



تحلیل ورق‌های تحت بارگذاری متمرکز دارای حرکت با استفاده از یک روش بدون المان با بازچیدمان گرهی تطبیقی

پوریا تورنجی پور^۱، سید امیر خسروی فرد^{۲*} و رامین وطن خواه^۲

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

^۲ استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۸/۰۶؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۰۹/۰۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۱/۰۸

چکیده

رفتار دینامیکی سیستم‌های پیوسته مانند تیرها و ورق‌ها تحت بارگذاری نیروی متحرک، از جمله موضوعات مهم در مهندسی است. در این تحقیق، از یک روش بدون المان جهت تحلیل پاسخ دینامیکی ورق‌های ضخیم تحت اثر نیروی متمرکز متحرک استفاده شده است. میدان جابجایی بر اساس تئوری تغییر فرم برشی مرتبه سه در نظر گرفته شده است. در این روش عددی، متغیرهای میدان تنها با استفاده از گره‌هایی میان‌یابی می‌شود که به طور هدفمند در دامنه مساله توزیع شده‌اند. به دلیل این که هیچ وابستگی بین گره‌ها نمی‌باشد، این امکان وجود دارد که در نواحی که نیرو وارد می‌شود، تراکم گره‌ها بالا برده شود. از دیگر ویژگی‌های روش ارائه شده، استفاده از توابع شکل نقطه‌ای شعاعی است که در برگزیده خاصیت تابع دلتای کرونگر است و شرایط مرزی اساسی را به راحتی ارضا می‌کند؛ همچنین به دلیل این که در این مسئله با چگالی بالای گره‌ها در مناطق اعمال نیرو مواجه هستیم، جهت دستیابی به دقت بالا و در عین حال سرعت مناسب، از روش انتگرال‌گیری تفکیک پس زمینه استفاده می‌کنیم. در این مقاله از شیوه‌ای جدید در چینش نقاط به صورت تطبیقی با حرکت نیروی متحرک استفاده شده است که دقت و سرعت حل را بالا خواهد برد. جهت اعتبار سنجی این روش، در نهایت به مقایسه نتایج آن با روش‌های تحلیلی خواهیم پرداخت.

کلمات کلیدی: بازچیدمان گرهی تطبیقی؛ روش بدون المان؛ نیروی متحرک؛ ورق ضخیم؛ روش انتگرال‌گیری تفکیک پس زمینه.

Analysis of Plates Under the Application of Moving Concentrated Loads using a Meshfree Method with Adaptive Re-Arrangement of Nodes

P. Tooranjipour¹, A. Khosravifard^{2,*}, R. Vatankhah

¹ Graduate Student, School of Mechanical Engineering, Shiraz University, Shiraz, Iran

² Assistant Prof., School of Mechanical Engineering, Shiraz University, Shiraz, Iran

Abstract

Dynamic behavior of continuous systems, such as beams and plates under the application of moving concentrated loads, is an important issue in engineering. In this study, a meshfree method is presented for the analysis of the dynamic response of thick plates under the influence of concentrated moving loads. The displacement field is based on the third-order shear deformation theory. In this numerical method, the field variables are interpolated only by using nodes distributed purposively in the computational domain. Since there is no connectivity between the nodes, it is possible to add nodes in the areas of application of the force. Another feature of the proposed method is the use of the radial point interpolation method (RPIM) shape functions which possess the Kronecker delta function property and therefore satisfies the essential boundary conditions easily. Also, due to the high density of nodal points in the vicinity of the point of application of the load, the background decomposition method (BDM) is used in order to achieve a high accuracy with appropriate speed. In this paper, nodes are re-arranged in the path of the moving load adaptively which leads to high accuracy and speed of the final solution. To validate the proposed method, the obtained results are compared with the analytical solutions.

Keywords: Adaptive Re-Arrangement of Nodes; Meshfree Method; Moving Load; Thick Plates; Background Decomposition Method.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۷۱-۳۶۱۳۳۴۱۶؛ فکس: ۰۷۱-۳۶۴۷۳۵۳۳

آدرس پست الکترونیک: khosravifard@shirazu.ac.ir

۱- مقدمه

بررسی رفتار دینامیکی سیستم‌های پیوسته تحت تاثیر نیرو یا جرم متحرک، به عنوان یکی از موضوعات مهم در مهندسی تلقی می‌شود. از کاربردهای این موضوع، می‌توان حوزه حمل و نقل، مانند حرکت یک جسم روی پل، ریل، حرکت هواپیما روی باند هواپیما و غیره را نام برد. به دلیل کاربردهای وسیع این موضوع در حوزه‌های مختلف مهندسی مانند، عمران، مکانیک و هوافضا، رفتار دینامیکی این سازه‌ها توسط بسیاری از محققان مورد تحقیق قرار گرفته است [۱ و ۲]. از ابتدایی-ترین مطالعات در این زمینه می‌توان به بررسی حرکت یک جسم روی یک پل اشاره کرد [۳]. در این تحقیق معادلات حرکت جسم روی پل که به صورت یک میله^۱ و یک جسم بدون وزن در نظر گرفته شده، فرمول بندی شده است. حل این معادلات با فرض‌هایی جهت ساده سازی معادلات توسط استوکس و همکاران [۴]، به کمک بسط سری‌ها ارائه شد. تیموشنکو [۵] بر اساس توابع ویژه و مقادیر ویژه حلی برای یک تیر دو سر گیردار تحت نیروی متحرک با سرعت ثابت ارائه کرد. روش‌های تحلیلی دیگری جهت تحلیل تیر و نیروی متحرک با استفاده از توابع گرین و معادلات انتگرالی که توسط محققین مختلف ارائه شده است، توسط فریبا گردآوری شده است [۲]. روش‌های تحلیلی برای حل معادلات تیر و نیروی متحرک تاکنون به عنوان یک مسئله باز مورد بررسی قرار می‌گیرد [۶]. در منابع نام برده شده به بررسی حرکت نیرو بر یک تیر پرداخته شده است؛ ولی با افزایش نسبت عرض به طول تیر رفتار دو بعدی مسئله ما را به سمت تحلیل ورق‌ها و پوسته‌ها سوق می‌دهد. بررسی رفتار دینامیکی در ورق‌ها به دلیل دو بعدی شدن مسئله نسبت به تیر پیچیده‌تر است؛ از این رو روش‌های مختلفی جهت بیان معادله و حل آن نیز مطرح شده است. رایزمن [۷] رفتار دینامیکی نوار^۲ تحت نیروی متحرک را توسط یک مساله مقدار مرزی^۳ بیان کرده و مورد بررسی قرار داده است. راسکه و همکاران [۸]، اثر نوسان نیروی متحرکی که روی یک مسیر دایره‌ای روی ورق نازکی در حال حرکت است را مورد مطالعه

قرار دادند. با افزایش ضخامت ورق‌ها، تاثیر تنش‌های برشی خود را بیشتر نشان می‌دهد، از این رو تئوری کلاسیک ورق با فرضیات کیرشهف دیگر به کار نخواهند آمد. شیراکاوا [۹] تئوری خمشی مرتبه یک جهت ورق‌های ضخیم برای تحلیل پاسخ دینامیکی ورق تحت نیروی متحرک را مورد استفاده قرار داده است. در اکثر مسائل کاربردی، با یک جرم متحرک روبرو هستیم تا با یک نیروی متحرک، از این رو با افزایش جرم متحرک نسبت به جرم ورق اثرات اینرسی خود را نشان خواهد داد. گبادیان و همکاران [۱۰]، اثرات جرم متحرک را روی ورق مورد مطالعه قرار دادند. در این روش که هم روی یک تیر اوپلر-برنولی و هم روی یک ورق انجام شده است، از سری فوریه و روش استرابل^۴ استفاده شده است. طاهری و همکاران [۱۱]، با استفاده از روش امیدانس سازه‌ای^۵ رفتار ورق نازک تحت بارگذاری جرم متحرک با شرایط مرزی دلخواه را مورد مطالعه قرار دادند. همانند روش‌های ارائه شده برای تحلیل تیرهای تحت بار متحرک، روش‌های تحلیلی نیز ارائه شده‌اند که هدف آنها ارائه جواب فرم بسته برای تحلیل سه بعدی ورق‌هاست [۱۲]؛ ولی با این وجود اگر شکل مسئله پیچیده باشد یا شرایط مرزی متمایزی از شرایط مرزی متداول داشته باشیم، استفاده از این روش‌ها بسیار مشکل و تا حدودی غیر ممکن خواهد شد. از این رو به روش‌های عددی و یا شبه تحلیلی برای حل چنین مسائلی نیازمندیم.

روش‌های عددی با طرح‌های گسسته‌سازی متفاوت، از جمله روش عددی المان محدود^۶ به طور گسترده در مسائل استاتیکی و دینامیک ورق‌ها، مورد استفاده قرار می‌گیرند. از ابتدایی‌ترین کارها در زمینه استفاده از روش المان محدود جهت تحلیل جرم متحرک و ورق می‌توان به پژوهش انجام شده توسط طاهری و تینگ [۱۳] اشاره کرد. در تحقیق اشاره شده با در نظر گرفتن معادله ورق نازک و استفاده از روش باقی‌مانده وزن دار گالرکین^۷ به گسسته‌سازی معادلات پرداخته شد. غفوری و اصغری [۱۴]، روش المان محدود را برای تحلیل مسئله جرم متحرک و ورق ضخیم کامپوزیت به کمک تئوری برشی مرتبه اول، مورد استفاده قرار دادند. زمان و

⁴ Struble's Method

⁵ Structural Impedance Approach

⁶ Finite Element Method

⁷ Galerkin Weighted Residual Method

¹ Bar

² Strip

³ Boundary Value Problem

تابع دلتای کروونکر^۶ را دارا نمی‌باشند. از این رو برای ارضای شرایط مرزی اساسی،^۷ نیاز به روش‌های زمان‌بر نظیر استفاده از روش ضرایب لاگرانژ^۸ هستیم [۱۹]. میکاییلی و بهجت [۲۰] از توابع شکل حداقل مربعات متحرک سه بعدی^۹ که خاصیت تابع دلتای کروونکر را دارا نمی‌باشد، همراه با ضرایب لاگرانژ برای تحلیل خمش ورق‌های ضخیم هدفمند استفاده کردند. برای حل مشکل ارضای شرایط مرزی اساسی، توابع شکل روش درون‌یابی شعاعی نقطه‌ای^{۱۰} ارائه شدند. بویی و همکاران [۲۱]، از روش بدون المان درون‌یابی شعاعی نقطه‌ای جهت تحلیل استاتیکی و دینامیکی تیرهای ساندویچی با هسته‌ای از مواد مدرج تابعی^{۱۱} استفاده کردند. با توجه به مزایای روش‌های بدون المان در تحلیل مسائل، به ویژه در مسائلی که نیاز به شبکه بندی مجدد هست، مانند مسئله نیروی متحرک، در این تحقیق از روش بدون المان درون‌یابی شعاعی نقطه‌ای استفاده می‌کنیم. بر اساس مطالعات نویسندگان، تاکنون تحلیل ورق‌های تحت نیرو یا جرم متحرک به وسیله روش بدون المان انجام نشده است؛ در حالیکه این روش‌ها می‌توانند از بهترین گزینه‌ها برای تحلیل تطبیقی چنین مسائلی باشند.

در این تحقیق، از روش بدون المان درون‌یابی شعاعی نقطه‌ای جهت تحلیل رفتار دینامیکی ورق‌های ضخیم تحت بارگذاری نیروی متحرک استفاده شده است. تئوری تغییر شکل ورق، تئوری تغییر فرم برشی مرتبه سه^{۱۲} است که برای ورق‌های ضخیم هم به کار می‌رود. این تئوری بر خلاف تئوری برشی مرتبه یک^{۱۳} قفل‌شدگی برشی^{۱۴} و ضریب تصحیح برشی^{۱۵} نداشته و صفر شدن تنش‌های برشی بر سطوح آزاد را نیز ارضا می‌کند. نوآوری‌های ارائه شده در مقاله حاضر برای تحلیل رفتار دینامیکی ورق تحت اثر نیروی متحرک را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

همکاران [۱۵] به کاربرد جرم متحرک و ورق ضخیم در نشست هواپیما روی باند فرودگاه اشاره می‌کنند و بستر باند را بصورت فنرهایی شبیه‌سازی شده در نظر می‌گیرند و معادلات و روش عددی المان محدود را برای آن استخراج می‌کنند. استفاده از روش المان محدود در زمینه حرکت جرم متحرک و ورق‌هایی با ساختار مختلف تا هم اکنون نیز ادامه دارد. از معایب اصلی روش المان محدود، می‌توان به وابسته بودن آن به المان‌ها و کیفیت شبکه بندی اشاره کرد [۱۶]؛ همچنین تولید شبکه در مسائلی که با تغییرات جابجایی زیاد یا رشد ترک مواجه هستیم، بسیار مشکل و زمان‌بر است. در مسئله نیروی متحرک روی یک ورق، تولید شبکه در هر گام^۱ برای بالا بردن دقت نیاز است. در تمامی منابع نام برده شده، از قبل از حل مساله، شبکه طوری ساخته می‌شود که در هر گام نیرو روی گره‌ها واقع شود و نیازی به شبکه مجدد نداشته باشیم؛ ولی همانطور که واضح است، در هر گام اطراف گره‌ای که نیرو به آن وارد می‌شود، به دلیل تمرکز تنش زیاد نیازمند به شبکه‌بندی ریز هستیم. از این رو روش المان محدود برای رسیدن به دقت‌های بالا، کارایی و جذابیت خود را به دلیل عدم انطباق شبکه در هر گام از دست می‌دهد. اخیراً روش‌های بدون المان^۲ با توجه به دلایل ذکر شده مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است.

مدل سازی و تحلیل مسائل با بارگذاری و شرایط مرزی پیچیده، به راحتی به کمک روش‌های بدون المان قابل انجام است. در این روش‌ها به دلیل عدم اتصال گره‌ها به یکدیگر بر خلاف روش المان محدود، آزادی عمل بیشتری در اضافه یا کم کردن گره‌ها در مکان‌های مورد نظر وجود دارد. راتو و همکاران [۱۷]، با استفاده از روش بدون المان، رشد ترک و شکست را مورد مطالعه قرار داده‌اند. از دیگر کاربردهای روش‌های بدون المان، می‌توان به تحقیق تراسک و همکاران [۱۸] اشاره کرد که حل معادلات استوکس در سیالات و تطبیق پذیری^۳ بین سرعت و فشار سیال را مورد بررسی قرار داده است. در برخی روش‌های بدون المان نظیر، روش بدون المان گالرکین و پتروف گالرکین محلی^۴ توابع شکل^۵ خاصیت

⁵ Shape Functions

⁶ Kronecker Delta Function Property

⁷ Essential Boundary Condition

⁸ Lagrange Multiplier Method

⁹ 3D Moving Least Squares (MLS)

¹⁰ Radial Point Interpolation Method (RPIM)

¹¹ Functionally Graded Materials (FGM)

¹² Third-Order Shear Deformation Theory (TSDT)

¹³ First-Order Shear Deformation Theory (FSDT)

¹⁴ Shear Locking

¹⁵ Shear Correction Factor

¹ Step

² Meshless Methods

³ Compatibility

⁴ Meshless Local Petrove Galerkin Method (MLPG)

۲- معادلات حاکم بر ورق بر اساس تئوری تغییر

شکل برشی مرتبه سه

در این قسمت معادلات حاکم بر ورقی به ضخامت h بر اساس روش ارایه شده توسط ردی [۲۳] استخراج می شود. در این روش از ۵ متغیر میدان $u, v, w, \varphi_x, \varphi_y$ استفاده می شود که به ترتیب جابجایی در جهات x, y, z ، چرخش حول محور y و چرخش حول محور x است. در این روش، میدان جابجایی طبق روابط زیر بیان می شود

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z \left\{ \varphi_x - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right\} \quad (1)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z \left\{ \varphi_y - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right\} \quad (2)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (3)$$

u_0, v_0, w_0 جابجایی صفحه میانی در راستای x, y, z هستند. نمایش ماتریسی روابط (۱) - (۳) به صورت زیر است.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z^3 c_1 \frac{\partial}{\partial x} & z - z^3 c_1 & 0 \\ 0 & 1 & -z^3 c_1 \frac{\partial}{\partial y} & 0 & z - z^3 c_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = \mathbf{L}_u \mathbf{u} \quad (4)$$

در رابطه (۴) $c_1 = 4/3h^2$. با فرض مقادیر جابجایی و کرنش های کوچک، روابط بین کرنش-جابجایی به صورت رابطه ماتریسی (۵) قابل بیان است:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}_d \mathbf{u} \quad (5)$$

که در آن $\boldsymbol{\varepsilon}$ بردار کرنش $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yz}]^T$ و $\mathbf{u} = [u_0 \ v_0 \ w_0 \ \varphi_x \ \varphi_y]^T$ بردار جابجایی بوده و عملگر \mathbf{L}_d عبارتست از:

در این تحقیق بر خلاف مقالات [۹، ۱۳ و ۱۵] و سایر مقالات مشابه که از روش المان محدود جهت تحلیل مساله بار متحرک استفاده کرده اند، برای نخستین مرتبه از روش بدون المان درون یایی نقطه ای شعاعی استفاده شده است. از مزیت های این روش، می توان به چیدمان دلخواه و تطبیقی گره ها در مسیر نیرو و عدم وابستگی گره ها به یکدیگر اشاره کرد. این روش بر خلاف روش المان محدود، نیازی به شبکه بندی مجدد ندارد، از این رو تعداد گره ها می تواند بهینه باشد.

در این تحقیق بر خلاف برخی از روش های تحلیلی ارائه شده مانند [۱۲]، توانایی حل مسائل با شکل هندسی پیچیده یا مسیر پیچیده حرکت نیرو وجود دارد. در این مقاله از شیوه ای جدید در چینش نقاط به صورت تطبیقی با حرکت نیروی متحرک استفاده شده است که دقت حل را بالا خواهد برد.

به دلیل این که در این مسئله با چگالی بالای گره ها در مناطق اعمال نیرو مواجه هستیم، جهت افزایش دقت حل، نیاز به روش انتگرال گیری عددی داریم که وابسته به چگالی نودها باشد. از این رو در این مقاله از روش انتگرال گیری تفکیک پس زمینه^۱ [۲۲] استفاده شده است که به تفصیل در بخش مربوطه، مزایای آن نسبت به بقیه روش های انتگرال گیری مورد بحث قرار خواهد گرفت.

ساختار این تحقیق در ادامه، به این گونه است: ابتدا در بخش دوم معادلات حاکم بر ورق ضخیم و میدان جابجایی بر اساس تئوری برشی مرتبه سه فرمول بندی خواهد شد. در بخش سوم توضیحی بر فرمول بندی روش بدون المان و ساخت توابع شکل داده خواهد شد و بعد از آن به گسسته سازی معادلات بر اساس تقریب متغیر میدان پرداخته می شود. سپس روش انتگرال گیری تفکیک پس زمینه برای بدست آوردن ماتریس های جرم، سختی و بردار نیرو فرمول بندی خواهد شد. در بخش چهارم، جهت اعتبار سنجی روش ارائه شده، به مقایسه نتایج آن با روش های تحلیلی خواهیم پرداخت. در انتها، نتیجه گیری های انجام شده مطرح خواهد شد.

¹ Background Decomposition Method (BDM)

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m a_i p_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^n b_j R_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a} + \mathbf{R}^T(\mathbf{x})\mathbf{b} \quad (7)$$

$u^h(\mathbf{x})$ تقریب $u(\mathbf{x})$ در نقطه \mathbf{x} است و $R_j(\mathbf{x})$ و $p_i(\mathbf{x})$ به ترتیب توابع پایه شعاعی و چند جمله‌ای است؛ n تعداد گره-های داخل دامنه پشتیبان و m تعداد جملات تابع پایه چند جمله‌ای بوده و a_i و b_j ضرایب مجهول می‌باشند. بردارهای $\mathbf{R}^T(\mathbf{x})$ ، $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ ، \mathbf{a} و \mathbf{b} طبق روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{R}^T(\mathbf{x}) = [R_1(\mathbf{x}), R_2(\mathbf{x}), R_3(\mathbf{x}), \dots, R_n(\mathbf{x})] \quad (8)$$

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), p_3(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x})] \quad (9)$$

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]^T \quad (10)$$

$$\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3, \dots, b_m]^T \quad (11)$$

در منابع علمی، توابع پایه شعاعی متفاوتی موجود است که از پرکاربردترین آن‌ها می‌توان به توابع مالتی-کواریک^۲، گوسی^۳ و اسپیلاین ورق نازک^۴ یا تی-پی-اس اشاره کرد. در پژوهش حاضر از تابع پایه شعاعی تی-پی-اس طبق رابطه (۱۲) استفاده می‌کنیم.

$$R_i(\mathbf{x}) = r_i^\eta \quad (12)$$

در این معادله η پارامتر ثابت روش تی-پی-اس است. مطابق تحقیقات لیو و گو [۲۴]، انتخاب یکی از مقادیر 3.001، 4.001 و 5.001 برای η منجر به دقت قابل قبولی می‌شود. تابع پایه شعاعی، تابعی از فاصله بین نقطه \mathbf{x} و گره \mathbf{x}_i است. تابع پایه چند جمله‌ای برای حالت دو بعدی و $m = 6$ طبق رابطه (۱۳) نشان داده شده است.

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2] \quad (13)$$

ضرایب a_i و b_j در معادله (۷) به عنوان مجهول‌های روش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی می‌باشند. تعداد این مجهولات $m + n$ است، بنابراین نیازمند به همین تعداد معادله برای بدست آوردن این مجهولات می‌باشیم. با احراز معادله (۷) در n گره داخل ناحیه پشتیبان داریم

$$\sum_{i=1}^m a_i p_i(\mathbf{x}_k) + \sum_{j=1}^n b_j R_j(\mathbf{x}_k) = u_k = u(\mathbf{x}_k) \quad (k = 1, \dots, n) \quad (14)$$

$$\mathbf{L}_d = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -z^3 c_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & (z - c_1 z^3) \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -z^3 c_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & -2z^3 c_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & (z - c_1 z^3) \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & (1 - 3z^2 c_1) \frac{\partial}{\partial x} & (1 - 3z^2 c_1) \\ 0 & 0 & (1 - 3z^2 c_1) \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ & & & 0 \\ & & & (z - c_1 z^3) \frac{\partial}{\partial y} \\ & & & (z - c_1 z^3) \frac{\partial}{\partial x} \\ & & & 0 \\ & & & (1 - 3z^2 c_1) \end{bmatrix} \quad (6)$$

۳- روش بدون المان درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی برای تحلیل دینامیکی ورق‌ها با بازچیدمان تطبیقی گرهی

در این قسمت، ابتدا مرور کوتاهی بر روش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی انجام می‌دهیم، سپس با استفاده از این روش و اصل همپلتون، دستگاه معادلات گسسته برای تحلیل دینامیکی ورق تحت بار متحرک را بدست می‌آوریم.

۳-۱- روش درون‌یابی شعاعی نقطه‌ای

در روش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی [۲۴]، هر یک از مؤلفه‌های میدان جابجایی مانند $u(\mathbf{x})$ در نقطه‌ای مانند \mathbf{x} به عنوان تابع مجهول در دامنه پشتیبان^۱ Ω_x تقریب زده می‌شود. فرض می‌کنیم، در دامنه مسئله Ω که اینجا منظور همان صفحه میانی ورق است، N گره در نظر گرفته شود. برای درون‌یابی تابع u در نقطه \mathbf{x} ، در ابتدا n گره را انتخاب می‌کنیم که در نزدیکی نقطه \mathbf{x} و در درون دامنه پشتیبان این نقطه قرار دارند. سپس رابطه کلی درون‌یابی را به فرم (۷) می‌نویسیم:

² Multiquadrics Functions

³ Gaussian Functions

⁴ Thin-Plate Spline

¹ Support Domain

که بردار توابع شکل درون یابی نقطه‌ای شعاعی است و مطابق رابطه (۲۵) تعیین خواهد شد

$$\psi = p^T(\mathbf{x})s_a + R^T(\mathbf{x})s_b = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n] \quad (25)$$

از ویژگی‌های مهم توابع شکل نقطه‌ای شعاعی، می‌توان به داشتن خاصیت تابع دلتای کرانکر اشاره کرد.

$$\phi_I(X_j) = \delta_{Ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } I = j \\ 0 & \text{for } I \neq j \end{cases} \quad (26)$$

این خاصیت مهم در ارضا کردن شرط‌های مرزی اساسی کمک موثری خواهد کرد.

۳-۲- گسسته سازی معادلات حاکم

طبق اصل همیلتون، در یک بازه زمانی دلخواه از t_1 تا t_2 تغییرات انتگرال زمانی لاگرانژین سیستم صفر است:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \bar{L} dt = 0 \quad (27)$$

تابع \bar{L} همان لاگرانژین سیستم بوده و به صورت رابطه (۲۸) تعریف می‌شود

$$\bar{L} = \Pi - T - \bar{F} \quad (28)$$

در رابطه (۲۸)، Π انرژی کرنشی کل سیستم، T انرژی جنبشی و \bar{F} کار انجام شده توسط نیروهای پایستار خارجی که خود شامل، نیروهای حجمی \mathbf{b} و سطحی \mathbf{t}_Γ است. اجزای معادله (۲۸) به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{L}_a \mathbf{u})^T \mathbf{D} \mathbf{L}_a \mathbf{u} d\Omega \quad (29)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\mathbf{L}_u \dot{\mathbf{u}})^T (\mathbf{L}_u \dot{\mathbf{u}}) d\Omega \quad (30)$$

$$\bar{F} = \int_{\Omega} \mathbf{b}^T (\mathbf{L}_u \mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t}_\Gamma^T (\mathbf{L}_u \mathbf{u}) d\Gamma \quad (31)$$

ρ چگالی ورق و \mathbf{D} ماتریس ضرایب الاستیک است که برای ورق‌های ضخیم طبق رابطه (۳۲) تعریف می‌شود [۲۶]

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \times \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

در معادله (۱۴)، u_k مقدار تابع u در گره k ام است. نمایش ماتریسی این معادله به صورت رابطه (۱۵) است:

$$\mathbf{R}_Q \mathbf{b} + \mathbf{p}_m \mathbf{a} = \hat{\mathbf{u}} \quad (15)$$

$\hat{\mathbf{u}}$ ، \mathbf{p}_m و \mathbf{R}_Q طبق روابط (۱۶) تعریف می‌شوند

$$\hat{\mathbf{u}} = [u_1, u_2, u_3, \dots, u_n]^T \quad (16)$$

به عبارت دیگر $\hat{\mathbf{u}}$ بردار جابجایی تمام گره‌های درون ناحیه پشتیبان نقطه \mathbf{x}_Q است.

$$\mathbf{R}_Q = \begin{bmatrix} R_1(\mathbf{x}_1) & R_2(\mathbf{x}_1) & \dots & R_n(\mathbf{x}_1) \\ R_1(\mathbf{x}_2) & R_2(\mathbf{x}_2) & \dots & R_n(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(\mathbf{x}_n) & R_2(\mathbf{x}_n) & \dots & R_n(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (17)$$

$$\mathbf{p}_m = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \dots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \dots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \dots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (18)$$

دستگاه معادله (۱۴) شامل، n معادله و $m+n$ مجهول است. گلبرگ و همکاران [۲۵]، m شرط تعامد زیر را به عنوان تضمین کننده رسیدن به پاسخ یکتا و بهترین فرم درون یابی برای معادله (۷) ارائه کردند:

$$\mathbf{p}_m^T \mathbf{b} = 0 \quad (19)$$

با استفاده از معادلات (۱۴) و (۱۹)، \mathbf{a} و \mathbf{b} طبق روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\mathbf{a} = \mathbf{s}_a \hat{\mathbf{u}} \quad (20)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{s}_b \hat{\mathbf{u}} \quad (21)$$

که \mathbf{s}_a و \mathbf{s}_b طبق روابط (۲۲-۲۳) تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{s}_a = [\mathbf{p}_m^T \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{p}_m]^{-1} \mathbf{p}_m^T \mathbf{R}_Q^{-1} \quad (22)$$

$$\mathbf{s}_b = \mathbf{R}_Q^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{p}_m \mathbf{s}_a] \quad (23)$$

با جایگذاری معادلات (۲۰) و (۲۱) در معادله (۷)، فرم درون یابی بصورت (۲۴) بازنویسی می‌شود

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n u_i \phi_i(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\phi} \quad (24)$$

به رابطه (۲۴) به صورت رابطه (۳۳) تقریب زده می‌شوند:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^n \Phi_I \mathbf{u}_I = \sum_{I=1}^n \begin{pmatrix} \Phi_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_I \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_I \\ \hat{v}_I \\ \hat{w}_I \\ \hat{\varphi}_{xI} \\ \hat{\varphi}_{yI} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

سختی \mathbf{M} و \mathbf{K} توسط سر هم کردن ماتریس‌های مربوط به گره I و J طبق روابط زیر ساخته می‌شوند

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J dz d\Omega \quad (35)$$

$$\mathbf{M}_{IJ} = \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{H}_I^T \rho \mathbf{H}_J dz d\Omega \quad (36)$$

ماتریس‌های \mathbf{B} و \mathbf{H} طبق روابط زیر تعریف می‌شوند.

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_I}{\partial x} & 0 & -z^3 c_1 \frac{\partial^2 \phi_I}{\partial x^2} & (z - c_1 z^3) \frac{\partial \phi_I}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_I}{\partial y} & -z^3 c_1 \frac{\partial^2 \phi_I}{\partial y^2} & 0 & (z - c_1 z^3) \frac{\partial \phi_I}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_I}{\partial y} & \frac{\partial \phi_I}{\partial x} & -2z^3 c_1 \frac{\partial^2 \phi_I}{\partial x \partial y} & (z - c_1 z^3) \frac{\partial \phi_I}{\partial y} & (z - c_1 z^3) \frac{\partial \phi_I}{\partial x} \\ 0 & 0 & (1 - 3z^2 c_1) \frac{\partial \phi_I}{\partial x} & (1 - 3z^2 c_1) \phi_I & 0 \\ 0 & 0 & (1 - 3z^2 c_1) \frac{\partial \phi_I}{\partial y} & 0 & (1 - 3z^2 c_1) \phi_I \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{H}_I = \begin{bmatrix} \phi_I & 0 & -z^3 c_1 \frac{\partial \phi_I}{\partial x} & (z - c_1 z^3) \phi_I & 0 \\ 0 & \phi_I & -z^3 c_1 \frac{\partial \phi_I}{\partial y} & 0 & (z - c_1 z^3) \phi_I \\ 0 & 0 & \phi_I & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

که α و δ پارامترهای روش نیومارک است. با قرار دادن روابط (۴۰) و (۴۱) در رابطه (۳۴)، به دستگاه معادلات (۴۲)

خواهیم رسید:

$$\hat{\mathbf{K}} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \hat{\mathbf{F}} \quad (42)$$

که در آن $\hat{\mathbf{K}}$ و $\hat{\mathbf{F}}$ به صورت زیر بدست تعریف می‌شوند:

$$\hat{\mathbf{K}} = a_0 \mathbf{M} + \mathbf{K} \quad (43)$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{M}(a_0 \mathbf{u}_n + a_2 \dot{\mathbf{u}}_n + a_3 \ddot{\mathbf{u}}_n) \quad (44)$$

در روابط فوق، $a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}$ ، $a_2 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t^2}$ و $a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$ با انتخاب $\delta = \frac{1}{2}$ و $\alpha = \frac{1}{4}$ ، الگوریتم نیومارک بدون شرط پایدار خواهد شد.

E و ν به ترتیب مدول یانگ و ضریب پواسون است. هر یک از ۵ متغیر مکانی مورد استفاده در تئوری خمشی مرتبه ۳ بنا

بردار \mathbf{u}_I در بردارنده مقادیر گرهی بردار \mathbf{u} در نود I است. با قرار دادن رابطه (۳۳) در روابط (۲۹) تا (۳۱) و سپس با جایگذاری در رابطه (۲۸) و نهایتاً در رابطه (۲۷)، به دسته معادله گسسته شده (۳۴) خواهیم رسید

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (34)$$

در آن \mathbf{M} و \mathbf{K} به ترتیب ماتریس جرم و ماتریس سختی است. نیروهای خارجی نیز در بردار \mathbf{F} قرار گرفته‌اند. ماتریس جرم و

بردار \mathbf{F} که بردار کلی نیرو است، در گره I به صورت رابطه (۳۹) ساخته می‌شود

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Omega} (\mathbf{L}_u \Phi_I)^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{L}_u \Phi_I)^T \mathbf{t}_\Gamma d\Gamma \quad (39)$$

متداول‌ترین روشی که برای حل دستگاه معادلات به فرم (۳۴) استفاده می‌شود، روش نیومارک است. در این روش، میدان جابجایی و سرعت را در هر بازه زمانی $[t, t + \Delta t]$ به صورت زیر تقریب می‌زنیم.

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + [(1 - \delta) \ddot{\mathbf{u}}_n + \delta \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}] \Delta t \quad (40)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \dot{\mathbf{u}}_n \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\mathbf{u}}_n + \alpha \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \right] \Delta t^2 \quad (41)$$

در مرحله اول به هر نود یک مقدار فاصله^۱ اختصاص داده می‌شود. به این صورت که میانگین فاصله هر گره از دو گره کناری خود را به عنوان مقدار فاصله در هر گره در نظر می‌گیریم. بیشترین و کمترین مقدار فاصله با s_{min} و s_{max} نشان داده شده است. برای فواصل گرهی، R درجه^۲ مختلف را طبق روابط زیر در نظر می‌گیریم.

grade 1: $s \in [s_1 s_2]$, $\bar{s}_1 = (s_1 + s_2)/2$	(۴۵)
grade 2: $s \in [s_2 s_3]$, $\bar{s}_2 = (s_2 + s_3)/2$	
grade R: $s \in [s_R s_{R+1}]$, $\bar{s}_R = (s_R + s_{R+1})/2$	

که $\bar{s}_i, i = 1, \dots, R$ و $s_R = s_{max}$, $s_1 = s_{min}$ میانگین مقدار فاصله در درجه i است. برای تعیین مقدار R ، از رابطه پیشنهادی $2 \leq s_{i+1}/s_i \leq 3$ استفاده می‌کنیم.

در مرحله دوم، ناحیه انتگرال گیری به زیر ناحیه‌هایی تقسیم می‌شوند که در هر یک از آنها گره‌ها مقدار فاصله مشابهی دارند. برای این منظور، در مسئله دو بعدی یک مربع که مرز را در بر می‌گیرد، در نظر گرفته می‌شود. این مربع را به صورت تکراری به چهار قسمت تقسیم می‌کنیم تا به جایی برسیم که تمام گره‌های واقع در هر زیر ناحیه متعلق به یک درجه باشند.

مرحله سوم، نحوه جایگیری نقاط انتگرال گیری در هر زیر ناحیه و وزن‌های مربوط به هر نقطه را مشخص خواهد کرد و در نهایت مقدار انتگرال عددی روی زیر ناحیه‌ها محاسبه خواهد شد. از آن جایی که چگالی پراکندگی گره‌ها در هر زیر ناحیه با یکدیگر برابر است، می‌توان از هر روش انتگرال گیری عددی متداول در هر یک از این زیر ناحیه‌ها استفاده کرد. در این مقاله برای این منظور، از روش تبدیل کارتیزین استفاده می‌کنیم. انتگرال تابع $g(\mathbf{x})$ روی زیر ناحیه Ω_i را در نظر بگیریم

$$I = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) d\Omega \quad (۴۶)$$

شکل ۱ یک زیر ناحیه نمونه را نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود، این زیر دامنه در بردارنده بخشی از دامنه اصلی مساله است.

۳-۳- تکنیک انتگرال گیری تفکیک پس زمینه
برای بدست آوردن ماتریس‌های سختی، جرم و بردار نیرو در روابط (۳۵) - (۳۶) و (۳۷)، نیاز به گرفتن انتگرال روی دامنه Ω داریم. روش‌های متفاوتی جهت محاسبه عددی انتگرال‌های دامنه‌ای موجود است. بلیچکو و همکاران [۲۷] تاثیر ناحیه انتگرال گیری در روش بدون المان گالرکین را روی دقت پاسخ‌ها مطالعه کرده و بیان داشتند که انتخاب روش انتگرال گیری در دقت و صحت جواب‌های نهایی بسیار مهم است. از رایج‌ترین روش‌های انتگرال گیری عددی، می‌توان به روش شبکه منظم پس زمینه اشاره کرد [۲۴]. این روش به دلیل شبکه منظمی که ایجاد می‌کند، قادر به تشخیص دقیق مرزها به ویژه مرزهای منحنی نمی‌باشد. خسروی فرد و هم‌تیمان [۱۶]، روشی برای محاسبه انتگرال‌های دامنه‌ای بدون گسسته سازی دامنه انتگرال گیری ارائه کردند. در این روش که به روش تبدیل کارتیزین معروف است، انتگرال دامنه‌ای به یک انتگرال مرزی و یک انتگرال یک بعدی تبدیل می‌شود. این روش در ترکیب با روش‌های بدون المان مبتنی بر فرم ضعیف کلی، روشی حقیقتاً بدون المان را می‌سازد که معایب روش مش بندی پس‌زمینه را برطرف می‌کند.

به دلیل این‌که در مسئله مورد مطالعه در این پژوهش، با چگالی متفاوت گره‌ها در قسمت‌های مختلف مواجه هستیم، جهت افزایش دقت حل، نیاز به روش انتگرال گیری عددی داریم که چیدمان نقاط انتگرال گیری آن مطابق با شیوه چیدمان گره‌های مساله باشد. هم‌تیمان و همکاران [۲۲]، روشی جدید بر پایه روش تبدیل کارتیزین ارائه کردند که قابلیت در نظر گرفتن چگالی نقاط و توزیع نقاط انتگرال گیری به صورت خودکار و متناسب با نحوه توزیع نودها را دارا است. آنها تکنیک خود را، روش تفکیک پس زمینه نامیدند. این روش، برای تحلیل سریع و دقیق مسائلی که چگالی نودها در نقاط مختلف دامنه متفاوت است، بسیار پرکاربرد است. در این مقاله از روش انتگرال گیری تفکیک پس زمینه [۲۲] استفاده شده است. این روش از چهار مرحله مختلف تشکیل شده است که به طور خلاصه عبارتند از:

¹ Space Value
² Grade

حال مقدار انتگرال در هر یک از بازه‌های $[y_i, y_{i+1}]$ را با کمک روش گوس m نقطه‌ای به صورت رابطه (۵۳) می‌نویسیم:

$$I_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m J_i w_j I(y(\eta_j)) \quad (53)$$

در آن w_j و η_j به ترتیب نقاط انتگرال‌گیری و وزن‌های روش گوس m نقطه‌ای می‌باشند. به این ترتیب، به رابطه (۵۴) خواهیم رسید

$$I_k = \sum_{i=1}^{N_k} w_i^k(x_i) g(x_i) \quad (54)$$

N_k تعداد کل نقاط انتگرال‌گیری در زیر ناحیه Ω_k ، x_i مختصات نقطه انتگرالی و $w_i^k(x_i)$ وزن مربوطه است.

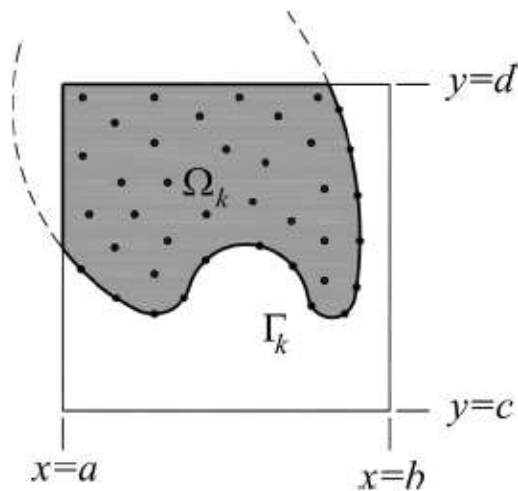
در مرحله چهارم، به ساخت ماتریس‌های کلی می‌پردازیم. این ماتریس‌ها همان‌طور که در ابتدای این بخش گفته شد، در ساخت ماتریس جرم، سختی و بردار نیرو که به فرم انتگرال روی ناحیه Ω است، به کار خواهند رفت. اگر فرض کنیم که در کل p زیر ناحیه انتگرالی داریم، انتگرال روی ناحیه Ω از رابطه (۵۵) بدست خواهد آمد

$$I = \sum_{k=1}^p I_k = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^{N_k} w_j^k g(Q_j^k) = \sum_{n=1}^N W_n g(Q_n) = \mathbf{W}^T \mathbf{g}_{int} \quad (55)$$

که Q_1, Q_2, \dots, Q_n مختصات نقاط انتگرال‌گیری، N تعداد کل نقاط انتگرال‌گیری، N_k تعداد نقاط در زیر ناحیه k ، \mathbf{W} بردار کلی وزن و \mathbf{g}_{int} برداری است که مقدار تابع g در نقاط انتگرالی را در بردارد.

۴- محاسبات عددی و بحث در نتایج

در این مطالعه، جهت اعتبار سنجی روش ارائه شده، نتایج را با روش تحلیلی ارائه شده توسط باباگی و همکاران [۱۲] مقایسه خواهیم کرد. برای این منظور، یک ورق مستطیلی با خواص مکانیکی و هندسی زیر را در نظر می‌گیریم (شکل ۲ را ببینید) $E = 2.1 \times 10^{11} \left(\frac{N}{m^2}\right)$ ، $\rho = 7800 \left(\frac{kg}{m^3}\right)$ ، $\nu = 0.3$ ، $F_c = 0.05 \times 9.81(N)$ و $b = a = 1$ که در آن E ، ρ ، ν ، F_c ، b و a به ترتیب مدول یانگ، چگالی، ضریب پواسون، اندازه نیروی متمرکز و اندازه‌های عرضی و طولی



شکل ۱- یک زیر دامنه نمونه، Ω_k

برای محاسبه انتگرال روی ناحیه Ω_k با توجه به شکل ۱ داریم:

$$I_k = \int_{\Omega_k} g(x, y) d\Omega = \int_c^d \left(\int_a^b h(x, y) dx \right) dy \quad (47)$$

که $h(x, y)$ به صورت رابطه (۴۸) تعریف می‌شود

$$h(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & (x, y) \in \Omega_k \\ 0 & (x, y) \notin \Omega_k \end{cases} \quad (48)$$

برای سادگی، رابطه (۴۹) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$I_k = \int_c^d I(y) dy \quad (49)$$

در این جا برای محاسبه هر یک از انتگرال‌های یک بعدی در رابطه (۴۷)، از روش انتگرال‌گیری عددی گوس طبق رابطه (۵۰) استفاده می‌کنیم

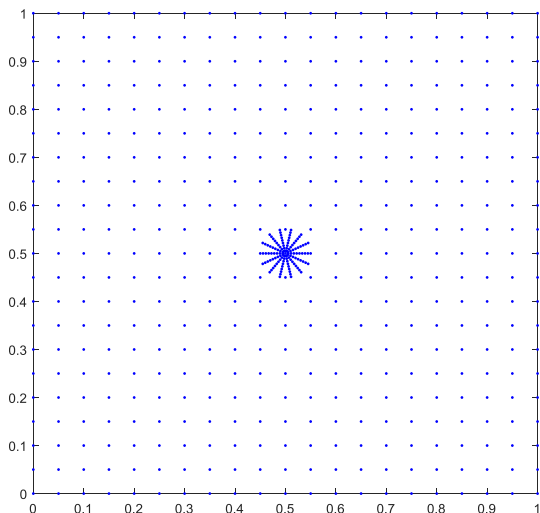
$$I_k = \sum_{i=1}^n \left(\int_{y_i}^{y_{i+1}} I(y) dy \right) = \sum_{i=1}^n \left(\int_{-1}^1 I(y(\eta)) J_i d\eta \right) \quad (50)$$

که در این جا بازه $[c, d]$ را به n قسمت تقسیم می‌کنیم و J_i ژاکوبین بازه انتگرال‌گیری i می‌باشد که برابر است با

$$J_i = dy/d\eta = (y_{i+1} - y_i)/2 \quad (51)$$

و $y(\eta)$ برابر است با

$$y(\eta) = \frac{(y_{i+1} - y_i)}{2}(\eta + 1) + y_i \quad (52)$$



شکل ۳- نمونه‌ای از چینش تطبیقی گره‌ها در هنگام اعمال نیرو به وسط ورق

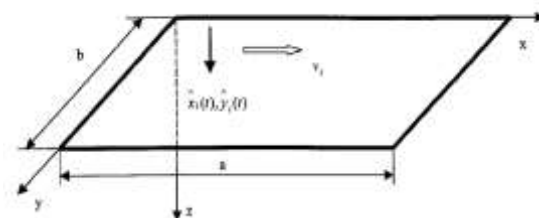
می‌گیریم. در شکل ۴ نقاط انتگرال‌گیری را می‌توان مشاهده کرد که توسط روش تفکیک پس زمینه به وجود آمده است. ملاحظه می‌گردد که چینش نقاط انتگرال‌گیری در وسط ورق به دلیل تراکم بیشتر گره‌ها به صورت متراکم در آمده است. قبل از انجام تحلیل دینامیکی مسئله، ابتدا یک تحلیل استاتیکی جهت سنجش دقت حل مسئله با استفاده از چینش تطبیقی گره‌ها در مقایسه با چینش منظم گره‌ها انجام می‌دهیم. برای ورق‌های نازک با تئوری کلاسیک ورق‌ها با شرط مرزی ساده حداکثر جابجایی ورق در صورت اعمال نیرو به وسط آن توسط رابطه (۵۷) بدست خواهد آمد [۲۸]:

$$w_s = 0.01159 \frac{F_c}{D} \quad (57)$$

که $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ را سفتی خمشی^۱ ورق می‌نامند. جابجایی استاتیک نقطه وسط ۴ نوع ورق با ضخامت‌هایی از نازک به ضخیم که توسط ۴ روش مختلف بدست آمده، در جدول ۱ گزارش شده است. در تحلیل اباکوس^۲ از ۱۰۰۰۰ المان استفاده شده است که می‌تواند در ضخامت $h = 0.1$ به عنوان مرجع در نظر گرفته شود. در چینش تطبیقی ۵۶۵ گره و در حالت چینش ساده ۴۴۱ گره در نظر گرفته شده است.

ورق مستطیلی شکل است. علیرغم این که در مرجع [۱۲] از جرم متحرک استفاده شده است، ولی به دلیل کم بودن وزن آن نسبت به کل ورق می‌توان جهت اعتبار سنجی از آثار اینرسی جرم متحرک چشم پوشی کرد. همانطور که از شکل ۲ پیدا است، نیروی متحرک F_c با سرعت v_t روی یک ورق مستطیلی در حال حرکت است. شرایط مرزی را در چهار لبه ورق به صورت ساده در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} v_0(x, y) = w_0(x, y) = \varphi_x = 0 \quad \text{on } x = 0, a \\ u_0(x, y) = w_0(x, y) = \varphi_y = 0 \quad \text{on } y = 0, b \end{aligned} \quad (56)$$



شکل ۲- مدل ورق با یک نیروی متحرک

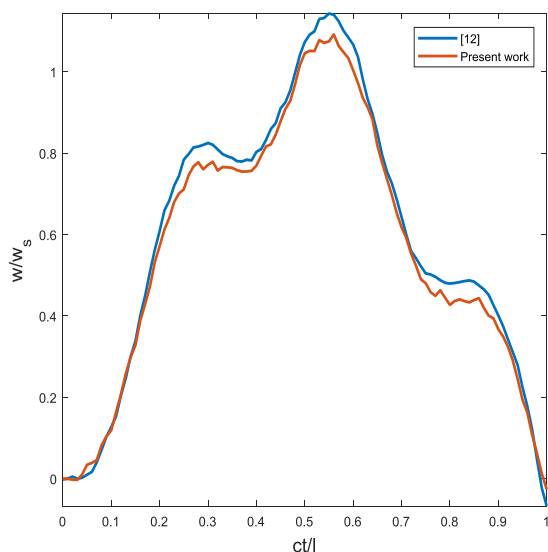
برای حل مسئله، چینش گره‌ها را به صورت تطبیقی با مکان اعمال نیرو در نظر می‌گیریم. منظور از چینش تطبیقی، یعنی در مکان اعمال نیرو، گره‌ها را به صورت متمرکز به طور یکنواخت شعاعی و محیطی چیده و همزمان با حرکت نیرو، گره‌های متمرکز را نیز حرکت می‌دهیم. شکل ۳، چینش تطبیقی استفاده شده در این تحقیق را برای هنگامی نشان می‌دهد که بار متمرکز به وسط ورق اعمال شده است. در این شکل اگر فرض کنیم، m گره در محیط و n گره در شعاع با فاصله‌های برابر از یکدیگر قرار دهیم و شعاع دایره را r_c در نظر بگیریم. طبق شبیه‌سازی‌های مختلف در این مسئله، بهترین حالت $m = 15$ ، $n = 10$ و $r_c = 0.05$ است. در سایر قسمت‌های دامنه از یک چیدمان گرهی منظم استفاده می‌کنیم. بعنوان مثال در شکل ۳ که محل اعمال نیرو را در وسط ورق فرض کرده‌ایم، از یک چینش پس زمینه منظم که تعداد تقسیمات بر محور x و y ، $N_x = N_y = 20$ می‌باشد، استفاده شده است. در این پژوهش η یا همان ثابت روش تی-پی-اس را بر اساس آزمون و خطا و برای رسیدن به نزدیک‌ترین پاسخ به جواب تحلیلی، برابر 3.001 در نظر

¹ Flexural rigidity

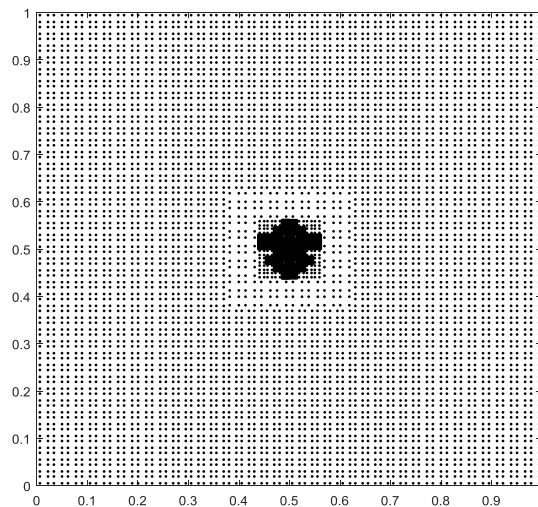
² ABAQUS

نمی‌شود و نسبتاً ضخیم است، حل تحلیلی با خطای زیادی همراه است. از این رو اباکوس که بر اساس تئوری برشی مرتبه ۱ مساله را حل می‌کند، با تعداد المان زیاد می‌تواند به عنوان مرجع به حساب آید. در $h = 0.2$ که ضخامت ورق زیاد است، پاسخ روش حاضر که بر مبنای تئوری برشی مرتبه ۳ استفاده است، نسبت به اباکوس از دقت بالاتری برخوردار است.

اکنون به تحلیل پاسخ دینامیکی مسئله می‌پردازیم. همانطور که در شکل ۲ نشان داده شده است، نیرو روی مسیر $y = b/2$ و $x = vt$ با سرعت ثابت در حال حرکت است. شرط اولیه را $\mathbf{u}(0) = 0$ و $\dot{\mathbf{u}}(0) = 0$ در نظر می‌گیریم. در شکل ۵، میزان خیز نقطه وسط ورق با نتایج مرجع [۱۲] برای $h = 0.05$ و سرعت $v = c = 80 \frac{m}{s}$ با تعداد گام زمانی^۱ ۱۰۱ مورد مقایسه قرار گرفته شده است. همانطور که واضح است، نتایج تحقیق حاضر اختلاف بسیار کمی با نتایج حاصله توسط روش تحلیلی [۱۲] دارد.



شکل ۵- مقایسه بین میزان جابجایی وسط ورق طبق روش انجام شده در این مقاله و روش [۱۲] برای $v = 80 m/s$ و $h = 0.05$



شکل ۴- نقاط انتگرال گیری تولید شده توسط BDM

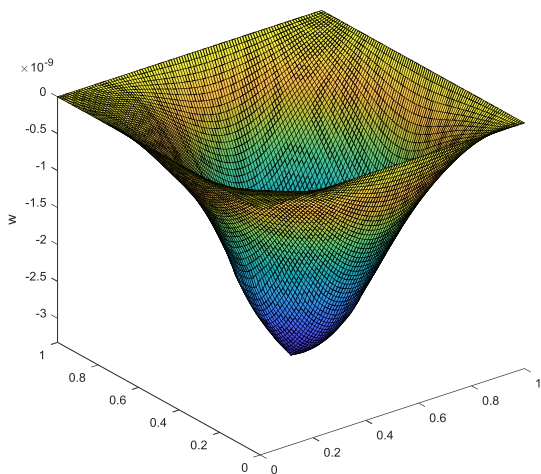
جدول ۱- مقایسه روش‌های مختلف در میزان جابجایی نقطه میانی بر اثر اعمال نیروی متمرکز

متد حل	h(m)			
	0.2	0.1	0.05	0.01
حل تحلیلی [۲۶]		-2.96 $\times 10^{-10}$	-2.36 $\times 10^{-9}$	-2.956 $\times 10^{-7}$
اباکوس	-7.47 $\times 10^{-11}$	-3.71 $\times 10^{-10}$	-2.518 $\times 10^{-9}$	-2.967 $\times 10^{-7}$
چینش تطبیقی	-5.9 $\times 10^{-11}$	-3.54 $\times 10^{-10}$	-2.515 $\times 10^{-9}$	-2.967 $\times 10^{-7}$
چینش ساده	-5.62 $\times 10^{-11}$	-3.51 $\times 10^{-10}$	-2.46 $\times 10^{-9}$	-2.86 $\times 10^{-7}$

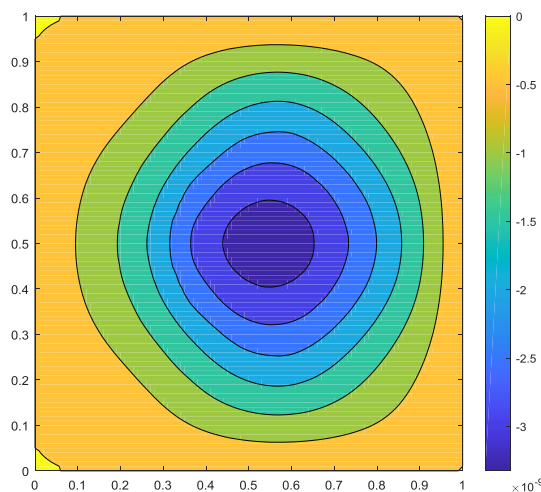
همانطور که از جدول ۱ معلوم است، در $h = 0.01$ جابجایی استاتیکی بدست آمده از اباکوس و چینش تطبیقی مانند هم و بسیار نزدیک به حل تحلیلی و با اختلاف 0.4% است؛ همچنین برتری چینش تطبیقی نسبت به چینش ساده در این ضخامت کاملاً معلوم است. در $h = 0.05$ ورق هنوز نازک است و همانند قبل حل اباکوس با حل تحلیلی هم-خوانی کامل داشته و برتری چینش تطبیقی قابل ملاحظه است؛ ولی از $h = 0.1$ به دلیل این که ورق نازک حساب

¹ Time Step

این نکته‌ای مهم در طراحی‌ها به حساب می‌آید. حال در ارزیابی بعدی، تنش نرمالیز شده $\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xxs}}$ در وسط ورق در حالیکه سرعت نیرو ثابت و برابر $v = 50 \left(\frac{m}{s}\right)$ است و ضخامت را از $h = 0.05$ به $h = 0.1$ افزایش می‌دهیم، مطالعه می‌کنیم (شکل ۱۲). با وجود این که با افزایش ضخامت از $h = 0.05$ به $h = 0.1$ ، σ_{xxs} کاهش می‌یابد، ولی $\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xxs}}$ در مجموع افزایش می‌یابد که در شکل ۱۲ به وضوح می‌توان مشاهده کرد.



شکل ۷- پاسخ دینامیکی ورق SSSS تحت حرکت نیرو هنگام عبور نیرو از وسط ورق برای $h=0.1$ و $v=80m/s$



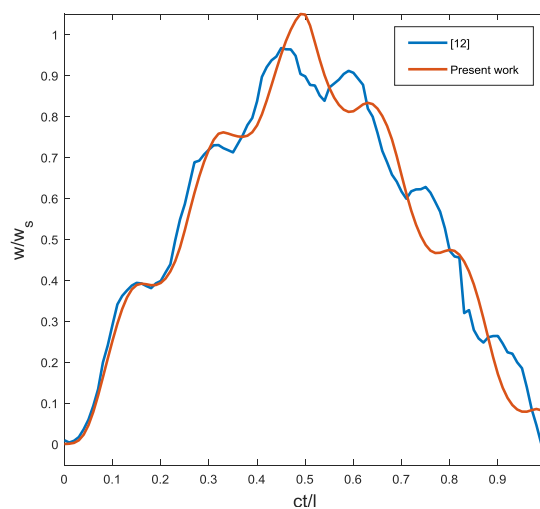
شکل ۸- کانتور پاسخ دینامیکی ورق چهار لبه ساده تحت حرکت نیرو هنگام عبور نیرو از وسط ورق برای $v=80m/s$ و $h=0.1$

در شکل ۶ نتایج تغییر فرم وسط ورق با ضخامت $h=0.1$ و با ثابت نگه داشتن تمام پارامترهای دیگر ترسیم شده است. همانطور که واضح است، اختلاف با روش تحلیلی به دلیل افزایش ضخامت نسبت به قبل اندکی بیشتر است.

در شکل‌های ۷ و ۸ شکل تغییر فرم یافته ورق و کانتور جابجایی برای لحظه‌ای ترسیم شده است که نیرو از وسط ورق عبور می‌کند.

در شکل ۹ مقایسه‌ای بین جابجایی وسط ورق برای شرایط مرزی CCCC و SSSS انجام شده است. همان‌طور که از شکل ۹ معلوم است، میزان جابجایی در حالت SSSS بیشتر از CCCC است. تغییرات سرعت نقطه وسط ورق در شکل ۱۰ ترسیم شده است؛ نوسانات سرعت هنگام حرکت نیرو روی ورق کاملاً مشهود است.

حال برای این که تأثیرات سرعت حرکت نیرو در تنش وارد شده بر ورق را مورد ارزیابی قرار دهیم، در یک ضخامت ثابت مانند $h=0.05$ ، سرعت حرکت نیرو را از $v=20 \left(\frac{m}{s}\right)$ به $v=100 \left(\frac{m}{s}\right)$ افزایش می‌دهیم (شکل ۱۱). در این شکل نسبت تنش σ_{xx} به تنش استاتیکی σ_{xxs} برای مکان وسط ورق بر حسب مکان نرمالایز شده رسم شده است. طبق این شکل با افزایش سرعت، $\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xxs}}$ افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، افزایش سرعت حرکت نیرو موجب تشدید تنش می‌شود که

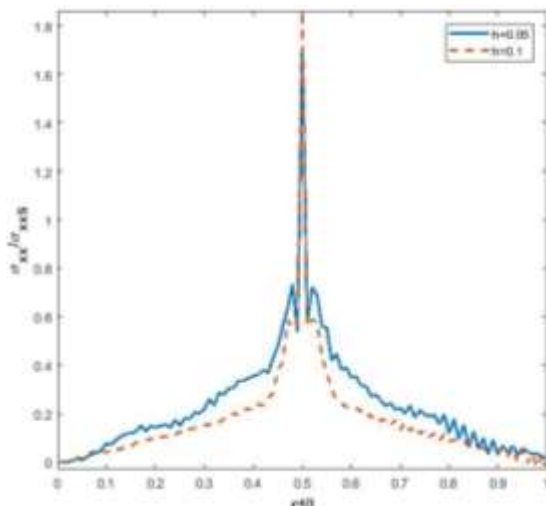


شکل ۶- مقایسه بین میزان جابجایی وسط ورق طبق روش انجام شده در این مقاله و روش [۱۲] برای $v=80m/s$ و $h=0.1$

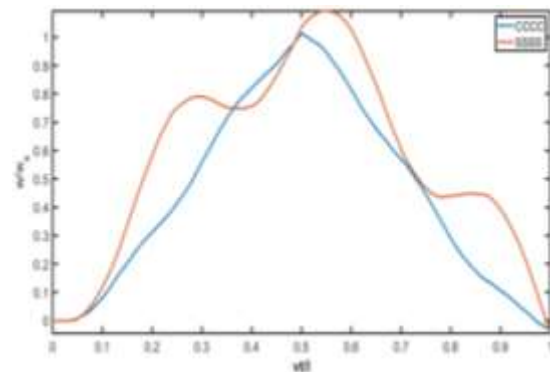
لازم به ذکر است که هنگامی که یک ورق تحت اثر نیروی متمرکز قرار دارد، پاسخ تحلیلی میدان جابجایی در زیر پای نیرو، مقداری بزرگ ولی متناهی است، اما پاسخ تحلیلی میدان تنش در زیر پای نیرو با شیب تندی به بی‌نهایت میل می‌کند. این مطلب بخوبی در شکل‌های ۵ تا ۱۲ نشان داده شده است. شکل‌های مربوط به میدان جابجایی، نشان می‌دهند که خیز ورق در زیر پای نیرو بزرگ، ولی متناهی است؛ همچنین شکل‌های ۱۱ و ۱۲، شیب بسیار تند میدان تنش در نزدیکی محل اعمال نیرو را نشان می‌دهند. همچنین، قله بسیار باریک منحنی تنش، نشان از میل مقدار آن به بی‌نهایت دارد.

۵- نتیجه‌گیری

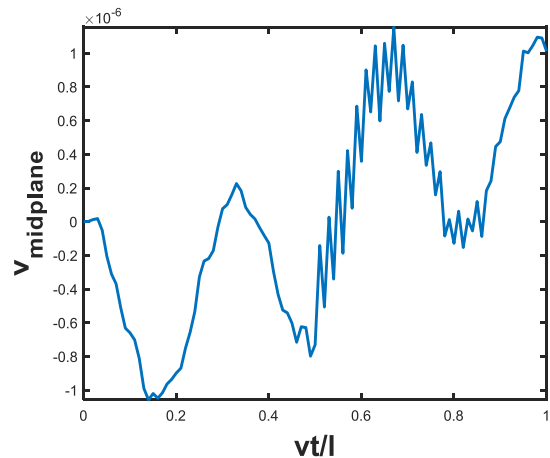
در این مقاله، از روش بدون المان درون یابی نقطه‌ای شعاعی جهت تحلیل پاسخ دینامیکی ورق‌های ضخیم تحت بارگذاری نیروی متحرک استفاده شده است. میدان جابجایی در این روش، بر اساس تئوری تغییر فرم برشی مرتبه سه در نظر گرفته شده است. استفاده از توابع شکل نقطه‌ای شعاعی که دارای خاصیت تابع دلتای کرونکر است، باعث می‌شود که شرایط مرزی اساسی به راحتی ارضا شوند. در این مقاله از شیوه‌ای جدید در چینش نقاط به صورت تطبیقی با حرکت نیروی متحرک استفاده شده است که دقت و سرعت حل را



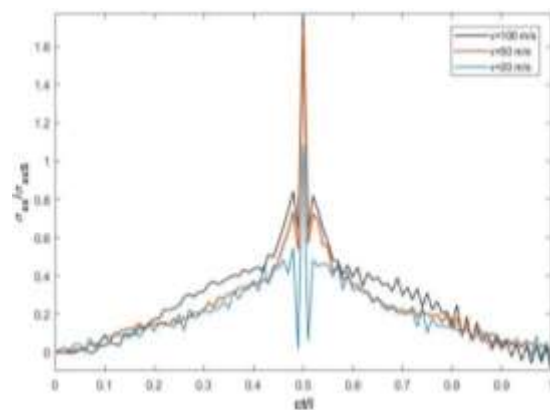
شکل ۱۲- مقایسه بین تنش σ_{xx} نرمالایز شده وسط ورق با ضخامت‌های $h = 0.1$ و $h = 0.05$ برای سرعت $v = 50 m/s$



شکل ۹- مقایسه بین میزان جابجایی وسط ورق برای شرایط مرزی SSSS و CCCC و $v = 80 m/s$ و $h = 0.05$



شکل ۱۰- سرعت وسط ورق بر حسب سرعت نرمالایز شده نیرو برای $v = 80 m/s$ و $h = 0.05$



شکل ۱۱- مقایسه‌ای بین تنش σ_{xx} نرمالایز شده وسط ورق با ضخامت $h = 0.05$ برای سرعت‌های $v = 20 m/s$ ، $v = 50 m/s$ و $v = 100 m/s$

- [13] Taheri MR, Ting EC (1990) Dynamic response of plates to moving loads: Finite element method. *Comput Struct* 34(3): 509-521.
- [14] Ghafoori E, Asghari M (2010) Dynamic analysis of laminated composite plates traversed by a moving mass based on a first-order theory. *Compos Struct* 92(8): 1865-1876.
- [15] Zaman M, Taheri MR, Alvappillai A (1991) Dynamic response of a thick plate on viscoelastic foundation to moving loads. *Int J Numer Anal Met* 15(9): 627-647.
- [16] Khosravifard A, Hematiyan MR (2010) A new method for meshless integration in 2D and 3D Galerkin meshfree methods. *Eng Anal Bound Elem J* 34(1): 30-40.
- [17] Rao BN, Rahman S (2000) An efficient meshless method for fracture analysis of cracks. *Comput Mech* 26(4): 398-408.
- [18] Trask N, Maxey M, Hu X (2018) A compatible high-order meshless method for the Stokes equations with applications to suspension flows. *J Comput Phys* 355: 310-326.
- [19] Liu GR (2009) *Meshfree methods: moving beyond the finite element method*. CRC press.
- [۲۰] میکاییلی ص، بهجت ب (۱۳۹۵) تحلیل سه بعدی خمش ورق هدفمند ضخیم با استفاده از روش بدون المان گلرکین در شرایط مرزی مختلف. مکانیک سازه ها و شماره ها ۱۲۰-۱۰۹: ۶(۲).
- [21] Bui TQ, Khosravifard A, Zhang C, Hematiyan MR, Golub MV (2013) Dynamic analysis of sandwich beams with functionally graded core using a truly meshfree radial point interpolation method. *Eng Struct* 47: 90-104.
- [22] Hematiyan MR, Khosravifard A, Liu GR (2014) A background decomposition method for domain integration in weak-form meshfree methods. *Comput Struct* 142: 64-78.
- [23] J. N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, *J APPL MECH* (1984), 51(4): 745-752.
- [24] Liu GR, Gu YT (2005) *An introduction to meshfree methods and their programming*. Springer Science & Business Media.
- [25] Golberg MA, Chen CS, Bowman H (1999) Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the BEM. *Eng Anal Bound Elem* 23(4): 285-296.
- [26] Dinis L, Jorge RMN, Belinha J (2011) Static and dynamic analysis of laminated plates based on an unconstrained third order theory and using a radial point interpolator meshless method. *Comput Struct* 89(19-20): 1771-1784.
- بالا برده است. انتگرال گیری عددی لازم برای تشکیل دستگاه معادلات گسسته توسط روش تفکیک پس زمینه انجام شد که بطور خاص مناسب مسائلی است که چگالی توزیع گره ها در نقاط مختلف دامنه مساله متفاوت است. در نهایت، نتایج بدست آمده نشان می دهد که استفاده از روش پیشنهادی این تحقیق برای تحلیل مسائل دینامیک تغییر فرم ورق های ضخیم، منجر به پاسخ های با دقت بالا و حجم محاسباتی اندک می شود.

۶- مراجع

- [1] Olsson M (1991) On the fundamental moving load problem. *J Sound Vib* 145(2): 299-307.
- [2] Fryba L (2013) *Vibration of solids and structures under moving loads*. Springer Science & Business Media.
- [3] Willis R (1849) The effect produced by causing weights to travel over elastic bars. Report of the commissioners appointed to inquire into the application of iron to railway structures.
- [4] Stokes SGG (1849) Discussion of a differential equation relating to the breaking of railway bridges. Printed at the Pitt Press by John W. Parker.
- [5] Timoshenko SP (1922) CV. On the forced vibrations of bridges. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 43(257): 1018-1019.
- [6] Beskou ND, Muho EV (2018) Dynamic response of a finite beam resting on a Winkler foundation to a load moving on its surface with variable speed. *Soil Dyn Earthq Eng* 109: 222-226
- [7] Reismann H (1963) Dynamic response of an elastic plate strip to a moving line load. *AIAA J* 1(2): 354-360.
- [8] Raske TF, Schlack Jr AL (1967) Dynamic response of plates due to moving loads. *J Acoust Soc Am* 42(3): 625-635.
- [9] Shirakawa K (1981) Response of rectangular thick plates to moving single loads. *Ingenieur-Archiv* 50(3): 165-175.
- [10] Gbadeyan JA, Oni ST (1995) Dynamic behaviour of beams and rectangular plates under moving loads. *J Sound Vib* 182(5): 677-695.
- [11] Taheri MR, Ting EC (1989) Dynamic response of plate to moving loads, structural impedance method. *Comput Struct* 33(6): 1379-1393.
- [12] Babagi PN, Neya BN, Dehestani M (2017) Three dimensional solution of thick rectangular simply supported plates under a moving load. *Meccanica*, 52(15): 3675-3692.

[28] Ural AC (2009) Stresses in beams, plates, and shells. CRC Press.

[27] Belytschko T, Lu YY, Gu L (1994) Element-free Galerkin methods. Int J Numer Meth Eng 37(2): 229-256.