



بررسی ارتعاشات آزاد ورق‌های کمانش یافته ترکدار به کمک روش المان کوادراتور دیفرانسیلی

حسام مکوندی^۱، شاپور مرادی^{۲*}، داود پورویس^۳ و کورش حیدری شیرازی^۴

^۱ دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

^۲ استاد، دانشکده مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

^۳ استادیار، دانشکده مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

^۴ استاد، دانشکده مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۱/۲۶، تاریخ بازنگری: ۱۳۹۶/۰۳/۱۳، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۱/۰۸

چکیده

در این پژوهش ارتعاشات آزاد ورق کمانه شده ترکدار به کمک روش المان کوادراتور دیفرانسیلی بررسی شده است. به این منظور ترک با استفاده از فنر خطی بدون جرم و به صورت باز مدل شده است. معادلات حاکم بر مسئله ارتعاشات ورق کمانش یافته به کمک تئوری میندلین و با در نظر گرفتن اثر نقص هندسی اولیه بدست آمده‌اند. پاسخ به صورت مجموع دو قسمت استاتیکی و دینامیکی در نظر گرفته شده است. دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاصل به کمک روش المان کوادراتور دیفرانسیلی گسسته شده و سپس دستگاه معادلات جبری غیرخطی بدست آمده به کمک روش طول کمان حل می‌شود. پس از آن با فرض دامنه کوچک ارتعاشات ورق حول حالت کمانش یافته آن، معادلات ارتعاشات خطی شده با جایگذاری مقادیر حاصل از حل استاتیکی در معادلات ارتعاشات خطی و با استفاده از روش المان کوادراتور دیفرانسیلی، دستگاه معادلات دینامیکی به یک مسئله مقدار ویژه غیراستاندارد تبدیل می‌شود. در ادامه، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ورق کمانش یافته ترکدار با حل مسئله مقدار ویژه بدست می‌آید. مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از آزمایش‌های عملی و روش اجزا محدود، نشانگر دقت و صحت نتایج حاصل است. علاوه بر این، چند مسئله ورق ترکدار کمانه شده به کمک روش پیشنهادی حل شده و اثر برخی پارامترها بررسی می‌شود.

کلمات کلیدی: ارتعاشات؛ پس از کمانش؛ ترک؛ روش المان کوادراتور دیفرانسیلی.

Study on Free Vibration of Buckled Cracked Plates Using Differential Quadrature Element Method

H. Makvandi¹, S. Moradi^{2,*}, D. Poorveis³, K. Heidari Shirazi⁴

¹ Ph.D. Candidate, Faculty of Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

² Prof., Faculty of Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

³ Assoc. Prof., Faculty of Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

⁴ Prof., Faculty of Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Abstract

Vibration of postbuckled cracked plate has been investigated using the differential quadrature element method. The crack modeled as an open crack using a no-mass linear spring. The governing equations of vibration of a buckled cracked plate are derived using the Mindlin theory and considering the effect of initial imperfection. The answer consist of static and dynamic parts. First, differential equations are discretized using the differential quadrature element method and then the resulting nonlinear algebraic equations are solved using the arc-length strategy. Then, assuming small amplitude vibrations of the plate about its buckled state and exploiting the static solution in the linearized vibration equations, the dynamic equations are converted to a non-standard eigenvalue problem. Finally, natural frequencies and mode shapes of the buckled cracked plate are obtained solving the eigenvalue problem. The accuracy of the proposed approach is verified using the results obtained by an experimental setup and those obtained by the finite element method. Moreover, several case studies of buckled cracked plates have been solved and effects of selected parameters have been studied.

Keywords: Vibration; Postbuckling; Crack; Differential Quadrature Element Method.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۶۱۳۳۳۳۰۱۱-۵۶۷۱؛ فکس: ۰۶۱۳۳۳۳۶۶۴۲
آدرس پست الکترونیک: moradis@scu.ac.ir

۱- مقدمه

سازه‌ها در طول عمر مفید خود دچار آسیب‌های مختلفی از قبیل، ایجاد و گسترش ترک، خوردگی و ... می‌گردند. وجود ترک در سازه، رفتار مکانیکی آن را تحت تاثیر قرار می‌دهد. این مسئله بخصوص در ورق‌ها که مقاومت آن‌ها تحت اثر پدیده کمانش نیز است، از اهمیت بسیاری برخوردار است. آزمایش‌ها نشان داده است که رفتار پس از کمانش ورق‌ها با رفتار پس از کمانش ستون‌ها متفاوت است، بطوری‌که یک ورق بعد از کمانش خود می‌تواند بارهای به مراتب بزرگتر از بار بحرانی خود را تحمل نماید. طبیعت مقاومت پس از کمانش ورق‌ها، مهندسان و طراحان را به سوی استفاده از ظرفیت یا استحکام بعد از کمانش ورق‌ها در سازه‌هایی که دارای محدودیت وزن هستند، مانند هواپیماها، سفینه‌های فضایی، میکروسوئیچ‌ها و تیر ورق‌ها، سوق داده است. از آن‌جا که ترک به عنوان یکی از عوامل زوال در سازه‌ها شناخته شده است، بررسی تاثیر ترک بر رفتار سازه‌ها، در طراحی اطمینان بخش و اقتصادی انواع سازه‌ها، تاثیر بسزایی دارد. از این رو محققان بسیاری در زمینه‌های متفاوت، رفتار سازه‌های ترک‌دار را بررسی کرده‌اند. یکی از این زمینه‌ها، بررسی پس از کمانش و ارتعاشات سازه‌های ترک‌دار تحت بار است.

رایس و لوی [۱]، فاکتور شدت تنش را برای ورق ترک‌دار مستطیلی تحت اثر همزمان بارهای کششی و خمشی محاسبه کردند. آن‌ها با استفاده از گسترش مدل یک تسمه با ترک لبه‌ای، تاثیر وجود ترک در ورق را مورد بررسی قرار دادند. به این منظور ترک را به صورت کاهش موضعی سختی ورق در نظر گرفته و با استفاده از فنرهای کششی و پیچشی، ترک را مدل کردند. چن [۲] با استفاده از روش المان ترک هیبریدی، رفتار ورق‌های ترک‌دار را بررسی کرد. او فاکتور شدت تنش را برای ورق‌های ترک‌دار با یک ترک مایل محاسبه نمود. براینتی [۳] به بررسی اثر ترک مرکزی روی کمانش ورق‌های نازک با شرایط مرزی متفاوت تحت کشش، فشار و بار برشی پرداخت. به این منظور، او از روش اجزا محدود جهت بدست آوردن ضرایب بار کمانش استفاده کرد. علی‌نیا و همکاران [۴]، به کمک روش اجزا محدود به بررسی رفتار کمانش و پس از کمانش ورق‌های مستطیلی (مربعی) ترک‌دار تحت بار برشی پرداختند و تاثیر ترک‌ها بر میزان بار کمانش این ورق‌ها را بررسی کردند. آن‌ها ترک را به صورت

باز مدل کرده و از رشد ترک نیز صرف‌نظر کردند. مرادی و علی‌موری [۵]، با استفاده از روش کوادراتور دیفرانسیلی، به بررسی رفتار ارتعاشاتی یک ورق مستطیلی ترک‌دار پرداختند. آن‌ها پس از تقسیم ورق به شش ناحیه در اطراف ترک و انتخاب شرایط مرزی و پیوستگی مناسب، فرکانس‌های طبیعی ورق ترک‌دار را استخراج نمودند. پس از آن به کمک الگوریتم بهینه‌سازی زنبور عسل، روشی را جهت تعیین مکان، طول و عمق ترک ارائه کردند.

باس و موهانتی [۶]، به بررسی رفتار ارتعاشی ورق‌های ترک‌دار با یک ترک میانی، با جهت و طول دلخواه پرداختند. به این منظور به کمک تئوری کیرشپف، معادلات حاکم بر رفتار ورق ترک‌دار را استخراج نمودند و سپس به کمک رابطه برگر، معادله بدست آمده را به معادله دافینگ تبدیل و آن را به کمک روش چند مقیاسه حل نمودند. هوانگ و همکاران [۷]، به کمک روش ریتز تاثیر اندازه و جهت ترک روی فرکانس‌های طبیعی ورق مستطیلی با شرایط مرزی چهار طرف ساده و نیز ورق چهار طرف آزاد را مورد بررسی قرار دادند. به این منظور، توابع پاسخ جدیدی را تعریف نمودند که علاوه بر در نظر گرفتن شرایط مرزی ورق، تکینگی تنش در نوک ترک و ناپیوستگی جابجایی و شیب را نیز در طول ترک در نظر می‌گیرد.

خادم و رضایی [۸] با مدلسازی ترک به صورت یک فنر پیچشی، رفتار ارتعاشی ورق مستطیلی با ترک سرتاسری را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها ترک را بصورت باز فرض نموده و ورق را در امتداد ترک به دو قسمت تقسیم کردند. سپس با اعمال شرایط مرزی مناسب، معادلات دیفرانسیلی ارتعاشات هر قسمت ورق را استخراج کردند. ایسمیل و کارتمل [۹]، با استفاده از روشی مشابه با روش کار ایسرار و همکاران [۱۲]-۱۰ موفق شدند، رفتار ورق مستطیلی با ترک میانی زاویه‌دار را مدلسازی نمایند. آن‌ها به این منظور، ابتدا معادلات دیفرانسیلی ارتعاشات ورق را با استفاده از فرضیات تئوری کلاسیک ورق‌ها استخراج و سپس به کمک معادلات برگر، این معادلات را به شکل غیرخطی تبدیل کردند. آن‌ها به کمک روش گالرکین و روش پریشیدگی چند مقیاسه، موفق به بررسی تاثیر تغییرات طول، عمق و زاویه ترک بر فرکانس طبیعی ارتعاشات ورق‌ها شدند.

ویلیامز و همکاران [۱۹]، ارتعاشات ورق‌های دایره‌ای کمانش یافته را به کمک روش تفاضل محدود و روش مدل‌سازی اجزا متمرکز، مورد بررسی قرار دادند و مشاهده نمودند که تا پیش از بار کمانش، با افزایش بار فشاری وارد بر ورق، فرکانس تشدید ورق کاهش می‌یابد؛ در حالیکه پس از آن، با افزایش میزان بار فشاری در بارهای بزرگتر از بار کمانش، فرکانس تشدید ورق افزایش خواهد یافت. انصاری و همکاران [۲۰]، به کمک روش کوادراتور دیفرانسیلی به بررسی ارتعاشات پس از کمانش میکرو ورق‌های تخت ساخته شده از مواد مدرج تابعی پرداختند. آن‌ها به کمک تئوری میندلین و تئوری تنش کوپله بهبودیافته (MCST)، روابط حاکم بر رفتار ورق را استخراج و به کمک روش کوادراتور دیفرانسیلی حل کردند.

تاکزالا و همکاران [۲۱] ارتعاشات پیش و پس از کمانش ورق‌های مدرج تابعی روی بستر الاستیک را در محیط دمایی مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از تئوری برشی مرتبه اول و روش اجزا محدود جهت بررسی رفتار ورق استفاده نموده، مشاهده کردند که رفتار این ورق‌ها وابستگی شدیدی به نسبت حجمی فلز و سرامیک و مقادیر درجه حرارت و نقص اولیه ورق دارد. شاهوردی و نوردی [۲۲]، ارتعاشات آزاد ورق-های نازک ترک‌دار را به کمک روش المان کوادراتور دیفرانسیلی بررسی نمودند. آن‌ها از روابط تئوری کلاسیک ورق‌ها استفاده نموده و ورق را به المان‌های مختلفی تقسیم نمودند. سپس به کمک اعمال روش کوادراتور دیفرانسیلی بر معادلات حاکم بر هر المان و نیز شرایط مرزی و پیوستگی مناسب، پاسخ را استخراج نمودند.

همانگونه که قبلاً اشاره شد، استفاده از ظرفیت تحمل بار پس از کمانش سبب استفاده گسترده از این ناحیه در ورق‌ها شده است؛ اما در اثر اعمال بار پس از کمانش، تغییر فرم‌های ورق افزایش یافته و ورق مستعد ایجاد و گسترش ترک می‌گردد؛ لذا بررسی رفتار ورق‌های کمانه شده ترک‌دار، از اهمیت بسزایی برخوردار است. از بررسی‌های صورت گرفته مشخص می‌گردد که تاکنون رفتار ارتعاشی ورق‌های کمانش یافته ترک‌دار، مورد بررسی قرار نگرفته است؛ لذا در این پژوهش به ارائه روشی جهت تحلیل تاثیر ترک بر رفتار ارتعاشی ورق‌های کمانش یافته پرداخته شده است. به این منظور، ابتدا با استفاده از روابط مکانیک شکست، ترک به صورت یک فنر

بجانه و همکاران [۱۴-۱۳] نیز، با استفاده از روش اجزا محدود گسترش یافته^۱ به بررسی ارتعاشات ورق مستطیلی ترک‌دار پرداختند. آن‌ها در محاسبات خود تاثیر اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی عرضی را نیز در نظر گرفتند و از روش مورد نظر جهت بررسی رفتار ورق‌های با ترک لبه‌ای و میانی استفاده کردند. خیابان و همکاران [۱۵]، به جای افزایش تعداد المان‌ها در اطراف و نوک ترک که در روش اجزا محدود متداول است، اقدام به ساخت المان ترک‌دار کردند. آن‌ها اثر ترک را به کمک محاسبه انرژی کرنشی ناشی از ترک در المان وارد نمودند. این انرژی با فاکتور شدت تنش در ورق تناسب دارد. مزیت این روش نسبت به روش اجزا محدود متداول، در نیاز به محاسبات کمتر، سرعت بالاتر و امکان انطباق سریع المان برای انواع مختلف تحلیل‌ها نظیر، تحلیل پایداری، ارتعاشات و... است. مانواک و ترندافیلوا [۱۶]، به بررسی تاثیر وجود عیوب بر پارامترهای پاسخ ارتعاشات غیرخطی یک ورق مستطیلی چهار طرف گیردار پرداختند. به این منظور آن‌ها از تئوری ورق میندلین با پارامترهای غیرخطی هندسی استفاده کردند.

ان‌جی و وایت [۱۷]، رابطه تحلیلی برای فرکانس ارتعاشات ورق‌های ایزوتروپیک مستطیلی در حالت‌های پیش از کمانش و پس از کمانش ارائه نمودند. آن‌ها به کمک روش رایلی-ریتز و روش اجزا محدود، به تحلیل رفتار دینامیکی ورق‌های با عیوب هندسی اولیه پرداختند و مشاهده نمودند که فرکانس ارتعاشات ورق در مرحله پیش از کمانش با افزایش بار کاهش یافته و در مرحله پس از کمانش، افزایش بار موجب افزایش فرکانس طبیعی ارتعاشات ورق می‌شود. عثمان و همکاران [۱۸]، به کمک روش کوادراتور دیفرانسیلی به بررسی تاثیر شرایط مختلف بر فاکتور شدت تنش مود سوم یک ورق ترک‌دار پرداختند. آن‌ها با تقسیم ورقی با شکل دلخواه به مجموعه‌ای از زیردامنه‌ها و با استفاده از روش نگاشت، ورق را به چندین ورق کوچکتر مستطیلی تبدیل نمودند و سپس با اعمال روش کوادراتور دیفرانسیلی بر هر یک از این ورق‌ها و نیز با در نظر گرفتن شرایط مرزی مناسب، فاکتور شدت تنش مود سوم را برای ورقی با ترک زاویه‌دار محاسبه کردند.

^۱ XFEM

آن، بصورت ترکیب وزنی از مقادیر تابع در نقاط درون آن دامنه است. این تعریف نخستین بار توسط بلمان و همکاران [۲۳] ارائه گردید. آن‌ها پیشنهاد کردند که مشتق مرتبه اول $f(x,y)$ در یک نقطه نسبت به x و y به صورت تقریبی خطی از مجموع مقادیر تابع در تمام بازه مشتق‌گیری به صورت معادله ۱ بیان گردد.

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^{n_x} C_{ik}^{(n)} f(x_k, y_j)$$

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m} f(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^{n_y} C_{jk}^{(m)} f(x_i, y_k)$$

$$\frac{\partial^{(n+m)}}{\partial x^n \partial y^m} f(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^{n_x} C_{ik}^{(n)} \sum_{l=1}^{n_y} C_{jl}^{(m)} f(x_k, y_l)$$

$$n = 1, \dots, n_x - 1 \quad , \quad m = 1, \dots, n_y - 1 \quad (1)$$

در رابطه فوق f تابع مورد نظر، n_x و n_y تعداد نقاط دقت در راستای x و y ، x_i و y_j نقاط دقت i ام و j ام از دامنه تابع و $C_{ij}^{(n)}$ و $C_{ij}^{(m)}$ ضرایب وزنی برای بدست آوردن مشتق مرتبه n و m تابع $f(x_i, y_j)$ در (x_i, y_j) است. در این پژوهش از روابط ۲ و ۳ که توسط کوان و چانگ [۲۴] برای محاسبه ضرایب وزنی کوادراتور دیفرانسیلی ارائه شده، استفاده شده است.

$$C_{ij}^{(1)} = \frac{1}{(x_i - x_j) \prod_{k \neq i, j} (x_i - x_k)} \prod_{k \neq i, j} (x_i - x_k) \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n_x \quad (2)$$

$$C_{ii}^{(1)} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_x} C_{ij} \quad (3)$$

آن‌ها علاوه بر محاسبه تقریب درجه اول، رابطه بازگشتی ساده‌ای برای محاسبه ضرایب وزنی مشتق درجات بالاتر با استفاده از ضرایب وزنی درجه اول بدست آوردند. ضرایب وزنی مشتقات بالاتر به صورت روابط ۴ و ۵ تعریف می‌گردند.

$$C_{ij}^{(n)} = n \left(C_{ij}^{(1)} \cdot C_{ii}^{(n-1)} - \frac{C_{ij}^{(n-1)}}{(x_i - x_j)} \right) \quad j \neq i \quad (4)$$

$$C_{ii}^{(n)} = - \sum_{j \neq i}^N C_{ij}^{(n)} \quad (5)$$

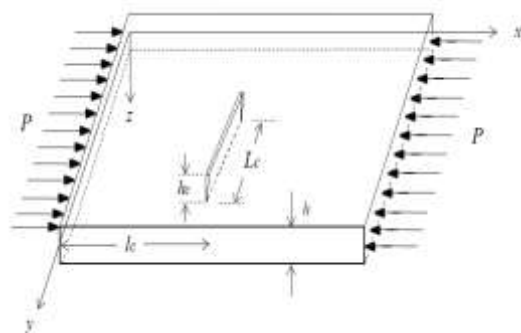
خطی چرخشی بدون جرم مدلسازی می‌شود. سپس با فرض باز بودن ترک، معادلات حاکم بر مسئله استخراج شده که این معادلات یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی غیرخطی را تشکیل می‌دهند. در ادامه با فرض آن که دامنه ارتعاشات حول حالت کمانش یافته ورق نسبت به دامنه حرکت استاتیکی (تعادل) بسیار کوچکتر است، پاسخ به صورت مجموع حرکت استاتیکی و دینامیکی در نظر گرفته شده و معادلات ارتعاشات ورق خطی سازی می‌شوند. به منظور حل دستگاه معادلات دیفرانسیلی غیرخطی استاتیکی ابتدا معادلات با روش المان کوادراتور دیفرانسیلی گسسته شده و سپس دستگاه معادلات جبری غیرخطی حاصل با استفاده از روش طول کمان حل می‌شود. برای حل دستگاه معادلات ارتعاشی خطی شده همانند معادلات استاتیکی، ابتدا معادلات با کمک روش المان کوادراتور دیفرانسیلی گسسته شده و سپس مقادیر حاصل از حل معادلات استاتیکی در آن جایگذاری می‌شود. دستگاه معادلات حاصل یک مسئله مقدار ویژه غیراستاندارد است که پس از تبدیل آن به فرم استاندارد و حل آن، فرکانس‌ها و شکل مودهای ورق کمانش یافته تر کدار بدست می‌آید. بررسی فرکانس‌ها و شکل مودهای بدست آمده به ازای مقادیر متفاوت عمق، طول و مکان ترک نشان داد که افزایش طول و عمق ترک با کاهش سختی ورق، فرکانس‌های طبیعی را کاهش می‌دهد؛ در حالیکه تاثیر مکان ترک بر فرکانس‌ها وابسته به شکل مود مورد نظر است.

۲- روش المان کوادراتور دیفرانسیلی

روش المان کوادراتور دیفرانسیلی روش عددی جدیدی در حل معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی است. ایده اصلی این روش از سه قسمت اصلی تشکیل می‌شود: ۱- تقسیم دامنه متغیرها به چندین زیردامنه یا المان ۲- استفاده از روش کوادراتور دیفرانسیلی برای تقسیم هر کدام از المان‌ها و برقراری معادلات حاکم ۳- برهم نهد المان‌های جدا شده و برقراری معادلات حاکم با در نظر گرفتن جابه‌جایی‌ها، تنش‌ها و شرایط سازگاری در المان‌های همسایه.

ابداع روش کوادراتور دیفرانسیلی بر اساس روش مشتق-گیری گوس برای محاسبه مشتق یک تابع بر اساس مقدار آن در تعداد محدودی از نقاط دامنه انجام گرفته است. این روش، تقریبی برای بیان مشتق یک تابع در نقطه‌ای واقع بر دامنه

ارتعاشات ورق کمانش‌یافته ترکدار را رسم نمود. به منظور بررسی ارتعاشات آزاد ورق کمانش یافته ترکدار، ورقى مشابه شکل ۱ به طول a ، عرض b ، ضخامت h در نظر گرفته می‌شود که دارای ترکی به عمق h_c ، طول L_c ، و محل l_c است و تحت نیروی تک محوره فشاری P قرار دارد. با استفاده از تئوری میندلین و با در نظر گرفتن وجود نقص اولیه هندسی در روابط کرنش-جابجایی ون کارمن، معادلات دیفرانسیل ارتعاشات ورق مورد نظر به صورت روابط (۷) الی (۱۱) بدست می‌آیند.



شکل ۱- ورق ترکدار تحت نیروی محوری فشاری درون صفحه‌ای

در این مقاله، از نقاط دقت لاگرانژ با رابطه‌ای مشابه معادله (۶) جهت انجام کلیه محاسبات استفاده شده است.

$$x_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2i-1}{n_x-1} \pi \right) \right] \quad i = 2, 3, \dots, n_x - 1$$

$$x_1 = 0, x_{n_x} = 1$$

$$y_j = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2j-1}{n_y-1} \pi \right) \right] \quad j = 2, 3, \dots, n_y - 1$$

$$y_1 = 0, y_{n_y} = 1$$

(۶)

۳- مدل‌سازی ورق ترکدار

وجود ترک در ساختار ورق‌ها موجب کاهش سختی ورق می‌گردد. یکی از روش‌های مدل‌سازی ترک در ورق‌ها، استفاده از مدل فنر چرخشی است. در این پژوهش، ابتدا ورق به تعدادی المان تقسیم شده و سپس ترک در مرز بین دو یا چند المان توسط فنر چرخشی مدل می‌شود. سپس معادلات دیفرانسیلی رفتار ورق و شرایط مرزی و پیوستگی مناسب در نظر گرفته می‌شود. این دستگاه معادلات به کمک روش المان کوادراتور دیفرنسیلی به یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی تبدیل شده که با حل آن می‌توان فرکانس‌های

$$\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[u_{,xx} + w_{,xx} w_{,x} + w_{,xx} w_{0,x} + w_{,x} w_{0,xx} + \nu v_{,xy} + w_{,xy} w_{,y} + w_{,xy} w_{0,y} + w_{,y} w_{0,xy} \right]$$

$$+ \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[u_{,yy} + v_{,xy} + w_{,xy} w_{,y} + w_{,x} w_{,yy} + w_{0,xy} w_{,y} + w_{0,x} w_{,yy} + w_{,xy} w_{0,y} + w_{,x} w_{0,yy} \right] = \mu \ddot{u} \quad (7)$$

$$\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[v_{,yy} + w_{,yy} w_{,y} + w_{,yy} w_{0,y} + w_{,y} w_{0,yy} + \nu u_{,xy} + w_{,xy} w_{,x} + w_{,xy} w_{0,x} + w_{,x} w_{0,xy} \right]$$

$$+ \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[u_{,xy} + v_{,xx} + w_{,xy} w_{,x} + w_{,x} w_{,xy} + w_{0,xx} w_{,y} + w_{0,x} w_{,xy} + w_{,xx} w_{0,y} + w_{,x} w_{0,xy} \right] = \mu \ddot{v} \quad (8)$$

$$K_s Gh \alpha_{,x} + w_{,xx} + K_s Gh \beta_{,y} + w_{,yy} + \frac{Eh}{1-\nu^2} (u_{,xx} w_{,x} + w_{,xx} w_{,x}^2 + w_{,xx} w_{0,x} w_{,x} + w_{,x}^2 w_{0,xx})$$

$$+ \nu (v_{,xy} w_{,x} + w_{,xy} w_{,x} w_{,y} + w_{,xy} w_{,x} w_{0,y} + w_{0,xy} w_{,x} w_{,y}) + \frac{Eh}{1-\nu^2} (u_{,xx} w_{0,x} + w_{,xx} w_{0,x} w_{,x}$$

$$+ w_{,xx} w_{0,x}^2 + w_{0,xx} w_{0,x} w_{,x} + \nu (v_{,xy} w_{0,x} + w_{,xy} w_{0,x} w_{,y} + w_{,xy} w_{0,x} w_{0,y} + w_{0,xy} w_{0,x} w_{,y}))$$

$$+ \frac{Eh}{1-\nu^2} (u_{,x} w_{,xx} + \frac{1}{2} w_{,xx} w_{,x}^2 + w_{,xx} w_{0,x} w_{,x} + \nu (v_{,y} w_{,xx} + \frac{1}{2} w_{,xx} w_{,y}^2 + w_{,y} w_{,xx} w_{0,y}))$$

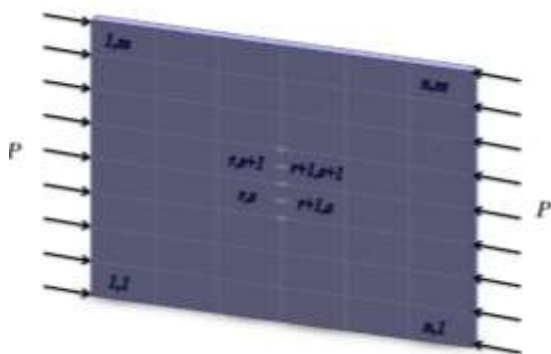
$$\begin{aligned}
 & + \frac{Eh}{1-\nu^2} (u_{,x} w_{0,xx} + \frac{1}{2} w_{0,xx} w_{,x}^2 + w_{0,xx} w_{0,x} w_{,x} + \nu (v_{,y} w_{0,xx} + \frac{1}{2} w_{0,xx} w_{,y}^2 + w_{,y} w_{0,xx} w_{0,y})) \\
 & + \frac{Eh}{1-\nu^2} (v_{,yy} w_{,y} + w_{,yy} w_{,y}^2 + w_{,yy} w_{0,y} w_{,y} + w_{,yy}^2 w_{0,yy} + \nu (u_{,xy} w_{,y} + w_{,xy} w_{,x} w_{,y} + w_{,xy} w_{,y} w_{0,x} \\
 & + w_{0,xy} w_{,x} w_{,y})) + \frac{Eh}{1-\nu^2} (v_{,yy} w_{0,y} + w_{,yy} w_{0,y} w_{,y} + w_{,yy} w_{0,y}^2 + w_{0,yy} w_{0,y} w_{,y} + \nu (u_{,xy} w_{0,y} \\
 & + w_{,xy} w_{0,y} w_{,x} + w_{,xy} w_{0,x} w_{0,y} w_{0,xy} w_{0,y} w_{,x})) + \frac{Eh}{1-\nu^2} (v_{,y} w_{,yy} + \frac{1}{2} w_{,yy} w_{,y}^2 + w_{0,yy} w_{,y} w_{,y} \\
 & + \nu (u_{,x} w_{,yy} + \frac{1}{2} w_{,yy} w_{,x}^2 + w_{,x} w_{,yy} w_{0,x})) + \frac{Eh}{1-\nu^2} (v_{,y} w_{0,yy} + \frac{1}{2} w_{0,yy} w_{,y}^2 + w_{0,yy} w_{,y} w_{,y} \\
 & + \nu (u_{,x} w_{0,yy} + \frac{1}{2} w_{0,yy} w_{,x}^2 + w_{,x} w_{0,yy} w_{0,x})) + \frac{Eh}{2(1+\nu)} (u_{,xy} w_{,y} + v_{,xx} w_{,y} + w_{,xx} w_{,y}^2 \\
 & + w_{,xy} w_{,x} w_{,y} + w_{0,xx} w_{,y}^2 + w_{,xy} w_{0,x} w_{,y} + w_{,xx} w_{0,y} w_{,y} + w_{,xy}^2 w_{,x} w_{,y})) + \frac{Eh}{2(1+\nu)} (u_{,xy} w_{0,y} \\
 & + v_{,xx} w_{0,y} + w_{,xx} w_{,y} w_{0,y} + w_{,xy} w_{,x} w_{0,y} + w_{0,xx} w_{,y} w_{0,y} + w_{,xy} w_{0,x} w_{0,y} + w_{,xx} w_{0,y}^2 \\
 & + w_{,xy}^2 w_{0,y} w_{,x})) + \frac{Eh}{2(1+\nu)} (u_{,yy} w_{,x} + v_{,xy} w_{,x} + w_{,xy} w_{,x} w_{,y} + w_{,yy} w_{,x}^2 + w_{,xy} w_{,x} w_{0,y} \\
 & + w_{,yy} w_{,x}^2)) + \frac{Eh}{2(1+\nu)} (u_{,yy} w_{0,x} + v_{,xy} w_{0,x} + w_{,xy} w_{0,x} w_{,y} + w_{,yy} w_{0,x} w_{,x} + w_{,yy} w_{0,x}^2 \\
 & + w_{,xy} w_{0,x} w_{0,y} + w_{,yy} w_{,x} w_{0,x})) + \frac{Eh}{(1+\nu)} (u_{,y} w_{,xy} + v_{,x} w_{,xy} + w_{,xy} w_{,x} w_{,y} + w_{,xy} w_{0,x} w_{,y} \\
 & + w_{,xy} w_{,x} w_{0,y})) + \frac{Eh}{(1+\nu)} (u_{,y} w_{0,xy} + v_{,x} w_{0,xy} + w_{0,xy} w_{,x} w_{,y} + w_{0,xy} w_{0,x} w_{,y} + w_{0,xy} w_{,x} w_{0,y})) = \mu \ddot{w}
 \end{aligned}$$

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\alpha_{,xx} + \nu \beta_{,xy}) + \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} (\alpha_{,yy} + \beta_{,xy}) - K_s Gh (\alpha + w_{,x}) = I_x \ddot{\alpha} \tag{10}$$

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\beta_{,xx} + \nu \alpha_{,xy}) + \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} (\alpha_{,xy} + \beta_{,xx}) - K_s Gh (\beta + w_{,y}) = I_y \ddot{\beta} \tag{11}$$

در اینجا $\mu = \rho h$ و $I_x = I_y = \frac{\rho h^3}{12}$ است که چگالی ورق مورد نظر است. u و w به ترتیب جابجایی‌ها در راستای محوره‌های x و y و z و α و β به ترتیب چرخش حول محوره‌های x و y می‌باشند؛ همچنین نقص هندسی اولیه ورق مستطیلی که متناظر با تنش صفر است با جابجایی عمودی w_0 نمایش داده شده است. E مدول الاستیسیته، ν ضریب پواسون، G مدول برشی و K_s ضریب تصحیح برشی است که جهت جبران اختلاف توزیع سهمی‌وار تنش برشی نسبت به فرض توزیع یکنواخت تنش برشی در نظر گرفته شده در تئوری میندلین بکار می‌رود.

با توجه به روش مورد استفاده جهت مدل‌سازی ترک، روابط پیوستگی بین دو المان همسایه r و $r+1$ در راستای x و دو المان مجاور s و $s+1$ در راستای y به صورت معادلات



شکل ۲- مدل‌سازی ورق ترک‌دار

در اینجا σ_b تنش خمشی اسمی در امتداد عمود بر ترک و α_{bb} ضریب نرمی خمشی بدون بعد است که در رابطه (۱۷) به صورت تابعی از پارامترهای ترک ارائه شده است [۲۵].

$$\alpha_{bb} = \frac{1}{h} \int_0^{h_c} g_b^2 dh_c \quad (17)$$

در این رابطه g_b تابعی بدون بعد از عمق نسبی ترک ($\xi = \frac{h_c}{h}$) در محدوده ($0 \leq \xi \leq 0.8$) است که به صورت رابطه (۱۸) در نظر گرفته می‌شود [۲۵].

$$g_b = \sqrt{(\pi\xi) \left(\begin{matrix} 1.1202 - 1.8872\xi + 18.0143\xi^2 \\ -87.3851\xi^3 + 241.9124\xi^4 \\ -319.9402\xi^5 + 168.0105\xi^6 \end{matrix} \right)} \quad (18)$$

۴- روش حل معادلات

۴-۱ حل معادلات استاتیکی

همانگونه که ذکر گردید، تغییر شکل ورق‌ها تحت بارهای فشاری درون صفحه‌ای بر رفتار دینامیکی آن‌ها موثر است. به منظور بررسی این تاثیر، در ادامه فرکانس‌های طبیعی ورق-های مستطیلی تحت تاثیر بارهای درون صفحه‌ای فشاری تک محوره، به کمک روابط (۷) الی (۱۱) بررسی می‌شود. به منظور حل و بدست آوردن پاسخ دستگاه معادلات فوق، ابتدا پاسخ سیستم مطابق رابطه (۱۹)، به صورت مجموع پاسخ استاتیکی (مستقل از زمان) و پاسخ دینامیکی (متغیر با زمان) در نظر گرفته می‌شود. در حقیقت به این روش، ارتعاشات ورق (پاسخ متغیر با زمان) حول حالت تغییر شکل یافته ورق (پاسخ مستقل از زمان) بررسی می‌گردد.

$$w = w_s + w_d$$

$$u = u_s + u_d$$

$$v = v_s + v_d$$

$$\alpha = \alpha_s + \alpha_d$$

$$\beta = \beta_s + \beta_d \quad (19)$$

در این رابطه w_s ، u_s ، v_s ، α_s و β_s پاسخ پس از کمانش (مستقل از زمان) و w_d ، u_d ، v_d ، α_d و β_d دامنه ارتعاشات حول حالت کمانش یافته (وابسته به زمان) می‌باشند. با جایگذاری روابط (۱۹) در دستگاه معادلات مورد نظر و صرف نظر نمودن از عبارت‌های وابسته به زمان در

$$\begin{cases} \beta^{r,s} = \beta^{r+1,s} \\ \alpha^{r,s} = \alpha^{r+1,s} + \theta \\ v^{r,s} = v^{r+1,s} \\ u^{r,s} = u^{r+1,s} \\ w^{r,s} = w^{r+1,s} \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \beta^{r,s} = \beta^{r,s+1} \\ \alpha^{r,s} = \alpha^{r,s+1} \\ v^{r,s} = v^{r,s+1} \\ u^{r,s} = u^{r,s+1} \\ w^{r,s} = w^{r,s+1} \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} Q_x^{r,s} = Q_x^{r+1,s} \\ M_{xy}^{r,s} = M_{xy}^{r+1,s} \\ M_x^{r,s} = M_x^{r+1,s} \\ N_{xy}^{r,s} = N_{xy}^{r+1,s} \\ N_x^{r,s} = N_x^{r+1,s} \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} Q_y^{r,s} = Q_y^{r,s+1} \\ M_{xy}^{r,s} = M_{xy}^{r,s+1} \\ M_y^{r,s} = M_y^{r,s+1} \\ N_{xy}^{r,s} = N_{xy}^{r,s+1} \\ N_y^{r,s} = N_y^{r,s+1} \end{cases} \quad (15)$$

در این روابط معادلات (۱۲) و (۱۳)، مربوط به پیوستگی جابجایی‌ها و معادلات (۱۴) و (۱۵)، مربوط به پیوستگی نیروها و گشتاورها می‌باشند. همانگونه که پیشتر اشاره شد، یکی از روش‌های متداول مدلسازی ترک در ورق استفاده از مدل فنر چرخشی است. با توجه به کاهش سختی ورق در ناحیه ترک، در دو سوی ترک ناپیوستگی شیب مشاهده می‌شود؛ لذا به منظور محاسبه چرخش اضافه ورق ترکدار، به کمک روابط مکانیک شکست و تعریف ضریب شدت تنش برای مود اول ترک (بازشدگی)، می‌توان میزان این چرخش اضافه را به صورت رابطه (۱۶) محاسبه کرد [۲۵].

$$\theta = \frac{12(1-\nu^2)}{E} \sigma_b \alpha_{bb} \quad (16)$$

روابط حاصل، دستگاه معادلات پس از کمانش به شکل معادلات (۲۰) تا (۲۴) (مستقل از زمان) بدست می‌آید.

$$\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[u_{s,xx} + w_{s,xx} w_{s,x} + w_{s,xx} w_{0,x} + w_{s,x} w_{0,xx} + \nu (v_{s,xy} + w_{s,xy} w_{s,y} + w_{s,xy} w_{0,y} + w_{s,y} w_{0,xy}) \right] + \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[u_{s,yy} + v_{s,xy} + w_{s,xy} w_{s,y} + w_{s,x} w_{s,yy} + w_{0,xy} w_{s,y} + w_{0,x} w_{s,yy} + w_{s,xy} w_{0,y} + w_{s,x} w_{0,yy} \right] = 0 \quad (20)$$

$$\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[v_{s,yy} + w_{s,yy} w_{s,y} + w_{s,yy} w_{0,y} + w_{s,y} w_{0,yy} + \nu (u_{s,xy} + w_{s,xy} w_{s,x} + w_{s,xy} w_{0,x} + w_{s,x} w_{0,xy}) \right] + \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[u_{s,xy} + v_{s,xx} + w_{s,xy} w_{s,x} + w_{s,x} w_{s,xy} + w_{0,xx} w_{s,y} + w_{0,x} w_{s,xy} + w_{s,xx} w_{0,y} + w_{s,x} w_{0,xy} \right] = 0 \quad (21)$$

$$K_s Gh \alpha_{s,x} + w_{s,xx} + K_s Gh \beta_{s,y} + w_{s,yy} + \frac{Eh}{1-\nu^2} (u_{s,xx} w_{s,x} + w_{s,xx} w_{s,x}^2 + w_{s,xx} w_{0,x} w_{s,x} + w_{s,x}^2 w_{0,xx} + \nu (v_{s,xy} w_{s,x} + w_{s,xy} w_{s,x} w_{s,y} + w_{s,xy} w_{s,x} w_{0,y} + w_{0,xy} w_{s,x} w_{s,y})) + \frac{Eh}{1-\nu^2} (u_{s,xx} w_{0,x} + w_{s,xx} w_{0,x} w_{s,x} + w_{s,xx} w_{0,x}^2 + w_{0,xx} w_{0,x} w_{s,x} + \nu (v_{s,xy} w_{0,x} + w_{s,xy} w_{0,x} w_{s,y} + w_{s,xy} w_{0,x} w_{0,y} + w_{0,xy} w_{0,x} w_{s,y})) + \frac{Eh}{1-\nu^2} (u_{s,x} w_{s,xx} + \frac{1}{2} w_{s,xx} w_{s,x}^2 + w_{s,xx} w_{0,x} w_{s,x} + \nu (v_{s,y} w_{s,xx} + \frac{1}{2} w_{s,xx} w_{s,y}^2 + w_{s,y} w_{s,xx} w_{0,y})) + \frac{Eh}{1-\nu^2} (u_{s,x} w_{0,xx} + \frac{1}{2} w_{0,xx} w_{s,x}^2 + w_{0,xx} w_{0,x} w_{s,x} + \nu (v_{s,y} w_{0,xx} + \frac{1}{2} w_{0,xx} w_{s,y}^2 + w_{s,y} w_{0,xx} w_{0,y})) + \frac{Eh}{1-\nu^2} (v_{s,yy} w_{s,y} + w_{s,yy} w_{s,y}^2 + w_{s,yy} w_{0,y} w_{s,y} + w_{s,y}^2 w_{0,yy} + \nu (u_{s,xy} w_{s,y} + w_{s,xy} w_{s,x} w_{s,y} + w_{s,xy} w_{s,y} w_{0,x} + w_{0,xy} w_{s,x} w_{s,y})) + \frac{Eh}{1-\nu^2} (v_{s,yy} w_{0,y} + w_{s,yy} w_{0,y} w_{s,y} + w_{s,yy} w_{0,y}^2 + w_{0,yy} w_{0,y} w_{s,y} + \nu (u_{s,xy} w_{0,y} + w_{s,xy} w_{0,y} w_{s,x} + w_{s,xy} w_{0,x} w_{0,y} + w_{0,xy} w_{0,y} w_{s,x})) + \frac{Eh}{1-\nu^2} (v_{s,y} w_{s,yy} + \frac{1}{2} w_{s,yy} w_{s,y}^2 + w_{0,yy} w_{s,y} w_{s,y} + \nu (u_{s,x} w_{s,yy} + \frac{1}{2} w_{s,yy} w_{s,x}^2 + w_{s,x} w_{s,yy} w_{0,x})) + \frac{Eh}{1-\nu^2} (v_{s,y} w_{0,yy} + \frac{1}{2} w_{0,yy} w_{s,y}^2 + w_{0,yy} w_{0,y} w_{s,y} + \nu (u_{s,x} w_{0,yy} + \frac{1}{2} w_{0,yy} w_{s,x}^2 + w_{s,x} w_{0,yy} w_{0,x})) + \frac{Eh}{2(1+\nu)} (u_{s,xy} w_{s,y} + v_{s,xx} w_{0,y} + w_{s,xx} w_{s,y} w_{0,y} + w_{s,xy} w_{s,x} w_{0,y} + w_{s,xy} w_{s,y} w_{0,y} + w_{s,xy} w_{0,x} w_{0,y} + w_{s,xx} w_{0,y}^2 + w_{s,xy} w_{0,y} w_{s,x}) + \frac{Eh}{2(1+\nu)} (u_{s,yy} w_{s,x} + v_{s,xy} w_{s,x} + w_{s,xy} w_{s,x} w_{s,y} + w_{s,yy} w_{s,x}^2 + w_{s,xy} w_{s,x} w_{0,y} + w_{s,yy} w_{s,x}^2) + \frac{Eh}{2(1+\nu)} (u_{s,yy} w_{0,x} + v_{s,xy} w_{0,x} + w_{s,xy} w_{0,x} w_{s,y} + w_{s,yy} w_{0,x} w_{s,x} + w_{s,yy} w_{0,x}^2 + w_{s,xy} w_{0,x} w_{0,y} + w_{s,yy} w_{s,x} w_{0,x}) + \frac{Eh}{(1+\nu)} (u_{s,y} w_{s,xy} + v_{s,x} w_{s,xy} + w_{s,xy} w_{s,x} w_{s,y} + w_{s,xy} w_{0,x} w_{s,y} + w_{s,xy} w_{s,x} w_{0,y}) + \frac{Eh}{(1+\nu)} (u_{s,y} w_{0,xy} + v_{s,x} w_{0,xy} + w_{0,xy} w_{s,x} w_{s,y} + w_{0,xy} w_{0,x} w_{s,y} + w_{0,xy} w_{s,x} w_{0,y}) = 0 \quad (22)$$

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\alpha_{s,xx} + \nu\beta_{s,xy}) + \frac{Eh^3}{24(1+\nu)}\alpha_{s,yy} + \beta_{s,xy} - K_s Gh(\alpha_s + w_{s,x}) = 0 \quad (23)$$

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\beta_{s,xx} + \nu\alpha_{s,xy}) + \frac{Eh^3}{24(1+\nu)}\alpha_{s,xy} + \beta_{s,xx} - K_s Gh(\beta_s + w_{s,y}) = 0 \quad (24)$$

تشکیل می‌دهند که به فرم یک مسئله مقدار ویژه غیر استاندارد است.

$$\begin{bmatrix} A_{BB} & A_{BI} \\ A_{IB} & A_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_B \\ X_I \end{Bmatrix} = -\omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{IB} & B_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_B \\ X_I \end{Bmatrix} \quad (25)$$

در این رابطه X بردار جابجایی به فرم $[u, v, w, \alpha, \beta]^T$ است. اندیس‌های B و I به ترتیب، نشان‌دهنده مقادیر مرزی و داخلی می‌باشند. می‌توان این معادله را به فرم معادله (۲۶) بدست آورد که با حل آن، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ورق حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} [A^*]X_I &= -\omega^2[B^*]X_I \\ \begin{cases} [A^*] = (A_{II} - A_{IB} \times A_{BB}^{-1} \times A_{BI}) \\ [B^*] = (B_{II} - B_{IB} \times A_{BB}^{-1} \times A_{BI}) \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

۵- نتایج

به منظور ارزیابی روش پیشنهادی، در تحلیل ارتعاشات ورق کمانه شده ترکدار چند مثال ارائه شده و اثر برخی پارامترها روی رفتار دینامیکی ورق بررسی می‌شود. ورق مورد بررسی، دارای نقص هندسی اولیه‌ای است که به صورت ضریبی از اولین شکل مود کمانش ورق سالم به صورت رابطه (۲۷) در نظر گرفته می‌شود.

$$w_0 = W_0 \left(\sin \frac{n\pi x}{a} \right) \left(\sin \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (27)$$

که W_0 دامنه نقص هندسی است. به منظور بررسی دقت نتایج حاصل از روش ارائه شده، ابتدا به بررسی صحت نتایج آن پرداخته می‌شود. برای این کار چند حالت مختلف در نظر گرفته می‌شود. به این منظور، پاسخ یک ورق مربعی چهار طرف مفصل تحت بار فشاری درون صفحه‌ای محاسبه شده و نتایج حاصل به همراه مقادیر حاصل از حل به روش اجزاء محدود و نتایج سایر مراجع در شکل ۳ ارائه گردیده است.

ایلانکو و دیکینسون [۲۹]، از روش رایلی-ریتز و کاپانیا و یانگ [۳۰]، از روش اجزاء محدود و با تعریف المانی با ۴۸ درجه آزادی مسئله را حل نمودند. برای حل از روش اجزا

برای حل این دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی ابتدا به کمک روش المان کوادراتور دیفرانسیلی، دستگاه معادلات مورد نظر به یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی تبدیل شده و سپس به کمک روش طول کمان حل می‌شود؛ در صورتی که در حل معادلات حاکم بر رفتار بعد از کمانش ورق‌ها و بدست آوردن پاسخ سیستم که اغلب بصورت منحنی بار بر حسب جابجایی رسم می‌شود، از روش نیوتن-رافسون استفاده شود، بار مسیر را کنترل می‌کند. این بدان مفهوم است که بار توسط مقادیر ثابتی افزایش پیدا می‌کند و معادلات به مجهولات که همان جابجایی‌ها هستند، اعمال می‌شوند. این الگوریتم، بعلت تغییر شیب ناگهانی و دوشاخگی درهمسایگی بار بحرانی، معمولاً قادر به گذر از این ناحیه و حل مسئله در فراسوی بار کمانش نیست. به منظور رفع این مشکل، روش‌های متفاوتی توسط محققین پیشنهاد شده است. در این پژوهش از روش طول کمان که در آن مقادیر افزایشی بار توسط یک قید کنترل می‌شود، استفاده شده است [۲۸-۲۶].

۴-۲- حل معادلات دینامیکی

پس از یافتن پاسخ استاتیکی معادلات ارائه شده، در این مرحله پاسخ بدست آمده در معادلات ارتعاشات خطی حول حالت کمانش یافته جایگزین می‌شود. به منظور محاسبه فرکانس‌های ارتعاشات ورق کمانش یافته، ابتدا پاسخ معادلات به صورت رابطه (۱۹) در معادلات حرکت ورق جایگذاری می‌گردد و سپس از عبارات غیرخطی وابسته به زمان و عباراتی که تنها شامل پاسخ مستقل از زمان هستند، صرف‌نظر می‌شود. پس از آن با جایگذاری پاسخ استاتیکی مرحله قبل، دستگاه معادلات ارتعاشات خطی ورق حول حالت کمانش یافته حاصل می‌گردد.

در این مرحله نیز همانند حل معادلات استاتیکی، از روش المان کوادراتور دیفرانسیلی استفاده می‌شود. با استفاده از این روش، معادلات دیفرانسیل ارتعاشات پس از کمانش ورق و معادلات مرزی و پیوستگی مربوطه گسسته شده و یک دستگاه معادلات با مقادیر ویژه به صورت رابطه (۲۵) را

۶ است که مدول الاستیسیته، ضریب پواسون و چگالی آن به ترتیب 3.7 GPa ، 0.42 و 1400 Kg/m^3 است. ورق که تحت بار فشاری درون صفحه‌ای است، دارای ترکی به عمق نسبی 0.4 و طول نسبی 0.4 در وسط است.

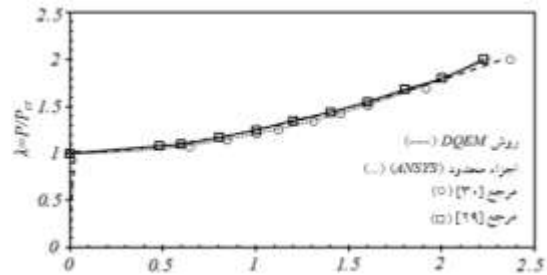
جدول ۳ چهار فرکانس نخست ورق را برای سه مقدار متفاوت بار وارد بر ورق نمایش می‌دهد. نتایج با نتایج حاصل از روش اجزا محدود نرم افزار *Ansys* مقایسه شده‌اند. مدل اجزا محدود از 2000 المان ساخته شده است؛ المان‌های بکار رفته از نوع المان 20 گره‌ای *solid186* است و ترک به کمک کاهش ضخامت ورق در محل ترک مدل شده است. به منظور حل مسئله ابتدا تحلیل کمانش ورق ترکدار صورت پذیرفته و سپس شکل هندسی ورق با در نظر گرفتن ضریبی از شکل مود نخست ورق به عنوان نقص هندسی، به روز می‌گردد. پس از آن تحلیل غیرخطی بعد از کمانش توسط روش طول کمان انجام شده و در پایان فرکانس‌ها و شکل مودها با تحلیل مقدار ویژه محاسبه می‌گردند. با توجه به جدول ۳ می‌توان مشاهده نمود که نتایج روش المان کوادراتور ديفرانسیلی و روش اجزا محدود انطباق خوبی با هم دارند. نتایج ارائه شده در جدول ۳ برای مقادیر مختلف بار وارد بر ورق و مقدار دامنه نقص هندسی 10^{-4} محاسبه شده‌اند.

جدول ۱- پارامتر بی بعد فرکانس‌های ورق با ترک سراسری

فرکانس	<i>DQEM</i>	مرجع [۳۱]	درصد خطا
اول	۱۳/۹۰۵۷	۱۳/۸۳۷۳	۰/۴۹
دوم	۲۷/۲۳۹۹	۲۷/۰۸۶۶	۰/۵۷

جدول ۲- نسبت فرکانس اول ورق تحت بار فشاری به فرکانس اول ورق بدون بار ($\omega I/\Omega$) برای ورق مربعی سالم

<i>DQEM</i>	<i>FEM</i>	مرجع [۲۹]	P/P_{cr}
۱	۱	۱	۰
۰/۷۵۲	۰/۷۳۵	۰/۷۰۷	۰/۵
۰/۹۶۹	۰/۹۶۱	۰/۹۴۹	۱
۱/۸۵۰	۱/۸۳۰	۱/۷۶۱	۱/۵
۲/۱۱۷	۲/۱۰۳	۲/۲۶۶	۲



شکل ۳- مقایسه نتایج پس از کمانش ورق به کمک روش‌های مختلف

محدود از نرم افزار *Ansys* استفاده شده و المان‌های بکار رفته از نوع المان 20 گره‌ای *solid186* است. همانگونه که از شکل دیده می‌شود، نتایج انطباق خوبی با هم دارند.

در ادامه ارتعاشات ورق مستطیلی چهار طرف مفصل که دارای ترک لبه‌ای سرتاسری ($L/b=1$) است، بررسی و نتایج با مقادیر بدست آمده از مرجع [۳۱] مقایسه می‌شود. حسینی-هاشمی و همکاران [۳۱]، مسئله ارتعاش ورق با ترک لبه‌ای سرتاسری را به صورت تحلیلی حل نموده‌اند. ورق مورد بررسی دارای نسبت طول به عرض $1/5$ ، نسبت ضخامت به عرض 0.05 بوده که دارای ترکی به عمق نسبی 0.5 در وسط ورق است. در جدول ۱ مقدار نسبت بدون بعد $ab^2 \sqrt{12(1-\nu^2)}/Eh^2$ بدست آمده از روش ارائه شده با مقدار بدست آمده از مرجع [۳۱] برای دو فرکانس طبیعی اول ورق مقایسه شده است. چنانچه از جدول فوق دیده می‌شود، خطای بین دو روش مقدار کمی است.

در ادامه نتایج حاصل از روش ارائه شده برای یک ورق سالم (بدون ترک) در مقایسه با نتایج ارائه شده در مرجع [۲۹] و نتایج روش اجزا محدود ارائه شده است. جدول ۲، تغییرات نسبت فرکانس نخست ورق بررسی شده در مرجع [۲۹] را بر حسب بار وارد بر ورق نمایش می‌دهد. نتایج حاصل نشان‌دهنده انطباق مناسب جواب‌های این روش‌ها بوده و اختلاف نتایج ناشی از در نظر نگرفتن تاثیر تغییر شکل‌های برشی در مرجع [۲۹] است.

در ادامه به منظور بررسی توانایی این روش در تحلیل ارتعاشات ورق‌های کمانه شده ترکدار، چهار فرکانس نخست یک ورق ترکدار چهار طرف مفصل با نتایج حاصل از روش اجزا محدود مقایسه گردیده است. ورق در نظر گرفته شده، یک ورق مربعی از جنس *PVC* به طول 0.5 m و ضخامت mm

جدول ۳- فرکانس‌های طبیعی ورق کمانش یافته به ازای مقادیر مختلف بار محوری

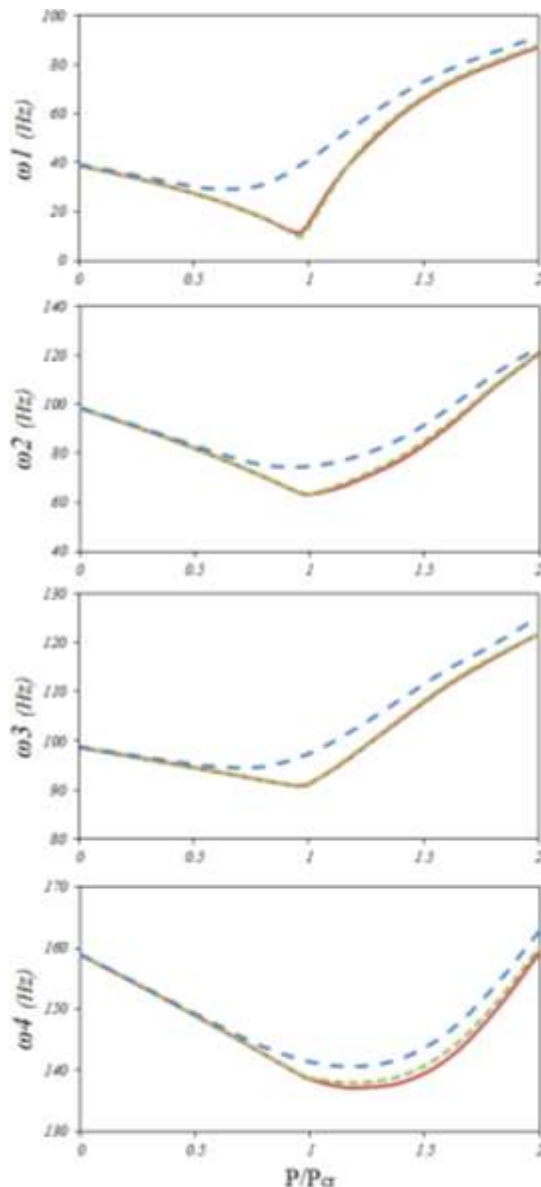
$P/P_{cr}=0$			فرکانس طبیعی (Hz)
درصد خطای نسبی	FEM	DQEM	
۰٫۹۸۵	۳۸٫۴۸۰	۳۸٫۸۵۹	اول
۱٫۵۶۰	۹۶٫۹۸۰	۹۸٫۴۹۳	دوم
۱٫۵۳۰	۹۷٫۱۵۶	۹۸٫۶۴۳	سوم
۲٫۵۳۶	۱۵۴٫۹۹۰	۱۵۸٫۹۲۰	چهارم
$P/P_{cr}=1.2$			فرکانس طبیعی (Hz)
درصد خطای نسبی	FEM	DQEM	
۱٫۷۰۲	۴۲٫۱۲۸	۴۱٫۴۱۱	اول
۲٫۸۴۰	۶۸٫۷۹۶	۷۰٫۷۵۰	دوم
۱٫۲۸۳	۹۶٫۸۵۵	۹۵٫۶۱۲	سوم
۰٫۸۱۷	۱۳۷٫۰۹۰	۱۳۸٫۲۱۰	چهارم
$P/P_{cr}=2$			فرکانس طبیعی (Hz)
درصد خطای نسبی	FEM	DQEM	
۰٫۹۶۴	۸۶٫۵۴۲	۸۷٫۳۷۶	اول
۱٫۴۲۱	۱۱۹٫۴۲۳	۱۲۱٫۱۲۰	دوم
۱٫۰۳۷	۱۲۰٫۵۸۰	۱۲۱٫۸۳۰	سوم
۳٫۳۵۰	۱۵۴٫۱۲۶	۱۵۹٫۲۹۰	چهارم

فشاری توسط مقادیر مشخص جابجایی انتهایی، اعمال شده است. پس از آن ورق با ضربه چکش (Global test AU02) تحریک شده و چهار فرکانس طبیعی نخست آن توسط تحلیلگر (B&K type 3032A) و یک شتابسنج مینیاتوری (B&K 4508) (شکل ۴) اندازه‌گیری شده است. فرکانس‌های بدست آمده به ازای مقادیر مختلف بار فشاری وارده در مقایسه با فرکانس‌های بدست آمده از روش معرفی شده، در جدول ۴ ارائه شده است. همانگونه که می‌توان مشاهده نمود، نتایج بدست آمده انطباق خوبی با نتایج تجربی دارد و حداکثر خطای نسبی برابر ۳٫۳۲ درصد است.

همچنین به منظور بررسی بیشتر دقت و صحت نتایج ارائه شده توسط روش معرفی شده، ارتعاشات پس از کمانش ورق‌های ترک‌دار از جنس پلی وینیل کلراید (PVC) به صورت تجربی، مورد بررسی قرار گرفته است. ترک به صورت شیارهای با اندازه‌های دقیق و در مکان‌های مختلف ورق در جهت عمود بر بارگذاری، ایجاد شده است. جنس و ابعاد ورق مورد بررسی مشابه با ورق بررسی شده در جدول ۳ است؛ به استثنا آن که ترک در نظر گرفته شده در محل نسبی، با عمق و طول نسبی به ترتیب برابر با ۰٫۳۷۵، ۰٫۷ و ۰٫۶ قرار گرفته است. به منظور مدلسازی شرایط مرزی چهار طرف ساده، سازه‌ای مشابه شکل ۴ ایجاد شده است. نیروی

جدول ۴- مقایسه نتایج آزمایشات تجربی با نتایج روش معرفی شده به ازای مقادیر متفاوت بار فشاری

$P/P_{cr}=0$			فرکانس طبیعی (Hz)
درصد خطای نسبی	DQEM	تجربی	
۰٫۴۹	۳۸٫۹۴	۳۸٫۷۵	اول
۲٫۹۶	۹۸٫۸۴	۹۶٫۰۰	دوم
۱٫۳۷	۹۹٫۳۴	۹۸٫۰۰	سوم
۰٫۷۵	۱۵۷٫۹۸	۱۵۶٫۸۰	چهارم
$P/P_{cr}=1.15$			فرکانس طبیعی (Hz)
درصد خطای نسبی	DQEM	تجربی	
۰٫۸۵	۴۲٫۸۶	۴۲٫۵۰	اول
۰٫۳۰	۷۳٫۹۷	۷۳٫۷۵	دوم
۰٫۴۱	۹۷٫۹۰	۹۷٫۵۰	سوم
۲٫۵۶	۱۴۱٫۸۴	۱۳۸٫۳۰	چهارم
$P/P_{cr}=1.20$			فرکانس طبیعی (Hz)
درصد خطای نسبی	DQEM	تجربی	
۰٫۰۸	۴۸٫۷۹	۴۸٫۷۵	اول
۰٫۲۶	۷۷٫۴۹	۷۷٫۳۰	دوم
۰٫۱۲	۹۹٫۸۸	۱۰۰٫۰۰	سوم
۰٫۴۱	۱۴۳٫۲۱	۱۴۳٫۸۰	چهارم
$P/P_{cr}=1.35$			فرکانس طبیعی (Hz)
درصد خطای نسبی	DQEM	تجربی	
۰٫۰۸	۶۳٫۰۵	۶۳٫۰۰	اول
۰٫۹۴	۸۷٫۸۲	۸۷٫۰۰	دوم
۰٫۷۱	۱۰۵٫۷۵	۱۰۵٫۰۰	سوم
۰٫۸۴	۱۴۸٫۰۵	۱۴۹٫۳۰	چهارم
$P/P_{cr}=1.47$			فرکانس طبیعی (Hz)
درصد خطای نسبی	DQEM	تجربی	
۰٫۱۱	۷۲٫۳۳	۷۲٫۲۵	اول
۱٫۱۵	۹۶٫۸۷	۹۸٫۰۰	دوم
۰٫۱۴	۱۱۰٫۴۶	۱۱۰٫۳۰	سوم
۳٫۳۲	۱۵۳٫۰۴	۱۵۸٫۳۰	چهارم
$P/P_{cr}=1.56$			فرکانس طبیعی (Hz)
درصد خطای نسبی	DQEM	تجربی	
۰٫۰۰	۸۱٫۵۰	۸۱٫۵۰	اول
۲٫۵۱	۱۰۸٫۶۶	۱۰۶٫۰۰	دوم
۰٫۰۸	۱۰۶٫۰۹	۱۱۶٫۰۰	سوم
۰٫۱۴	۱۶۰٫۵۲	۱۶۰٫۳۰	چهارم

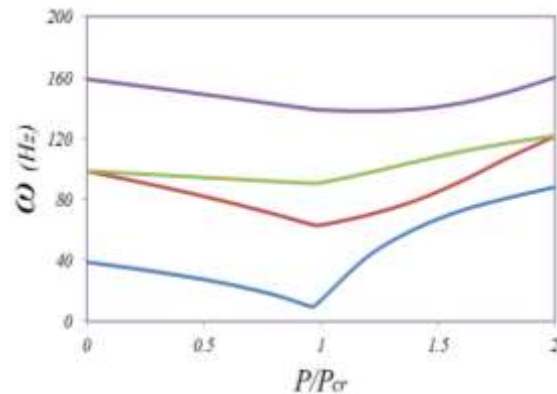


شکل ۶- تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق چهار طرف ساده ترک‌دار بر حسب بار وارده به ازای مقادیر متفاوت دامنه نقص هندسی $w_0=1 \times 10^{-4}$ (---) $w_0=1 \times 10^{-5}$ (...) $w_0=1 \times 10^{-3}$ ($l_c/a=0.5$, $l_c/b=0.4$)

با توجه به این شکل ملاحظه می‌شود که فرکانس‌های طبیعی ورق نسبت به تغییر دامنه نقص هندسی حساس می‌باشند؛ همچنین بعد از وقوع تغییر شکل‌های بزرگ (پس از کمانش) و با بیشتر شدن نیروی محوری وارد بر ورق، این اثر از بین می‌رود. این بدان علت است که پس از کمانش



شکل ۴- سازه مورد استفاده در آزمایشات تجربی

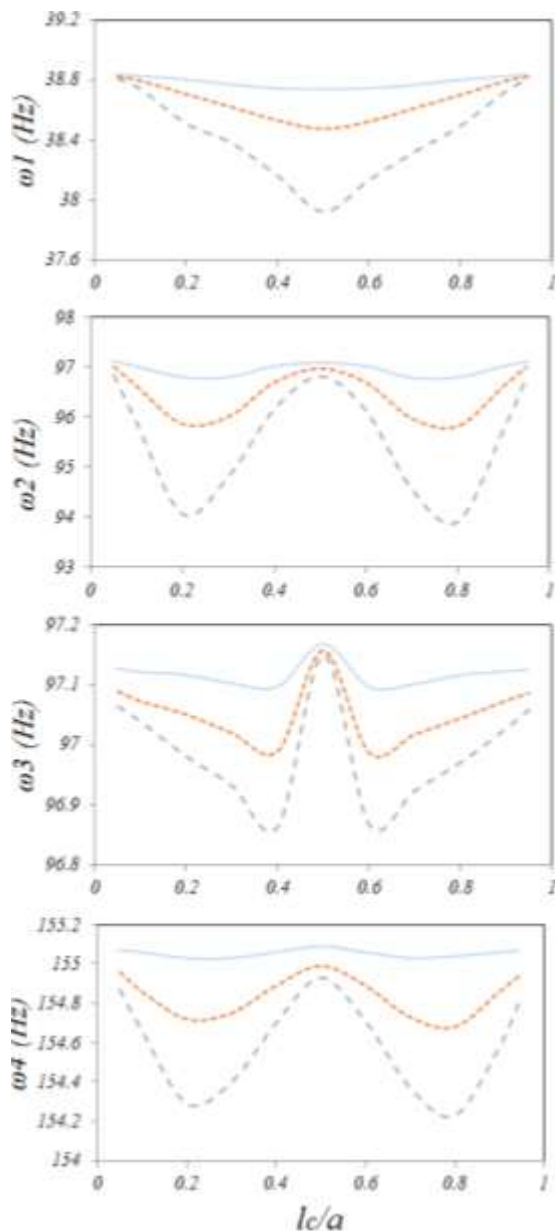


شکل ۵- تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق چهار طرف ساده ترک‌دار بر حسب بار وارده ($l_c/a=0.5$, $l_c/b=0.4$)

شکل ۵ تغییرات فرکانس طبیعی نخست ورق ترک‌دار معرفی شده در مثال جدول ۳ را بر حسب بار فشاری وارد به آن نمایش می‌دهد. مشاهده می‌گردد که با افزایش بار وارد بر ورق از صفر تا بار کمانش، فرکانس‌ها به آرامی کاهش می‌یابند که این مسئله ناشی از کاهش در سختی خمشی ورق است. پس از آن مشاهده می‌گردد که با افزایش بار به بیش از بار کمانش و وقوع تغییر شکل‌های بزرگ، فرکانس‌ها به آرامی افزایش می‌یابد که این مسئله ناشی از غلبه اثر افزایش سختی کششی بر کاهش سختی خمشی است.

شکل ۶ تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق چهار طرف ساده ترک‌دار را با افزایش بار، برای دامنه‌های متفاوت نقص هندسی نمایش می‌دهد.

وسط ورق، عمود بر بار وارده و با عمق نسبی ۰.۴ است و بار فشاری وارد بر ورق ۱/۲ برابر بار بحرانی ورق سالم است. مشاهده می‌گردد که با افزایش طول نسبی ترک، مقادیر فرکانس‌ها به علت کاهش سختی خمشی ورق، کاهش می‌یابد.



شکل ۷- تغییرات چهار فرکانس نخست ورق بر حسب مکان ترک به ازای مقادیر مختلف عمق نسبی ترک $\xi=0.2$ (---) $\xi=0.6$ (-) $\xi=0.4$ (P/P_{cr}=0, L_c/b=0.4)

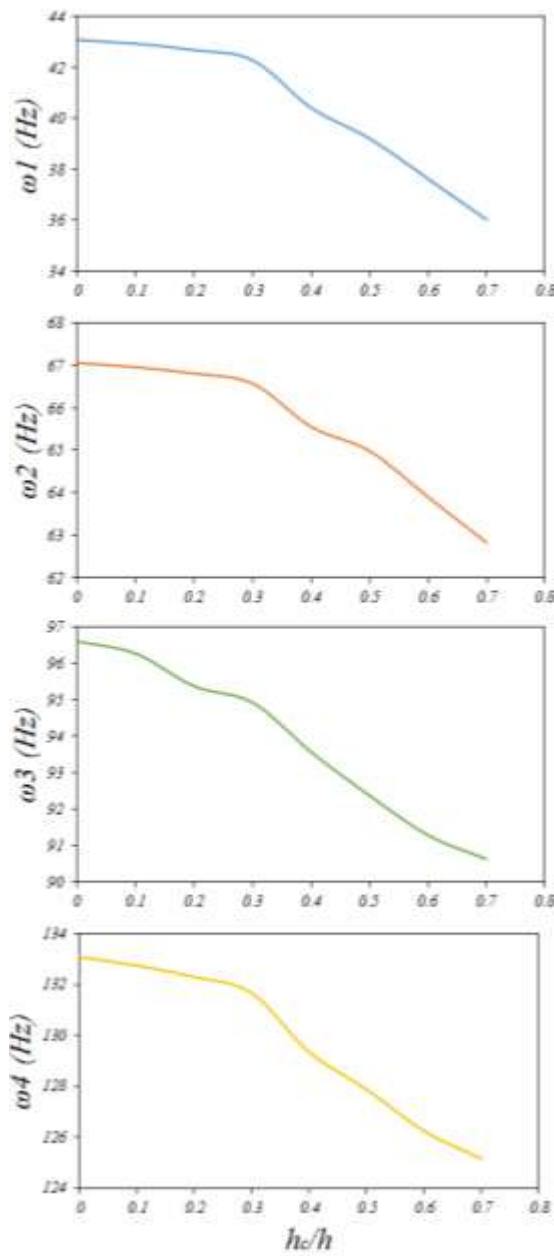
انحنای ورق افزوده شده است، به نحوی که نقص هندسی در مقایسه با آن ناچیز است.

شکل ۷ تاثیر مکان ترک بر تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق ترک‌دار را نشان می‌دهد. در این شکل تاثیر تغییرات محل ترک بر تغییرات چهار فرکانس نخست ارتعاشات طبیعی ورق ترک‌دار به ازای مقادیر مختلف عمق ترک رسم شده است. با دقت در این شکل مشخص می‌گردد که اگر ترک بر خط گره قرار داشته باشد با افزایش عمق ترک فرکانس‌های طبیعی در آن نقاط تغییری نخواهد کرد. دلیل این امر، صفر بودن گشتاور خمشی و به طبع آن صفر شدن ناپیوستگی شیب در آن نقطه است. به عبارت دیگر، تغییر فرکانس‌های طبیعی با انحنا در آن مود ارتباط مستقیمی دارد، به طوریکه حداکثر تغییر فرکانس طبیعی یک مود خاص، مربوط به محلی است که انحنا مربوط به آن مود حداکثر است. در این شکل، مکان نسبی ترک است که در محدوده $0.975 < l/a < 0.125$ در نظر گرفته شده است.

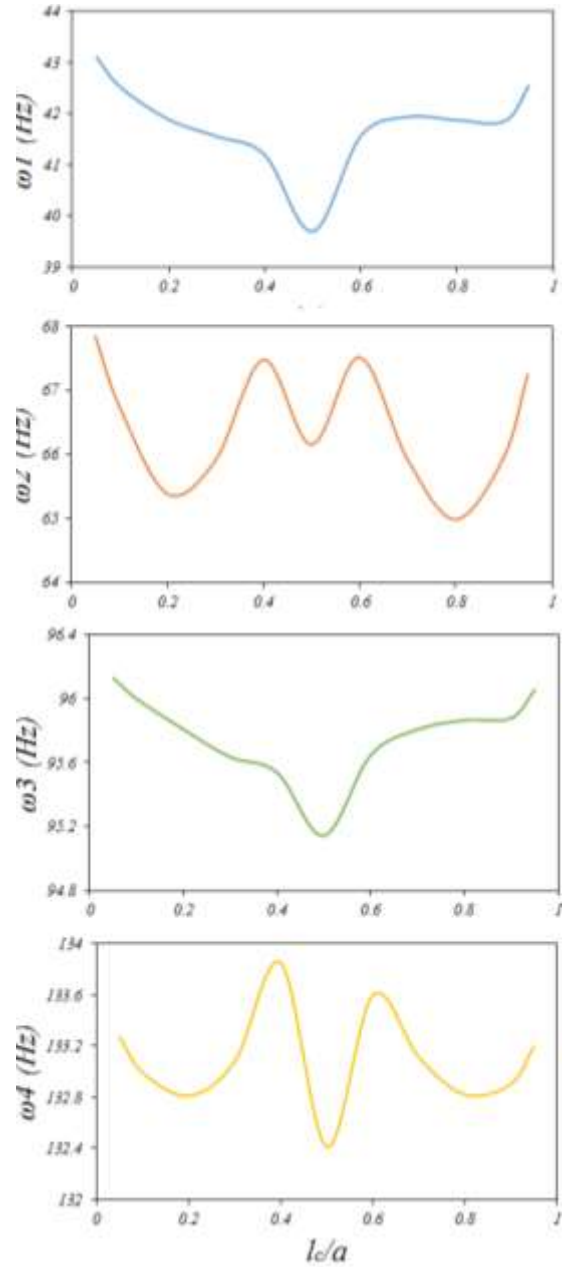
شکل ۸ تغییرات چهار فرکانس اول ورق کمانه شده ترک‌دار را برای مکان‌های نسبی متفاوت ترک نمایش می‌دهد. ورق تحت بار ۱/۲ برابر بار بحرانی ورق سالم قرار دارد. مشاهده می‌گردد که اثر ترک بر فرکانس طبیعی ورق، برای مودهای مختلف متفاوت است؛ به عبارتی تغییرات فرکانس طبیعی با انحنا در آن مود، ارتباط مستقیم دارد. از آنجاکه تغییرات انحنا ورق موجب تغییرات گشتاور خمشی در نقاط مختلف ورق می‌شود، در نتیجه اثر ترک در محل‌های مختلف متفاوت است.

در شکل ۹ تاثیر عمق نسبی ترک بر فرکانس‌های طبیعی ورق نمایش داده شده است. در این شکل بار وارد بر ورق ۱/۲ برابر بار بحرانی بوده و ترک در وسط ورق قرار دارد. می‌توان مشاهده نمود که با افزایش عمق نسبی ترک به علت کاهش سختی ورق، فرکانس‌ها کاهش می‌یابد. این مسئله با بررسی رابطه (۱۷) نیز مشخص می‌شود؛ چرا که با افزایش عمق ترک، ضریب نرمی خمشی ترک افزایش یافته که این مسئله موجب کاهش سختی موضعی ورق می‌گردد. از آنجاکه فرکانس‌های طبیعی با سختی رابطه مستقیم دارند، در نتیجه فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند.

شکل ۱۰ تاثیر تغییرات طول نسبی ترک بر فرکانس‌های طبیعی نخست ورق را نمایش می‌دهد. در اینجا ترک در



شکل ۹- تغییرات چهار فرکانس نخست ورق بر حسب عمق نسبی ترک ($P/P_{cr}=1.2$, $l_e/a=0.5$, $L_e/b=0.4$)

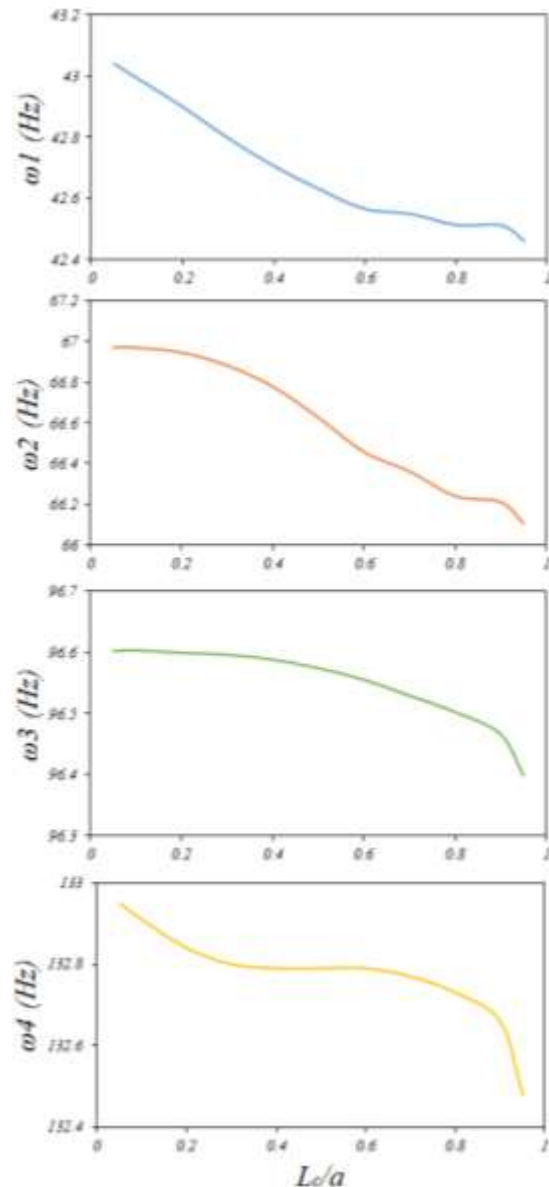


شکل ۸- تغییرات چهار فرکانس نخست ورق بر حسب مکان ترک ($P/P_{cr}=1.2$, $\xi_e=0.4$, $L_e/b=0.5$)

کمان استفاده شد و به منظور حل قسمت دینامیکی از روش المان کوادراتور دیفرانسیلی و حل دستگاه مقدار ویژه حاصل استفاده گردید. مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از آزمایش‌های عملی و روش اجزا محدود صحت و دقت روش ارائه شده را نشان داد. تاثیر پارامترهای مختلف همچون، عمق ترک، محل ترک، دامنه نقص هندسی و میزان بار فشاری وارد بر ورق بر فرکانس‌های طبیعی ورق بررسی گردید. مشاهده گردید که فرکانس‌ها با افزایش بار فشاری تا بار کمانش، کاهش می‌یابد و پس از آن به علت غلبه سختی کششی بر خمشی، سختی ورق افزایش یافته و در نتیجه فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد؛ همچنین تاثیر مکان، عمق و طول نسبی ترک بر رفتار ورق نیز بررسی و مشاهده شد که با افزایش طول و عمق نسبی ترک به علت کاهش سختی ورق، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند؛ در حالیکه تاثیر مکان ترک بر فرکانس‌های طبیعی وابسته به شکل مود، مورد بررسی است.

۷- مراجع

- [1] Rice JR, Levy N (1972) The part-through surface crack in elastic plate. J Appl Mech: 185-194.
- [2] Chen YZ (2011) A numerical solution for a finite internally cracked plate using hybrid crack element method, Structural engineering and Mechanics. An Int j 40(6): 813-827.
- [3] Brightenti R (2010) Influence of a central straight crack on the buckling behavior of thin plates under tension, compression or shear loading. Int J mech of materials 6: 73-87.
- [4] Alinia MM, Hosseinzadeh SAA, Habashi HR (2007) Numerical modeling for buckling analysis of cracked shear panels. J thin-walled structures 45: 1058-1067.
- [5] Moradi S, Alimouri P (2014) Crack detection of plate structures using differential quadrature method. J Mech Eng Sci 227(7): 1495-1504.
- [6] Bose T, Mohanty AR (2013) Vibration analysis of a rectangular thin isotropic plate with a part-through surface crack of arbitrary orientation and position. J Sound Vib 332: 7123-7141.
- [7] Huang CS, Leissa AW, Chan CW (2011) Vibrations of rectangular plates with internal cracks or slits. Int J Mech Sci 53: 436-445.
- [8] Khadem SE, Rezaee M (2000) An analytical approach for obtaining the location and depth of an all-over part through crack on externally in-plane



شکل ۱۰- تغییرات چهار فرکانس نخست ورق بر حسب طول نسبی ترک ($P/P_c=1.2$, $\xi=0.4$, $l_c/a=0.5$)

۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش تاثیر ترک بر ارتعاشات پس از کمانش ورق‌ها مورد بررسی قرار گرفت. ترک به صورت باز در نظر گرفته شده و به کمک یک فنر پیچشی مدل گردید. پاسخ دستگاه معادلات دیفرانسیلی غیرخطی مربوطه در دو قسمت استاتیکی و دینامیکی حاصل گردید. به منظور حل بخش استاتیکی، از روش المان کوادراتور دیفرانسیلی و روش طول

- Mindlin rectangular microplates. *Lat Am J Solids Stru* 11: 2351-2378.
- [21] Taczala M, Buczkowski R, Kleiber M (2016) Nonlinear free vibration of pre- and post-buckled FGM plates on two-parameter foundation in the thermal environment. *Compos struct* 137: 85-92.
- [22] Shahverdi H, Navardi MM (2017) Free vibration analysis of cracked thin plates using generalized differential quadrature element method, *Structural engineering and Mechanics. An Int J* 62(3): 345-355.
- [23] Bellman R, Kashef BG, Casti J (1972) Differential Quadrature: A technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations. *J Comput Phys* 10: 40-45.
- [24] Quan JR, Chang CT (1989) New Insights in Solving Distributed System of Equations by Quadrature-Method. *J Compute Chem Eng* 13: 1017-1024.
- [25] Chen L, Zhang Z, Zhang W (2011) Inner boundary conditions of mindlin plate with a finite-length part-through crack, *Second International Conference on Mechanic Automation and Control Engineering* 1365-1368.
- [26] Wempner GA (1971) Discrete approximation related to nonlinear theories of solids. *Int J Solids Struct* 7: 1581-1599.
- [27] Riks E (1972) The application of Newton's method to the problem of elastic stability. *J Appl Mech* 39: 1060-1065.
- [28] Forde BDR, Stierner SF (1987) Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis. *Comput Struct* 27: 625-630.
- [29] Ilanko S, Dickinson SM (1987) The vibration and post-buckling of geometrically imperfect, simply supported, rectangular plates under uni-axial loading, part I: theoretical approach. *J Sound Vib* 118(2): 313-336.
- [30] Kapania RK, Yang TY (1987) Buckling, postbuckling, and nonlinear vibrations of imperfect plates. *AIAA J* 25: 1338-1346.
- [31] Hosseini-Hashemi S, Heydar Roohi G, Hossein Rokni DT (2010) Exact free vibration study of rectangular Mindlin plates with all-over part-through open cracks. *Comput Struct* 88: 1015-1032.
- loaded rectangular plate using vibration analysis. *J Sound Vib* 230(2): 291-308.
- [9] Ismal R, Cartmell MP (2012) an investigation into the vibration analysis of a plate with a surface crack of variable angular orientation. *J Sound Vib* 2929-2948.
- [10] Israr A (2011) Model for vibration of crack plates for use with damage detection methodologies. *Space Technol* 1: 17-25.
- [11] Israr A, Cartmell MP, Manoach E, Trendafilova I, Ostachowicz W, Krawczuk M, Zak A (2009) Analytical modeling and vibration analysis of partially cracked rectangular plates with different boundary conditions and loading. *J Appl Mech-T ASME* 76(1).
- [12] Israr A, Atepor L (2009) Investigation of nonlinear dynamics of partially cracked plate. *7th International Conference on Modern Practice in Stress and Vibration Analysis, J Phys* 181: 1-8.
- [13] Bachene M, Tiberkak R, Rechak S, Maurice G, Hachi BK (2009) Enriched finite element for modal analysis of cracked plates. *Struct Mat* 463-471.
- [14] Bachene M, Tiberkak R, Rechak S (2009) Vibration analysis of cracked plates using the extended finite element method. *Comput Struct* 249-262.
- [15] Qian GL, Gu SN, Jiang JSh (1991) A finite element model of cracked plates and application to vibration problems. *Comput Struct* 483-487.
- [16] Manoach E, Trendafilova I (2008) Large amplitude vibrations and damage detection of rectangular plates. *J Sound Vib* 315: 591-606.
- [17] NG CF, White RG (1988) Dynamic behavior of postbuckled isotropic plates under in-plane compression. *J Sound Vib* 1-18.
- [18] Osman T, Matbuly MS, Mohamed SA, Nassar M (2013) Analysis of cracked plates using localized multi-domain differential quadrature method. *Appl Comput Math* 109-114.
- [19] Williams M, Griffin B, Homeijer B, Sankar B, Sheplak M (2014) Vibration of post-buckled homogeneous circular plates. *IEEE Ultrasonics Symposium*.
- [20] Ansari R, Faghieh Shojaei M, Mohammadi V, Gholami R, Darabi MA (2014) Size-dependent vibrations of post-buckled functionally graded