه  $\varepsilon$  جداسازی شده و با دسته‌بندی ضرایب  $\varepsilon$  سه دسته معادله زیر به دست می‌آید:

$$\varepsilon^0: D_0 q_{v0} + \omega^2 q_{v0} = 0$$

$$D_0 q_{w0} + \omega^2 q_{w0} = 0 \quad (34)$$

$$\varepsilon^1: D_0 q_{v1} + \omega^2 q_{v1} = \alpha_{2v} q_{v0}^2 - 2D_0 D_1 q_{v0} + V_2 \left( \frac{1}{2} \exp i \Omega T_0 + cc \right) q_{v0} + V_3 \left( \frac{1}{4} \exp 2i \Omega T_0 + \frac{1}{4} + cc \right)$$

ضرایب رابطه (۲۴)، مطابق رابطه (۲۵) است:

$$B_1 = -\frac{V_2}{6\omega^2} \quad B_2 = \frac{V_2}{2\omega^2}$$

$$B_3 = -\frac{V_3}{12\omega^2} \quad B_4 = \frac{V_3}{4\omega^2} \quad (25)$$

به منظور حل مجموعه معادلات (۲۴)، دامنه‌های مختلط

مطابق با (۲۶) به صورت قطبی در نظر گرفته می‌شود:

$$A_v(T_2) = \frac{1}{2} a_v(T_2) \exp[i(\sigma T_2 - \Phi_2)]$$

$$A_w(T_2) = \frac{1}{2} a_w(T_2) \exp[i(\sigma T_2 - \Phi_1 - \Phi_2)] \quad (26)$$

که  $a_v, a_w$  دامنه و  $\Phi_1$  و  $\Phi_2$  فازهای ارتعاشی هستند. با جایگزینی رابطه (۲۶) در رابطه (۲۴) و جدا کردن بخش حقیقی و موهومی معادلات، چهار معادله (۲۷) در حالت پایا حاصل می‌شود:

$$\frac{\kappa_v a_v}{2} \cos \Phi_1 + \mu_w a_w = 0$$

$$a_w \sigma + \frac{\kappa_w a_v}{2} \sin \Phi_1 = 0$$

$$\frac{\kappa_v a_w \omega}{2} \cos \Phi_1 - \mu_v a_v \omega + \frac{c_1}{2} a_v \sin 2\Phi_2 + c_3 \sin \Phi_2 = 0$$

$$\omega a_v \sigma + \frac{\kappa_v a_w \omega}{2} \sin \Phi_1 + \frac{c_1}{2} a_v \cos 2\Phi_2 + \frac{c_2}{2} a_v + c_3 \cos \Phi_2 = 0 \quad (27)$$

حل مجموعه معادلات (۲۷)، منجر به تعیین فازها و دامنه‌های ارتعاشی جهات تحریک و شناسایی می‌شود:

$$\Phi_1 = \tan^{-1} \left( \frac{\sigma}{\mu_w} \right)$$

$$a_v = n a_w$$

$$\tan \Phi_2 = \frac{(\kappa_v \cos \Phi_1 - 2n \mu_v) \omega}{(c_2 - c_1) n + (2n \sigma + \kappa_v \sin \Phi_1) \omega}$$

$$a_v = \frac{-2c_3 \sin \Phi_2}{-2\mu_v \omega + c_1 \sin 2\Phi_2} \quad (28)$$

و در پایان، پاسخ طبق رابطه (۱۷) و با تقریب دو جمله تعیین می‌شود:

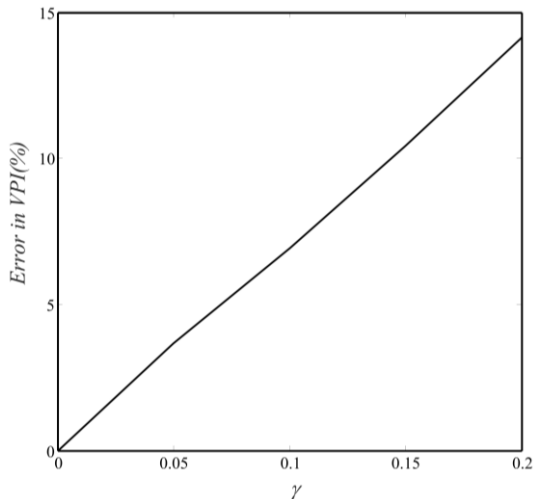
$$q_v = q_{v0} + \varepsilon q_{v1} \equiv E_1 \cos \Phi_2 + E_2 \cos 2\Omega t + a_v \cos(\Omega t - \Phi_2) + E_3 \cos(2\Omega t - \Phi_2)$$

$$q_w = q_{w0} + \varepsilon q_{w1} \equiv a_w \cos(\Omega t - \Phi_1 - \Phi_2) \quad (29)$$

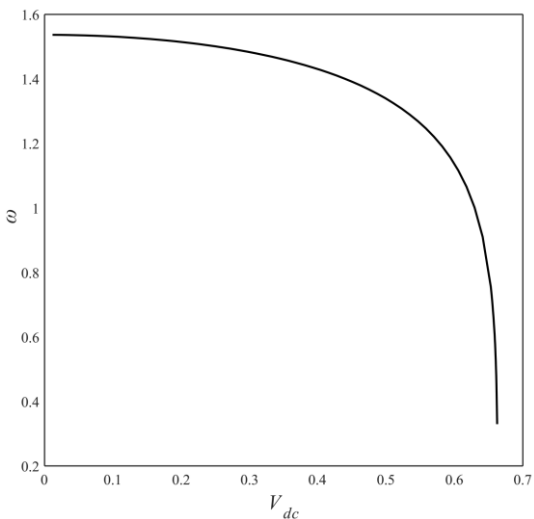
که ضرایب  $E_1, E_2$  و  $E_3$  از روابط (۳۰) تعیین می‌شود:



کاهش می‌یابد. مشاهده می‌شود که در محدوده‌ای از ولتاژ اعمال شده، شیب کاهشی نمودار فرکانس-ولتاژ به شدت زیاد شده و فرکانس به سمت صفر میل می‌کند. در این محدوده، ناپایداری اتفاق افتاده و ولتاژ متناظر با این شیب زیاد، همان ولتاژ ناپایداری کششی است.



شکل ۴- نمودار خطای ولتاژ ناپایداری استاتیکی برحسب پارامتر بی بعد طول جرم گواه



شکل ۵- نمودار فرکانس برحسب ولتاژ با در نظر گرفتن ابعاد طولی جرم گواه

در شکل ۶ خطای فرکانس در حالت فرض متمرکز بودن جرم برحسب پارامتر بی بعد طول ترسیم گردیده است.

$$D_0 q_{w1} + \omega^2 q_{w1} = \alpha_{2w} q_{w0}^2 - 2D_0 D_1 q_{w0} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2: D_0 q_{v2} + \omega^2 q_{v2} = & \alpha_{3v} q_{v0}^3 + 2\alpha_{2v} q_{v0} q_{v1} \\ & - 2D_0 D_1 q_{v1} - (D_1^2 + 2D_0 D_1) q_{v0} \\ & + \kappa_v D_0 q_{w0} - 2\mu_v D_0 q_{v0} \\ & + V_1 \left( \frac{1}{4} \exp 2i\Omega T_0 + \frac{1}{4} + cc \right) q_{v0} \\ & + V_2 \left( \frac{1}{2} \exp i\Omega T_0 + cc \right) q_{v1} \\ & + V_4 \left( \frac{1}{2} \exp i\Omega T_0 cc \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_0 q_{w2} + \omega^2 q_{w2} = & \alpha_{3w} q_{w0}^3 + 2\alpha_{2w} q_{w0} q_{w1} \\ & - 2D_0 D_1 q_{w1} - (D_1^2 + 2D_0 D_1) q_{w0} \\ & - \kappa_w D_0 q_{v0} - 2\mu_w D_0 q_{w0} \end{aligned} \quad (36)$$

حال با حل معادلات (۳۵) تا (۳۶) به همراه حذف عبارت‌های دیرپای، مشابه با روند اشاره شده در بخش قبل، دامنه و فاز پاسخ ارتعاشی محاسبه می‌شود.

### ۳- نتایج و بحث

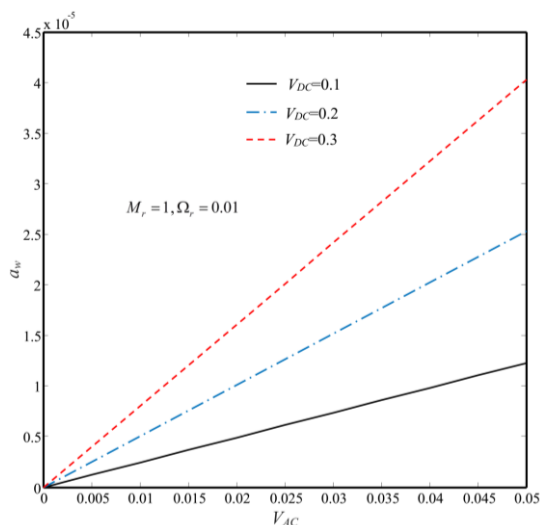
در شکل ۴ نمودار خطای ولتاژ ناپایداری استاتیکی در حالت فرض متمرکز بودن جرم برحسب پارامتر بی بعد طول ترسیم گردیده است.

مقدار خطای ولتاژ ناپایداری استاتیکی، مطابق رابطه (۳۷) تعیین می‌شود:

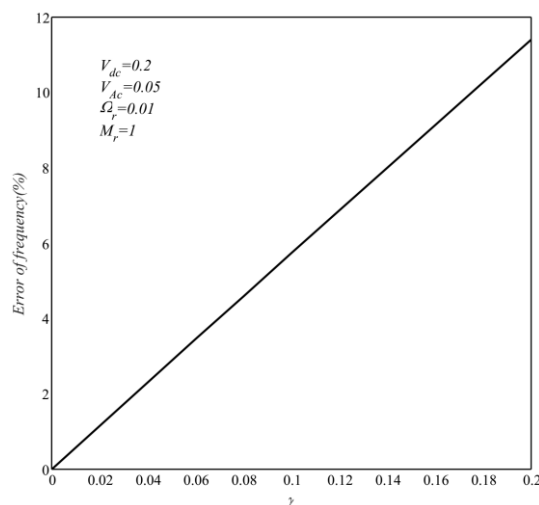
$$error \text{ in } VPI = \left| \frac{VPI_{dis} - VPI_{tip}}{VPI_{dis}} \right| \quad (37)$$

که در آن  $VPI$  بیانگر ولتاژ ناپایداری و علامت‌های  $dis$  و  $tip$  به ترتیب بیانگر، حالت گسترده و متمرکز جرم گواه متصل به میکروتیر است. مطابق با شکل ۴، با افزایش پارامتر بی بعد طول، میزان گستردگی جرم گواه نیز بیشتر شده و همان‌گونه که شکل نشان می‌دهد، خطای ناشی از فرض متمرکز گرفتن جرم گواه افزایش می‌یابد. بیشترین مقدار خطا در پارامتر بی بعد طول جرم گواه ۰,۲ برابر با ۱۴,۱۴٪ می‌باشد.

با در نظر گرفتن گستردگی جرم گواه، تغییرات فرکانس طبیعی سیستم برحسب ولتاژ در شکل ۵ به دست آمده است. مطابق با شکل مذکور، با افزایش ولتاژ، فرکانس طبیعی

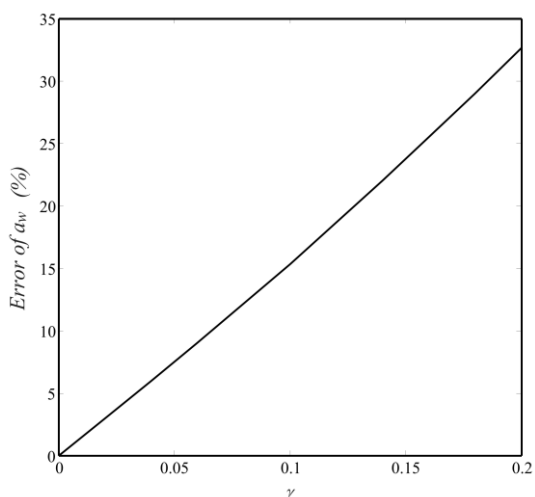


شکل ۷- نمودار دامنه جهت شناسایی بر حسب ولتاژ متناوب و بر اساس ولتاژ تحریک مستقیم متفاوت



شکل ۶- نمودار خطای فرکانس طبیعی بر حسب پارامتر بی بعد طول

با توجه به رابطه (۳۳) که بیانگر خطای دامنه ارتعاشی در فرض جرم متمرکز است، میزان خطا، در شکل ۸ ترسیم شده است. در نمودار ترسیم شده، بیشینه خطا در پارامتر بی بعد طول جرم گواه ۰/۲ برابر با ۳۲/۶٪ است که قابل توجه بوده و می‌تواند دقت پاسخ سیستم را به شدت پایین بیاورد. در پارامترهای کوچک بی بعد طول، این خطا ناچیز بوده و نتیجه حاصل از فرض جرم گسترده و متمرکز بر هم منطبق است.



شکل ۸- نمودار خطای دامنه شناسایی در حالت فرض گسترده و متمرکز نسبت به پارامتر بی بعد طول

خطای فرکانسی مطابق رابطه (۳۸) تعریف می‌شود:

$$\text{error in frequency} = \left| \frac{\omega_{dis} - \omega_{tip}}{\omega_{dis}} \right| \quad (38)$$

همان‌گونه که از نمودار مشخص است، با افزایش پارامتر بی بعد طول جرم گواه، میزان خطا افزایش می‌یابد. میزان خطا در نسبت طول بی بعد ۰/۲، برابر با ۱۱/۸۶٪ است؛ در صورتی که نسبت بی بعد طول جرم گواه کوچک باشد، فرض جرم متمرکز با حالت گسترده، اختلاف ناچیزی دارد.

در شکل ۷، نمودار تغییرات دامنه جهت شناسایی بر اساس ولتاژ متناوب اعمال شده در جهت تحریک، ترسیم شده است. همان‌گونه که در شکل نشان داده شده است، در یک سرعت دورانی مشخص، دامنه جهت شناسایی با افزایش ولتاژ متناوب، افزایش می‌یابد؛ بنابراین یکی از راه‌های افزایش حساسیت سیستم، افزایش ولتاژ متناوب و بالا بردن دامنه ارتعاشی جهت تحریک است. در همین نمودار در چند منحنی تأثیر تغییرات ولتاژ مستقیم نشان داده شده است. با افزایش ولتاژ مستقیم، دامنه جهت شناسایی افزایش می‌یابد؛ بنابراین می‌توان گفت، یکی دیگر از راه‌های افزایش حساسیت، افزایش ولتاژ مستقیم است؛ اما باید توجه داشت که افزایش ولتاژ تا جایی مجاز است که سیستم دچار ناپایداری نشود؛ همچنین مشاهده می‌شود که برای سه ولتاژ مستقیم مختلف، یک رابطه خطی بین ولتاژ متناوب و دامنه ارتعاشی جهت شناسایی وجود دارد.

در شکل ۱۱ پاسخ ارتعاشی جهت شناسایی در دو حالت غیرخطی و خطی در نزدیکی حالت رزونانس به دست آمده است و نتایج غیرخطی آن با روش عددی مقایسه گردیده است. ملاحظه می‌شود که نتایج غیرخطی دو روش مقیاس چندگانه و عددی بعد از گذشت زمان بر هم منطبق می‌باشند. همچنین برای ضریب میرایی  $0.3\%$ ، نشان داده شده است که اختلاف  $7/5\%$  درصدی بین دامنه ارتعاشی نتایج غیرخطی و خطی مشاهده می‌شود. چنانچه ولتاژ متناوب کوچک و یا ضریب میرایی بزرگ شود، این اختلاف کمتر می‌شود و برعکس در صورتی که ولتاژ متناوب بزرگ و ضریب میرایی کوچک‌تر شود، این اختلاف برجسته‌تر می‌گردد.

#### ۴- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر به بررسی اثرات مربوط به گستردگی جرم گواه در یک میکروژيروسکوپ ارتعاشی پرداخته شده است. نتیجه‌های مهم زیر در شبیه‌سازی‌ها مشاهده شده است:

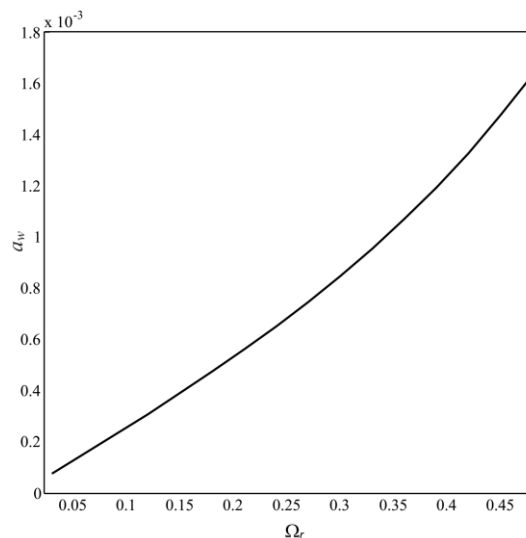
- فرض متمرکز گرفتن جرم گواه، موجب بروز خطا در محاسبه ولتاژ ناپایداری، فرکانس طبیعی و به‌ویژه دامنه جهت شناسایی (محاسبه حساسیت) می‌شود. با افزایش عدد بی‌بعد طول (نسبت طول جرم گسترده به طول تیر)، میزان این خطاها افزایش می‌یابد.
- افزایش ولتاژ مستقیم و متناوب، باعث افزایش دامنه جهت شناسایی می‌شود. افزایش دامنه جهت شناسایی، به مفهوم افزایش حساسیت سیستم است. باید توجه داشت که افزایش ولتاژ مستقیم تا جایی امکان‌پذیر است که به ولتاژ ناپایداری نرسد. همچنین مشاهده شده است که یک رابطه خطی بین افزایش ولتاژ متناوب و افزایش دامنه ارتعاشی جهت شناسایی وجود دارد.
- نمودار بسیار مهم دامنه جهت شناسایی برحسب سرعت دورانی پایه ترسیم شد. با کمک این نمودار عملکرد میکروژيروسکوپ مشخص می‌شود. با اندازه‌گیری دامنه جهت شناسایی، میزان دوران پایه از طریق منحنی مشخص می‌شود. ملاحظه گردید که ارتباط بین سرعت زاویه‌ای و دامنه ارتعاشی جهت شناسایی برای سرعت‌های پایین، به صورت خطی است؛ اما برای سرعت‌های بالا این رابطه به صورت غیرخطی می‌شود.

مقدار خطای دامنه مطابق رابطه (۳۹) تعریف می‌گردد:

$$\text{error in } a_w = \left| \frac{a_{wdis} - a_{wtip}}{a_{wdis}} \right| \quad (39)$$

نمودار دامنه برحسب سرعت دورانی بی‌بعد پایه، در شکل ۹ نشان داده شده است. این نمودار می‌تواند میزان دوران پایه را با اندازه‌گیری دامنه ارتعاشات ثانویه در اختیار طراح قرار دهد و رابطه بین ورودی و خروجی سیستم را نشان می‌دهد. همان‌گونه که مشخص است، با افزایش سرعت دورانی بی‌بعد میزان دامنه جهت شناسایی به دلیل افزایش نیروی کوریولیس افزایش می‌یابد؛ همچنین ملاحظه می‌شود که رابطه بین سرعت زاویه‌ای و دامنه ارتعاشی جهت شناسایی برای سرعت‌های پایین به صورت خطی است، اما برای سرعت‌های بالا این رابطه به صورت غیرخطی می‌شود.

شکل ۱۰ مقایسه جابه‌جایی دینامیکی حاصل از دو روش دقیق سری فوریه و تحلیلی مقیاس‌های چندگانه را در حالت خطی نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که دو پاسخ بر یکدیگر منطبق هستند؛ بنابراین روش تحلیلی ارائه شده، می‌تواند در بررسی عملکرد میکروژيروسکوپ‌های ذکر شده به خوبی مورد استفاده قرار گیرد.



شکل ۹- نمودار دامنه بی‌بعد جهت شناسایی برحسب زاویه دوران بی‌بعد پایه

گرفتن جرم گواه نمی‌تواند عملکرد ارتعاشی میکرو  
ژیروسکوپ را پیش‌بینی نماید.

۵- پیوست

$$M_v = \int_0^1 \{(1 + M_r \delta_1(x)) \varphi^2(x)\} ds$$

$$+ M_r \gamma \varphi'(1) \varphi(1) + \frac{M_r \gamma^2}{4} \varphi'^2(1)$$

$$K_v = \beta \int_0^1 \varphi^{(IV)}(x) \varphi(x) dx$$

$$- \Omega_r^2 \int_0^1 \{(1 + M_r \delta_1(x)) \varphi^2(x)\} dx$$

$$- V_{DC_v}^2 \int_0^1 (A \varphi^2 + B \varphi \varphi') dx$$

$$M_w = \int_0^1 \{(1 + M_r \delta_1(x)) \varphi^2(x)\} dx$$

$$+ M_r \gamma \varphi'(1) \varphi(1) + \frac{M_r \gamma^2}{4} \varphi'^2(1)$$

$$K_w = \int_0^1 \varphi^{(IV)}(x) \varphi(x) dx$$

$$- \Omega_r^2 \int_0^1 \{(1 + M_r \delta_1(x)) \varphi^2(x)\} dx$$

$$- V_{DC_w}^2 \int_0^1 (C \varphi^2 + D \varphi \varphi') dx$$

$$\kappa_{rv} = \frac{2\Omega_r \gamma}{d} \int_0^1 \{(1 + M_r \delta_1(x)) \varphi^2(x)\} dx$$

$$+ \frac{M_r \gamma}{d} \Omega_r \varphi'(1) \varphi(1)$$

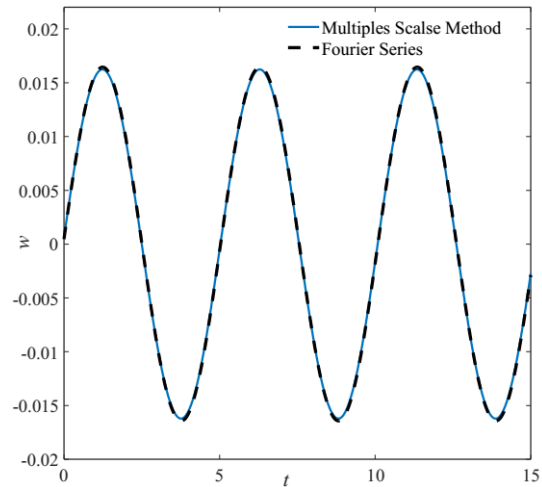
$$\kappa_{rw} = 2d\Omega_r \int_0^1 \{(1 + M_r \delta_1(s)) \varphi^2(x)\} dx$$

$$+ M_r \gamma d \Omega_r \varphi'(1) \varphi(1)$$

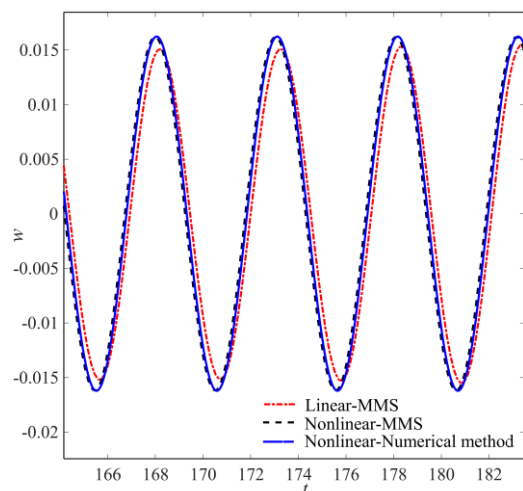
$$C_{rv} = \int_0^1 c_{r2} \varphi^2 dx$$

$$C_{rw} = \int_0^1 c_{r3} \varphi^2 dx$$

$$V_{r1} = V^2 \int_0^1 (\tilde{A} \varphi^2 + \tilde{B} \varphi \varphi') \delta_1(x) dx$$



شکل ۱۰- مقایسه خیز انتهایی میکرو تیر به دو روش حل دقیق و مقیاس‌های چندگانه



شکل ۱۱- مقایسه پاسخ ارتعاشی جهت شناسایی در دو حالت خطی و غیرخطی برای دو روش تحلیلی و عددی

- پارامترهای مهم طراحی میکروژیروسکوپ عبارت است از: ولتاژ ناپایداری، فرکانس طبیعی و دامنه ارتعاشات در جهت شناسایی. میزان خطای هرکدام از پارامترهای ذکر شده در فرض متمرکز گرفتن جرم گواه به دست آمده است. مشاهده شد که فرض جرم متمرکز نمی‌تواند به خوبی رفتار سیستم را ارائه نماید. بیشترین میزان خطای مشاهده شده، مربوط به دامنه جهت شناسایی بوده که به علت نقش مهم آن در تعیین حساسیت، حائز اهمیت بوده و نشان می‌دهد که فرض متمرکز در نظر

- under step voltage considering squeeze film damping. Int J Appl Mech 5: 1350032 (26 page).
- [8] Ghommem M, Nayfeh AH, Choura S, Najar F, Abdel-Rahman EM (2010) Modeling and performance study of a beam microgyroscope. J Sound Vib 329: 4970-4979.
- [9] Ansari M (2008) Modeling and vibration analysis of a rocking-mass gyroscope system. MASc Thesis. Canada University of Ontario Institute of Technology.
- [10] Bhadbhade V, Jalili N, Nima Mahmoodi S (2008) A novel piezoelectrically actuated flexural/torsional vibrating beam gyroscope J Sound Vib 311: 1305-1324.
- [11] Jeong C, Seok S, Lee B, Kim H, Chun K (2004) A study on resonant frequency and Q factor tunings for MEMS vibratory gyroscopes. J Micromech Microengineering 14: 1530.
- [12] Ghommem M, Abdelkefi A (2017) Performance analysis of differential-frequency microgyroscopes made of nanocrystalline material. Int J Mech Sci 133: 495-503.
- [13] Mojahedi M, Ahmadian M, Firoozbakhsh K (2014) The oscillatory behavior, static and dynamic analyses of a micro/nano gyroscope considering geometric nonlinearities and intermolecular forces. Acta Mechanica Sinica.
- [14] Sharifinsab E, Mojahedi M (2018) Nonlinear Vibration of Size Dependent Microresonators with an Electrostatically Actuated Proof Mass. Int J Struct Stab Dy 1850057.
- [15] Bina R, Mojahedi M (2017) Static Deflection, Pull-in Instability and Oscillatory Behavior of the Electrostatically Actuated Microresonator with a Distributed Proof Mass Considering Non-Classical Theory. Int J Appl Mech 1750023.
- [16] Nayfeh AH, Pai PF (2004) Linear and nonlinear structural mechanics. Wiley-VCH, Strauss GmbH Morlenbach, Germany.
- [17] Batra R, Porfiri M, Spinello D (2008) Vibrations and pull-in instabilities of microelectromechanical von Kármán elliptic plates incorporating the Casimir force. J Sound Vib 315: 939-960.
- [18] Batra RC, Pofiri M, Spinello D (2007) Capacitance estimate for electrostatically actuated narrow microbeams. Micro Nano 1: 71-73.
- [19] Thomson W, Dahleh M (1998) Theory of vibration with applications. Prentice Hall, New Jersey.
- [20] Fazel R, Jalili MM, Abootorabi MM (2017) Determination of Stability Regions of Wheel and Workpiece in Plunge Grinding Process Using a 3-D Workpiece Model. Journal of Solid and Fluid Mechanics 7: 67-82.
- [21] Ghazi R, Payghaneh G, Shahgholi M (2017) Resonance analysis and free nonlinear vibrations of a nanocomposite with internal damping. Modares Mechanical Engineering 17: 98-104.

$$V_{r2} = 2VV_{DCv} \int_0^1 (\tilde{A}\varphi^2 + \tilde{B}\varphi\varphi')\delta_1(x)dx$$

$$V_{r3} = V^2 \int_0^1 (\tilde{E}\varphi + \tilde{F}\varphi')\delta_1(x)dx$$

$$V_{r4} = 2VV_{DCv} \int_0^1 (\tilde{E}\varphi + \tilde{F}\varphi')\delta_1(x)dx$$

$$\hat{\alpha}_{2v} = \int_0^1 \frac{V_{DCv}^2}{(1-v_s)^4} \left\{ (3\varphi^2 + 3\gamma\varphi'\varphi + \gamma^2\varphi'^2)\varphi + \left( \frac{3\gamma\varphi^2}{2} + 2\gamma^2\varphi'\varphi \right) \varphi' \right\} \delta_1(x)dx$$

$$\hat{\alpha}_{2w} = \int_0^1 \frac{V_{DCw}^2}{(1-v_s)^4} \left\{ (3\varphi^2 + 3\gamma\varphi'\varphi + \gamma^2\varphi'^2)\varphi + \left( \frac{3\gamma\varphi^2}{2} + 2\gamma^2\varphi'\varphi \right) \varphi' \right\} \delta_1(x)dx$$

$$\hat{\alpha}_{3v} = \int_0^1 \frac{V_{DCv}^2}{(1-v_s)^5} \left\{ (4\varphi^3 + \gamma^3\varphi'^3 + 6\gamma\varphi^2\varphi' + \gamma^2\varphi\varphi'^2)\varphi + (2\gamma\varphi^3 + 4\gamma^2\varphi'\varphi^2)\varphi' \right\} \delta_1(x)dx \quad (۱.پ)$$

## ۶- مراجع

- [1] Acar C, Shkel A (2008) MEMS vibratory gyroscopes: structural approaches to improve robustness. Springer, US.
- [2] Armenise MN (2011) Advances in Gyroscope Technologies. Springer, Berlin Heidelberg.
- [3] Mohite S, Patil N, Pratap R (2006) Design, modelling and simulation of vibratory micromachined gyroscopes. J Phys Conf Ser 34: 757-763.
- [4] Hong YS, Lee JH, Kim SH (2000) A laterally driven symmetric micro-resonator for gyroscopic applications. J Micromech Microengineering 10: 452.
- [5] Mojahedi M, Ahmadian M, Firoozbakhsh K (2014) The influence of the intermolecular surface forces on the static deflection and pull-in instability of the micro/nano cantilever gyroscopes. Compos Part B:Eng 56: 336-343.
- [6] Mojahedi M, Ahmadian MT, Firoozbakhsh K (2013) Oscillatory behavior of an electrostatically actuated microcantilever gyroscope Int J Struct Stab Dy 13: 24.
- [7] Mojahedi M, Ahmadian MT, Firoozbakhsh K (2013) Dynamic pull-in instability and vibration analysis of a nonlinear microcantilever gyroscope

[23] Nayfeh AH, Mook DT (2008) Nonlinear oscillations. Wiley-VCH, US.

[22] Pirmoradian M, Karimpour H (2017) Nonlinear Effects on Parametric Resonance of a Beam Subjected to Periodic Mass Transition. Modares Mechanical Engineering 17: 284-292.