



## آنالیز حساسیت روش‌های آنالیز مودال کارکردی در شناسایی میرایی و پیاده سازی بر روی یک نمونه صنعتی

محمد احمدی بلوطکی<sup>۱</sup>، ابوالفضل غلامزاده<sup>۱,۲\*</sup> و مهدی صالحی<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup> گروه مهندسی مکانیک، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران

<sup>۲</sup> گروه مهندسی مواد، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۱/۰۳؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۰۴/۱۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۷/۰۱

### چکیده

اندازه‌گیری نیروی‌های تحریک تصادفی سازه‌های در حین حمل و نقل تحت تحریک‌های جاده‌ای و یا ماهواره‌برهای پرتاب شده تحت تحریک‌های محیطی جهت شناسایی پارامترهای مودال، امری غیرممکن است، از این رو در این پژوهش چالش و هدف ما تعیین خواص مودال سازه‌ها بدون داشتن نیروی تحریک ورودی و تنها با داشتن پاسخ‌ها است. در پژوهش‌هایی که تاکنون در زمینه آنالیز مودال صورت گرفته، توجه کمتری به مقایسه روش‌های حوزه زمان و فرکانس به خصوص در تعیین میرایی شده است؛ همچنین تاکنون آنالیز حساسیتی بین تحریک‌های مختلف نویز سفید، جاروب سینوسی و بررسی تاثیر این تحریک‌ها بر روش‌های حوزه زمان و فرکانس آنالیز مودال کارکردی صورت نگرفته است. ابتدا این روش‌ها روی یک مدل گسسته پنج درجه آزادی (جرم، فنر و دمپر) پیاده‌سازی و صحت‌سنجی شده است و در نهایت روی یک سازه واقعی پیاده‌سازی صنعتی شده است. این پژوهش نشان می‌دهد که این روش‌های تجزیه قادر به استخراج پارامترهای مودال موده‌ای ابتدایی یک نمونه واقعی هستند. در پایان مقایسه‌ای بین نتایج به دست آمده صورت گرفته و کارایی هر یک از روش‌ها، مورد ارزیابی قرار گرفته است.

**کلمات کلیدی:** آنالیز مودال کارکردی؛ میرایی؛ حوزه زمان؛ شناسایی؛ حوزه فرکانس؛ آنالیز حساسیت.

## Sensitivity Analysis of Operational Modal Approaches in Damping Identification and Implementaion on an Industrial Sample

M.Ahmadi Balootaki<sup>1</sup>, A. Gholamzadeh<sup>1,2,\*</sup>, M. Salehi<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Department of Mechanical Engineering, Najafabad Branch., Islamic Azad University, Najafabad, Iran.

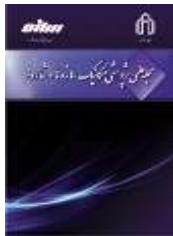
<sup>2</sup> Department of Materials Engineering, Sharif University, Tehran, Iran.

### Abstract

It is impossible to measure the random excitation loads of structures during transportation under road excitations or satellite carriers thrown under environmental excitations in order to identify modal parameters; thus in this research, our challenge and purpose is to determine the modal properties of structures without having the input excitation load and, but only by having the response. In the studies have been performed so far in the field of modal analysis, less attention has been paid to comparing time and frequency methods, especially in the determination of damping. In addition, no sensitivity analysis between different excitations of white noise, sinusoidal sweep and the effect of these excitations on time and frequency domain methods of modal functional analysis have been performed so far. At first, these methods are implemented and validated on a 5-DOF discrete model (mass, spring, and damper), and finally they are industrially implemented on an actual structure. This paper shows that the decomposition methods are capable to extract the modal parameters of the primary modes of an actual sample. At the end, a comparison is made between the results and the effectiveness of each method is evaluated.

**Keywords:** Operational Modal Analysis; Damping; Time Domain; Identification; Frequency Domain; Sensitivity Analysis.





## ۱- مقدمه

بکارگیری روش‌های شناسایی مدل: نظیر انتخاب قله، کمترین مربعات، [۳] برازش دایره‌ای، معکوس [۴، ۵]، بندنت [۶]، چند جمله‌ای کسری حسابی [۷]، چندجمله‌ای کسری کلی، یکپارچه [۶، ۸] و طیفی [۹] به استخراج خصوصیات ارتعاشی سازه می‌پردازند. در بسیاری از سازه‌های بزرگ و پیچیده امکان استفاده از آنالیز مودال کلاسیک برای بدست آوردن پارامترهای مودال وجود ندارد؛ زیرا از یک سو برای تحریک سازه‌های بزرگ، نیروی زیادی باید بکار گرفته شود تا تمامی موده‌های سازه در محدوده فرکانسی مد نظر تحریک گردد و از سوی دیگر، بکارگیری چنین نیروی بزرگی، موجب خرابی محلی سازه و نیز بروز رفتار غیرخطی می‌شود [۱۰]؛ همچنین بسیاری از سازه‌ها در نتیجه نیروهای حاصل از عملکرد خود بطور موثر و مناسبی تحریک می‌شوند که امکان اندازه‌گیری این نیروها غیر ممکن است، از جمله می‌توان به توربین و یا قطار در حال کار اشاره کرد. بدلیل موارد ذکر شده و مسائل دیگر، روش‌هایی مورد توجه قرار گرفتند که به تحریک و اندازه‌گیری نیروی ورودی به سازه جهت بدست آوردن پارامترهای مودال نیازی نباشد [۱]. این روش‌ها را آنالیز مودال کارکردی بر مبنای محاسبه پارامترهای مودال سازه، فقط با استفاده از پاسخ خروجی می‌نامند [۱۱]؛ زیرا تنها با ثبت پاسخ سازه انجام می‌گیرد که در نتیجه نیروهای اعمالی در حین شرایط کار در محیط طبیعی سازه به وجود می‌آیند [۱]. آنالیز مودال کارکردی، برای تعیین اطلاعات مودال از تغییر مکان‌ها، سرعت‌ها یا شتاب‌ها استفاده می‌کند. تحلیل مودال کارکردی می‌تواند در دامنه زمانی یا دامنه فرکانسی انجام شود. در این مقاله به منظور استخراج مشخصات دینامیکی سازه تحت بار محیطی، از روش‌های تجزیه حوزه فرکانسی پیشرفته، شناسایی زیر فضای اتفاقی و روش حوزه زمان ابراهیم استفاده شده است. روش تجزیه حوزه فرکانس (FDD)، یکی از روش‌های پرکاربرد در حوزه فرکانس است که همانند سایر روش‌های آنالیز مودال کارکردی در حوزه فرکانس براساس رابطه بین ماتریس‌های چگالی طیف توانی (PSD) ورودی و خروجی یک فرایند تصادفی استوار است [۱۲]. این روش برای آنالیز مودال کارکردی در سال ۲۰۰۰ توسط برینکر ارائه شد [۱۳]. با توسعه روش تجزیه

نیاز به تحلیل دینامیکی سازه‌ها در صنعت به‌منظور پیش‌بینی پاسخ سازه‌ها تحت بارهای مختلف بسیار زیاد است. با توجه به رشد رقابت جهانی این نیاز ضروری‌تر می‌شود، چرا که پیش‌بینی موفقیت‌آمیز، منجر به طراحی دقیق‌تر، موثرتر، راحت‌تر و با دوام‌تر محصولات با انرژی کمتری برای تولید می‌شود. در دو دهه اخیر، آنالیز مودال به دانشی فراگیر با هدف تعیین، بهبود و بهینه سازی مشخصات دینامیکی سازه‌های مهندسی تبدیل شده است. یافتن مشخصات دینامیکی سازه، یکی از اساسی‌ترین بخش‌های تحلیل دینامیکی است. روش‌های آنالیز مودال ابزار قدرتمندی برای رسیدن به این هدف می‌باشند که به دو دسته آنالیز مودال کلاسیک و آنالیز مودال کارکردی یا فقط خروجی تقسیم می‌شوند [۱]. آنالیز مودال فرآیند تعیین خواص ذاتی دینامیکی یک سیستم در قالب فرکانس‌های طبیعی، ضرایب میرایی و شکل مودها است که از آن‌ها برای ایجاد یک مدل ریاضی از رفتار دینامیکی سیستم استفاده می‌شود. این مدل ریاضی به مدل مودال سیستم و اطلاعات مربوط به مشخصات آن، داده‌های مودال نامیده می‌شوند [۲]. کلیه پدیده‌های فیزیکی در یک دسته بندی وسیع به داده‌های قطعی با چارچوب معین و داده غیر قطعی با چارچوب اتفاقی تقسیم می‌شوند. داده‌های قطعی برای یک پدیده فیزیکی بوسیله روابط صریح ریاضی قابل توصیف است؛ در حالی که بیان پدیده‌های غیرقطعی از طریق روابط ریاضی صریح امکان‌پذیر نبوده و هیچ راهی برای پیش‌بینی مقدار دقیق آن در یک لحظه از زمان آینده وجود ندارد. این داده‌ها دارای شخصیت تصادفی بوده و بایستی در چنین شرایطی برای بیان آنها از بیان احتمال و میانگین آماری به جای معادلات صریح استفاده کرد. بدلیل مجهول بودن نیروی های تحریک ورودی در آنالیز مودال کارکردی، به جای چارچوب معین و قطعی در آنالیز مودال تجربی، از چارچوب اتفاقی و غیرقطعی استفاده می‌شود. روش‌های آنالیز مودال کلاسیک، بر اندازه‌گیری ورودی/خروجی مبتنی بوده و با

\* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۱۲۱۹۰۱۱۹۴؛ فکس: ۰۳۱۴۲۲۹۱۰۱۶

آدرس پست الکترونیک: [A\\_gholamzade@alum.sharif.edu](mailto:A_gholamzade@alum.sharif.edu)

تکنیک‌های تست OMA، این است که سازه‌ای که مورد آزمایش قرار می‌گیرد، در معرض چند نوع تحریک قرار می‌گیرد که تقریباً ویژگی‌های نویز سفید دارد، یعنی در سرتاسر دامنه گسترده فرکانسی انرژی توزیع شده است که دامنه فرکانسی خصوصیات مودال سازه را پوشش می‌دهد. با این وجود، اگر بارهای واقعی خصوصیات نویز سفید دقیقی ندارند، زیاد مهم نیست، چون در واقع چیزی که مهم است، این است که تمام موده‌های دلخواه به اندازه کافی تحریک شده باشند تا بتوان مشارکت آن‌ها را توسط اندازه‌گیری‌ها اتخاذ نمود.

## ۲-۱- روش حوزه زمان ابراهیم

تکنیک ITD با سه تاخیر زمانی اجرا می‌شود،  $\Delta t_1$ ،  $\Delta t_2$ ، و  $\Delta t_3$ ؛ اما با انتخاب مناسبی از پارامترها می‌توانیم ITD کلاسیک را مطابق فرمولاسیون جدید مطرح کنیم؛ بنابراین ماتریس همبستگی را می‌توان به صورت ترکیب خطی از شکل مودها و انحرافات نمایی با رابطه (۱) فرمول‌بندی نمود:

$$y(t) = y(k\Delta t) = c_1 a_1 e^{\lambda_1 \Delta t} + c_2 a_2 e^{\lambda_2 \Delta t} + \dots \\ = c_1 a_1 \mu_1^k + c_2 a_2 \mu_2^k + \dots \quad (1)$$

در آن  $a_1$ ،  $a_2$ ، ... شکل مودها هستند،  $\lambda_1$ ،  $\lambda_2$ ، ... قطب‌های زمانی پیوسته هستند و  $\mu_1$ ،  $\mu_2$ ، ... قطب‌های زمانی گسسته هستند و  $c_1$ ،  $c_2$ ، ... دامنه‌های مودال اولیه هستند که انحراف آزاد را در زمان صفر تعریف می‌کنند:

$$y(t=0) = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots \quad (2)$$

اکنون یک ماتریس بلوک هنکل با چهار ردیف بلوک ایجاد می‌کنیم و آن را به دو ماتریس تقسیم می‌کنیم:

$$H = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \dots & y(np-3) \\ y(2) & y(3) & \dots & y(np-2) \\ y(3) & y(4) & \dots & y(np-1) \\ y(4) & y(5) & \dots & y(np) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

در این دو ماتریس بلوکی کوچکتر هنکل، ماتریس فوقانی  $H_1$  شامل دو ردیف بلوک بالا و ماتریس پایینی  $H_2$  شامل دو ردیف بلوک پایین است. انحراف آزاد تعداد  $np$  از نقاط را دارا است. با در نظر گرفتن عبارت انحراف آزاد از معادله (۱) می‌توانیم  $H_1$  را به صورت رابطه (۴) بیان کنیم:

$$H_1 = \Psi \Lambda \quad (4)$$

حوزه فرکانس، می‌توان میرایی را نیز به دست آورد، این روش را تجزیه حوزه فرکانس پیشرفته (EFDD) می‌نامند که برای اولین بار توسط برینکر و همکارانش در سال ۲۰۰۱ مطرح شد [۱۴]. در مقایسه با تجزیه حوزه فرکانس، روش تجزیه حوزه فرکانس پیشرفته، تخمین بهتری از فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها می‌دهد، همچنین میرایی را تخمین می‌زند. یکی از قوی‌ترین و شناخته شده‌ترین روش‌های حوزه زمان در آنالیز مودال کارکردی، روش مبتنی بر زیرفضای اتفاقی است. در دهه ۹۰ روشی نوین برای شناسایی فضای حالت سیستم‌های مبتنی بر زیرفضا در مهندسی سیستم‌ها و کنترل ارائه شد که براساس آن در سال ۱۹۹۳ روش زیرفضای اتفاقی (SSI)، توسط ون اورشی و همکارانش با استفاده از اندازه‌گیری پاسخ سازه به تحریک تصادفی ارائه شد [۱۵]. سپس پیتر و همکارانش در سال ۱۹۹۵، به توسعه این روش پرداخته و از آن برای آنالیز مودال سازه‌های تحت بارهای محیطی استفاده نمودند [۱۷]. در سال ۱۹۸۲ سمیر ابراهیم و ریچارد پاپا، توانایی الگوریتم شناسایی حوزه زمانی ابراهیم را برای شناسایی مجموعه‌ای کامل از پارامترهای مودال ساختاری، با استفاده از تعداد زیادی از تاریخچه‌های زمانی پاسخ آزاد به‌طور همزمان در یک آنالیز و با فرض بر یک مدل شناسایی با تعداد زیادی از درجات آزادی، مورد مطالعه قرار دادند [۱۸]. بدین منظور ابتدا یک سیستم پنج درجه آزادی در نرم افزار متلب تحت تحریک‌های نویز سفید و جاروب سینوسی قرار گرفته و پاسخ‌های آن در درجات آزادی جایجایی اندازه‌گیری شده است، سپس سیگنال‌های پاسخ‌های به دست آمده ورودی روش‌های تجزیه فرکانسی، زیرفضای اتفاقی، روش ابراهیم قرار گرفته و با پیاده سازی این روش‌های حوزه زمانی و فرکانسی، میرایی آن‌ها تعیین شده و با نتایج حاصل از حل دقیق این سیستم پنج درجه آزادی مقایسه و میزان دقت این روش‌ها تعیین شده است. در نهایت این روش‌ها روی سازه‌های واقعی پیاده سازی صنعتی شده‌اند.

## ۲- آنالیز مودال کارکردی

در حال حاضر تکنیک‌های تست OMA به دلیل هزینه نسبتاً کم و سرعت اجرای آن‌ها و پیشرفت‌های اخیر در تجهیزات ضبط و روش‌های محاسباتی کاملاً جذاب بوده‌اند. ایده اساسی

با ضرب در  $H_2^T$  می‌توان یک راه‌حل جایگزین را یافت که در سمت چپ معادله (۲)، ماتریس معمولی مرتبه کامل  $H_1 H_2^T$  را ارائه می‌کند که برای تخمین جایگزین می‌تواند معکوس شود:

$$\hat{A}_2 = H_2 H_2^T (H_1 H_2^T)^{-1} \quad (۱۳)$$

به خوبی آشکار است که هر دو مقادیر برآورد شده برای ماتریس  $A$  به‌طور ضعیف بایاس شده می‌باشند و اغلب در عوض تخمین میانگین استفاده می‌شوند و به‌عنوان تخمین غیرمستقیم معرفی می‌شود:

$$\hat{A} = (\hat{A}_1 + \hat{A}_2)/2 \quad (۱۴)$$

یکی از مشکلات مطرح شده در فرمولاسیون کلاسیک ITD همانطور که در ابتدا ذکر شد، این است که برای یک ورودی واحد فرموله شده است، یعنی، تنها یک انحراف آزاد مجاز است. با این وجود، با درک آن ماتریس، در معادله (۱۲) می‌توان این محدودیت را به راحتی رفع نمود:

$$T_{11} = H_1 H_1^T \quad (۱۵)$$

$$T_{21} = H_2 H_1^T \quad (۱۶)$$

و ماتریس‌ها در معادله (۱۳)

$$T_{12} = H_1 H_2^T \quad (۱۷)$$

$$T_{22} = H_2 H_2^T \quad (۱۸)$$

ماتریس‌های بلوکی تئوپلیتس اساساً شامل اطلاعات همبستگی هستند. این به این معنی است که به سادگی می‌توان مشارکت چندین انحراف آزاد را به این ماتریس‌ها اضافه نمود؛ بنابراین، اگر  $nr$  انحراف آزاد وجود داشته باشند، آنگاه با محاسبه ماتریس‌های تئوپلیتس که حاوی اطلاعات از تمامی انحرافات آزاد می‌باشند را می‌توان از نسخه MIMO از ITD به‌دست آورد:

$$T_{11} = \sum_{r=1}^{nr} H_{1,r} H_{1,r}^T ; T_{12} = \sum_{r=1}^{nr} H_{1,r} H_{2,r}^T \quad (۱۹)$$

$$T_{21} = \sum_{r=1}^{nr} H_{2,r} H_{1,r}^T ; T_{22} = \sum_{r=1}^{nr} H_{2,r} H_{2,r}^T \quad (۲۰)$$

که در آن  $H_{1,r}$  و  $H_{2,r}$  ماتریس‌های بلوکی به‌واسطه پاسخ آزاد  $r$ -ام هستند. در نهایت، توسط روابط زیر می‌توان تخمین‌های ماتریس سیستم مربوط به معادلات (۳) و (۴) را به‌دست آورد:

$$\hat{A}_1 = T_{12} T_{11}^{-1} \quad (۲۱)$$

$$\hat{A}_2 = T_{22} T_{21}^{-1} \quad (۲۲)$$

که در آن  $\Psi$  یک ماتریس است که شکل مودها را در ستون‌ها نگه می‌دارد:

$$\Psi = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ \mu_1 a_1 & \mu_2 a_2 & \dots \end{bmatrix} \quad (۵)$$

و  $\Lambda$  ماتریسی است که قطب‌های زمانی گسسته منتصب به زمان‌های توانی مختلف برحسب دامنه‌های متناظر مودال را نگه می‌دارد:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} c_1 \mu_1^0 & c_1 \mu_1^1 & \dots & c_1 \mu_1^{np-3} \\ c_2 \mu_2^0 & c_2 \mu_2^1 & \dots & c_2 \mu_2^{np-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \quad (۶)$$

به‌طور مشابه،  $H_2$  ماتریس بلوکی هنکل دیگر با دو مرحله زمانی به‌تاخیر افتاده  $H_1$  است و در نتیجه می‌تواند به‌صورت رابطه (۷) بیان شود:

$$H_2 = \Psi [\mu_n]^2 \Lambda \quad (۷)$$

که در آن  $[\mu_n]$  ماتریسی قطری با مقادیر ویژه گسسته است. از معادلات (۴) و (۷)، ماتریس  $\Lambda$  را می‌توان حذف کرد که به‌صورت رابطه (۸) نشان داده می‌شود:

$$\Psi^{-1} H_1 = [\mu_n]^{-2} \Psi^{-1} H_2 \quad (۸)$$

با ضرب هر دو طرف معادله (۸) در  $\Psi [\mu_n]^2$  به معادله (۹) می‌رسیم:

$$\Psi [\mu_n]^2 \Psi^{-1} H_1 = H_2 \quad (۹)$$

در نهایت، ماتریس سیستم را تعریف می‌کنیم:

$$A = \Psi [\mu_n]^2 \Psi^{-1} \quad (۱۰)$$

ما معادله ITD برای تخمین ماتریس سیستم  $A$  را به‌صورت رابطه (۱۱) داریم:

$$A H_1 = H_2 \quad (۱۱)$$

با ترانهاده کردن این معادله، واضح است که سیستم فرامعینی از معادلات برای تعیین ماتریس سیستم  $A$  را دارا می‌باشیم، به شرطی که  $np - 3$  از  $2nc$  بزرگتر باشد که در آن  $nc$  تعداد خروجی‌ها در انحراف آزاد مربوطه است. مساله فرامعین را می‌توان هم با SVD و هم با رگرسیون حل نمود. هرچند که در ITD روش سنتی حل معادله با رگرسیون است. با ضرب هر دو طرف معادله (۱۱) در  $H_1^T$  در سمت چپ معادله، ماتریس معمولی مرتبه کامل  $H_1 H_1^T$  را ایجاد می‌کند که به‌منظور ارائه تخمین می‌تواند با رابطه (۱۲) معکوس شود:

$$\hat{A}_1 = H_2 H_1^T (H_1 H_1^T)^{-1} \quad (۱۲)$$

$\hat{R}_k$  تخمین بدون بایاس ماتریس همبستگی با تاخیر زمانی  $k$  است. ماتریس بلوک  $Y_h$  که در SSI تعریف شده در واقع، گردآوری خانواده ماتریس‌هایی است که به وسیله شیفت دادن ماتریس داده‌ها ایجاد می‌شود:

$$Y_h = \begin{bmatrix} Y(1:N-2s) \\ Y(2:N-2s+1) \\ \vdots \\ Y(2s:N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{hp} \\ Y_{hf} \end{bmatrix} \quad (25)$$

نیمه بالایی این ماتریس که با  $Y_{hp}$  نمایش می‌دهند، گذشته و نیمه پایینی که با  $Y_{hf}$  نمایش می‌دهند، آینده نامیده می‌شود. تعداد کل شیفت داده  $2s$  است که به آن تعداد سطر بلوک (نیمه بالایی و یا پایینی ماتریس بلوک  $2sM$  (هنکل) گویند؛ لذا تعداد سطرهای ماتریس بلوک  $2sM$  و تعداد ستون‌های آن  $N-2s$  است.

در اینجا چیزی ارائه می‌گردد که به اعتقاد دیگران مبهم-ترین عملکرد در SSI می‌باشد. ون اورشی و دی مور [۱۵] تصویر را به عنوان یک ابزار هندسی معرفی نموده و اساس آن را تشریح نمودند. اگرچه در مواجهه با پاسخ‌های اتفاقی، تصویر به عنوان یک متوسط شرطی تعریف می‌شود. خصوصاً در SSI تصویر آینده در گذشته ماتریس زیر را تعریف می‌کند:

$$O = E(Y_{hf}|Y_{hp}) \quad (26)$$

متوسط شرطی برای فرایندهای گاوسی نیز به طور مشابه می‌تواند به طور کامل به وسیله کوواریانس شرح داده شود. از آنجایی که ماتریس داده‌های شیفت یافته نیز کوواریانس را تعریف می‌کند، لذا عجیب نیست که برای محاسبه تصویر به صورت مستقیم می‌توان از روش ون اورشی و دی مور استفاده کرد:

$$O = Y_{hf} Y_{hp}^T (Y_{hp} Y_{hp}^T)^{-1} Y_{hp} \quad (27)$$

آخرین ماتریس در این حاصل ضرب، شرطها را تعریف می‌کند و چهار ماتریس اول به معرفی کوواریانس بین کانال‌ها در تاخیرهای زمانی مختلف می‌پردازد. یک متوسط شرطی مشابه آنچه در معادله (۲۶) ارائه شده است، به صورت ساده شامل تنزل‌های آزاد سیستم با توجه به شرایط اولیه مختلف مشخص شده توسط  $Y_{hp}$  است.

بعد ماتریس  $SM \times SM$  بوده و هر ستون ماتریس  $O$  تنزل آزاد انباشته شده سیستم مطابق یک دسته شرایط اولیه

گام نهایی در ITD این است که تجزیه مقدار ویژه ماتریس سیستم تخمین زده شده مطابق با معادله (۱۰) را در نظر بگیریم.

## ۲-۲- روش شناسایی زیرفضای اتفاقی

روش زیرفضای اتفاقی یکی از روش‌های حوزه زمان در آنالیز مودال کارکردی محسوب می‌شود. این روش درگیر مراحل مختلفی از ریاضیات مبهم و پیچیده است که دنبال کردن و فهم آن برای افرادی دشوار است که دارای پیش‌زمینه دینامیک سازه‌ای می‌باشند. روش SSI یکی از روش‌های پارامتریک بوده که خود به دو روش زیرفضای اتفاقی بر مبنای کوواریانس و زیرفضای اتفاقی بر مبنای داده تقسیم می‌گردد. در روش SSI-Cov از کوواریانس داده‌ها در الگوریتم استفاده می‌شود؛ در حالی که در SSI-Data از داده‌های پاسخ زمانی سیستم استفاده می‌شود [۱۹]. در این مقاله صرفاً به توضیح روش SSI-Data می‌پردازیم.

در این روش ابتدا کلیه پاسخ‌های زمانی در ماتریسی به نام ماتریس بلوکی هنکل جمع‌آوری شده سپس ماتریس بلوکی هنکل به دو ماتریس گذشته و آینده تقسیم می‌شود. جهت ایجاد ارتباط بین پاسخ‌ها، ماتریس آینده روی ماتریس گذشته تصویر شده و ماتریس تصویر تشکیل می‌گردد. با استفاده از تجزیه مقدار تکین ماتریس تصویر، ماتریس مشاهده‌پذیری و حالت‌های کالمن محاسبه شده و با استفاده از ماتریس مشاهده‌پذیری، ماتریس سیستم محاسبه می‌شود و در نهایت مجموعه‌ای از قطب‌های ماتریس سیستم به دست می‌آیند. جهت محاسبه فرکانس‌های طبیعی، شکل مودها و ضرایب میرایی از نمودار پایداری استفاده می‌شود [۲۰].

در حالت زمان گسسته، پاسخ سیستم به طور معمول توسط ماتریس داده‌ها بیان می‌شود:

$$Y = [Y_1 \quad Y_2 \quad \dots \quad Y_N] \quad (28)$$

که  $N$  تعداد نقاط نمونه برداری است.

برای درک مفهوم ماتریس بلوک هنکل، در نظر بگیرید جایی که  $k$  نمونه آخر حذف می‌شوند، ماتریس داده‌ها  $Y_{(1N-k)}$  و جایی که  $k$  نمونه اول حذف می‌شوند، ماتریس داده‌ها  $Y_{(kN)}$  باشد، بنابراین:

$$\hat{R}_k = \frac{1}{N-k} Y_{(1N-k)} Y_{(kN)}^T \quad (29)$$

پس ماتریس سیستم  $\hat{A}_d$  می‌تواند از طریق رگرسیون یافت شود. ماتریس مشاهده<sup>۱</sup>  $C$  نیز، به سادگی به وسیله گرفتن اولین بلوک ماتریس مشاهده‌پذیری به دست می‌آید.

$$\hat{C} = \hat{\Gamma}_{(1:1)} \quad (33)$$

اولین گام به منظور یافتن پارامترهای مودال، اعمال تجزیه مقادیر ویژه روی ماتریس  $\hat{A}_d$  است. با محاسبه مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس سیستم، پارامترهای مودال سیستم محاسبه می‌شوند:

$$\hat{A}_d = \Psi \mu_i \Psi^{-1} \quad (34)$$

قطب‌های زمان پیوسته  $\lambda_i$  را می‌توان از طریق قطب‌های زمان گسسته  $\mu_i$  یافت:

$$\mu_i = \exp(\lambda_i) \quad (35)$$

که منجر به فرمول‌های شناخته شده می‌شود:

$$\lambda_i = \frac{\ln(\mu_i)}{\Delta T} \quad \omega_t = |\lambda_i| \quad (36)$$

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \quad \zeta_i = \frac{\text{Re}(\lambda_i)}{|\lambda_i|} \quad (37)$$

ماتریس شکل مودها نیز به طریق زیر به دست می‌آید:

$$\Phi = C\Psi \quad (38)$$

### ۲-۳- روش تجزیه حوزه فرکانس توسعه یافته

روش تجزیه حوزه فرکانس پیشرفته تعمیم یافته روش تجزیه حوزه فرکانس است که موجب بهبود تخمین فرکانس‌های طبیعی، شکل مودها و همچنین میرایی گردید.

در EFDD، تابع چگالی طیف توانی یک درجه آزادی شناسایی شده در حوالی قله رزونانس، با استفاده از تبدیل فوریه گسسته معکوس (IDFT)، به حوزه زمان برگردانده می‌شود. فرکانس طبیعی از طریق تعیین زمان‌های گذر از صفر و میرایی به وسیله کاهش لگاریتمی تابع خود همبستگی نرمال شده سیستم یک درجه آزادی مربوطه به دست می‌آید.

رابطه بین ورودی‌های مجهول  $x(t)$  و پاسخ‌های اندازه‌گیری شده  $y(t)$  را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$G_{yy}(j\omega) = \bar{H}(j\omega)G_{xx}(j\omega)H(j\omega)^T \quad (39)$$

$G_{xx}(j\omega)$  یک ماتریس  $r \times r$  چگالی توان طیفی ورودی،  $r$  تعداد ورودی‌ها،  $G_{yy}(j\omega)$  یک ماتریس  $m \times m$  چگالی توان طیفی پاسخ‌ها،  $m$  تعداد پاسخ‌ها،  $H(j\omega)$  ماتریس  $m \times r$

است. با استفاده از معادله (۲۳) هر ستون ماتریس  $O$  را می‌توان به صورت رابطه (۲۸) بیان نمود:

$$O_{col} = \Gamma_s X_0 \quad \Gamma_s = \begin{bmatrix} C \\ CA_d \\ CA_d^2 \\ \vdots \\ CA_d^{s-1} \end{bmatrix} \quad (28)$$

اصطلاحاً حالت‌های کالمن، به صورت ساده شرایط اولیه برای همه ستون‌های ماتریس  $O$  می‌باشد، بنابراین:

$$O = \Gamma_s X_0 \quad (29)$$

$X_0$  حالت‌های کالمن در تاخیر زمانی صفر است. چنانچه ذکر شد، اگر ماتریس  $\Gamma_s$  را بدانیم، پس می‌توانیم همه حالت‌های کالمن را از معادله (۳۰) به دست آوریم. با این حال از آنجایی که ما ماتریس  $\Gamma_s$  را نمی‌دانیم، لذا نمی‌توانیم به روش ذکر شده عمل کنیم؛ بنابراین ما حالت‌های کالمن را از طرق مختلف تخمین خواهیم زد.

ترفند مورد استفاده بدین منظور، به کارگیری SVD بر روی ماتریس  $O$  است:

$$O = USV^T \quad (30)$$

بنابراین تخمین ماتریس  $\Gamma_s$  و ماتریس حالت کالمن  $X_0$  به صورت رابطه (۳۱) تعریف می‌شود:

$$\hat{\Gamma} = US^{1/2} \quad \hat{X}_0 = S^{1/2}V^T \quad (31)$$

از این رو فرایند تعریف شده جهت تخمین ماتریس‌های  $\Gamma_s$  و  $X_0$  منحصر به فرد نمی‌باشد. ماتریس حالت کالمن  $X_0$  ماتریس حالت کالمن تاخیر زمانی صفر است. اگر ما یک بلوک سطری از ماتریس  $O$  و یک بلوک سطر از پایین ماتریس  $\Gamma_s$  را حذف کنیم، به طور مشابه می‌توانیم ماتریس حالت کالمن  $X_1$  را در تاخیر زمانی یک تخمین کنیم. به همین منوال با حذف بلوک‌های سطری از ماتریس  $O$  می‌توان کلیه حالت‌های کالمن را معین نمود.

با استفاده از حالت‌های کالمن یک فرمولاسیون عمومی جهت تخمین و نیز مدل نمودن بخش نویز پاسخ تصادفی را می‌توان برقرار نمود.

ماتریس سیستم  $A_d$  از طریق تخمین ماتریس  $\Gamma_s$  به وسیله حذف یک بلوک از بالا و یک بلوک از پایین به دست می‌آید:

$$\hat{\Gamma}_{(2:s)} \hat{A}_d = \hat{\Gamma}_{(1:s-1)} \quad (32)$$

<sup>1</sup> Observation Matrix

$$A_k = \frac{R_k \overline{C R_k^T}}{2\alpha_k} \quad (45)$$

که  $\alpha_k$  منفی قسمت حقیقی قطب  $\lambda_k = -a_k + j\omega_k$  می-باشد. هنگامی که میرایی کم باشد، این جمله غالب خواهد بود، بنابراین در حالت میرایی کم، مانده متناسب با بردار شکل مود می‌باشد:

$$A_k \propto R_k \overline{C R_k^T} = \varphi_k \gamma_k^T C \gamma_k \varphi_k^T = d_k \varphi_k \varphi_k^T \quad (46)$$

که  $d_k$  یک اسکالر ثابت است. در یک فرکانس مشخص  $\omega$  تنها تعداد محدودی مود (نوعاً یک یا دو مود) به طور موثری مداخله می‌کنند. این مجموعه از مودها با  $sub(\omega)$  نشان داده شده است؛ بنابراین در حالتی که سازه میرایی کمی دارد، چگالی طیف پاسخ را اغلب می‌توان بدین فرم نوشت:

$$G_{yy}(j\omega) = \sum_{k \in sub(\omega)} \frac{d_k \varphi_k \varphi_k^T}{j\omega - \lambda_k} + \overline{\frac{d_k \varphi_k \varphi_k^T}{j\omega - \lambda_k}} \quad (47)$$

این تجزیه مودال ماتریس طیفی است. این عبارت مشابه نتیجه‌ای است که می‌توان مستقیماً از معادله (۳۹) تحت شرایط مستقل از ورودی نویز سفید، یعنی یک ماتریس طیفی ورودی قطری گرفت.

اولین گام در شناسایی پارامترهای مودال مبتنی بر روش تجزیه حوزه فرکانس توسعه یافته، تخمین ماتریس چگالی طیف توانی است. تخمین چگالی طیف توان خروجی معلوم  $\hat{G}_{yy}(j\omega)$  در فرکانس‌های مجزای  $\omega = \omega_i$  از طریق تجزیه به وسیله اعمال تجزیه مقادیر تکین است:

$$\hat{G}_{yy}(j\omega) = U_i S_i U_i^H \quad (48)$$

که  $U_i = |u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{im}|$  یک ماتریس  $i$  که متشکل از بردارهای تکین  $u_{ij}$  است و  $S_i$  یک ماتریس قطری شامل مقادیر تکین اسکالر  $s_{ij}$  است. نزدیک قله مربوط به  $k$ -امین مود در طیف این مود یا احتمالاً یک مود نزدیک به آن مود، غالب خواهد بود. اگر تنها  $k$ -امین مود غالب باشد، تنها یک جمله در معادله (۴۸) خواهد بود؛ بنابراین در این حالت، اولین بردار تکین  $u_{i1}$  تخمینی از شکل مود است:

$$\varphi = u_{i1} \quad (49)$$

لذا تخمین چگالی طیف توان خروجی به فرم رابطه (۴۹) و یا شکل دیگر آن خواهد بود:

تابع پاسخ فرکانسی و " - " نشان دهنده مزدوج مختلط و بالانویس  $T$  نشان دهنده ترانسپوز است.

تابع پاسخ فرکانسی را می‌توان به فرم کسر جزئی قطب-مانده<sup>۱</sup> نوشت:

$$H(j\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{j\omega - \lambda_k} + \frac{\overline{R_k}}{j\omega - \overline{\lambda_k}} \quad (40)$$

که  $n$  تعداد مودها و  $\lambda_k$  قطب و  $R_k$  مانده که به صورت رابطه (۴۱) است:

$$R_k = \varphi_k \gamma_k^T \quad (41)$$

که  $\gamma_k, \varphi_k$  به ترتیب بردار شکل مود و بردار مداخله مودال<sup>۲</sup> می‌باشند. هنگامی که ورودی به صورت نویز سفید فرض شود، چگالی توان طیفی آن عدد ثابتی خواهد بود، یعنی  $G_{xx}(j\omega) = C$ ، در این حالت معادله (۴۰) به صورت رابطه (۴۲) در خواهد آمد:

$$G_{yy}(j\omega) = \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \left[ \frac{R_k}{j\omega - \lambda_k} + \frac{\overline{R_k}}{j\omega - \overline{\lambda_k}} \right] \times C \left[ \frac{R_k}{j\omega - \lambda_s} + \frac{\overline{R_k}}{j\omega - \overline{\lambda_s}} \right]^H \quad (42)$$

بالانویس  $H$  نشان دهنده ترانپاده مزدوج مختلط است. با ضرب دو کسر جزئی و استفاده از تئوری کسر جزئی هوی‌ساید<sup>۳</sup>، بعد از تعدادی عملیات ریاضی، چگالی توان طیفی خروجی به صورت قطب-مانده به فرم زیر در خواهد آمد:

$$G_{yy}(j\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{j\omega - \lambda_s} + \frac{\overline{A_k}}{j\omega - \overline{\lambda_s}} + \frac{B_k}{-j\omega - \lambda_s} + \frac{\overline{B_k}}{-j\omega - \overline{\lambda_s}} \quad (43)$$

$A_k, B_k$  -امین ماتریس مانده چگالی توان طیفی خروجی است. همانند چگالی توان طیفی، خود ماتریس مانده یک ماتریس  $m \times m$  هرمیتی است و با رابطه (۴۴) داده می‌شود:

$$A_k = R_k C \left( \sum_{s=1}^n \frac{\overline{R_s^T}}{\lambda_k - \overline{\lambda_s}} + \frac{R_s^T}{-\lambda_k - \lambda_s} \right) \quad (44)$$

سهام  $k$ -امین مود در مانده با رابطه (۴۵) داده می‌شود:

<sup>1</sup> Pole/Residue

<sup>2</sup> Modal Participation Vector

<sup>3</sup> Heaviside

<sup>4</sup> Unitary Matrix

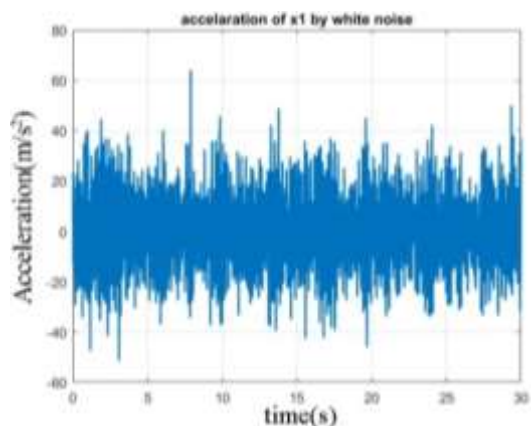


$c_5 = 3/4$	$k_5 = 1700$	$m_5 = 1/5$	۵
-------------	--------------	-------------	---

مقادیر دقیق فرکانس‌های طبیعی و ضرایب میرایی برای پنج‌ماد این سیستم به صورت زیر آمده‌اند (جدول ۲). در ادامه خواص دینامیکی این سیستم در محیط سیمولینک نرم افزار متلب شبیه‌سازی شده و تحت تحریک‌های نویز سفید و جاروب سینوسی قرار داده شده است و پاسخ‌های زمانی آن ضبط شده است. نمودارهای شتاب بر حسب زمان سیستم پنج‌درجه آزادی تحت تحریک نویز سفید برای پنج‌ماد به صورت زیر می‌باشند.

جدول ۲- مقادیر دقیق فرکانس‌ها و ضرایب میرایی سیستم پنج‌درجه آزادی

ضرایب میرایی	فرکانس طبیعی (HZ)	ماد
۰/۰۰۶۶	۱/۰۵۷۰	ماد اول
۰/۰۲۵۴	۴/۰۴۱۴	ماد دوم
۰/۰۳۹۷	۶/۳۱۶۰	ماد سوم
۰/۰۴۸۹	۷/۷۷۷۸	ماد چهارم
۰/۰۵۶۴	۸/۹۸۱۵	ماد پنجم



شکل ۲- رکورد شتاب اندازه‌گیری شده جرم اول

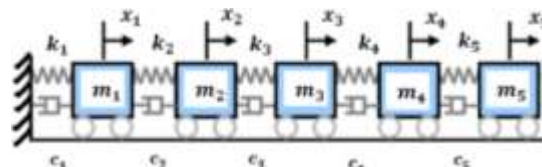
$$\begin{aligned} \hat{G}_{yy}(j\omega) &= U_i S_i U_i^H \\ &= \sum_k^{n_y} u_{ki} u_{ki}^H S_{ki} \quad n_y: \text{تعداد فرکانس‌های رزونانس} \end{aligned} \quad (50)$$

با فرض عدم وجود ریشه‌ی تکراری، رتبه‌ی  $G_{yy}(j\omega)$  در فرکانس طبیعی  $\omega = \omega_i$  تقریباً برابر یک خواهد بود و نشان دهنده این است که فرکانس طبیعی طیف تقریباً معادل فضای پوشش داده شده به وسیله اولین بردار تکین، ضربدر مقدار تکین اولین است.

در مجاورت فرکانس طبیعی، بردارهای تکین دارای مقدار MAC بالا به همراه  $u_{i1}$ ، ما را قادر به ایجاد تابع چگالی طیفی یک‌درجه آزادی ( $S_{j\omega}$ ) جهت مود به خصوص می‌کند. حاصل تبدیل این تابع یک‌درجه آزادی به حوزه زمان، تابع خود همبستگی در فرکانس طبیعی است که از طریق تعیین تعداد گذر از صفر به دست می‌آید. نسبت میرایی نیز از طریق کاهش لگاریتمی تابع خودهمبستگی به دست می‌آید [۲۱].

### ۳- آنالیز حساسیت سیستم پنج‌درجه آزادی

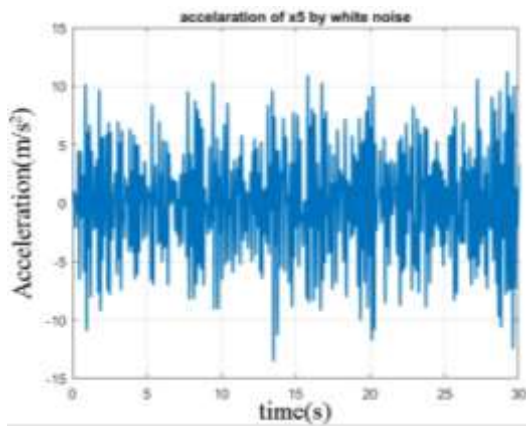
سیستم پنج‌درجه آزادی (شکل ۱) با مشخصات زیر (جدول ۱) در نظر گرفته شده است.



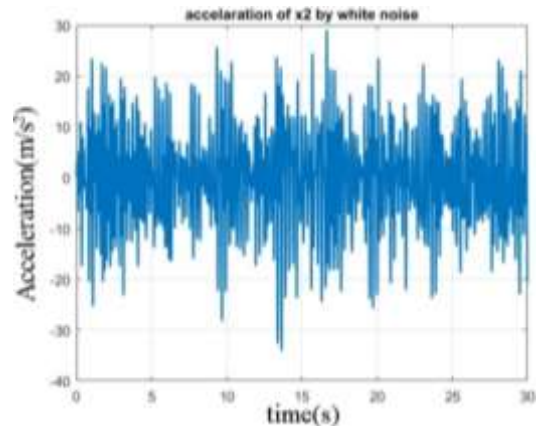
شکل ۱- سیستم پنج‌درجه آزادی مدل‌سازی شده

جدول ۱- مشخصات سیستم پنج‌درجه آزادی مدل‌سازی شده

ضریب دمپینگ (Ns/m)	سختی (N/m)	جرم (kg)	ردیف
$c_1 = 2$	$k_1 = 1000$	$m_1 = 1$	۱
$c_2 = 1/6$	$k_2 = 800$	$m_2 = 1$	۲
$c_3 = 1$	$k_3 = 500$	$m_3 = 1$	۳
$c_4 = 3$	$k_4 = 1500$	$m_4 = 2$	۴

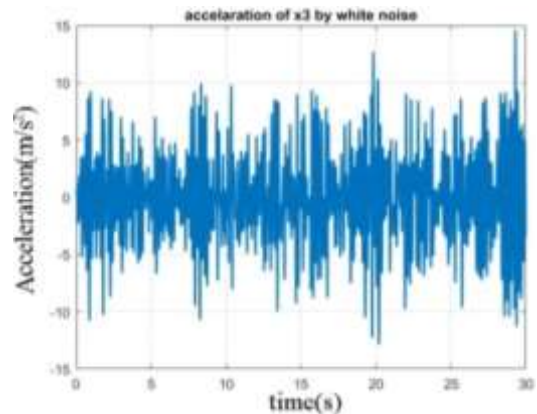


شکل ۶- رکورد شتاب اندازه‌گیری شده جرم پنجم

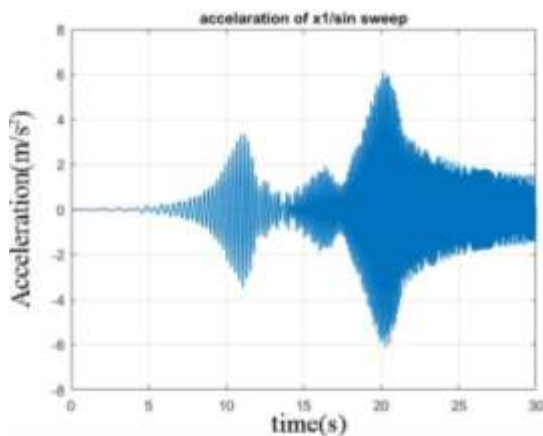


شکل ۳- رکورد شتاب اندازه‌گیری شده جرم دوم

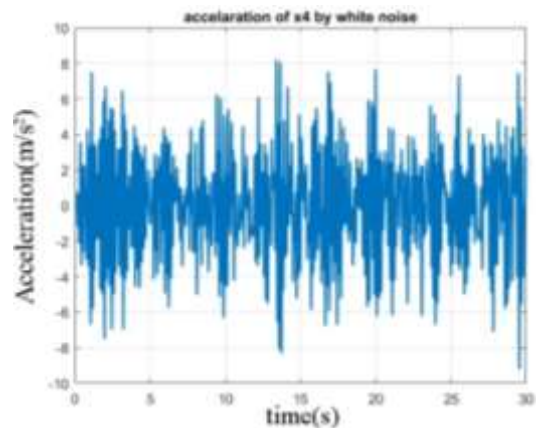
شتاب‌های اندازه‌گیری شده سیستم پنج درجه آزادی تحت تحریک جاروب سینوسی برای پنج مود قابل مشاهده است.



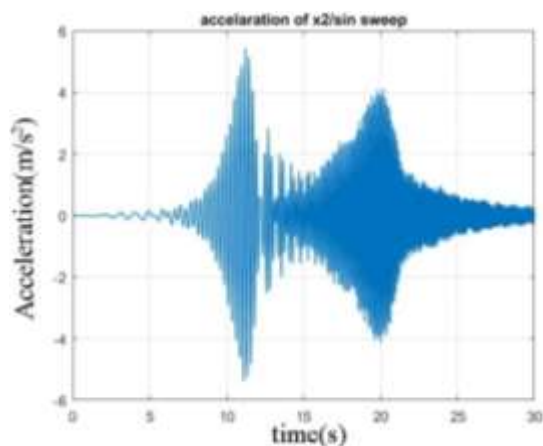
شکل ۴- رکورد شتاب اندازه‌گیری شده جرم سوم



شکل ۷- رکورد شتاب اندازه‌گیری شده جرم اول



شکل ۵- رکورد شتاب اندازه‌گیری شده جرم چهارم

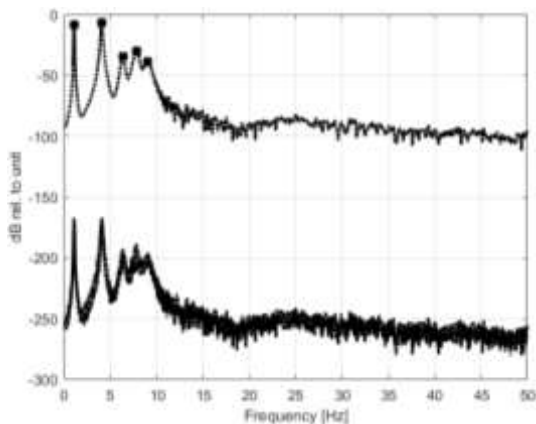


شکل ۸- رکورد شتاب اندازه‌گیری شده جرم دوم

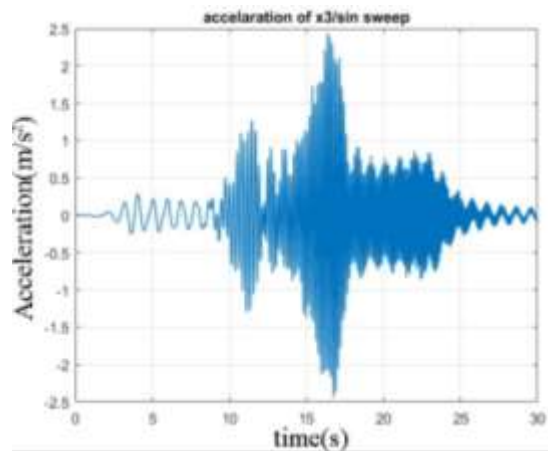
پس از اندازه‌گیری شتاب نقاط سیستم پنج درجه آزادی تحت تحریک‌های نویز سفید و جاروب سینوسی، به استخراج پارامترهای مودال با استفاده از روش‌های آنالیز مودال کارکردی می‌پردازیم، شکل زیر مودهای شناسایی شده توسط روش تجزیه حوزه فرکانسی پیشرفته را نشان می‌دهد.

اکنون به استخراج فرکانس‌های طبیعی و ضرایب میرایی با استفاده از روش‌های آنالیز مودال کارکردی برای تحریک‌های نویز و جاروب می‌پردازیم و در نهایت میزان خطای به‌دست آمده از روش‌های مختلف با دو نوع تحریک ذکر شده را نسبت به مقادیر دقیق تعیین می‌کنیم.

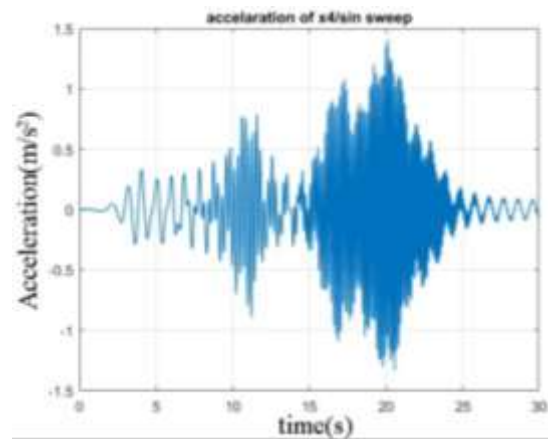
در روش تجزیه حوزه فرکانس توسعه یافته با اعمال تجزیه مقادیر تکین به ماتریس چگالی طیف توانی، آن را به مجموعه‌ای از توابع چگالی خود طیف تجزیه می‌کند که هر یک متناظر با یک سیستم یک درجه آزادی است. فرضیات اساسی در کاربرد این روش اولاً عامل تحریک بصورت نویز سفید، دوم میرایی کم سیستم و سوم تعامد هندسی شکل مودهای نزدیک می‌باشند. در این صورت پاسخ دقیق بوده و در صورتی که فرضیات فوق برقرار نباشند، تجزیه سیستم به سیستم‌های یک درجه آزادی تقریبی بوده ولی باز هم نتایج بسیار دقیق‌تر از روش کلاسیک می‌باشند.



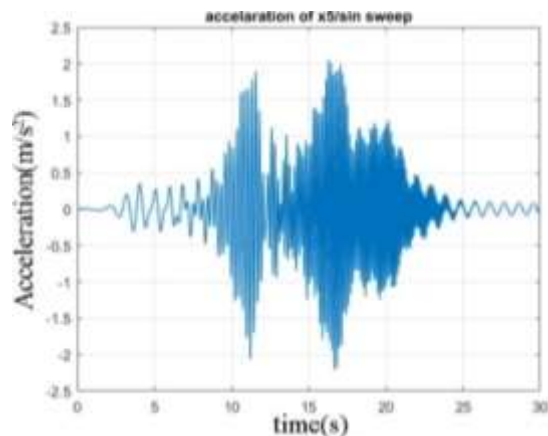
شکل ۱۲- مودهای شناسایی شده توسط روش EFDD تحت تحریک نویز سفید



شکل ۹- رکورد شتاب اندازه‌گیری شده جرم سوم



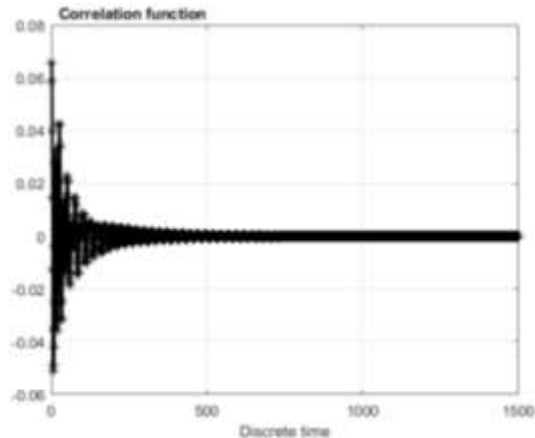
شکل ۱۰- رکورد شتاب اندازه‌گیری شده جرم چهارم



شکل ۱۱- رکورد شتاب اندازه‌گیری شده جرم پنجم

بدین منظور پس از تخمین سیستم یک درجه آزادی متناظر با مود مورد نظر با اعمال تبدیل معکوس فوریه سریع، توابع چگالی طیفی به حوزه زمان برده شده و با میانبایی، طیف حاصل، سیستم یک درجه آزادی متناظر با مود مورد نظر است.

چنانچه در جداول فوق مشاهده می‌شود، دقت روش زیر فضای اتفافی در مقایسه با روش‌های تجزیه حوزه فرکانس توسعه یافته و روش حوزه زمان ابراهیم مطلوب‌تر است؛ اما زمانی که میرایی سیستم در یکی از مودها کم باشد، همانند مود اول روش تجزیه حوزه فرکانس توسعه یافته تخمین بهتری را فراهم می‌کند.



شکل ۱۳- نمودار تابع همبستگی با استفاده از روش ITD تحت تحریک نویز سفید برای مود اول

جدول ۳- مقایسه مقادیر فرکانس‌های طبیعی و ضرایب میرایی حاصل از تحریک نویز سفید سیستم پنج درجه آزادی

روش‌ها	مود اول		مود دوم		مود سوم		مود چهارم		مود پنجم	
	$\zeta_n$	$\omega_n$	$\zeta_n$	$\omega_n$	$\zeta_n$	$\omega_n$	$\zeta_n$	$\omega_n$	$\zeta_n$	$\omega_n$
مقادیر دقیق	۰/۰۰۶۶	۱/۰۵۷۰	۰/۰۲۵۴	۶/۳۱۶۰	۰/۰۳۹۷	۷/۷۷۷۸	۰/۰۴۸۹	۸/۹۸۱۵	۰/۰۵۶۴	۸/۹۸۱۵
EFDD	۰/۰۰۶۰	۱/۰۲۵۴	۰/۰۲۸۰	۶/۲۸۷۴	۰/۰۳۵۴	۷/۷۲۶۷	۰/۰۴۸۰	۸/۹۶۶۳	۰/۰۴۲۱	۸/۹۶۶۳
SSI	۰/۰۰۵۳	۱/۰۵۷۰	۰/۰۲۵۷	۶/۳۱۵۳	۰/۰۳۹۲	۷/۷۷۷۸	۰/۰۴۸۶	۸/۹۸۱۵	۰/۰۵۵۹	۸/۹۸۱۵
ITD	۰/۰۰۴۸	۱/۰۵۷۲	۰/۰۲۶۰	۶/۳۱۴۸	۰/۰۳۸۱	۷/۷۷۷۹	۰/۰۴۸۳	۸/۹۸۱۸	۰/۰۵۴۷	۸/۹۸۱۸

جدول ۴- مقایسه مقادیر فرکانس‌های طبیعی و ضرایب میرایی حاصل از تحریک جاروب سینوسی سیستم پنج درجه آزادی

روش‌ها	مود اول		مود دوم		مود سوم		مود چهارم		مود پنجم	
	$\zeta_n$	$\omega_n$	$\zeta_n$	$\omega_n$	$\zeta_n$	$\omega_n$	$\zeta_n$	$\omega_n$	$\zeta_n$	$\omega_n$
مقادیر دقیق	۰/۰۰۶۶	۱/۰۵۷۰	۰/۰۲۵۴	۶/۳۱۶۰	۰/۰۳۹۷	۷/۷۷۷۸	۰/۰۴۸۹	۸/۹۸۱۵	۰/۰۵۶۴	۸/۹۸۱۵
EFDD	۰/۰۰۶۰	۱/۰۲۵۴	۰/۰۲۸۰	۶/۲۶۵۳	۰/۰۳۳۰	۷/۷۳۳۶	۰/۰۴۸۰	۸/۹۰۳۴	۰/۰۴۱۰	۸/۹۰۳۴
SSI	۰/۰۰۵۰	۱/۰۵۷۰	۰/۰۲۴۶	۶/۳۱۸۱	۰/۰۳۸۸	۷/۷۷۷۸	۰/۰۴۸۶	۸/۹۸۱۱	۰/۰۵۲۰	۸/۹۸۱۱
ITD	۰/۰۰۴۴	۱/۰۵۷۴	۰/۰۲۴۱	۶/۴۲۰۳	۰/۰۳۷۴	۷/۷۷۸۰	۰/۰۴۸۱	۸/۹۸۲۳	۰/۰۵۲۰	۸/۹۸۲۳

جدول ۵- مقایسه درصد خطای روش‌های مختلف برای تحریک نویز سفید

درصد خطا روش SSI	درصد خطا روش ITD	درصد خطا روش EFDD
------------------	------------------	-------------------

$\zeta_n$	$\omega_n$	$\zeta_n$	$\omega_n$	$\zeta_n$	$\omega_n$	
۱۹/۷۰	۰	۲۷/۲۷	۰/۰۱	۹/۰۹	۲/۹۹	مود اول
۱/۱۸	۰	۲/۳۶	۰	۱۰/۲۴	۰/۴۲	مود دوم
۱/۲۵	۰/۰۱	۴/۰۳	۰/۰۲	۱۰/۸۳	۰/۴۵	مود سوم
۰/۶۱	۰	۱/۲۲	۰/۰۱	۱/۸۴	۰/۵۳	مود چهارم
۰/۸۸	۰	۳/۰۱	۰/۰۱	۲۵/۳۵	۰/۱۶	مود پنجم

جدول ۶- مقایسه درصد خطای روش‌های مختلف برای تحریک جاروب سینوسی

درصد خطا روش SSI		درصد خطا روش ITD		درصد خطا روش EFDD		
$\zeta_n$	$\omega_n$	$\zeta_n$	$\omega_n$	$\zeta_n$	$\omega_n$	
۲۴/۲۴	۰	۳۳/۳۳	۰	۹/۰۹	۲/۹۹	مود اول
۳/۱۴	۰/۰۱	۵/۱۲	۰/۹۶	۱۰/۲۴	۰/۴۲	مود دوم
۲/۲۸	۰/۰۳	۵/۷۹	۱/۶۵	۱۶/۸۷	۰/۸۰	مود سوم
۰/۶۱	۰	۱/۶۳	۰/۰۱	۱/۸۴	۰/۵۶	مود چهارم
۷/۸۰	۰/۰۱	۷/۸۰	۰/۰۱	۲۷/۳۰	۰/۸۶	مود پنجم

#### ۴- معرفی سازه مورد آزمایش

سازه مورد آزمایش از دو زیرسازه که توسط یک اتصال پیچی ساده به هم متصل شده‌اند، تشکیل شده است. اتصال ساده؛ المانی از یک اتصال فلنجی پیچی است. طول هر یک از زیر سازه‌ها ۳۰ سانتی‌متر و ابعاد اتصال پیچی هم ۱۰ سانتی‌متر بوده است. ضخامت قطعه ۲ سانتی‌متر و عرض مقطع آن هم ۵ سانتی‌متر است.

از آنجا که عامل اصلی میرایی در سازه‌های بزرگ از میرایی داخلی یعنی میرایی ماده و میرایی سازه‌ای یعنی اتصالات پیچی ناشی می‌شود؛ هدف از این آزمایش تعیین میرایی ناشی از اتصال بوده است.

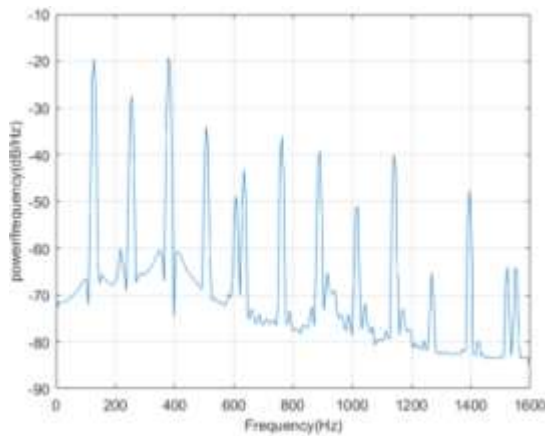
تجهیزات مورد استفاده در این تست عبارت‌اند از: سیستم آنالایزر پالس ۱۶ کانال ورودی و ۲ کانال خروجی، سیستم ارتعاشات Tira (۴۴۰ نیوتن) و شتاب‌سنج مدل PCB333B30

تحریک در فرکانس‌های طبیعی سازه با استفاده از شیکر مودال انجام شده است. سازه تحت تست به‌صورت معلق است و سازه به‌صورت شرایط مرزی آزاد تست شده است که برای اندازه‌گیری داده‌های شتاب برحسب زمان چهار شتاب-سنج در نقاط مختلف آن نصب شده است. در شکل‌های ۱۴ و ۱۵ سازه نمونه‌ای که مورد بررسی قرار داده‌ایم، مشاهده می‌شود.

پس از حصول اطمینان از عملکرد روش‌های آنالیز مودال کارکردی، اینک این روش‌ها به‌منظور استخراج پارامترهای مودال سازه نمونه استفاده می‌شوند. در این آزمایش جهت اطمینان از تحریک صحیح همه مودهای سازه، تکرار تست تحت فرکانس‌های تحریک مختلف بیست و نه بار صورت گرفت.

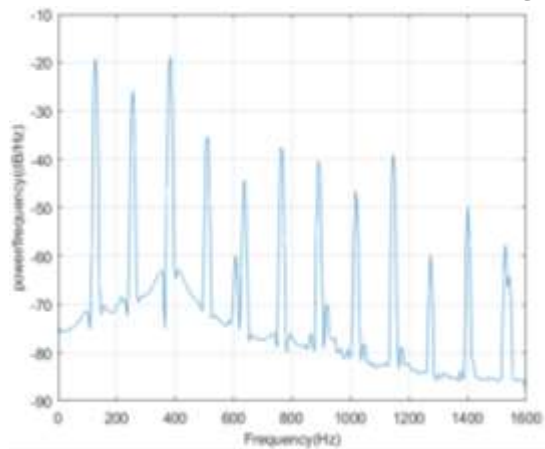
در این مقاله هدف اصلی ما، شناسایی فرکانس‌ها و ضرایب میرایی با استفاده از روش‌های آنالیز مودال کارکردی است؛ اما جهت اینکه دید جامعی نسبت به مودهای سازه مورد آزمایش شده داشته باشیم و همچنین مقایسه با

نرم افزار متلب رسم شده اند، برای تکرار تست های مختلف به صورت زیر می باشند.



شکل ۱۶- نمودار PSD سازه برای تست ۱۱۶ام

همانطور که در نمودارهای چگالی طیف توان نشان داده شده، فرکانس های سازه برای مودهای ابتدایی سازه مشخص می باشند که برای چهار مود اول به صورت است.



شکل ۱۷- نمودار PSD سازه برای تست ۱۱۸ام



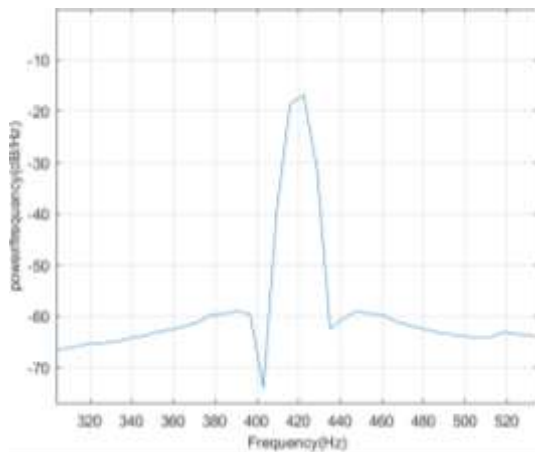
شکل ۱۴- نمای روبرو از سازه مورد آزمایش



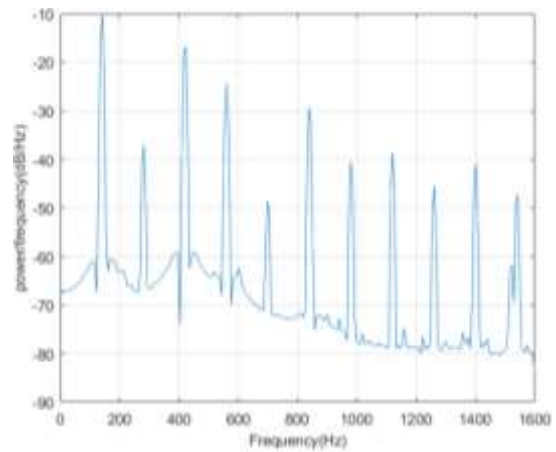
شکل ۱۵- نما از کنار سازه مورد آزمایش

فرکانس های به دست آمده از روش های آنالیز مودال کارکردی ابتدا به ترسیم نمودار چگالی طیف توان<sup>۱</sup> (PSD) می پردازیم. اطلاعاتی که از انجام تست مودال به دست می آید، می تواند از جنس شتاب، نیرو و جابجایی باشد. بدین معنی که شتاب-سنجها، نیروسنجها و یا کرنش سنجها تعدادی داده در فواصل زمانی ثابت و یا معین از تست مودال سازه دریافت می کنند. این داده ها فضای نمونه را تشکیل داده و توسط آن ها می توان تابع چگالی طیف توان را محاسبه کرد. PSD می تواند از جنس شتاب، سرعت، جابه جایی و یا نیرو باشد. PSD از روش های متفاوتی قابل محاسبه است. در روشی از این داده ها تبدیل فوریه سریع (FFT) گرفته و سپس با استفاده از FFT، PSD محاسبه می شود. در روشی دیگر با استفاده از داده ها، تابع خودهمبستگی محاسبه شده و سپس با استفاده از تابع خودهمبستگی تابع چگالی طیف توان محاسبه می گردد. در روش دوم، خصوصیات آماری داده ها نقش موثرتری در محاسبات PSD پیدا می کنند. نمودارهای PSD سازه که در

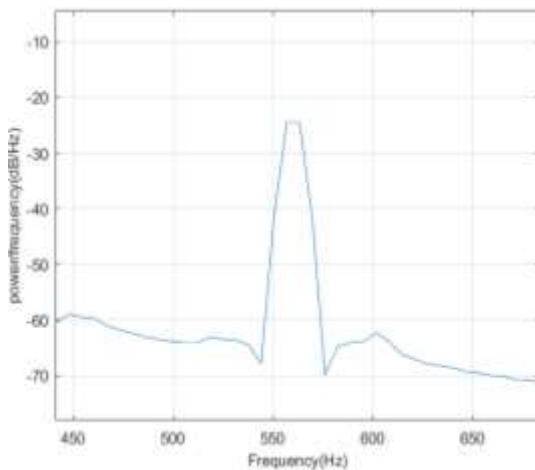
<sup>۱</sup> Power Spectral Density



شکل ۲۱- نمودار PSD سازه برای مود سوم



شکل ۱۸- نمودار PSD سازه برای تست ۱۲۹م

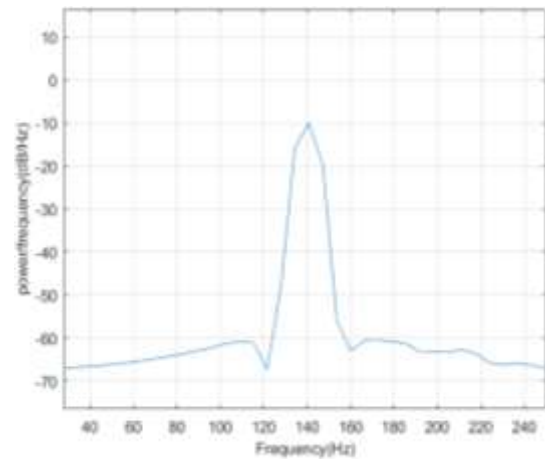


شکل ۲۲- نمودار PSD سازه برای مود چهارم

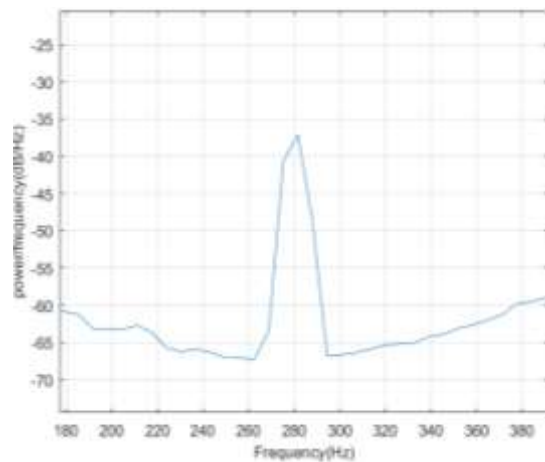
مقادیر فرکانس‌های طبیعی و ضرایب میرایی شناسایی شده با سه روش حوزه زمان ابراهیم، زیرفضای اتفاقی، تجزیه حوزه فرکانس پیشرفته در جداول زیر آورده شده‌اند.

جدول ۷- مقادیر فرکانس‌ها و ضرایب میرایی سازه با استفاده از روش ITD

$\zeta_n$	$\omega_n$	
۰/۱۵	۱۴۱/۷۳	مود اول
۰/۰۴۷	۲۸۰/۹۱	مود دوم
۰/۰۰۲۸	۴۲۰/۶۵	مود سوم



شکل ۱۹- نمودار PSD سازه برای مود اول



شکل ۲۰- نمودار PSD سازه برای مود دوم

ضرایب میرایی مودها بودند و نیز آنالیز حساسیت بین روش‌های حوزه زمان و فرکانس نشان داد که روش‌های حوزه زمان یعنی روش ابراهیم و زیرفضای اتفاقی تخمین‌های بهتری نسبت به روش تجزیه حوزه فرکانس می‌دهد، به جز مواردی که میرایی مود بسیار کم باشد؛ آنگاه روش تجزیه حوزه فرکانس برآورد بهتری دارد؛ همچنین با بررسی تحریک‌های مختلف این نتیجه حاصل شد که این روش‌ها به پاسخ‌های اندازه‌گیری شده تحت تحریک‌های تصادفی، برآوردهای دقیق‌تری می‌دهند مانند زمانی که سیستم در شرایط کارکرد واقعی خود است. پس از بررسی‌های صورت گرفته و مقایسه نتایج بدست آمده از روش‌های آنالیز مودال کارکردی با مقادیر دقیق فرکانس‌ها و ضرایب میرایی سیستم پنج درجه آزادی و حصول اطمینان از صحت بودن نتایج حاصل از روش‌های آنالیز مودال کارکردی این روش‌ها روی یک سازه واقعی پیاده‌سازی صنعتی شدند.

### ۵- مراجع

- [1] He J, Zhi-Fu F (2001) Modal Analysis 1st ed. Butterworth-Heinemann. United Kingdom.
- [2] خطیبی م، آشوری م (۱۳۹۳) انتخاب نقاط مرجع به کمک روش موقعیت مستقل موثر در آزمایش مودال محیطی سازه‌ها. مجله علمی پژوهشی مکانیک مدرس ۱۷۶-۱۶۷: ۴(۱۴).
- [3] Ewins DJ (2000) Modal Testing: Theory, Practice and Application. 2<sup>nd</sup> ed. England, Research Studies Press LTD.
- [4] Silva JMM, Maia NMM (1988) Single Mode Identification Techniques for Use with Small Micro Computers. J Sound Vibrat 124:13-26.
- [5] Avitabile P (2006) 101 Ways to Extract Modal Parameters- Which One Is for Me?. Exper Techniq 30(5):48-56.
- [6] Maia NMM (1988) Extraction of Valid Modal Properties from Measured Data in Structural Vibrations [PhD Thesis]. Imperial College of Science Technology. London.
- [7] Han J, Lu X, Wang F (2008) Comparison of Modal Parameter Identification Algorithms Based on Shaking Table Model Test Data. Proceed SPIE - Int Soc Optic Engin 7375.
- [8] Zheng LL (2012) Lathe Modal Parameters' Identification and Verification Based on the Global Method. Advanc Mater Res 479-481.
- [9] Klosterman A (1971) On the Experimental Determination and Use of Modal Representation of

جدول ۸- مقادیر فرکانس‌ها و ضرایب میرایی سازه با استفاده از روش SSI		
$\zeta_n$	$\omega_n$	
۰/۰۲۱	۵۶۱/۱۷	مود چهارم
۰/۱۸	۱۴۰/۶۲	مود اول
۰/۰۴۴	۲۷۹/۹۸	مود دوم
۰/۰۰۳۱	۴۲۰/۲۵	مود سوم
۰/۰۲۴	۵۶۰/۸۸	مود چهارم

جدول ۹- مقادیر فرکانس‌ها و ضرایب میرایی سازه با استفاده از روش EFDD		
$\zeta_n$	$\omega_n$	
۰/۲۹	۱۳۹/۷۵	مود اول
۰/۰۳۲	۲۸۱/۱۶	مود دوم
۰/۰۰۱۶	۴۲۱/۷۵	مود سوم
۰/۰۳۶	۵۶۱/۵۰	مود چهارم

### ۵- نتیجه‌گیری

بررسی‌های صورت گرفته در این پژوهش نشان می‌دهد که این روش‌ها به خوبی قادر به استخراج پارامترهای مودال مودهای ابتدایی سازه‌ها می‌باشند. ما به بررسی و آنالیز حساسیت سیستم پنج درجه آزادی پرداختیم که در این آنالیز حساسیت سه هدف را دنبال نمودیم؛ هدف اول، بررسی روش‌های آنالیز مودال کارکردی برای سازه‌هایی که مودهای نزدیک به هم دارند، هدف دوم مقایسه روش‌های حوزه زمان و فرکانس آنالیز مودال کارکردی و نهایتاً آنالیز حساسیت بین تحریک‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفت. همانطور که مشاهده شد، فرکانس مودهای سیستم مورد بررسی ما بین ۱ تا ۹ هرتز بود و روش‌های آنالیز مودال کارکردی مورد پژوهش ما به خوبی قادر به استخراج فرکانس‌ها و



- Implementation-Applications. 2012: Springer.
- [16] Van Overschee P, De Moor B (1993) Subspace algorithms for the stochastic identification problem. *Automatica* 29(3): 649-660.
- [17] Peeters B, De Roeck G, Pollet T, Schueremans L (1997) Stochastic subspace techniques applied to parameter identification of civil engineering structures. *New Advanc Modal Synth Large Struct* 145-156.
- [18] Ibrahim SR, Pappa R (1982) Large modal survey testing using the Ibrahim time domain identification technique. *J Spacecraft* 19(5): 459-465.
- [19] Peeters B, De Roeck G (2001) Stochastic System Identification for Operational Modal Analysis: A Review. *J Dynamic Syst Measur Ctrl* 123(4): 659-667.
- [20] Brincker R, Andersen P (2006) Understanding stochastic subspace identification. *Proceed 24<sup>th</sup> IMAC, St. Louis, Missouri*: 279-311
- [21] Gade Sh, Møller BN, Herlufsen H, Konstantin-Hansen H (2005). Frequency domain techniques for operational modal analysis. *JSAE Annual Congress*.
- Dynamic Characteristics [PhD Thesis] University of Cincinnati, Cincinnati.
- [10] Hanson D (2006) Operational Modal Analysis and Model Updating with a Cyclostationary Input [PhD Thesis] University of New South Wales, Australia.
- [۱۱] علی موری پ، مرادی ش، چینی پرداز ر (۱۳۹۶) بروزرسانی مدل اجزا محدود سازه توسط آنالیز مودال محیطی و الگوریتم بهینه‌سازی زنبور عسل. *مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شماره‌ها* ۱۳۳-۱۱۷: ۴(۷).
- [12] Bendat JS, Piersol AG (2011) *Random data: analysis and measurement procedures*. 4<sup>th</sup> ed. John Wiley & Sons.
- [13] Brincker R, Zhang L, Andersen P (2000) Modal identification from ambient responses using frequency domain decomposition. 18<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference (IMAC), San Antonio, Texas.
- [14] Brincker R, Ventura C, Andersen P (2001) Damping estimation by frequency domain decomposition. 19<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference.
- [15] Van Overschee P, De Moor B (2012) Subspace identification for linear systems: Theory-