



## کنترل دسته‌ی خاصی از سیستم‌های مکانیکی فروتحریک با استفاده از کنترل مدلفزسی فازی با حجم محاسبات پایین و بدون لرزش

محمد رضا سلطانپور

دانشیار، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۷/۱۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۰۴/۱۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۷/۲۰

### چکیده

در این مقاله، کنترل‌کننده مدلفزسی فازی برای کنترل یک دسته از سیستم‌های فروتحریک ارائه شده است. برای ارائه روش پیشنهادی، در ابتدا روش طراحی کنترل مدلفزسی برای یک سیستم یک ورودی- یک خروجی بیان می‌شود. سپس بر اساس این روش طراحی، یک کنترل‌کننده مدلفزسی برای دسته‌ی خاصی از سیستم‌های یک ورودی- چند خروجی ارائه می‌شود. اثبات ریاضی نشان می‌دهد که سیستم حلقه بسته در حضور عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری، دارای پایداری مجانبی سراسری است. در کنترل پیشنهادی به دلیل استفاده از تابع ناپیوسته در ورودی کنترل، بروز لرزش در ورودی کنترل امری اجتناب ناپذیر است. به همین دلیل در ادامه، یک سیستم فازی با تعداد قواعد فازی کم و حجم محاسبات بسیار پایین، طراحی و به کنترل‌کننده مدلفزسی اضافه می‌شود. کنترل مدلفزسی فازی پیشنهادی، مشکلات موجود را مرتفع نموده و روش طراحی آن به گونه‌ای انجام می‌شود که تنظیم ضرایب آن به سادگی قابل انجام است و می‌تواند پایداری مجانبی سراسری سیستم حلقه بسته را تضمین نماید. سرانجام برای نمایش عملکرد کنترل پیشنهادی، شبیه‌سازی‌هایی در ۴ مرحله روی سیستم فروتحریک گاری به همراه پاندول معکوس پیاده‌سازی می‌شود. نتایج شبیه‌سازی‌ها، عملکرد کنترل پیشنهادی را نشان می‌دهند.

**کلمات کلیدی:** سیستم فروتحریک؛ عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری؛ لرزش ورودی کنترل؛ سیستم فازی؛ کنترل مدلفزسی فازی.

## Control of a Class of Underactuated Mechanical Systems by Using Fuzzy Sliding Mode Control With Low Computing Volume and Without Chattering

M.R. Soltanpour

<sup>1</sup> Assoc. Prof., Department of Electrical Engineering, Shahid Sattari Aeronautical Univ. of Science and Technology, Tehran, Iran.

### Abstract

In this paper, a fuzzy sliding mode controller is presented for controlling a class of underactuated systems. In order to present the proposed method, at first, the sliding mode method for a single input-single output system is expressed. In the following, based on this design method, a sliding mode controller for a class of single input-multi output systems is presented. The mathematical proof shows that the closed loop system, in the presence of structured and un-structured uncertainties, has global asymptotic stability. In the proposed control due to the use of the sign function in the control input, the incidence of chattering is inevitable. For this reason, a fuzzy system is designed with a small number of fuzzy rules and very low computational volume and is added to the sliding mode control. The proposed fuzzy sliding mode control eliminates existing problems and its design is done in such a way as to ensure the global asymptotic stability of the closed loop system. Finally, to demonstrate the proposed control performance, three-stage simulations are implemented on the inverse pendulum system. Simulation results show the performance of the proposed control.

**Keywords:** Underactuated Systems; Structured and Un-structured Uncertainties; Chattering; Fuzzy System; Fuzzy Sliding Mode Control.

## ۱- مقدمه

در حالت کلی ارائه، کنترل‌کننده برای کل سیستم ساده‌تر شود.

تا کنون از روش کنترل مدلغزشی<sup>۴</sup> برای کنترل بسیاری از سیستم‌های غیرخطی استفاده شده است. مزایای اصلی کنترل مدلغزشی، به عدم حساسیت آن به اغتشاش خارجی، مقاوم بودن در برابر عدم قطعیت‌های سیستم، تضمین پایداری سیستم، پاسخ دینامیکی سریع و پیاده‌سازی ساده‌ی آن بر می‌گردد [۶-۹].

در مرجع [۱۰]، از روش کنترل مدلغزشی برای کنترل سیستم‌های مکانیکی فروتحریک درجه ۴ استفاده گردید. در راهکار پیشنهادی، یک متغیر جدید برای برقراری ارتباط بین دو زیر سیستم ارائه شده است که از طریق آن، خطاهای ردگیری در هر زیر سیستم را صفر می‌نمایند. در ادامه، محققین از این راهکار الگو گرفته و کنترل مدلغزشی نهایی سریع<sup>۵</sup> [۱۱] و کنترل مدلغزشی نهایی بدون تکینگی<sup>۶</sup> [۱۲] را برای کنترل سیستم‌های مکانیکی فروتحریک درجه ۴ ارائه نموده‌اند. اگرچه در راهکارهای پیشنهادی، تلاش گردیده است تا پایداری سیستم حلقه بسته در زمان محدودی اتفاق بیفتد، اما مشکلات این روش کنترلی به قرار زیر است:

- در این روش اثبات می‌شود که کنترل پیشنهادی، زیر سیستم اول را در حضور عدم قطعیت‌های موجود، دارای پایداری مجانبی سراسری می‌نماید؛ اما پایداری زیر سیستم دوم و در نهایت سیستم حلقه بسته کلی، فاقد اثبات ریاضی است.
- راهکار پیشنهادی قابل تعمیم برای کنترل سیستم‌های مکانیکی فروتحریک با درجه بالاتر از ۴ نیست.

در سال‌های اخیر پژوهشگران از کنترل مدلغزشی مرتبه‌ی بالا نیز، برای کنترل سیستم‌های مکانیکی فروتحریک استفاده نموده‌اند [۱۳-۱۴]. اثبات ریاضی و نتایج شبیه‌سازی‌ها، کاهش مناسب پدیده نامطلوب لرزش<sup>۷</sup> در ورودی کنترل و زمان محدود بودن پایداری سیستم حلقه

سیستم فروتحریک<sup>۱</sup> مکانیکی، به سیستمی گفته می‌شود که تعداد محرکه‌های آن، کمتر از تعداد درجات آزادی<sup>۲</sup> است که باید کنترل شوند. حوزه تحقیقاتی این دسته از سیستم‌های مکانیکی، بخاطر کاربردهای زیادی که دارند مورد توجه محققین زیادی بوده و در حال حاضر نیز هست. تحقیق و مطالعه در زمینه‌ی سیستم‌های مکانیکی فروتحریک، تقریباً از ۲۵ سال قبل با تحقیق در زمینه‌ی سیستم‌های رباتیک غیرهولونومیک<sup>۳</sup>، مورد توجه محققین قرار گرفت [۱-۲]. از مواردی که تحقیق در این زمینه را برای دانشمندان جذاب می‌نماید، بحث کنترل اینگونه از سیستم‌های مکانیکی است که از طریق روش‌های مرسوم و سنتی کنترل کلاسیک قابل انجام نیست [۳-۴]. امروزه سیستم‌های فروتحریک، کاربردهای زیادی در صنایع تجاری، دولتی و نظامی دارند. به عنوان مثال می‌توان از سیستم‌های متحرک رباتیک، فضاپیماها، زیردریائی‌ها، موشک‌های سطحی، بالگردها و بازوهای رباتیک با مفاصل انعطاف‌پذیر را به عنوان یک سیستم فروتحریک نام برد. به طور کلی سیستم‌های فروتحریک، کاربردهای زیادی در حوزه رباتیک و صنایع هوافضا دارند؛ زیرا اگر یک سیستم فروتحریک خوب کار کند، این امر باعث کاهش تعداد محرکه‌های سیستم و در نتیجه باعث کاهش وزن و سایز این سیستم‌ها شده و در نهایت کاهش هزینه‌های اقتصادی را به دنبال دارد.

در مقاله‌ی [۵]، راهکاری برای تجزیه معادلات دینامیکی سیستم‌های فروتحریک، به زیر سیستم‌های مجزا ارائه شده است. سپس برای سال‌های متمادی، تحقیقات زیادی در زمینه کنترل این زیر سیستم‌ها و در نهایت برای کنترل سیستم‌های فروتحریک انجام گردید. ایده‌ی تجزیه سیستم‌های فروتحریک، به زیر سیستم‌های مجزا و تبدیل معادلات این زیر سیستم‌ها، به فرم کانونیکال درجه دوم، باعث شد که طراحی کنترل‌کننده برای این زیرسیستم‌ها و

<sup>4</sup> Sliding Mode Control

<sup>5</sup> Fast Terminal Sliding Mode Control

<sup>6</sup> Nonsingular Terminal Sliding Mode Control

<sup>7</sup> Chattering

<sup>1</sup> Underactuated Systems

<sup>2</sup> Degrees Of Freedom

<sup>3</sup> Non-Holonomic

دیگر، بار محاسباتی ورودی کنترل را افزایش می‌دهند.

محققین روش‌های متفاوتی را، برای استفاده از روش کنترل مدلغزشی در سیستم‌های مکانیکی فروتحریک ارائه نموده‌اند [۲۲-۲۴]. اثبات ریاضی و نتایج شبیه‌سازی‌ها، عملکرد مطلوب روش‌های پیشنهادی را نشان می‌دهند؛ اما استفاده از این روش‌ها، برای کنترل بعضی از سیستم‌های مکانیکی فروتحریک، به دلیل بروز تکینگی<sup>۳</sup> در محاسبه ماتریس‌های غیرمربعی مناسب نیست که در روش طراحی آنها وجود دارد.

تاکنون از ترکیب منطق فازی و کنترل مدلغزشی، کنترل‌کننده‌های مدلغزشی فازی و مدلغزشی فازی تطبیقی متعددی برای کنترل سیستم‌های مکانیکی فروتحریک ارائه شده است [۲۵-۲۷]. در تمامی این روش‌ها، از تکنیک جداسازی زیر سیستم‌ها استفاده شده است. در روش‌های پیشنهادی، پژوهشگران تلاش نموده‌اند که راهکار مناسبی را برای جلوگیری از تأثیر متقابل زیر سیستم‌ها بر یکدیگر و در نهایت تضمین پایداری سیستم حلقه بسته پیشنهاد نمایند؛ اما راهکارهای پیشنهادی دارای مشکلات زیر هستند:

- تعداد قوانین فازی این کنترل‌کننده‌ها زیاد و دارای چند ورودی - چند خروجی می‌باشند.
- قوانین تطبیقی متعددی در ساختار طراحی کنترل‌کننده‌های پیشنهادی به کار رفته است.
- با افزایش درجه آزادی سیستم مکانیکی فروتحریک، تعداد این قوانین فازی به شدت افزایش پیدا نموده و این امر طراحی قوانین فازی چند ورودی - چند خروجی را پیچیده می‌نماید.
- اثر متقابل زیر سیستم‌ها باعث می‌شود تا سیستم حلقه بسته در حضور کنترل‌کننده‌های پیشنهادی، دارای پایداری محدود یکنواخت باشد.

بعضی از عوامل فوق باعث می‌گردند که حجم محاسبات ورودی کنترل به شدت افزایش یابد، بنابراین با بروز تاخیر در

بسته را نشان می‌دهند؛ اما واضح است که بالاتر رفتن درجه مدلغزش، کاهش دقت ردگیری کنترل‌کننده را به دنبال داشته و مقاوم بودن آنرا در برابر عدم قطعیت‌های موجود تضعیف می‌نماید [۱۵].

در مقاله [۱۶]، یک کنترل‌کننده‌ی مدلغزشی مبتنی بر مدل و چند لایه، برای پایدارسازی دسته خاصی از سیستم‌های مکانیکی فروتحریک ارائه شده است. در روش پیشنهادی، در ابتدا برای هرکدام از زیر سیستم‌ها، سطح لغزشی تعریف می‌شود و در ادامه سطح لغزش کلی سیستم، ترکیب خطی از سطوح لغزش زیر سیستم‌ها است. در نهایت ورودی کنترل بر اساس سطوح لغزش زیر سیستم‌ها طراحی شده است. پس از آن محققین با روشی متفاوت اقدام به تجزیه زیر سیستم‌ها نموده و با استفاده از ترکیب کنترل تطبیقی و کنترل مدلغزشی، روشی برای کنترل کل سیستم ارائه نموده‌اند [۱۷-۱۸]. در روش پیشنهادی، از چندین پارامتر در تعریف سطوح لغزش زیر سیستم‌ها استفاده شده است. از آنجاکه شناسایی این پارامترها کار ساده‌ای نیست، محققین، تخمین‌گرهایی<sup>۱</sup> را برای تخمین این پارامترها معرفی نموده، باعث ارتقاء این روش کنترلی گردیدند [۱۹-۲۱]. از طرف دیگر بعضی از محققین بجای استفاده از تخمین‌گرها، از تقریب‌گرهای فازی تطبیقی<sup>۲</sup> برای طراحی سطوح لغزش زیر سیستم‌ها استفاده نموده‌اند [۱۶]. راهکارهای پیشنهادی، افق‌های جدیدی را در پیش روی محققین قرار داد و پیشرفت چشمگیری را در زمینه کنترل سیستم‌های مکانیکی فروتحریک به وجود آورد؛ اما پیاده‌سازی عملی کنترل‌کننده‌های پیشنهادی با مشکلات زیر روبرو است:

- تنظیم پارامترهای متعدد سطوح لغزش زیر سیستم‌ها، کار بسیار زمانبر و پیچیده‌ای است.
- استفاده از تخمین‌گرها و تقریب‌گرهای فازی تطبیقی برای تنظیم این پارامترها، کار را راحتتر می‌نماید؛ اما وجود این تخمین‌گرها و تقریب‌گرها، سبب پیچیده شدن روند طراحی کنترل‌کننده و اثبات پایداری سیستم حلقه بسته گردیده، از طرف

<sup>1</sup> Estimators

<sup>2</sup> Adaptive Fuzzy Approximators

<sup>3</sup> Singularity

## ۲- کنترل مدلغزشی

در این بخش، مفاهیم کنترل مدلغزشی و چگونگی اعمال این نوع کنترل‌کننده به سیستم مرتبه دوم بیان می‌شود. به این منظور، معادلات دینامیکی سیستم مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= f(X) + b(X)u + d(t) \end{aligned} \quad (1)$$

که  $X = [x_1, x_2]$  بردار متغیر حالت،  $f(X)$  و  $b(X)$  دینامیک‌های غیرخطی،  $u$  ورودی کنترل و  $d(t)$  اغتشاش خارجی است. در معادلات فوق فرض بر این است که اغتشاش محدود است، به عبارت دیگر  $|d(t)| \leq D$  بوده و  $D$  مقداری معلوم است. برای طراحی کنترل مدلغزشی که حساس به تغییرات پارامترهای سیستم و اغتشاش نباشد، سطح لغزش زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma = c_1 x_1 + x_2 \quad (2)$$

$c_1$  ضریبی ثابت و مثبت است. برای طراحی کنترل‌کننده،  $u$  به دو بخش زیر تقسیم می‌شود:

$$u = u_{eq} + u_s \quad (3)$$

که  $u_{eq}$  به گونه‌ای طراحی می‌شود که متغیرهای حالت را روی سطح لغزش نگه دارد و طراحی  $u_s$  برای هدایت متغیرهای حالت به سمت سطح لغزش است. برای طراحی  $u_{eq}$ ، از معادله (۲) نسبت به زمان مشتق گرفته و برابر با صفر قرار داده می‌شود:

$$c_1 \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0 \quad (4)$$

معادله (۱) در (۴) جایگذاری و به صورت (۵) مرتب می‌شود:

$$c_1 \dot{x}_1 + f(X) + b(X)u_{eq} + d(t) = 0 \quad (5)$$

حال  $u_{eq}$  به صورت (۶) انتخاب می‌شود:

$$u_{eq} = \frac{-c_1 \dot{x}_1 - \hat{f}(X)}{\hat{b}(X)} \quad (6)$$

در معادله فوق  $\hat{f}(X)$  و  $\hat{b}(X)$  بخش‌های معلوم  $f(X)$  و  $b(X)$  هستند. در ادامه برای طراحی  $u_s$ ، تابع منتخب لیاپانف زیر پیشنهاد می‌شود:

$$V = \frac{1}{2} \sigma^2 \quad (7)$$

از معادله فوق نسبت به زمان مشتقگیری می‌شود:

$$\dot{V} = \dot{\sigma} \sigma \quad (8)$$

در ادامه معادلات (۲)، (۳) و (۶) در معادله (۸) جایگذاری می‌شود:

انجام محاسبات ورودی کنترل، تضمین پایداری سیستم حلقه بسته امکان‌پذیر نخواهد بود.

در این مقاله، کنترل مدلغزشی فازی، برای کنترل دسته خاصی از سیستم‌های مکانیکی فروتحریک ارائه گردیده است. در طراحی کنترل پیشنهادی تلاش شده است تا:

- تجزیه زیر سیستم‌ها به گونه‌ای انجام شود که اثر متقابل این زیر سیستم‌ها تأثیری بر پایداری کل سیستم نداشته باشند؛ بنابراین این امر باعث می‌شود تا سیستم حلقه بسته با کنترل پیشنهادی و در حضور عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری، دارای پایداری مجانبی سراسری گردد.
- برای کاهش حجم محاسبات ورودی کنترل، از قوانین فازی بسیار محدود و یک ورودی - یک خروجی استفاده می‌شود.
- طراحی سیستم فازی به گونه‌ای انجام می‌گردد که دامنه ورودی کنترل را کاهش دهد.
- طراحی کنترل پیشنهادی به گونه‌ای است که از بروز لرزش در ورودی کنترل جلوگیری نماید.
- راهکار پیشنهادی قابل تعمیم به سیستم‌های مکانیکی فروتحریک با درجات بالاتر است.

در ادامه سازماندهی مقاله به گونه‌ای است که در بخش ۲، روش طراحی کنترل مدلغزشی برای یک سیستم یک ورودی - یک خروجی ارائه می‌شود. در بخش ۳ مقاله، روش طراحی کنترل مدلغزشی بیان شده در بخش ۲، به دسته خاصی از سیستم‌های مکانیکی فروتحریک تعمیم داده می‌شود. سپس در بخش ۴، اثبات می‌گردد که اثر متقابل زیر سیستم‌ها، تأثیری بر پایداری مجانبی سراسری سیستم حلقه بسته ندارد. پس از آن در بخش ۵، با افزودن یک سیستم فازی به کنترل مدلغزشی، مزایایی به کنترل مدلغزشی افزوده می‌شود که به تفصیل در این بخش بیان می‌شود. در ادامه بخش ۲-۵ به نحوه پیاده‌سازی کنترل مدلغزشی فازی اختصاص دارد و در بخش ۶، برای نمایش عملکرد کنترل پیشنهادی، شبیه‌سازی‌هایی در ۴ مرحله روی سیستم فروتحریک گاری به همراه پاندول معکوس ارائه می‌شود. در نهایت بیان نتیجه‌گیری در بخش ۷ آمده است.

$$\dot{V} = \left( c_1 \dot{x}_1 + f(X) + b(X) \left( \frac{-c_1 \dot{x}_1 - \hat{f}(X)}{\hat{b}(X)} + u_s \right) + d(t) \right) \sigma \quad (9)$$

معادله (۹) به صورت (۱۰) مرتب می‌گردد:

$$\dot{V} = \left( c_1 \dot{x}_1 \left( 1 - \frac{b(X)}{\hat{b}(X)} \right) + \left( f(X) - \frac{b(X)}{\hat{b}(X)} \hat{f}(X) \right) + b(X)(u_s) + d(t) \right) \sigma \quad (10)$$

به معادله فوق یکبار  $u_s$  اضافه و کم می‌شود؛ در نتیجه معادله (۱۱) نتیجه می‌شود:

$$\dot{V} = \left( c_1 \dot{x}_1 \left( 1 - \frac{b(X)}{\hat{b}(X)} \right) + \left( f(X) - \frac{b(X)}{\hat{b}(X)} \hat{f}(X) \right) + u_s(b(X) + 1) + d(t) - u_s \right) \sigma \quad (11)$$

در ادامه برای ساده‌سازی از تعریف زیر استفاده می‌شود:

$$\eta = \left( c_1 \dot{x}_1 \left( 1 - \frac{b(X)}{\hat{b}(X)} \right) + \left( f(X) - \frac{b(X)}{\hat{b}(X)} \hat{f}(X) \right) + u_s(b(X) + 1) + d(t) \right) \quad (12)$$

باعث افزایش دامنه ورودی کنترل و اشباع محرکه‌های سیستم می‌شود.

**نکته ۱:** با دقت در معادله (۱۲)، نتیجه می‌شود که  $\eta$  جمع تمامی عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری موجود در معادلات دینامیکی سیستم است.

با جایگذاری معادله (۱۲) در (۱۱)، معادله (۱۳) نتیجه می‌گردد:

$$\dot{V} = (\eta - u_s) \sigma \quad (13)$$

با توجه به معادله فوق،  $u_s$  به صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$u_s = \rho \text{sign}(\sigma) + k \sigma \quad (14)$$

که  $\rho$  و  $k$  ثابت‌های مثبتی هستند. با جایگذاری معادله (۱۴) در (۱۳) داریم:

$$\dot{V} = \eta \sigma - \rho \text{sign}(\sigma) \sigma - k \sigma^2 = \eta \sigma - \rho |\sigma| - k \sigma^2 \quad (15)$$

از معادله فوق نتیجه می‌شود که در صورت انتخاب مناسب ضرایب  $\rho$  و  $k$ ، مشتق تابع لیاپانف کوچکتر از صفر می‌شود؛ بنابراین سیستم حلقه بسته با ورودی معادلات (۳)، (۶) و (۱۴) در حضور عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری، دارای پایداری مجانبی سراسری است.

**نکته ۲:** از معادله (۱۵) مشاهده می‌شود که اگر  $\rho > |\eta|$  انتخاب شود، آنگاه مشتق تابع لیاپانف کوچکتر از صفر می‌شود و دیگر نیازی به استفاده از ضریب مثبت  $k$  نیست. دلیل استفاده از ضریب مثبت  $k$ ، افزایش حاشیه امنیت در طراحی کنترل و کاهش زمان صفر شدن سطح لغزش است؛ اما اگر این ضریب را خیلی بزرگ انتخاب نماییم، این امر

### ۳- طراحی کنترل مدلغزشی برای سیستم فروتحریک

سیستم یک ورودی - چند خروجی زیر را در نظر بگیرید [۱۰ و ۲۸]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_1(X) + b_1(X)u + d_1(t) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= f_2(X) + b_2(X)u + d_2(t) \\ y(t) &= [x_1, x_3]^T \end{aligned} \quad (16)$$

که  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  بردار متغیرهای حالت  $f_1(X)$ ،  $f_2(X)$ ،  $b_1(X)$  و  $b_2(X)$  دینامیک‌های غیرخطی،  $d_1(t)$  و  $d_2(t)$  اغتشاشات خارجی محدود با کران بالای معلوم  $|d_1(t)| < D_1$  و  $|d_2(t)| < D_2$  و ورودی کنترل است. کانونیکال معادلات (۱۶) هستند. هدف طراحی کنترل کننده تک ورودی  $u$  به گونه‌ای است که متغیرهای حالت  $(x_1, x_2)$  و  $(x_3, x_4)$  عملکرد مطلوبی داشته باشند. این فرم از سیستم‌ها، به دسته خاصی از سیستم‌های فروتحریک معروف هستند.

برای متغیرهای حالت  $(x_1, x_2)$  و  $(x_3, x_4)$ ، سطوح لغزش زیر انتخاب می‌شوند:

$$\sigma_1 = \lambda_1 x_1 + x_2 \quad (17)$$

$$\sigma_2 = \lambda_2 x_3 + x_4 \quad (18)$$

$$u = u_{eq1} + u_{eq2} + u_s \quad (21)$$

ورودی  $u_s$ ، بخش ناپیوسته کنترل کننده مدلفزشی است. در ادامه سطح لغزش زیر که ترکیبی از سطوح لغزش زیر سیستم‌ها است، به صورت رابطه (۲۲) معرفی می‌شود:

$$Q = \alpha \sigma_1 + \gamma \sigma_2 \quad (22)$$

که  $\alpha$  و  $\gamma$  ثابت‌های مثبتی هستند. برای طراحی ورودی  $u_s$  تابع منتخب لیپانف (۲۳) معرفی می‌شود:

$$V = \frac{1}{2} Q^2 \quad (23)$$

از تابع منتخب لیپانف نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\dot{V} = Q \dot{Q} = Q[\alpha(\lambda_1 \dot{x}_1 + \dot{x}_2) + \gamma(\lambda_2 \dot{x}_3 + \dot{x}_4)] \quad (24)$$

معادلات (۱۹) و (۲۰) در معادله (۲۴) جایگذاری می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= Q[\alpha(\lambda_1 x_2 + \hat{f}_1 + \hat{b}_1(u_{eq1} + u_{eq2} + u_s) + d_1) + \gamma(\lambda_2 x_4 + \hat{f}_2 + \hat{b}_2(u_{eq1} + u_{eq2} + u_s) + d_2)] \alpha \lambda_1 x_2 \\ &\quad + \alpha \hat{f}_1 + \alpha \hat{b}_1 u_{eq1} + \alpha \hat{b}_1 (u_{eq2} + u_s) + \gamma \lambda_2 x_4 + \gamma \hat{f}_2 + \gamma \hat{b}_2 u_{eq2} + \gamma \hat{b}_2 (u_{eq1} + u_s) + \alpha d_1 + \gamma d_2 \\ &= Q[\alpha \hat{b}_1 (u_{eq2} + u_s) + \gamma \hat{b}_2 (u_{eq1} + u_s) + \alpha d_1 + \gamma d_2] \\ &= Q[(\gamma \hat{b}_2 u_{eq1} + \alpha \hat{b}_1 u_{eq2}) + u_s (\gamma \hat{b}_2 + \alpha \hat{b}_1) + \alpha d_1 + \gamma d_2] \end{aligned} \quad (25)$$

ورودی  $u_s$  به صورت رابطه (۲۶) انتخاب می‌شود:

$$u_s = \frac{-1}{(\gamma \hat{b}_2 + \alpha \hat{b}_1)} [\gamma \hat{b}_2 u_{eq1} + \alpha \hat{b}_1 u_{eq2} + kQ + \rho \text{sign}(Q)] \quad (26)$$

که  $k$  و  $\rho$  ثابت‌های مثبتی هستند. با جایگذاری معادله (۲۶) در (۲۵) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= Q[-kQ - \rho \text{sign}(Q) + \alpha d_1 + \gamma d_2] \\ &= -kQ^2 - \rho|Q| + Q(\alpha d_1 + \gamma d_2) \leq -kQ^2 - \rho|Q| + |Q|(\alpha D_1 + \gamma D_2) \end{aligned} \quad (27)$$

#### ۴- تحلیل پایداری سیستم حلقه بسته

در بخش قبل اثبات شد که ورودی کنترل با معادلات (۱۹)، (۲۰)، (۲۱) و (۲۶)، سطح لغزش  $Q$  را در حضور تمامی عدم-قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری به سمت صفر همگرا می‌نماید. در این بخش می‌خواهیم ثابت کنیم که صفر شدن سطح لغزش  $Q$ ، باعث صفر شدن سطوح لغزش  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  گردیده و در نهایت سیستم حلقه بسته دارای پایداری مجانبی سراسری می‌شود.

که  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  ثابت‌های مثبتی هستند. مطابق روش طراحی بخش قبل، ورودی‌های معادل زیر سیستم‌ها را می‌توان به دست آورد:

$$u_{eq1} = \frac{-\lambda_1 \dot{x}_1 - \hat{f}_1(X)}{\hat{b}_1(X)} \quad (19)$$

$$u_{eq2} = \frac{-\lambda_2 \dot{x}_3 - \hat{f}_2(X)}{\hat{b}_2(X)} \quad (20)$$

که  $\hat{b}_1(X)$ ،  $\hat{f}_1(X)$  و  $\hat{b}_2(X)$  به ترتیب بخش‌های معلوم  $b_1(X)$ ،  $f_1(X)$  و  $b_2(X)$  هستند. در یک سیستم فروتحریک، کنترل خروجی‌های سیستم از طریق ورودی‌های کمتر، کار بسیار پیچیده‌ای است؛ بنابراین برای اینکه هر کدام از زیر سیستم‌ها بتوانند عملکرد مطلوبی داشته باشند، ورودی کنترل نهایی باید شامل ورودی‌های معادل زیر سیستم‌ها باشد. پس ورودی کنترل نهایی به صورت رابطه (۲۱) انتخاب می‌شود:

از معادله (۲۷) نتیجه می‌شود که با انتخاب مناسب ضرایب  $k$ ،  $\rho$ ،  $\alpha$  و  $\gamma$  مشتق تابع لیپانف کوچکتر از صفر می‌گردد؛ بنابراین سطح لغزش  $Q$  با گذشت زمان به سمت صفر همگرا می‌شود.

نکته ۳: معادله (۲۷) نشان می‌دهد که با انتخاب مناسب ضرایب  $k$ ،  $\rho$ ،  $\alpha$  و  $\gamma$ ، می‌توان سطح لغزش  $Q$  را به سمت صفر همگرا نمود؛ اما صفر شدن سطح لغزش  $Q$ ، لزوماً صفر شدن سطوح لغزش  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  را به دنبال ندارد؛ بنابراین صفر شدن سطح لغزش  $Q$ ، اثبات پایداری سیستم حلقه بسته را تضمین نمی‌نماید.

شود، آنگاه سطوح لغزش  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  به صورت مجانبی به سمت صفر همگرا شده و در نتیجه سیستم حلقه بسته دارای پایداری مجانبی سراسری می‌گردد.

اثبات: از دو طرف معادله (۲۷) نسبت به زمان انتگرال می‌گیریم:

$$\int_0^t \dot{V} dt = \int_0^t (-kQ^2 - \rho|Q| + |Q|(\alpha D_1 + \gamma D_2)) dt$$

$$V(t) - V(0) = \int_0^t (-(\rho - (\alpha D_1 + \gamma D_2))|Q| - kQ^2) dt \quad (28)$$

در ادامه از معادلات (۲۳) و (۲۸) داریم:

$$V(t) = \frac{1}{2} Q^2 = V(0) - \int_0^t ((\rho - (\alpha D_1 + \gamma D_2))|Q| + kQ^2) dt \leq V(0) < \infty \quad (29)$$

$$\sup_{t \geq 0} |\sigma_1| = \|\sigma_1\|_\infty < \infty, \quad \sup_{t \geq 0} |\dot{\sigma}_1| = \|\dot{\sigma}_1\|_\infty < \infty$$

$$\sup_{t \geq 0} |\sigma_2| = \|\sigma_2\|_\infty < \infty, \quad \sup_{t \geq 0} |\dot{\sigma}_2| = \|\dot{\sigma}_2\|_\infty < \infty \quad (33)$$

$$\sup_{t \geq 0} |Q| = \|Q\|_\infty < \infty \quad (30)$$

از معادله (۲۹) نتیجه می‌شود که  $Q \in L_\infty$  است. به عبارت دیگر:

از معادلات (۲۴)، (۲۷) و (۳۰) خواهیم داشت:

$$\dot{V} = Q\dot{Q} \leq -kQ^2 - \rho|Q| + |Q|(\alpha D_1 + \gamma D_2) < \infty \quad (31)$$

از معادله فوق نتیجه می‌شود که  $\dot{Q} \in L_\infty$  است. یعنی:

$$\sup_{t \geq 0} |\dot{Q}| = \|\dot{Q}\|_\infty < \infty \quad (32)$$

بنابراین از معادلات (۲۲)، (۳۰) و (۳۲) نتیجه می‌شود که:

با توجه به مطالب فوق، می‌دانیم که اگر  $\rho > (\alpha D_1 + \gamma D_2)$  باشد، آنگاه مقادیر  $\alpha$  و  $\gamma$  تاثیر مستقیمی بر پایداری سیستم ندارند. بنابراین دو سطح لغزش زیر معرفی می‌گردند:

$$Q_1 = (\alpha_1 \sigma_1 + \gamma \sigma_2), \quad Q_2 = (\alpha_2 \sigma_1 + \gamma \sigma_2) \quad (34)$$

که  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  ثابت‌های دلخواهی بوده و فرض بر آن است که  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ . پس  $Q_1 \neq Q_2$  است. همچنین فرض می‌شود که  $\int_0^\infty Q_1^2 dt > \int_0^\infty Q_2^2 dt \geq 0$  داریم:

$$0 \leq \int_0^\infty Q_1^2 dt = \int_0^\infty (\alpha_1^2 \sigma_1^2 + 2\alpha_1 \gamma \sigma_1 \sigma_2 + \gamma^2 \sigma_2^2) dt < \infty$$

$$0 \leq \int_0^\infty Q_2^2 dt = \int_0^\infty (\alpha_2^2 \sigma_1^2 + 2\alpha_2 \gamma \sigma_1 \sigma_2 + \gamma^2 \sigma_2^2) dt < \infty \quad (35)$$

پس:

$$0 < \int_0^\infty (Q_1^2 - Q_2^2) dt = \int_0^\infty ((\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \sigma_1^2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2) \gamma \sigma_1 \sigma_2) dt < \infty \quad (36)$$

در ادامه داریم:

$$= \int_0^\infty ((\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \sigma_1^2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2) \sigma_1 (Q_1 - \alpha_1 \sigma_1)) dt$$

$$= \int_0^\infty -(\alpha_1 - \alpha_2)^2 \sigma_1^2 dt + \int_0^\infty 2(\alpha_1 - \alpha_2) \sigma_1 Q_1 dt > 0 \quad (37)$$

از معادله (۲۹) نتیجه می‌شود:

$$\int_0^\infty ((\rho - (\alpha D_1 + \gamma D_2))|Q| + kQ^2) dt = \int_0^\infty (\rho - (\alpha D_1 + \gamma D_2))|Q| dt + \int_0^\infty kQ^2 dt \leq V(0) < \infty \quad (38)$$

است؛ اما کنترل پیشنهادی دارای معایبی است که به آنها اشاره شده است:

۱. بعلت وجود تابع ناپیوسته  $sign(*)$  در ورودی کنترل پیشنهادی، بروز پدیده نامطلوب لرزش ورودی کنترل امری اجتناب ناپذیر است. بروز این پدیده نامطلوب باعث تحریک شدن فرکانس تشدید گردیده و در نتیجه عمر محرکه‌های سیستم را کوتاه می‌نماید [۶-۹].

۲. به دلیل وجود ضرایب طراحی نظیر  $\alpha, \gamma, k$  و  $\rho$  در ورودی کنترل پیشنهادی، انتخاب این ضرایب به روش سعی و خطا انجام می‌شود. در صورتی که این ضرایب به درستی انتخاب نشوند، افزایش دامنه ورودی کنترل و در نتیجه اشباع محرکه‌ها بروز می‌نماید.

به دلایل فوق، در بخش بعدی مقاله سیستم فازی طراحی و به کنترل پیشنهادی اضافه می‌گردد که این مشکلات را برطرف نماید.

### ۵- طراحی کنترل مدلفزشی فازی برای سیستم فروتحریک

در طراحی این سیستم فازی، از فازی‌ساز تکین، غیرفازی‌ساز میانگین مراکز و موتور استنتاج ضرب ممدانی استفاده می‌شود. در موتور استنتاج این سیستم، بر اساس ورودی کنترل معادله (۴۲) از ۵ قاعده  $TS$  فازی (۴۳) استفاده شد:

$$R^1: \text{if } Q \text{ is NB then } u^1 = u_{eq1} + u_{eq2} + \frac{-1}{(\gamma\hat{b}_2 + \alpha\hat{b}_1)} [\gamma\hat{b}_2 u_{eq1} + \alpha\hat{b}_1 u_{eq2} + kQ - \rho]$$

$$R^2: \text{if } Q \text{ is NM then } u^2 = u_{eq1} + u_{eq2} + \frac{-1}{2(\gamma\hat{b}_2 + \alpha\hat{b}_1)} [\gamma\hat{b}_2 u_{eq1} + \alpha\hat{b}_1 u_{eq2} + kQ - \rho]$$

$$R^3: \text{if } Q \text{ is Z then } u^3 = u_{eq1} + u_{eq2}$$

$$R^4: \text{if } Q \text{ is PM then } u^4 = u_{eq1} + u_{eq2} + \frac{-1}{2(\gamma\hat{b}_2 + \alpha\hat{b}_1)} [\gamma\hat{b}_2 u_{eq1} + \alpha\hat{b}_1 u_{eq2} + kQ + \rho]$$

$$R^5: \text{if } Q \text{ is PB then } u^5 = u_{eq1} + u_{eq2} + \frac{-1}{(\gamma\hat{b}_2 + \alpha\hat{b}_1)} [\gamma\hat{b}_2 u_{eq1} + \alpha\hat{b}_1 u_{eq2} + kQ + \rho]$$

(۴۳)

از آنجا که  $\rho > (\alpha D_1 + \gamma D_2)$  و  $k > 0$  است، بنابراین  $\int_0^\infty (\rho - (\alpha D_1 + \gamma D_2)) |Q| dt \geq 0$  و  $\int_0^\infty k Q^2 dt \geq 0$  و چون جمع دو مقدار مثبت، یک مقدار محدود است، بنابراین هر کدام از این مقادیر مثبت نیز محدود خواهند بود. پس  $\|Q\|_1 < \infty$  ، یعنی  $Q \in L_1$  است. در ادامه از معادله (۳۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \sigma_1^2 dt \\ & < \int_0^\infty 2(\alpha_1 - \alpha_2) \sigma_1 Q_1 dt \\ & \leq 2 \int_0^\infty |(\alpha_1 - \alpha_2) \sigma_1 Q_1| dt \\ & \leq 2|\alpha_1 - \alpha_2| \int_0^\infty \|\sigma_1\|_\infty |Q_1| dt \\ & = 2|\alpha_1 - \alpha_2| \|\sigma_1\|_\infty \|Q_1\|_1 < \infty \end{aligned} \quad (39)$$

از معادله (۳۹) داریم:

$$\int_0^\infty \sigma_1^2 dt < \infty \quad (40)$$

به روش مشابه اثبات می‌شود که:

$$\int_0^\infty \sigma_2^2 dt < \infty \quad (41)$$

از معادلات (۴۰) و (۴۱) داریم که  $\sigma_1 \in L_2$  و  $\sigma_2 \in L_2$  است. از آنجا که  $\sigma_1 \in L_\infty$ ،  $\sigma_2 \in L_\infty$ ،  $\dot{\sigma}_1 \in L_\infty$  و  $\dot{\sigma}_2 \in L_\infty$  هستند، بنابراین بر اساس لم باربالت می‌توان نتیجه گرفت که  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_1 = 0$  و  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_2 = 0$  و قضیه اثبات می‌گردد [۲۹].

کنترل مدلفزشی پیشنهادی نهایی در زیر آمده است:

$$\begin{aligned} u &= u_{eq1} + u_{eq2} + u_s \\ u_{eq1} &= \frac{-\lambda_1 \dot{x}_1 - \hat{f}_1(X)}{\hat{b}_1(X)} \\ u_{eq2} &= \frac{-\lambda_2 \dot{x}_3 - \hat{f}_2(X)}{\hat{b}_2(X)} \\ u_s &= \frac{-1}{(\gamma\hat{b}_2 + \alpha\hat{b}_1)} \\ & \quad [\gamma\hat{b}_2 u_{eq1} + \alpha\hat{b}_1 u_{eq2} + kQ + \rho \text{sign}(Q)] \end{aligned} \quad (42)$$

اگرچه سیستم حلقه بسته با کنترل پیشنهادی در حضور عدم قطعیت‌های موجود، دارای پایداری مجانبی سراسری



سیستم دوم، با صفر شدن  $\sigma_2$ ، متغیرهای حالت  $(x_3, x_4)$  به سمت صفر همگرا خواهند گردید.

۲. در طراحی کنترل پیشنهادی، بر اساس ورودی کنترل معادله (۴۲) قواعد فازی به گونه‌ای طراحی گردیده‌اند که دامنه ورودی کنترل تا جائیکه امکان دارد، کاهش پیدا نموده و علاوه بر آن اثبات پایداری سیستم حلقه بسته نیز تضمین شود. برای نیل به این اهداف، قواعد فازی ۲، ۳ و ۴ به گونه‌ای طراحی شده‌اند که اگر سطح لغزش  $Q$  صفر باشد، بخش سوچینگ ورودی کنترل یعنی  $u_s$  برابر صفر می‌شود. از طرف دیگر در صورتی که سطح لغزش  $Q$  منفی متوسط یا مثبت متوسط باشد، مطابق قواعد فازی ۲ و ۴ بخش  $u_s$  نصف مقدار واقعی آن می‌شود. به همین دلیل این قواعد باعث کاهش دامنه ورودی کنترل می‌شوند. از طرف دیگر، برای برقراری پایداری مجانبی سراسری سیستم حلقه بسته، قواعد فازی ۱ و ۵ طراحی شده‌اند. مطابق این قواعد فازی در صورتی که سطح لغزش  $Q$  منفی بزرگ یا مثبت بزرگ باشد، آنگاه ورودی کنترل مطابق معادله (۴۲) خواهد بود؛ بنابراین قضیه بخش ۴ مقاله برقرار می‌شود و در این صورت سیستم حلقه بسته در حضور عدم قطعیت‌های موجود، دارای پایداری مجانبی سراسری می‌شود.

که در قواعد فازی فوق، منظور از متغیرهای زبانی  $NB, NM, Z, PM$  و  $PB$  به ترتیب منفی بزرگ، منفی متوسط، صفر، مثبت متوسط و مثبت بزرگ است. توابع عضویت ورودی  $Q$  در شکل ۱ آمده است.

با توجه به قواعد فازی (۴۳) و به دلیل استفاده از موتور استنتاج ضرب ممدانی، نتیجه می‌شود که خروجی هر کدام از قواعد فازی به صورت رابطه (۴۴) است:

$$\mu_{f_Q^i}(Q^*) \cdot u^i, \quad i = 1, 2, \dots, 5 \quad (44)$$

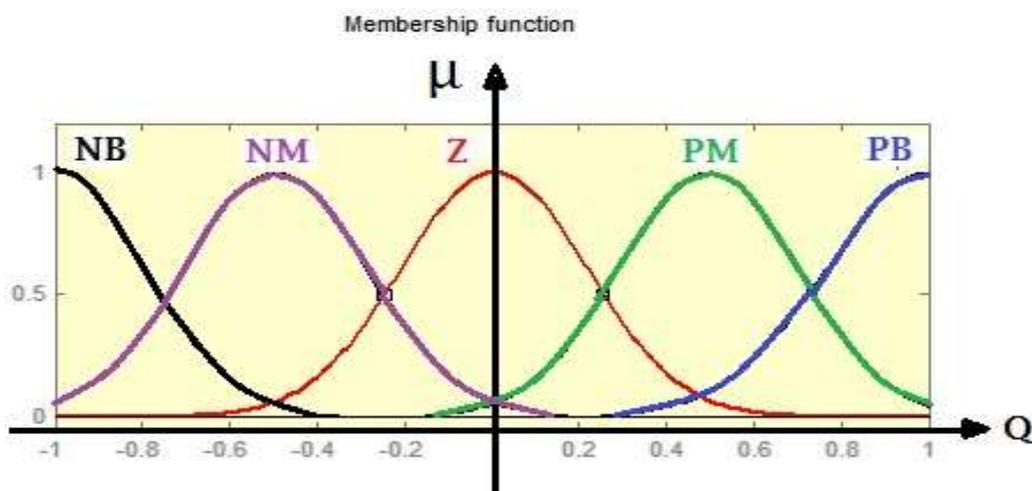
$\mu_{f_Q^i}(Q^*)$  شدت آتش و  $u^i$  خروجی قاعده  $i$  ام هستند. از آنجاکه که در طراحی سیستم فازی از غیرفازی‌ساز میانگین مراکز استفاده شده است، خروجی سیستم فازی به صورت رابطه (۴۵) است:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^5 \mu_{f_Q^i}(Q^*) \cdot u^i}{\sum_{i=1}^5 \mu_{f_Q^i}(Q^*)} \quad (45)$$

#### ۵-۱- ویژگی‌های کنترل مدلغزشی فازی پیشنهادی

در طراحی کنترل پیشنهادی، نکات و نوآوری‌هایی نهفته است که در زیر به طور مختصر به آن اشاره شده است:

۱. در طراحی کنترل پیشنهادی، سیستم کلی به دو زیر سیستم تجزیه می‌شود. در زیر سیستم اول با همگرا شدن سطح لغزش  $\sigma_1$  به سمت صفر، متغیرهای حالت  $(x_1, x_2)$  صفر می‌شوند و در زیر



شکل ۱- توابع عضویت ورودی Q

۳. سطح لغزش  $Q$ ، مطابق معادله (۲۲) بر حسب سطوح لغزش  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  تعیین می‌شود.
۴. بر اساس اطلاعاتی که از سیستم تحت کنترل در دسترس وجود دارد، دینامیک‌های معلوم زیر سیستم‌های اول و دوم را مشخص می‌کنیم.
۵. ورودی‌های معادل  $u_{eq1}$ ،  $u_{eq2}$  و ورودی بخش  $u_s$  مطابق معادلات (۱۹)، (۲۰) و (۲۶) و با توجه به معادلات دینامیکی معلوم زیر سیستم‌های اول و دوم مشخص می‌شوند.
۶. کنترل‌کننده مدل‌غزشی فازی پیشنهادی را بر اساس معادلات (۴۳) و (۴۵) تعیین می‌نمائیم.

#### ۶- مطالعه موردی

در این بخش از مقاله برای بررسی عملکرد کنترل پیشنهادی، از سیستم فرو تحریک گاری به همراه پاندول معکوس نشان داده در شکل ۲ استفاده شده است. مطابق شکل، گاری با جرم  $M$  توسط نیروی  $f$  می‌تواند روی ریل و در راستای  $x$  حرکت نماید. در انتهای میله، گویی به جرم  $m$  وجود دارد. برای ساده‌سازی سیستم، فرضیات زیر لحاظ شده است [۱۶]:

- جرم میله به همراه جرم گوی برابر با  $m$  در نظر گرفته شده است.
- از نیروی اصطکاک موجود در مفصل صرف‌نظر شده است.
- از کشیدگی تسمه‌ای که در سیستم استفاده شده است، صرف‌نظر نموده‌ایم.
- گاری فقط در راستای  $x$  حرکت می‌کند.
- گوی یا به عبارتی بار همیشه در راستای  $xy$  - حرکت می‌نماید.

از شکل ۲ مشخص است که  $x_m = x + L\sin(\theta)$  و  $y_m = -L\cos(\theta)$  است که  $L$  و  $\theta$  به ترتیب طول و زاویه پاندول هستند. با استفاده از روش لاگرانژ، معادلات دینامیکی زیر به دست می‌آیند [۱۶]:

$$\begin{cases} (m + M)\ddot{x} + mL(\ddot{\theta} \cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \sin(\theta)) = f \\ \ddot{x} \cos(\theta) + L\ddot{\theta} + g\sin(\theta) = 0 \end{cases} \quad (46)$$

۳. ورودی کنترل مدل‌غزشی فازی پیشنهادی، فاقد پدیده نامطلوب لرزش در ورودی کنترل است؛ بنابراین پیاده‌سازی عملی این کنترل‌کننده، امری امکان‌پذیر خواهد بود [۳۰-۳۱].
۴. در طراحی کنترل پیشنهادی، تنها از ۵ قاعده فازی استفاده شده است؛ بنابراین حجم محاسبات کنترل پیشنهادی بسیار پائین بوده و هزینه اقتصادی پیاده‌سازی عملی آنرا کاهش می‌دهد.
۵. بسیاری از کنترل‌کننده‌های مدل‌غزشی فازی، فاقد اثبات پایداری سیستم حلقه بسته هستند؛ در حالیکه در کنترل پیشنهادی، با جدا شدن سطح لغزش  $Q$  از مقدار صفر و زیاد شدن آن، بلافاصله قضیه بخش ۴ برقرار شده و سطح لغزش  $Q$  به سمت صفر همگرا می‌شود.
۶. در کنترل پیشنهادی می‌توان با قرار دادن ضریب مقیاس‌کننده در ورودی سیستم فازی، به راحتی توابع عضویت موجود در قواعد فازی را به گونه‌ای تغییر داد تا سطح لغزش  $Q$  سریعتر به سمت صفر همگرا شود.
۷. در صورتی که سیستم مکانیکی فرو تحریک دارای درجه بالاتری باشد، می‌توان سیستم کلی را به زیر سیستم‌های متعددی تجزیه نمود و با تعمیم روش طراحی کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی، کنترل هر کدام از این زیر سیستم‌ها را تضمین و در نهایت پایداری سیستم حلقه بسته را مهیا نمود.

#### ۵-۲- نحوه پیاده‌سازی کنترل مدل‌غزشی فازی پیشنهادی

برای پیاده‌سازی کنترل پیشنهادی، به ترتیب زیر عمل می‌شود:

۱. سیستم تحت کنترل فرو تحریک را به دو زیر سیستم اول و دوم تقسیم می‌نمائیم.
۲. سطح لغزش  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  را مطابق معادلات (۱۷) و (۱۸)، بر حسب متغیرهای حالت زیر سیستم‌های اول و دوم تعیین می‌گردند.

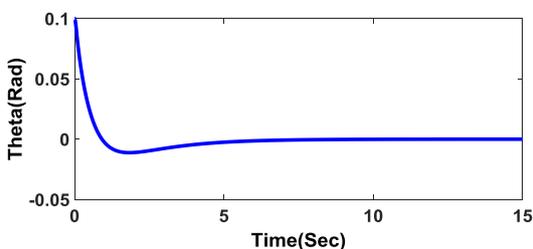
نموده است. در شکل ۴ می‌بینیم که  $x$  از مقدار اولیه صفر شروع و به مقدار ۱ رسیده است. در شکل ۵ می‌بینیم که کنترل مدلفزشی به درستی عمل نموده و تمامی سطوح لغزش را به سمت صفر همگرا نموده است. اگرچه مطابق شکل‌های ۳، ۴ و ۵ کنترل‌کننده دارای عملکرد بسیار مطلوبی است، اما در شکل ۶ مشاهده می‌گردد که ورودی کنترل‌کننده دارای لرزش ورودی شدیدی است که این امر پیاده‌سازی عملی آنرا با مشکل مواجه می‌سازد.

جدول ۱- پارامترهای سیستم

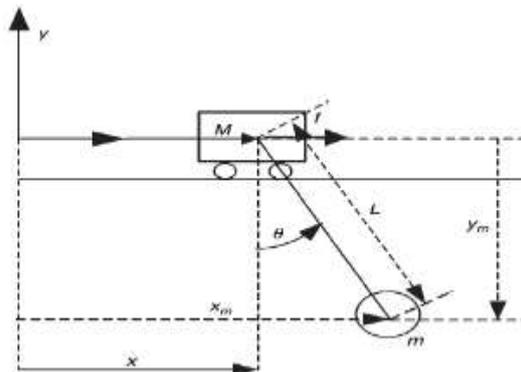
پارامتر	مقدار
جرم گازی $M$	1 kg
جرم گوی و میله $m$	0.8 kg
طول میله $L$	0.305 m
شتاب جاذبه $g$	9.8 m/s <sup>2</sup>

جدول ۲- ضرایب کنترل‌کننده مدلفزشی

ضرایب	مقدار
$c_1$	5
$c_2$	0.43
$\alpha$	4
$\gamma$	4
$k$	22
$\rho$	5



شکل ۳- کنترل متغیر  $\theta$  با استفاده از کنترل مدلفزشی



شکل ۲- سیستم فرو تحریک گاری به همراه پاندول معکوس

که  $g$  شتاب جاذبه زمین است. اگر معادله فوق را به شکل معادله‌ی (۱۶)، تغییر دهیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$f_1 = \frac{mL\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + mg\sin(\theta) \cos(\theta)}{M + m\sin^2(\theta)}$$

$$f_2 = -\frac{(m + M)g\sin(\theta) + mL\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{(M + m\sin^2(\theta))L}$$

$$b_2 = -\frac{\cos(\theta)}{(M + m\sin^2(\theta))L} \quad (47)$$

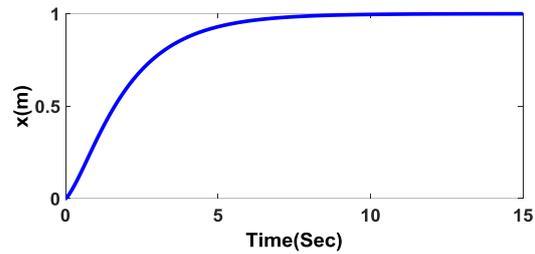
در این بخش برای بیان عملکرد کنترل پیشنهادی، شبیه‌سازی‌هایی در ۴ مرحله ارائه می‌شود. کلیه شبیه‌سازی‌ها در محیط سیمولینک نرم‌افزار متلب ۲۰۱۷ و با روش عددی ode45 انجام شده است.

**مرحله اول شبیه‌سازی:** در این بخش کنترل مدلفزشی

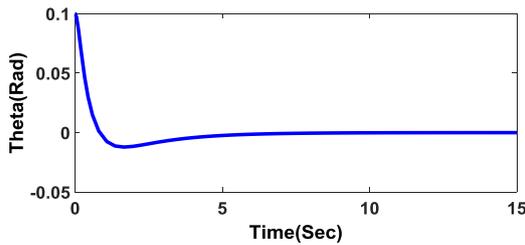
معادله (۴۲)، به سیستم گاری به همراه پاندول معکوس اعمال گردید. پارامترهای سیستم و ضرایب کنترل‌کننده به ترتیب در جداول ۱ و ۲ ارائه شده‌اند. شرایط اولیه سیستم به صورت  $(\theta, \dot{\theta}) = (0.1, 0)$  و  $(x, \dot{x}) = (0, 0)$  و مقادیر مطلوب برابر با  $(\theta_d, \dot{\theta}_d) = (0, 0)$  و  $(x_d, \dot{x}_d) = (1, 0)$  تنظیم گردیده‌اند.

برای اعمال عدم قطعیت‌های پارامتری، فرض شد که پارامترهایی از سیستم که در طراحی کنترل‌کننده بکار رفته‌اند، ۸۵ درصد مقدار واقعی هستند. برای اعمال اغتشاش خارجی یا دینامیک مدل نشده از  $d_1(t) = d_2(t) = 0.08\sin(0.2t)$  استفاده گردید. پس از اجرای شبیه‌سازی، از شکل ۳ نتیجه می‌شود که کنترل‌کننده به خوبی عمل نموده و در حضور عدم قطعیت‌های موجود، زاویه  $\theta$  را از شرایط اولیه به سمت مقدار مطلوب صفر همگرا

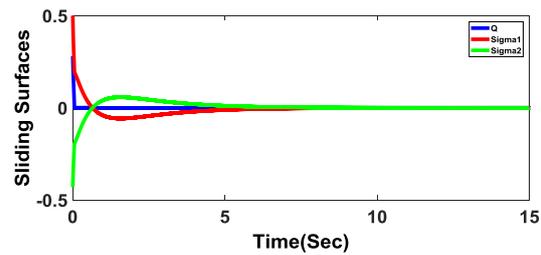
کنترل مدلغزشی فازی به صورت نرمتری اتفاق افتاده است. همین امر باعث شده است که در شکل ۱۰، شاهد بروز ورودی کنترل بسیار نرم با دامنه‌ای بسیار کم باشیم. پس کنترل مدلغزشی فازی به خوبی عمل نموده و توانسته است که تمامی مزایای مطلوب کنترل مدلغزشی را حفظ نموده و از بروز لرزش در ورودی کنترل نیز جلوگیری نماید.



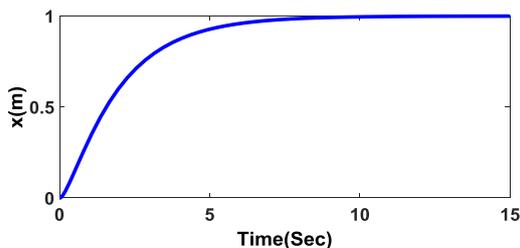
شکل ۴- کنترل متغیر  $x$  با استفاده از کنترل مدلغزشی



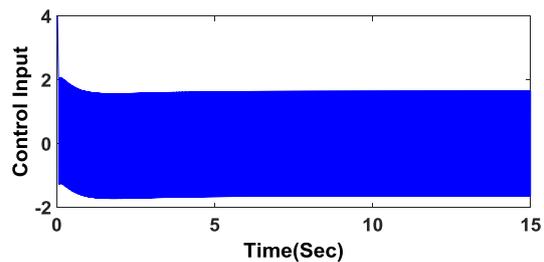
شکل ۷- کنترل متغیر  $\theta$  با استفاده از کنترل مدلغزشی فازی



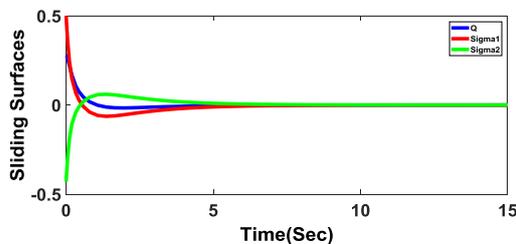
شکل ۵- رفتار سطوح لغزش  $\sigma$ ،  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  با اعمال کنترل مدلغزشی



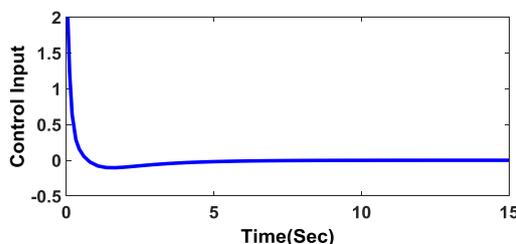
شکل ۸- کنترل متغیر  $x$  با استفاده از کنترل مدلغزشی فازی



شکل ۶- ورودی کنترل مدلغزشی

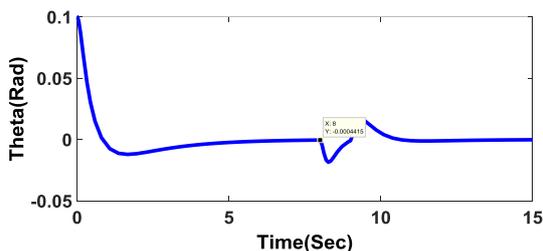


شکل ۹- رفتار سطوح لغزش  $\sigma$ ،  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  با اعمال کنترل مدلغزشی فازی

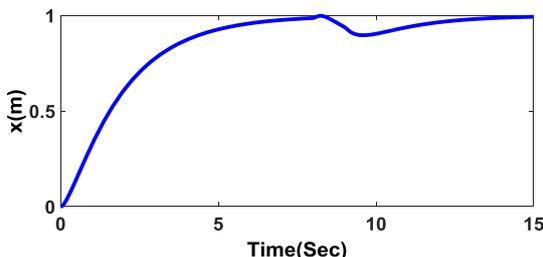


شکل ۱۰- ورودی کنترل مدلغزشی فازی

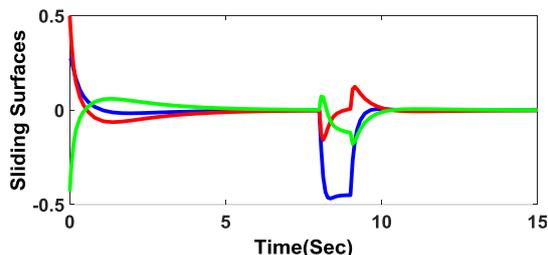
مرحله دوم شبیه‌سازی: در این بخش از شبیه‌سازی، کنترل مدلغزشی فازی پیشنهادی به سیستم گاری به همراه پاندول معکوس اعمال گردید. شرایط حاکم بر این مرحله از شبیه‌سازی، کاملاً مطابق با شبیه‌سازی مرحله اول است. به عبارت دیگر، سیستم تحت کنترل علاوه بر عدم قطعیت‌های ساختاری، دارای عدم قطعیت غیرساختاری نیز است. پس از اعمال کنترل پیشنهادی، از شکل‌های ۷ و ۸ نتیجه می‌شود که کنترل مدلغزشی فازی دارای عملکرد مطلوبی بوده و متغیرهای  $x$  و  $\theta$  را به سمت مقادیر مطلوب خود که به ترتیب ۱ و ۰ هستند، همگرا نموده است. در شکل ۹ می‌بینیم که تمامی سطوح لغزش به نرمی به سمت ۰ همگرا شده‌اند. با مقایسه شکل‌های ۵ و ۹ نتیجه می‌گیریم که تفاوت عملکرد کنترل‌کننده‌های مدلغزشی و مدلغزشی فازی، در نحوه صفر شدن سطح لغزش  $Q$  است. همگرایی سطح لغزش  $Q$  توسط



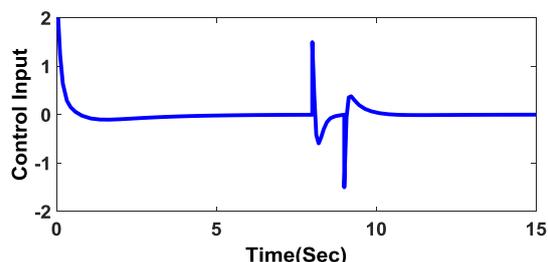
شکل ۱۱- کنترل متغیر  $\theta$  با استفاده از کنترل مدلزشی فازی و در حضور پالس خارجی



شکل ۱۲- کنترل متغیر  $x$  با استفاده از کنترل مدلزشی فازی در حضور پالس خارجی



شکل ۱۳- رفتار سطوح لغزش  $\sigma$ ،  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  با اعمال کنترل مدلزشی فازی در حضور پالس خارجی

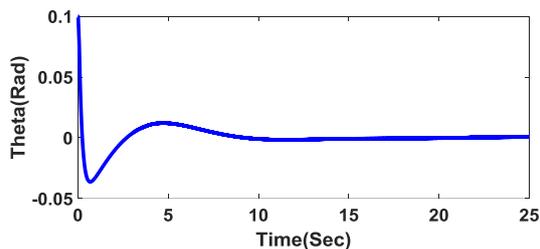


شکل ۱۴- ورودی کنترل مدلزشی فازی در حضور پالس خارجی

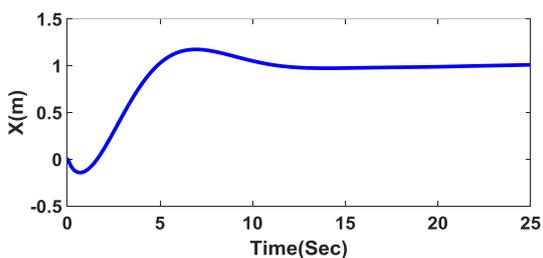
مرحله چهارم شبیه‌سازی: در این مرحله از شبیه‌سازی، کنترل‌کننده مدلزشی [۱۰]، به سیستم گاری به

مرحله سوم شبیه‌سازی: در این مرحله از شبیه‌سازی، با ایجاد چالش بیشتری برای کنترل مدلزشی فازی، عملکرد آنرا مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این بخش، علاوه بر عدم قطعیت‌های موجود در مرحله دوم شبیه‌سازی، در ثانیه ۸ تا ۹ از زمان شبیه‌سازی، پالسی (تلنگری) با دامنه ۱/۵ نیوتن به پاندول معکوس وارد می‌شود. در ادامه عملکرد کنترل‌کننده پیشنهادی در مواجهه با این چالش جدید، مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که شرایط حاکم بر شبیه‌سازی مطابق شبیه‌سازی‌های مرحله اول و دوم است. پس از اجرای شبیه‌سازی، از شکل‌های ۱۱ و ۱۲ نتیجه می‌شود که در حضور پالسی با دامنه ۱/۵ نیز، کنترل‌کننده مدلزشی فازی به خوبی عمل نموده و با عکس‌العملی به موقع تاثیر این پالس را از بین می‌برد و متغیرهای  $\theta$  و  $x$  را به سمت مقادیر مطلوب خود همگرا می‌نماید. مطابق شکل ۱۳، سطوح لغزش در حضور پالس خارجی دچار نوسان گردیده‌اند، اما این نوسانات با عملکرد مطلوب کنترل پیشنهادی بلافاصله به سمت صفر همگرا شده‌اند. در شکل ۱۴، دامنه ورودی کنترل پیشنهادی نشان داده شده است. در این شکل می‌بینیم که پالس خارجی نتوانسته است که چالش قابل ملاحظه‌ای را برای کنترل مدلزشی فازی ایجاد نماید. لازم به ذکر است که دامنه ورودی در حضور پالس خارجی تغییر قابل ملاحظه‌ای نداشته است؛ بنابراین دامنه ورودی کنترل پیشنهادی، محرکه سیستم گاری به همراه پاندول معکوس را به حالت اشباع نخواهد برد.

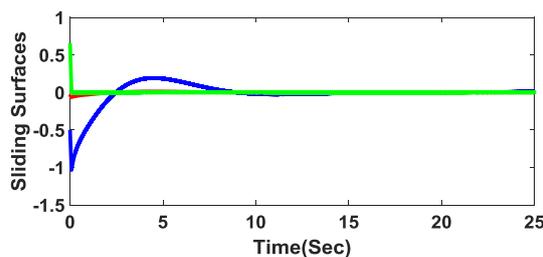
نکته ۴: در بسیاری از روش‌های کنترلی، برای بهبود عملکرد کنترل‌کننده در حضور عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری، لازم است که ضرایب ورودی کنترل را تغییر دهیم. در بسیاری از موارد که کنترل‌کننده با چالش جدیدی روبرو می‌گردد، لازم است که تنظیمات مجددی در ضرایب ورودی کنترل انجام شود؛ اما در کنترل مدلزشی فازی پیشنهادی، در مرحله طراحی، ضرایب آن تنظیم می‌گردد و پس از آن و در مواجهه با چالش‌های موجود، نیازی به تنظیم مجدد ضرایب ورودی کنترل نیست. این امر در شبیه‌سازی مرحله دوم و سوم به خوبی نمایش داده شده است. ضرایب کنترل پیشنهادی در هر دو مرحله از شبیه‌سازی مطابق جدول ۲ است.



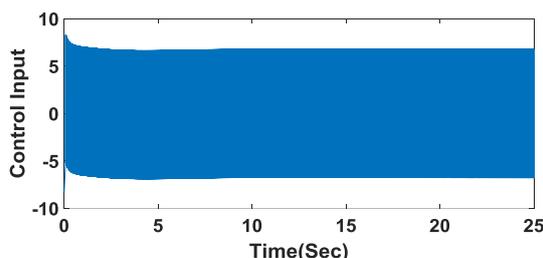
شکل ۱۵- کنترل متغیر  $\theta$  با استفاده از کنترل مدلغزشی [۱۰]



شکل ۱۶- کنترل متغیر  $x$  با استفاده از کنترل مدلغزشی [۱۰]



شکل ۱۷- رفتار سطوح لغزش با اعمال کنترل مدلغزشی [۱۰]



شکل ۱۸- ورودی کنترل مدلغزشی [۱۰]

در این روش در ابتدا سیستم را به دو زیر سیستم تقسیم نموده و در ادامه کنترل معادل را برای هرکدام از این زیر سیستم‌ها به دست آوردیم. سپس سطح لغزش سیستم حلقه بسته را که ترکیب خطی از سطوح لغزش زیر سیستم‌ها است را تعریف نموده و کنترل مدلغزشی به گونه‌ای طراحی گردید تا این سطح لغزش را به سمت صفر همگرا نماید. در ادامه

همراه پاندول معکوس اعمال می‌شود. شرایط حاکم بر این بخش از شبیه‌سازی، عینا مطابق مراحل اول و دوم شبیه‌سازی است؛ بنابراین می‌توان عملکرد این کنترل‌کننده را در غلبه بر عدم قطعیت‌های موجود، با عملکرد کنترل پیشنهادی مقایسه نمود. ضرایب این کنترل‌کننده مطابق با جدول ۳ تنظیم گردید.

پس از اجرای شبیه‌سازی، در شکل ۱۵ مشاهده می‌شود که این کنترل‌کننده به خوبی عمل نموده و توانسته است، متغیر  $\theta$  را در حضور عدم قطعیت‌های موجود به سمت صفر همگرا نماید؛ اما با مقایسه شکل‌های ۷ و ۱۵ نتیجه می‌شود که زمان همگرایی این متغیر، تقریباً دو برابر عملکرد کنترل پیشنهادی است. با مقایسه شکل‌های ۸ و ۱۶ می‌بینیم که متغیر  $x$  در زمانی برابر با ۱۰ ثانیه از طریق کنترل پیشنهادی به مقدار مطلوب خود رسیده است، اما عملکرد کنترل‌کننده مدلغزشی [۱۰] این زمان را به ۱۸ ثانیه افزایش داده است. در شکل ۱۷ مشاهده می‌شود که تمامی سطوح لغزش به سمت صفر همگرا شده‌اند؛ اما از شکل ۱۸ نتیجه می‌شود که این همگرایی سطوح لغزش، با بروز لرزش شدید در ورودی کنترل و افزایش بسیار زیاد دامنه آن همراه است؛ بنابراین با مقایسه نتایج شبیه‌سازی‌های مرحله دوم و چهارم نتیجه می‌شود که کنترل پیشنهادی نه تنها زمان همگرایی متغیرهای حالت را بسیار کوتاه نموده، بلکه لرزش در ورودی کنترل را حذف و دامنه آنرا نیز کوچک نموده است.

#### ۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک کنترل‌کننده مدلغزشی فازی برای کنترل دسته خاصی از سیستم‌های مکانیکی فروتحریک ارائه گردید.

جدول ۳- ضرایب کنترل‌کننده مدلغزشی [۱۰]

ضرایب	مقدار
$\lambda_1$	5
$\lambda_2$	0.5
$k_1$	6
$\Phi_1$	5
$\Phi_2$	15
$Z_u$	0.94

- [9] Veysi M, Soltanpour MR (2016) Voltage-base control of robot manipulator using adaptive fuzzy sliding mode control. *Int J Fuzzy Syst* 10(1): 1-14.
- [10] Yorgancioglu F, Komurcugil H (2010) Decoupled-sliding mode controller based on time-varying sliding surfaces for fourth-order systems. *Expert Syst Appl* 37(10): 6764-6774.
- [11] Zhao G, Zhao C, Cheng J (2014) Decoupled Terminal sliding- mode control for a class of under-actuated mechanical systems with hybrid sliding surfaces. *Int J Innov Comput I* 10(6): 2011-2023.
- [12] Bayramoglu H, Komurcugil H (2013) Nonsingular decoupled terminal sliding-mode control for a class of fourth-order nonlinear systems. *Commun Nonlinear Sci* 18(5): 2527-2539.
- [13] Din SU, Khan Q, Rehman FU, Akmeliawati R (2016) Robust control of underactuated systems: Higher order integral sliding mode approach. *Math Probl Eng* 8(2): 12-21.
- [14] Shah I, Rehman FU (2017) Smooth higher-order sliding mode control of a class of underactuated mechanical systems. *Arab J Sci Eng* 42(12): 5147-5164.
- [15] Din SU, Khan Q, Rehmani FU, Akmeliawati R (2017) A comparative experimental study of robust sliding mode control strategies for underactuated systems. Accepted for publication in IEEE Access.
- [16] Lo JC, Kuo YH (1998) Decoupled fuzzy sliding-mode control. *IEEE T Fuzzy Syst* 6(3): 426-435.
- [17] Marton L, Hodel AS, Lantos B, Hung JY (2008) Underactuated robot control: Comparing LQR, subspace stabilization, and combined error metric approaches. *IEEE T Ind Electron* 55(10): 3724-3730.
- [18] Park MS, Chwa D, Hong SK (2006) Decoupling control of a class of underactuated mechanical systems based on sliding mode control. *Proc Si Ce Korea* 806-810.
- [19] Lin CM, Mon YJ, (2005) Decoupling control by hierarchical fuzzy sliding-mode controller. *IEEE T Contr Syst T* 13(4): 593-598.
- [20] Shin SY, Lee JY, Sugisaka M, Lee JJ (2010) Decoupled fuzzy adaptive sliding mode control for underactuated systems with mismatched uncertainties. *Proc IEEE Int Conf Info Auto China* 599-604.
- [21] Hung LC, Chung HY (2007) Decoupled sliding-mode with fuzzy-neural network controller for nonlinear systems. *Int J Approx Reason* 46(1): 74-97.
- [22] Lin CM, Mon YJ (2005) Decoupling control by hierarchical fuzzy sliding-mode controller. *IEEE T Contr Syst T* 13(4): 593-598.
- [23] Wang W, Liu XD, Yi JQ (2007) Structure design of two types of sliding-mode controllers for a class of under-actuated mechanical systems. *IET Control Theory A* 1(1): 163-172.
- [24] Sankaranarayanan V, Mahindrakar AD (2009) Control of a class of underactuated mechanical

اثبات شد که کنترل مدلغزشی پیشنهادی، سطوح لغزش زیر سیستم‌ها را نیز به سمت صفر همگرا می‌نماید؛ بنابراین سیستم حلقه بسته با کنترل پیشنهادی و در حضور عدم-قطعیت‌های موجود، دارای پایداری مجانبی سراسری است. سپس به دلیل مشکلات موجود در پیاده‌سازی عملی کنترل پیشنهادی، سیستم فازی طراحی و به کنترل پیشنهادی اضافه گردید. در طراحی کنترل مدلغزشی فازی، تلاش گردید تا پایداری سیستم حلقه بسته تضعیف نشده و از حجم محاسبات بسیار پائینی برخوردار باشد. از طرف دیگر، طراحی قواعد فازی کنترل پیشنهادی به گونه‌ای انجام شد تا دامنه ورودی کنترل را کاهش دهد. سپس برای نمایش عملکرد کنترل پیشنهادی، شبیه‌سازی‌هایی در ۴ مرحله روی سیستم فروتحریک گاری به همراه پاندول معکوس ارائه گردید. طراحی مراحل شبیه‌سازی‌ها به گونه‌ای انجام گرفت که مرحله به مرحله کنترل پیشنهادی با چالش‌های بیشتری مواجه شود. نتایج شبیه‌سازی‌ها، عملکرد مطلوب کنترل پیشنهادی را نمایش می‌دهد.

#### ۸- مراجع

- [1] Bloch AM, Reyhanoglu M, Mcclamroch NH (1992) Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems. *IEEE T Automat Contr* 37(3): 1746-1757.
- [2] Astolfi A (1996) Discontinuous control of nonholonomic system. *Systems Control Lett* 27(5): 37-45.
- [3] Spong MW (1998) Control problems in robotics and automation. 1st edn. Springer- Verlag, London.
- [4] Fantoni I, Lozano R (2001) Nonlinear control for underactuated mechanical systems. 1st edn. Springer-Verlag, London.
- [5] Olfati RS (2002) Normal forms for underactuated mechanical systems with symmetry. *IEEE T Automat Contr* 47(2): 305-308.
- [6] Khooban MH, Soltanpour MR (2013) Swarm optimization tuned fuzzy sliding mode control design for a class of nonlinear systems in presence of uncertainties. *J Intell Fuzzy Syst* 24(2): 383-394.
- [7] Soltanpour MR, Zolfaghari B, Soltani M, Khooban MH (2013) fuzzy sliding mode control design for a class of nonlinear systems with structured and unstructured uncertainties. *Int J Innov Comput I* 9(7): 2713-2726.
- [8] Soltanpour MR, Khooban MH, Khalghani MR (2014) An optimal and intelligent control strategy for a class of nonlinear systems: Adaptive fuzzy sliding mode. *J Vib Control* 22 (1): 159-175.

- Intelligence book series (SCI, volume 635): 351-367.
- [28] Hao YX, Yi JQ, Zhao DB, Qian DW (2007) Incremental sliding mode controller for large-scale underactuated system. Proc IEEE Int C Netw Sens, London, UK 87-92.
- [29] Khalil HK (2002) Nonlinear systems. 3rd edn. Prentice Hall, London.
- [30] Soltanpour MR, Siah M (2009) Robust control of robot manipulator in task space. Appl Comput Math 8 (2): 227-238.
- [31] Soltanpour MR, Shafiei SE (2010) Robust adaptive control of manipulators in the task space by dynamical partitioning approach. Elektronika 101(5): 73-78.
- systems using sliding modes. IEEE T Robot 25(2): 459-467.
- [25] Su SF, Hsueh YC, Tseng CP, Chen SS, Lin YS (2015) Direct adaptive fuzzy sliding mode control for Under-actuated Uncertain Systems. Int J Fuzzy Log 15(4): 240-250.
- [26] Baklouti F, Aloui S, Chaari A (2016) Adaptive fuzzy sliding mode tracking control of uncertain underactuated nonlinear systems: a comparative study. J Cont Sci Eng 3(13): 110-122.
- [27] Moussaoui S, Boulkroune A, Vaidyanathan S (2016) Fuzzy adaptive sliding-mode control scheme for uncertain underactuated systems. Advances and Applications in Nonlinear Control Systems, Part of the Studies in Computational