



تحلیل پارامتریک اثر نیروی مماسی غیریکنواخت بر روی مولفه‌های جابجایی و تنش ورق‌های مستطیلی هدفمند مستقر بر بستر الاستیک دو پارامتری

ایرج رجبی^{۱*} و محمد ملاعلی‌پور^۲

^۱ استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه مالک اشتر، شیراز

^۲ استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه مازندران، بابلسر

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۹/۲۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۰۵/۱۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۹/۰۵

چکیده

در این مطالعه حل تحلیلی مبتنی بر روش سری توانی و تئوری برشی مرتبه اول جهت تحلیل ورق‌های مستطیلی هدفمند توسعه داده شده است. برای اولین بار یک دستگاه شامل، پنج معادله دیفرانسیل پاره‌ای در حالت کلی توسط روش سری توانی حل گردیده است. اکثر روش‌های تحلیلی ارائه شده برای تحلیل ورق‌های مستطیلی، برای ورق‌ها تحت شرایط مرزی و بارگذاری مشخص می‌توانند بکار گرفته شوند. با استفاده از روش تحلیلی توسعه داده شده در این مقاله، ورق‌ها تحت شرایط مرزی مختلف، بارگذاری‌های عرضی و مماسی متنوع و ورق‌های مستقر بر بستر الاستیک دو پارامتری غیریکنواخت می‌توانند تحلیل شوند. در گام اول یک آنالیز حساسیت در رابطه با تعداد جملات حل سری، بعنوان معیار همگرایی پاسخ‌ها انجام شده است. سپس نتایج بدست آمده با نتایج ارائه شده توسط دیگر محققان مقایسه شده است. در پایان اثر پارامترهای مختلف بصورت شکل‌های سه‌بعدی بررسی شده‌اند. این مطالعه نشان می‌دهد که روش توسعه داده شده از دقت بسیار مناسبی برخوردار بوده، می‌تواند برای تحلیل ورق‌های متنوعی بکار گرفته شود؛ همچنین مشاهده می‌شود که نتایج می‌تواند بصورت تابعی از پارامترهای مختلف بدست آید؛ بنابراین حل تحلیلی ارائه شده می‌تواند به سادگی برای تحلیل اثرات پارامترهای مختلف بکار گرفته شود.

کلمات کلیدی: ورق هدفمند؛ نیروهای غیریکنواخت؛ نیروی مماسی؛ حل تحلیلی؛ تکیه‌گاه الاستیک.

Parametric Analysis of Non-Uniform Shear Load on the Displacement and Stress Components of for FG Rectangular Plates Resting on Two-Parameter Elastic Foundation

I. Rajabi^{1*}, M. Molla-Alipour²

¹ Department of Mechanical Engineering, Malek Ashtar University, Shiraz, Iran.

² Department of Mechanical Engineering, University of Mazandaran, Babolsar, Iran.

Abstract

An analytical solution procedure based on the power series method and the first order shear deformation plate theory is developed for analysis of FG rectangular plates. For the first time, a system of five second order coupled partial differential equations is solved as general form by using power-series solution. Most of presented analytical solutions for analysis of the rectangular plates can be applied for plates with specific load and edge conditions. Based on the developed analytical method in the present paper, plates under various boundary conditions, various transverse and shear loads and plates rested on non-uniform two-parameter elastic foundation can be analyzed. Firstly, a sensitivity analysis regarding the number of terms of the series solution is performed as convergence criterion. Then, the obtained results are compared with the presented results by other researchers. Finally, effects of various parameters are examined as 3D figures. This study shows that the developed method has very good accuracy and can be applied for analysis of various plates. Also, it can be seen that results can be obtained as a function of various parameters, so the presented analytical solution can be easily applied for analysis of the various parameters.

Keywords: FGM Plate; Non-Uniform Loads; Shear Traction; Analytical Solution; Elastic Foundation.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۷۱۳۶۲۵۳۶۵۸؛ فکس: ۰۷۱۳۶۲۵۶۱۹۱

آدرس پست الکترونیک: Irajabi@mail.kntu.ac.ir

۱- مقدمه

ورق‌های مستطیلی بعنوان یکی اجزای اصلی تشکیل دهنده سازه‌ها، کاربردهای گسترده‌ای در صنایع مختلف دارند. به همین علت، تحلیل این ورق‌ها در حالات مختلف و یافتن روش‌های دقیق و کاربردی برای تحلیل آن‌ها، از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است. در این راستا، مطالعات بسیار گسترده‌ای توسط محققان مختلف روی آنها صورت گرفته است. امروزه به دلیل قابلیت‌های بالای مکانیکی و حرارتی مواد هدفمند^۱ که با تغییرات تدریجی خواص حاصل می‌شود، استفاده گسترده‌ای از آنها در کاربردهای مختلف صورت می‌گیرد. لذا تحلیل و شناخت رفتار این سازه‌ها، از اهمیت بالایی برخوردار است.

این مطالعات در سال‌های اخیر نیز بطور گسترده ادامه داشته و تحقیقات مختلفی در این راستا بر اساس تئوری‌های مختلف بویژه تئوری کلاسیک ورق [۱] تا [۶] و تئوری برشی مرتبه اول [۷] تا [۱۰] منتشر شده است. افتخاری و جعفری [۱] با ترکیب روش‌های اجزای محدود و ریتز^۲، به بررسی ارتعاش آزاد پرداختند. پان و همکاران [۲]، خمش ورق‌های نازک با شرایط تکیه‌گاهی گیردار را بررسی کردند. حل تحلیلی ارائه شده توسط ایشان بر مبنای اصل جمع آثار است که شرایط ورق بصورت مجموع سه حالت مجزا در نظر گرفته شده است. سنجانویچ و همکاران [۳] برای ارتعاش آزاد ورق مستطیلی با مرزهای آزاد، یک حل تحلیلی تقریبی ساده ارائه کردند. ژانگ و ژو [۴] خمش ورق نازک را با استفاده از روش تبدیل انتگرالی تحلیل کردند. امیرپور و همکاران [۵] به تحلیل خمشی ورق‌های نازک با تغییرات عرضی یا درون-صفحه‌ای پرداختند. با استفاده از یک روش نیمه تحلیلی بازگشتی، لیسبا و مارکزاک [۶] خمش ورق را بررسی کردند. تیان و همکاران [۷] با استفاده از روش تبدیل انتگرالی^۳ خمش ورق مستقر بر بستر الاستیک با مرزهای آزاد را براساس تئوری برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار دادند. عابدی و همکاران [۸] با استفاده از حل جدید سری به تحلیل ارتعاش آزاد ورق پرداختند. قاشوچی و رضوی [۹] با

ارائه یک حل تحلیلی به تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های مستطیلی پرداختند. در تحلیل صورت گرفته از جابجایی‌های درون‌صفحه‌ای ورق صرفنظر شده که موجب می‌شود، معادلات حاکم توسط ۳ معادله دیفرانسیل بیان گردد؛ همچنین شرایط مرزی برای سه حالات تکیه‌گاه‌های گیردار، ساده و دو تکیه‌گاه مقابل گیردار و ساده باشند، ارائه شده است. با استفاده از روش تبدیل فوریه دوگانه و تبدیل لاپلاس، آی و ژانگ [۱۰] ورق مستقر بر بستر چند لایه را بررسی کردند.

با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و روش ریلی ریتز، خورشیدی و همکاران [۱۱] اثرات محیط حرارتی بر ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی مستقر بر بستر دو پارامتری مورد بررسی قرار دادند. صالحی پور و حسینی [۱۲] یک حل دقیق فرم بسته برای ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم مستطیلی همگن و ایزوتروپیک چندلایه با شرایط مرزی ساده بر مبنای تئوری الاستیسیته سه‌بعدی خطی ارائه کردند. میکاییلی و بهجت [۱۳] با استفاده از روش بدون المان گلرکین به تحلیل سه‌بعدی خمش ورق هدفمند ضخیم پرداختند. رجبی و همکاران [۱۴] با استفاده از تئوری عمومی-محلی^۴ و روش اجزای محدود ورق‌های کامپوزیتی و ساندویچی حاوی لایه‌های پیزوالکتریک را تحلیل کردند.

ورق‌های مستقر روی بستر الاستیک، توسط محققان مختلف [۱۵] تا [۱۸] بررسی گردید. عاصمی و همکاران [۱۵] با استفاده از تئوری الاستیسیته به تحلیل کماتش قطاعی از دایره هدفمند پرداختند. بر اساس تئوری برشی مرتبه اول، باقری و همکاران [۱۶] کماتش ورق‌های حلقوی و علی‌نقی‌زاده و کدخدایان [۱۷] خیز قطاعی از دایره را بررسی کردند. جمال‌پور و همکاران [۱۸] ارتعاش آزاد و کماتش محوری ورق نازک الکترومغناطیس را مورد تحلیل و ارزیابی قرار دادند.

بسیاری از مطالعات انجام شده روی ورق‌های مستطیلی بر مبنای روش‌های تحلیلی ناویر^۵ [۱۹] و لوی^۶ [۲۰] صورت گرفته است. این روش‌ها که بر اساس سری‌های فوریه بیان می‌شوند، دارای محدودیت در اعمال شرایط مرزی می‌باشند.

^۴ Functionally graded materials

^۵ NavierMethod

^۶ Levy Method

^۱ NavierMethod

^۲ Ritz method

^۳ Integral transform solution

دارای قابلیت‌های گسترده‌ای است که می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

- قابلیت تحلیل ورق تحت شرایط مرزی مختلف (برخلاف بسیاری از روش‌های تحلیلی که برای شرایط مرزی خاصی ارائه شده‌اند).
- در نظر گرفتن بستر الاستیک غیریکنواخت دو پارامتری
- تحلیل ورق تحت بارگذاری‌های عرضی غیریکنواخت
- تحلیل ورق تحت بارگذاری‌های مماسی غیریکنواخت در هر دو راستا
- دستیابی به مولفه‌های مختلف جابجایی و تنش بصورت توابعی از مختصات (x, y, z) که علاوه بر قابلیت ترسیم سه‌بعدی بر اساس مختصات ورق، مقادیر اکسترمم این مولفه‌ها و محل آنها بسادگی قابل محاسبه است.
- دستیابی به پاسخ ورق بصورت پارامتری بر اساس متغیرها و بررسی اثرات بصورت توابع و شکل‌های مختلف سه‌بعدی

قابل ذکر است که در مطالعه انجام شده، از تئوری برشی مرتبه اول استفاده است که بر این اساس ورق‌های نسبتاً ضخیم نیز قابل تحلیل است؛ همچنین با ترکیب نتایج حاصله با تئوری الاستیسیته سه‌بعدی، مولفه‌های عرضی تنش نیز با دقت مناسب محاسبه شده است. برای بررسی صحت و دقت حل پیشنهادی، نتایج حاصله در برخی حالات برای مولفه‌های مختلف تنش و جابجایی ورق مستقر بر بستر الاستیک تحت بارگذاری‌های یکنواخت و غیر یکنواخت عرضی با نتایج ارائه شده توسط دیگر محققان مقایسه شده است که نشان‌دهنده دقت مناسب حل ارائه شده با وجود قابلیت‌های گسترده آن است.

۲- معادلات حاکم بر ورق مستقر بر بستر الاستیک

برای تحلیل ورق‌های مستطیلی هدفمند، از تئوری برشی مرتبه اول استفاده شده است. مطابق شکل ۱، ورق روی بستر الاستیک وینکلر-پاسترناک قرار گرفته و مبدا دستگاه مختصات در وسط ورق در نظر گرفته شده است.

با استفاده از روش ناویر تنها ورق‌هایی با شرایط مرزی ساده قابل تحلیل می‌باشند و روش لوی برای ورق‌هایی که دو مرز مقابل دارای شرایط تکیه‌گاهی ساده باشند، قابل استفاده است. حل تحلیلی بر مبنای سری توانی جهت تحلیل سازه‌ها توسط محققین مختلف مورد استفاده قرار گرفته و توسعه داده شده است. آریکوگلو و ازکل [۲۱] به تحلیل ارتعاش آزاد تیرها پرداختند. یالسین و همکاران [۲۲] ارتعاش آزاد ورق-های دایره‌ای را با استفاده از تئوری کلاسیک تحلیل کردند. با استفاده از توسعه روش سری توانی، علی‌پور و شرعیات به تحلیل کمانش [۲۳]، تنش [۲۴]، ارتعاش آزاد [۲۵] و ارتعاش اجباری [۲۶] ورق دایره‌ای پرداختند؛ همچنین با استفاده از این روش، تحلیل دینامیکی ورق دایره‌ای پله‌ای توسط علی‌پور [۲۷] به انجام رسید. قابل ذکر است که تحلیل‌های انجام شده برای ورق‌های دایره‌ای در حالتی بکار گرفته شده است که توابع تنها بر اساس یک متغیر (شعاع) بیان شوند. بحسکارا و داهویا [۲۸] با استفاده از تئوری کلاسیک ورق به بررسی ورق‌های مستطیلی نازک پرداختند. علی‌پور [۲۹] این روش را برای تحلیل ورق‌های مستطیلی و بر مبنای تئوری برشی مرتبه اول در حالتی که ورق در حالت عرضی متقارن بوده و جابجایی‌های درون صفحه‌ای صفر باشند، توسعه داد که با صرف نظر از جابجایی‌های درون صفحه‌ای، معادلات دیفرانسیل حاکم بر ورق به سه معادله کاهش می‌یابد.

مروری بر تعدادی از جدیدترین مقالات ارائه شده نشان می‌دهد که بحث تحلیل ورق‌های مستطیلی و یافتن روش‌هایی جدید که ضمن دارا بودن دقت و هزینه محاسباتی پایین، قابلیت تحلیل شرایط جامع‌تری از ورق را نیز داشته باشند همواره از مباحث مهم مهندسی مکانیک است. با این وجود اکثر تحلیل‌ها دارای محدودیت‌هایی بوده و مربوط به حالات خاصی از ورق‌ها است. در این مطالعه روش سری توانی برای تحلیل ورق‌های مستطیلی هدفمند توسعه داده شده است. با توجه به تغییرات عرضی خواص ورق، جابجایی-های درون صفحه‌ای لایه میانی غیر صفر می‌باشند که باید در تحلیل‌ها مد نظر قرار گیرند. در این حالت روابط حاکم بر ورق توسط پنج معادله دیفرانسیل پاره‌ای بیان خواهد گردید. تحلیل ارائه شده علاوه بر هزینه محاسباتی نسبتاً پایین،

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} &= -T_x(x,y) \\ N_{y,y} + N_{xy,x} &= -T_y(x,y) \\ M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x &= -\frac{h}{2} T_x(x,y) \\ M_{y,y} + M_{xy,x} - Q_y &= -\frac{h}{2} T_y(x,y) \\ Q_{x,x} + Q_{y,y} + q(x,y) &= k_w(x,y)w \\ &\quad -k_s(x,y)(w_{,xx} + w_{,yy}) \end{aligned} \quad (۴)$$

$E(z)$ مدول یانگ ورق هدفمند است که بصورت پیوسته در راستای ضخامت تغییر می‌کند.

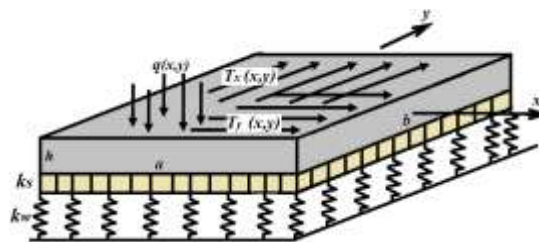
$$\begin{aligned} E(z) &= E_m + (E_c - E_m)V_f \\ V_f &= \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^g \end{aligned} \quad (۵)$$

بر اساس رابطه (۴) خواص ورق در سطح رویین فلز (E_m) و در سطح زیرین سرامیک (E_c) حاصل خواهد گردید. V_f نیز نسبت حجمی سرامیک است.

در رابطه (۴)، k_s و k_w به ترتیب ضرایب عمودی و برشی تکیه‌گاه الاستیک می‌باشند. قابل ذکر است که ورق می‌تواند روی یک تکیه‌گاه الاستیک غیریکنواخت قرار گرفته باشد. همچنین M ، N و Q منتجهای تنش می‌باشند که با انتگرالگیری در راستای ضخامت بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} dz \\ \begin{Bmatrix} N_y \\ M_y \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} dz \\ \begin{Bmatrix} N_{xy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} dz \\ Q_x &= k \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \\ Q_y &= k \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \end{aligned} \quad (۶)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} (u_{0,x} + v v_{0,y}) + \begin{Bmatrix} B \\ D \end{Bmatrix} (\psi_{x,x} + v \psi_{y,y}) \\ \begin{Bmatrix} N_y \\ M_y \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} (u_{0,y} + v v_{0,x}) + \begin{Bmatrix} B \\ D \end{Bmatrix} (\psi_{y,y} + v \psi_{x,x}) \\ \begin{Bmatrix} N_{xy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \end{Bmatrix} (u_{0,y} + v_{0,x}) + \begin{Bmatrix} \bar{B} \\ \bar{D} \end{Bmatrix} (\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \\ Q_x &= \kappa \bar{A} (\psi_x + w_{,x}) \\ Q_y &= \kappa \bar{A} (\psi_y + w_{,y}) \end{aligned} \quad (۷)$$



شکل ۱- ورق هدفمند تحت بارگذاری‌های غیریکنواخت عرضی و برشی مستقر بر بستر الاستیک

ضخامت ورق h و طول آن در راستای x و y به ترتیب برابر با a و b است. ورق تحت نیروی عرضی $q(x,y)$ و نیروهای مماسی $T_x(x,y)$ و $T_y(x,y)$ قرار دارد که به ترتیب در جهات x و y اعمال شده‌اند. قابل ذکر است که نیروهای عرضی و مماسی اعمال شده می‌تواند بصورت غیریکنواخت و بر اساس توابع دلخواهی از x و y اعمال گردد.

بر اساس تئوری برشی مرتبه اول، روابط جابجایی ورق بصورت رابطه (۱) در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\psi_x(x,y), \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\psi_y(x,y), \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \\ -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, \quad -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (۱)$$

u_0 و v_0 جابجایی‌های درون صفحه‌ای لایه میانی، ψ_x و ψ_y چرخش محور عمود بر صفحه و w خیز ورق است. با نوشتن روابط کرنش و تنش براساس تئوری برشی مرتبه اول و استفاده از روش کمینه‌سازی انرژی، معادلات حاکم استخراج می‌گردند.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= u_{0,x} + z\psi_{x,x}, \\ \epsilon_y &= v_{0,y} + z\psi_{y,y}, \\ \gamma_{xy} &= u_{0,y} + v_{0,x} + z(\psi_{x,y} + z\psi_{y,x}), \\ \gamma_{xz} &= \psi_x + w_{,x}, \\ \gamma_{yz} &= \psi_y + w_{,y} \end{aligned} \quad (۲)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G(z)\gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= G(z)\gamma_{xz} \\ \tau_{yz} &= G(z)\gamma_{yz} \end{aligned} \quad (۳)$$

$$\begin{aligned}
 y &= \pm \frac{b}{2}; \\
 v_0 &= 0 \quad \text{or} \quad N_y = 0, \\
 u_0 &= 0 \quad \text{or} \quad N_{xy} = 0, \\
 \psi_y &= 0 \quad \text{or} \quad M_y = 0, \\
 \psi_x &= 0 \quad \text{or} \quad M_{xy} = 0, \\
 w &= 0 \quad \text{or} \quad Q_y = 0.
 \end{aligned} \tag{10}$$

روابط بیان شده در رابطه (۱۰)، شرایط مرزی کلی می‌باشد؛ یعنی روی مرزها، توابع جابجایی یا منتهجه تنش متناظر با آن باید صفر باشد. با توجه به انتخاب حالت‌های مختلف برای صفر شدن توابع جابجایی و منتهجه‌های تنش، شرایط مرزی مورد نظر (گیردار، ساده، غلطکی و آزاد) حاصل خواهند گردید.

۳- حل تحلیلی معادلات حاکم

جهت حل دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم، ابتدا توابع جابجایی و نیروهای اعمالی بصورت سری‌های توانی دوگانه بر اساس x و y لحاظ شده‌اند.

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y) &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M U_{m,n} x^m y^n \\
 v_0(x, y) &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M V_{m,n} x^m y^n \\
 \psi_x(x, y) &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \Psi_{m,n}^{(x)} x^m y^n \\
 \psi_y(x, y) &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \Psi_{m,n}^{(y)} x^m y^n \\
 w(x, y) &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M W_{m,n} x^m y^n
 \end{aligned} \tag{11}$$

روابط $U_{m,n}$ ، $V_{m,n}$ ، $\Psi_{m,n}^{(x)}$ و $\Psi_{m,n}^{(y)}$ ضرایب مجهول سری‌ها می‌باشند که باید بر اساس معادلات حاکم و شرایط مرزی تعیین گردند. M و N تعداد جمله‌های سری‌ها می‌باشند و به نحوی تعیین می‌گردند تا پاسخ‌ها با دقت مورد نظر همگرا گردد.

نیروهای اعمالی نیز بصورت سری‌های توانی دوگانه بر اساس x و y قابل بیان می‌باشند.

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} A \\ B \\ D \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{1-v^2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz \\
 \begin{Bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{D} \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{2(1+v)} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz
 \end{aligned} \tag{8}$$

κ ضریب تصحیح برش در تئوری برشی مرتبه اول است که مقدار آن 5/6 در نظر گرفته شده است.

با جایگذاری منتهجه‌های تنش از رابطه (۷) در معادلات حاکم (۵)، معادلات حاکم بصورت دستگاه معادلات دیفرانسیل بر اساس توابع جابجایی قابل بیان بوده که شامل ۵ معادله دیفرانسیل مرتبه دو است.

$$\begin{aligned}
 &Au_{0,xx} + B\psi_{x,xx} + \nu Av_{0,yx} + \nu B\psi_{y,yx} \\
 &+ \bar{A}(u_{0,yy} + v_{0,xy}) + \bar{B}(\psi_{x,yy} + \psi_{y,xy}) \\
 &= -T_x(x, y) \\
 &Av_{0,yy} + \nu Au_{0,xy} + B\psi_{y,yy} + \nu A\psi_{x,xy} \\
 &+ \bar{A}(u_{0,yx} + v_{0,xx}) + \bar{B}(\psi_{x,yx} + \psi_{y,xx}) \\
 &= -T_y(x, y) \\
 &Bu_{0,xx} + \nu Bv_{0,yx} + D\psi_{x,xx} + \nu D\psi_{y,yx} \\
 &+ \bar{B}(u_{0,yy} + v_{0,xy}) + \bar{D}(\psi_{x,yy} + \psi_{y,xy}) \\
 &- \kappa \bar{A}(\psi_x + w_x) = -\frac{h}{2} T_x(x, y) \\
 &Bv_{0,yy} + \nu Bu_{0,xy} + D\psi_{y,yy} + \nu D\psi_{x,xy} \\
 &+ B_{44}(u_{0,yx} + v_{0,xx}) + \bar{D}(\psi_{x,yx} + \psi_{y,xx}) \\
 &- \kappa \bar{A}(\psi_y + w_y) = -\frac{h}{2} T_y(x, y) \\
 &\kappa \bar{A}(\psi_{x,x} + w_{,xx}) + \kappa \bar{A}(\psi_{y,y} + w_{,yy}) + q \\
 &= k_w w - k_s(w_{,xx} + w_{,yy})
 \end{aligned} \tag{9}$$

شرایط مرزی ورق نیز بر اساس جابجایی‌ها یا منتهجه‌های تنش قابل بیان است.

$$\begin{aligned}
 x &= \pm \frac{a}{2}; \\
 u_0 &= 0 \quad \text{or} \quad N_x = 0, \\
 v_0 &= 0 \quad \text{or} \quad N_{xy} = 0, \\
 \psi_x &= 0 \quad \text{or} \quad M_x = 0, \\
 \psi_y &= 0 \quad \text{or} \quad M_{xy} = 0, \\
 w &= 0 \quad \text{or} \quad Q_x = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (n+2)(n+1)(BV_{m,n+2} + D\Psi_{m,n+2}^{(y)}) \\ & + v(m+1)(n+1)(BU_{m+1,n+1} + D\Psi_{m+1,n+1}^{(x)}) \\ & + (m+2)(m+1)(\bar{B}V_{m+2,n} + \bar{D}\Psi_{m+2,n}^{(y)}) \\ & + (m+1)(n+1)(\bar{B}U_{m+1,n+1} + \bar{D}\Psi_{m+1,n+1}^{(x)}) \\ & - \kappa\bar{A}\Psi_{m,n}^{(y)} - \kappa\bar{A}W_{m,n+1}(n+1) \\ & + \frac{h}{2}\gamma_{m,n} = 0 \end{aligned} \quad (۱۶)$$

$$\begin{aligned} & \kappa\bar{A}(m+1)\Psi_{m+1,n}^{(x)} + \kappa\bar{A}(n+1)\Psi_{m,n+1}^{(y)} \\ & + \kappa\bar{A}(m+2)(m+1)W_{m+2,n} + \alpha_{m,n} \\ & - k_w W_{m,n} + \kappa\bar{A}(n+2)(n+1)W_{m,n+2} \\ & + k_s [(m+2)(m+1)] = 0 \end{aligned} \quad (۱۷)$$

جهت برقراری معادلات حاکم به ازای هر x و y که بصورت مجموعه روابط (۱۳) تا (۱۷) بیان شده است، باید ضرایب توان‌های مختلف x و y صفر گردد. از سوی دیگر با جاگذاری رابطه (۱۱) در رابطه (۷) منتهی‌های تنش بصورت ضرایبی از توان‌های x و y قابل بیان می‌باشند.

$$N_x = \sum_n^N \sum_m^M [(AU_{m,n} + B\Psi_{m,n}^{(x)})mx^{m-1}y^n + (AV_{m,n} + B\Psi_{m,n}^{(y)})vnx^m y^{n-1}]$$

$$M_x = \sum_n^N \sum_m^M [(BU_{m,n} + D\Psi_{m,n}^{(x)})mx^{m-1}y^n + (BV_{m,n} + D\Psi_{m,n}^{(y)})vnx^m y^{n-1}]$$

$$N_y = \sum_n^N \sum_m^M [(AU_{m,n} + B\Psi_{m,n}^{(x)})vmx^{m-1}y^n + (AV_{m,n} + B\Psi_{m,n}^{(y)})nx^m y^{n-1}]$$

$$M_y = \sum_n^N \sum_m^M [(BU_{m,n} + D\Psi_{m,n}^{(x)})vmx^{m-1}y^n + (BV_{m,n} + D\Psi_{m,n}^{(y)})nx^m y^{n-1}]$$

$$\begin{aligned} q &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \alpha_{m,n} x^m y^n \\ T_x &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \beta_{m,n} x^m y^n \\ T_y &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \gamma_{m,n} x^m y^n \end{aligned} \quad (۱۲)$$

با جاگذاری روابط (۱۱) و (۱۲) در مجموعه معادلات حاکم (۹) و اعمال ساده‌سازی می‌توان این معادلات را بصورت ضرایبی از توان‌های یکسان x و y نوشت؛ بنابر این معادلات حاکم بصورت زیر قابل بیان می‌باشند که باید به ازای همه مقادیر دلخواه m و n صفر باشند.

$$\begin{aligned} & (m+2)(m+1)(AU_{m+2,n} + B\Psi_{m+2,n}^{(x)}) \\ & + v(m+1)(n+1)(AV_{m+1,n+1} + B\Psi_{m+1,n+1}^{(y)}) \\ & + (n+2)(n+1)(\bar{A}U_{m,n+2} + \bar{B}\Psi_{m,n+2}^{(x)}) \\ & + (m+1)(n+1)(\bar{A}V_{m+1,n+1} + \bar{B}\Psi_{m+1,n+1}^{(y)}) \\ & + \beta_{m,n} = 0 \end{aligned} \quad (۱۳)$$

$$\begin{aligned} & (n+2)(n+1)(AV_{m,n+2} + B\Psi_{m,n+2}^{(y)}) \\ & + v(m+1)(n+1)(AU_{m+1,n+1} + B\Psi_{m+1,n+1}^{(x)}) \\ & + (m+2)(m+1)(\bar{A}V_{m+2,n} + \bar{B}\Psi_{m+2,n}^{(y)}) \\ & + (m+1)(n+1)(\bar{A}U_{m+1,n+1} + \bar{B}\Psi_{m+1,n+1}^{(x)}) \\ & + \gamma_{m,n} = 0 \end{aligned} \quad (۱۴)$$

$$\begin{aligned} & (m+2)(m+1)(BU_{m+2,n} + D\Psi_{m+2,n}^{(x)}) \\ & + v(m+1)(n+1)(BV_{m+1,n+1} + D\Psi_{m+1,n+1}^{(y)}) \\ & + (n+2)(n+1)(\bar{B}U_{m,n+2} + \bar{D}\Psi_{m,n+2}^{(x)}) \\ & + (m+1)(n+1)(\bar{B}V_{m+1,n+1} + \bar{D}\Psi_{m+1,n+1}^{(y)}) \\ & - \kappa\bar{A}\Psi_{m,n}^{(x)} - \kappa\bar{A}W_{m+1,n}(m+1) \\ & + \frac{h}{2}\beta_{m,n} = 0 \end{aligned} \quad (۱۵)$$

$$\tau_{yz} = \int_z^{\frac{h}{2}} \left\{ \frac{E(z)}{1-\nu^2} (v_{0,yz} + z\psi_{y,yy} + \nu v_{0,yx} + z\nu\psi_{x,yy}) + \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [u_{0,xy} + v_{0,xx} + z(\psi_{x,xy} + \psi_{y,xx})] \right\} dz + T_y \quad (22)$$

۵- ارائه نتایج

در این قسمت نتایج مربوط به جابجایی‌ها و تنش‌های ورق-های مستطیلی هدفمند مستقر بر بستر الاستیک تحت بارگذاری‌های عرضی و مماسی ارائه شده است. نتایج برای ورق‌های مدرج تابعی ارائه شده‌اند که خواص سطح رویین از جنس سرامیک آلومینا (E=380 GPa) بوده و بتدریج به فلز آلومینیوم (E=70 GPa) در سطح زیرین می‌رسد. ضریب پواسون ۰/۳ در نظر گرفته شده است. ابتدا به منظور بررسی صحت و دقت روند تحلیل ارائه شده، مقایسه‌ای بین نتایج ارائه شده در این مقاله و مقالات دیگر صورت گرفته است. سپس نتایج مربوط به حالات مختلف ورق ارائه شده است.

۵-۱- صحنه‌گذاری حل ارائه شده

در این بخش ابتدا یک آنالیز حساسیت در رابطه با تعداد جملات حل سری بعنوان معیار همگرایی پاسخ‌ها در جدول ۱ ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که روند حل کاملاً همگرا بوده و با انتخاب تعداد ۱۵ جمله برای سری، پاسخ‌های مناسبی بدست خواهد آمد. در جداول ۲ تا ۴ نتایج حاصل از تحلیل حاضر با نتایج ارائه شده توسط محققان دیگر مقایسه شده است. نتایج برای جابجایی‌ها و تنش‌های مختلف عمودی و برشی مختلف برای بارگذاری‌های یکنواخت ($q=q_0$) و غیریکنواخت ($q = q_0 \cos(\frac{\pi x}{a}) \cos(\frac{\pi y}{b})$) به ترتیب در جداول ۲ و ۳ ارائه شده است. نتایج در این جداول بصورت بی‌بعد برای یک ورق مربعی با نسبت $a/h=10$ برای نسبت‌های حجمی مختلف خواص (g) ارائه شده‌اند.

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{10h^3 E_c}{a^4 q} w(0,0), \bar{u} = \frac{100h^3 E_c}{a^4 q} u\left(0,0, -\frac{h}{4}\right), \\ \bar{v} &= \frac{100h^3 E_c}{a^4 q} v\left(0,0, -\frac{h}{6}\right), \bar{\sigma}_x = \frac{h}{aq} \sigma_x\left(0,0, \frac{h}{2}\right), \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{h}{aq} \sigma_y\left(0,0, \frac{h}{3}\right), \bar{\tau}_{xy} = \frac{h}{aq} \tau_{xy}\left(0,0, -\frac{h}{3}\right), \\ \bar{\tau}_{xz} &= \frac{h}{aq} \tau_{xz}\left(-\frac{a}{2}, 0,0\right), \bar{\tau}_{yz} = \frac{h}{aq} \tau_{yz}\left(0, -\frac{b}{2}, \frac{h}{6}\right) \end{aligned}$$

$$N_{xy} = \sum_n^N \sum_m^M [(\bar{A}U_{m,n} + \bar{B}\Psi_{m,n}^{(x)})nx^m y^{n-1} + (\bar{A}V_{m,n} + \bar{B}\Psi_{m,n}^{(y)})mx^{m-1}y^n]$$

$$M_{xy} = \sum_n^N \sum_m^M [(\bar{B}U_{m,n} + \bar{D}\Psi_{m,n}^{(x)})nx^m y^{n-1} + (\bar{B}V_{m,n} + \bar{D}\Psi_{m,n}^{(y)})mx^{m-1}y^n]$$

$$\begin{aligned} Q_x &= k\bar{A} \sum_n^N \sum_m^M [(\Psi_{m,n}^{(x)}x^m y^n + W_{m,n}mx^{m-1}y^n) \\ Q_y &= k\bar{A} \sum_n^N \sum_m^M [(\Psi_{m,n}^{(y)}x^m y^n + W_{m,n}mx^m y^{n-1}) \end{aligned} \quad (18)$$

فرم سری شرایط مرزی مورد نظر با استفاده از روابط (۱۱) و (۱۸) حاصل خواهند گردید. در نهایت با حل روابط سری معادلات حاکم و شرایط مرزی ضرایب مجهول سری‌ها تعیین گردیده و توابع جابجایی بدست می‌آید.

۴- محاسبه تنش‌های برشی عرضی اصلاح شده

با توجه به اینکه بر اساس تئوری برشی مرتبه اول، تنش‌های برشی عرضی بصورت مقادیر ثابت در راستای ضخامت محاسبه می‌گردند. پاسخ‌های بدست آمده برای این تنش‌ها، توسط تئوری الاستیسیته اصلاح شده‌اند. بدین منظور ابتدا روابط تعادل الاستیسیته در راستای x و y نوشته می‌شوند.

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = 0 \quad (19)$$

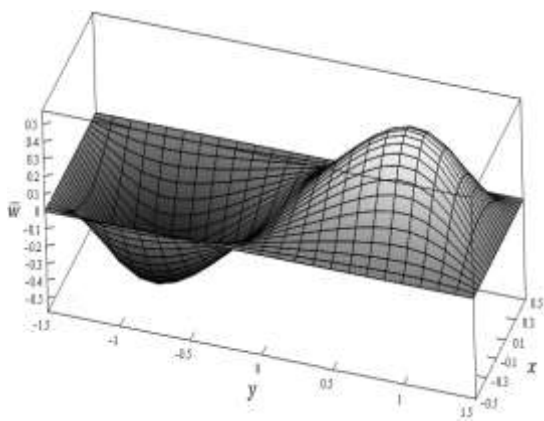
$$\sigma_{y,y} + \tau_{xy,x} + \tau_{yz,z} = 0 \quad (20)$$

با جایگذاری تنش‌های عمودی و برشی درون صفحه‌ای حاصله از تئوری برشی مرتبه اول در این روابط و انتگرال‌گیری نسبت به z، تنش‌های برشی عرضی اصلاح شده بدست می‌آیند.

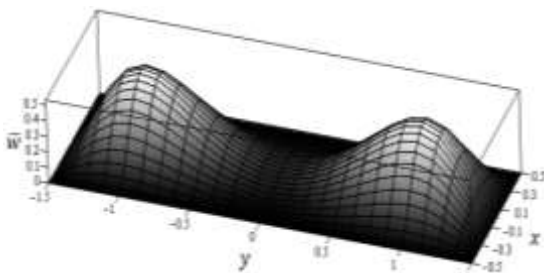
در نهایت با محاسبه انتگرال در راستای ضخامت می‌توان به تنش‌های برشی عرضی اصلاح شده دست یافت.

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \int_z^{\frac{h}{2}} \left\{ \frac{E(z)}{1-\nu^2} (u_{0,xx} + z\psi_{x,xx} + \nu v_{0,yx} + z\nu\psi_{y,yy}) + \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [u_{0,yy} + v_{0,xy} + z(\psi_{x,yy} + \psi_{y,xy})] \right\} dz + T_x \quad (21) \end{aligned}$$

بی‌بعد ورق ($\bar{w} = \frac{100h^3 E_c w}{a^4 T_y}$) تحت بارگذاری مماسی $T_y = 1$ نشان داده شده است. در شکل ۳-الف خیز ورق بدون تکیه‌گاه الاستیک در حالت سه‌بعدی و در شکل ۳-ب اثر تکیه‌گاه‌ها روی خیز ورق نشان داده شده است. باتوجه به شکل مشخص است که منحنی خیز ورق پادمتقارن است؛ یعنی با تغییر علامت y ، اندازه خیز بدون تغییر ولی جهت خیز تغییر می‌کند. در واقع نیروی برشی سبب بوجود آمدن گشتاور خمشی شده و خیز در ورق ایجاد می‌گردد. گشتاور خمشی در مرکز ورق صفر بوده و جهت آن در دو نیمه ورق متفاوت است؛ به همین علت خیز در مرکز صفر بوده و جهت خیز ایجاد شده در دو طرف ورق متفاوت است.



(الف)



(ب)

شکل ۲- خیز بی‌بعد ورق هدفمند مستطیلی گیردار تحت نیروی غیر یکنواخت عرضی الف ($q=y$) و ب ($q=y^2$)

در شکل ۳-الف خیز ورق بدون تکیه‌گاه الاستیک در حالت سه‌بعدی و در شکل ۳-ب اثر تکیه‌گاه‌ها روی خیز ورق نشان داده شده است. باتوجه به شکل مشخص است که منحنی خیز ورق پادمتقارن است؛ یعنی با تغییر علامت y

همانطور که مشخص است، با افزایش خواص فلزی (تبدیل شدن ورق سرامیکی به فلزی) سفتی ورق (E) کاهش یافته و در نتیجه جابجایی‌های ورق افزایش می‌یابد؛ همچنین مقادیر تنش برای ورق‌های فلزی و سرامیکی کاملاً یکسان است که دلیل این نکته، همگن بودن ورق در این دو حالت می‌باشد؛ زیرا در حالتی که ورق همگن باشد، تنش‌ها مستقل از E خواهند بود. نتایج حاصل از این تحقیق و نتایج مرجع [۱۶] مطابقت خوبی با یکدیگر داشته و متوسط اختلاف نسبی در جداول ۲ و ۳ به ترتیب ۲/۷۳ و ۱/۱۴ درصد است. در جدول ۴ اثر تکیه‌گاه‌های الاستیک روی خیز و تنش‌های بی‌بعد ورق هدفمند مربعی ($a/h=10$) برای اثرات $\bar{k}_s = \frac{a^2}{D_c} k_s$ ، $\bar{k}_w = \frac{a^4}{D_c} k_w$ مقایسه شده است. نتایج ارائه شده در جدول ۳ مربوط به بارگذاری غیر یکنواخت تحت بارگذاری غیر یکنواخت ($q = q_0 \cos(\frac{\pi x}{a}) \cos(\frac{\pi y}{b})$) بوده و $D_c = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)}$ سفتی خمشی ورق سرامیکی است که برای بی‌بعدسازی پارامترهای تکیه‌گاه الاستیک مورد استفاده قرار گرفته است. همانگونه که انتظار می‌رود، وجود تکیه‌گاه الاستیک موجب کاهش خیز و تنش‌های ورق می‌شود؛ همچنین نتایج حاصل از این تحقیق، مطابقت خوبی با نتایج ارائه شده در مرجع [۱۳] داشته و متوسط اختلاف نسبی در حالات $\bar{k}_w = 100$ ، $\bar{k}_s = 0$ و $\bar{k}_w = 0$ ، $\bar{k}_s = 10$ به ترتیب ۱/۲۲، ۱/۱۹ و ۱/۲۰ درصد است.

۵-۲- بررسی ورق با تکیه‌گاه‌های گیردار تحت بارگذاری‌های عرضی و مماسی غیر یکنواخت

در شکل ۲ خیز بی‌بعد ورق مستطیلی ($\bar{w} = \frac{10h^3 E_c w}{a^4 q}$) با نسبت طول به عرض $b/a=3$ تحت بارگذاری‌های عمودی غیر یکنواخت $q=y$ و $q=y^2$ نشان داده شده است. با توجه به اینکه مبدا دستگاه مختصات در وسط ورق در نظر گرفته شده است. خیز ناشی از بارگذاری $q=y$ مشابه با بارگذاری بصورت پادمتقارن بوده و با y تغییر علامت می‌دهد؛ همچنین خیز ناشی از بارگذاری $q=y^2$ نیز، متناسب با بارگذاری اعمالی نسبت به محور $y=0$ متقارن است. با بررسی این شکل‌ها می‌توان از صحت روند تحلیل حاضر برای بارگذاری‌های غیر یکنواخت اطمینان حاصل کرد. در شکل ۳ خیز

جدول ۱- اثرات انتخاب مقادیر مختلف جملات سری بر روی خیز مرکز ورق مربعی

M=N=15	M=N=12	M=N=10	M=N=8	M=N=6	M=N=4	جنس ورق	بارگذاری
0.46659	0.46620	0.46598	0.46571	0.46450	0.45055	سرامیک	$q = q_0$
1.19094	1.18993	1.18943	1.18877	1.18571	1.14989	g=2	
0.29607	0.29607	0.29607	0.29606	0.29620	0.29323	سرامیک	$(q = q_0 \cos(\pi x/a) \cos(\pi y/b))$
0.75522	0.75522	0.75522	0.75521	0.75556	0.74789	g=2	

جدول ۲- جابجایی‌ها و تنش‌های بی‌بعد ورق مربعی هدفمند با تکیه‌گاه ساده تحت بارگذاری یکنواخت

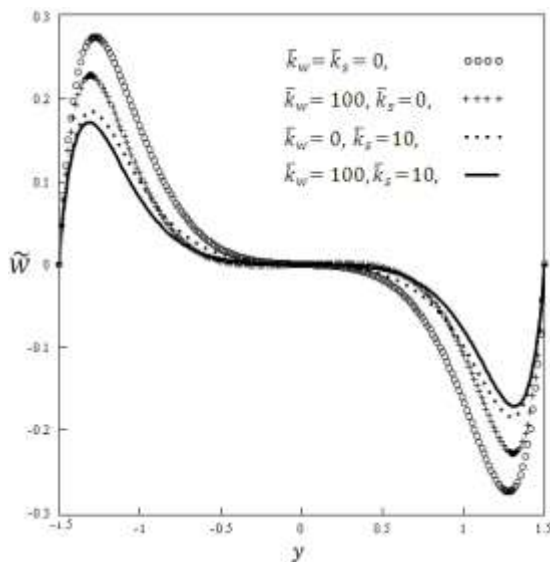
$\bar{\tau}_{yz}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\sigma}_x$	\bar{v}	\bar{u}	\bar{w}	جنس ورق
0.4429	0.5114	1.285	1.9103	2.8932	0.2603	0.3904	0.4665	مرجع [۱۹]
0.4497	0.5059	1.2603	1.9136	2.8704	0.245	0.3675	0.4666	حل ارائه شده
0.5734	0.47	0.9907	2.0338	5.2296	1.229	1.5618	1.1940	مرجع [۱۹]
0.5283	0.4793	0.9729	2.0422	5.1804	1.1932	1.5082	1.1909	حل ارائه شده
0.5031	0.4177	1.0451	1.6104	6.1504	1.4809	1.882	1.4356	مرجع [۱۹]
0.4928	0.461	1.027	1.6236	6.0797	1.4226	1.795	1.4186	حل ارائه شده
0.4227	0.4552	1.0694	1.282	7.3689	1.4778	1.9217	1.5876	مرجع [۱۹]
0.475	0.4599	1.0498	1.294	7.2890	1.4045	1.8134	1.5676	حل ارائه شده
0.4429	0.5114	1.285	1.9103	2.8932	1.4129	2.1194	2.5327	مرجع [۱۹]
0.4497	0.5059	1.2603	1.9136	2.8704	1.33	1.9949	2.5296	فلز

جدول ۳- جابجایی‌ها و تنش‌های بی‌بعد ورق مربعی هدفمند با تکیه‌گاه ساده تحت بارگذاری غیریکنواخت

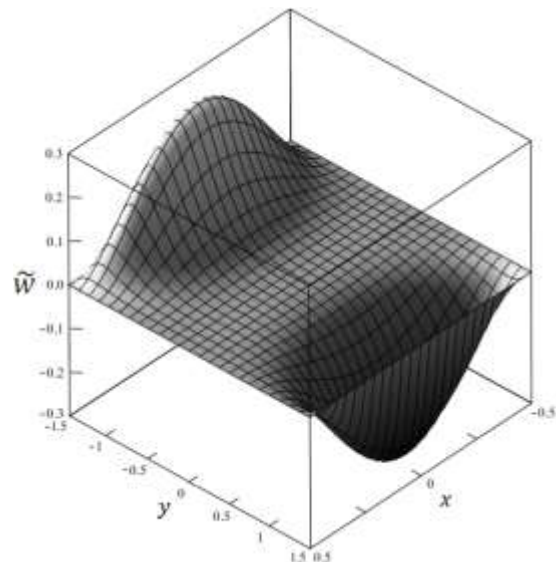
$\bar{\tau}_{yz}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\sigma}_x$	\bar{v}	\bar{u}	\bar{w}	جنس ورق
0.2132	0.2462	0.7065	1.3121	1.9955	0.1539	0.2309	0.296	مرجع [۱۹]
0.2122	0.2387	0.7092	1.3172	1.9757	0.1467	0.2201	0.2961	حل ارائه شده
0.2763	0.2265	0.5441	1.3954	3.6094	0.7311	0.9281	0.7573	مرجع [۱۹]
0.2493	0.2262	0.5459	1.4057	3.5656	0.7147	0.9033	0.7552	حل ارائه شده
0.2429	0.2017	0.5755	1.1029	4.2488	0.8792	1.1158	0.9118	مرجع [۱۹]
0.2326	0.2176	0.5783	1.1176	4.1848	0.8521	1.0752	0.9014	حل ارائه شده
0.2041	0.2198	0.5894	0.8775	5.089	0.8756	1.1372	1.0089	مرجع [۱۹]
0.2242	0.217	0.5926	0.8907	5.0172	0.8413	1.0862	0.9966	حل ارائه شده
0.2132	0.2462	0.7065	1.3121	1.9955	0.8356	1.2534	1.607	مرجع [۱۹]
0.2122	0.2387	0.7092	1.3172	1.9757	0.7966	1.1949	1.6072	حل ارائه شده

جدول ۴- جابجایی‌ها و تنش‌های بی‌بعد ورق مربعی هدفمند تحت بارگذاری غیریکنواخت مستقر بر بستر الاستیک دو پارامتری

$\bar{k}_w = 100, \bar{k}_s = 10$				$\bar{k}_w = 0, \bar{k}_s = 10$				$\bar{k}_w = 100, \bar{k}_s = 0$				جنس ورق	
$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\sigma}_x$	\bar{w}	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\sigma}_x$	\bar{w}	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\sigma}_x$	\bar{w}		
0.1363	0.3912	1.1048	0.1639	0.1604	0.4602	1.2999	0.1928	0.1937	0.5558	1.5699	0.2329	مرجع [۱۳]	سرامیک
0.1322	0.3927	1.0938	0.1639	0.1555	0.462	1.287	0.1929	0.1878	0.558	1.5543	0.2329	حل ارائه شده	
0.0945	0.2347	1.1856	0.2262	0.1192	0.296	1.4953	0.2853	0.1599	0.397	2.0055	0.3826	مرجع [۱۳]	g=1
0.0917	0.2352	1.1727	0.2262	0.1156	0.2967	1.479	0.2853	0.1551	0.3979	1.9837	0.3826	حل ارائه شده	
0.074	0.1777	1.1786	0.2473	0.0956	0.2297	1.5236	0.3197	0.1337	0.3213	2.1313	0.4472	مرجع [۱۳]	g=2
0.074	0.1786	1.1665	0.2471	0.0956	0.2308	1.5076	0.3193	0.1337	0.3227	2.1079	0.4465	حل ارائه شده	
0.0579	0.1652	1.2198	0.2618	0.0762	0.2173	1.6044	0.3443	0.1099	0.3136	2.3154	0.4969	مرجع [۱۳]	g=5
0.063	0.1674	1.2113	0.2609	0.0827	0.2199	1.5915	0.3428	0.1192	0.3168	2.2924	0.4938	حل ارائه شده	
0.0587	0.1573	1.3579	0.2692	0.0778	0.2087	1.8022	0.3573	0.1143	0.3063	2.6451	0.5244	مرجع [۱۳]	g=10
0.0584	0.1595	1.3508	0.2683	0.0775	0.2115	1.7909	0.3557	0.1135	0.3098	2.6232	0.5211	حل ارائه شده	
0.0458	0.1314	0.3712	0.2989	0.063	0.1809	0.511	0.4115	0.0996	0.2859	0.8074	0.6502	مرجع [۱۳]	فلز
0.0444	0.1319	0.3674	0.2989	0.0611	0.1816	0.5059	0.4116	0.0966	0.2869	0.7993	0.6502	حل ارائه شده	



(ب)



(الف)

شکل ۳- خیز بی‌بعد ورق هدفمند مستطیلی گیردار تحت نیروی برشی الف) نمای سه‌بعدی و ب) اثرات تکیه‌گاه الاستیک

امکان بررسی اثر پارامترهای مختلف بصورت توابعی پیوسته موجب می شود تا اطلاعات مناسبی برای دستیابی به حالات بهینه استخراج گردد.

۵-۳- ورق مستطیلی گیردار تحت بارگذاری مماسی

در این قسمت اثر بارگذاری های مماسی در راستای y (T_y) روی ورق مستطیلی با تکیه های ساده غلطکی (شرایط مرزی ارائه شده توسط رابطه (۲۳)) مورد بررسی قرار گرفته است. اثر بارگذاری مماسی یکنواخت ($T_y = 1$) در شکل های ۶ و ۷ نشان داده شده است.

$$x = \pm \frac{a}{2}$$

$$N_x = 0, v_0 = 0, M_x = 0, \psi_y = 0, w = 0$$

$$y = \pm \frac{b}{2}$$

$$N_y = 0, u_0 = 0, M_y = 0, \psi_x = 0, w = 0 \quad (23)$$

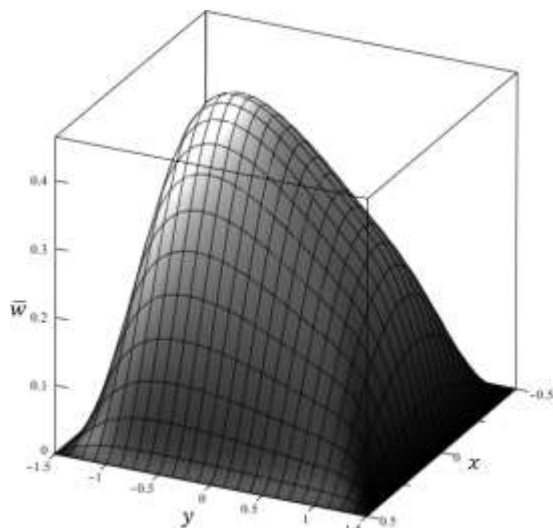
جابجایی درون صفحه ای ورق در راستای y (v) در شکل ۶ نشان داده شده است. نتایج بدست آمده نشان می دهد که در اثر بارهای مماسی یکنواخت روی ورق تحت شرایط مرزی ساده غلطکی، خیزی در ورق ایجاد نمی شود و تنها مولفه های غیر صفر جابجایی و تنش، مولفه های τ_{yz}

اندازه خیز بدون تغییر ولی جهت خیز تغییر می کند. در واقع نیروی برشی سبب بوجود آمدن گشتاور خمشی شده و خیز در ورق ایجاد می گردد. گشتاور خمشی در مرکز ورق صفر بوده و جهت آن در دو نیمه ورق متفاوت است؛ به همین علت خیز در مرکز صفر بوده و جهت خیز ایجاد شده در دو طرف ورق متفاوت است.

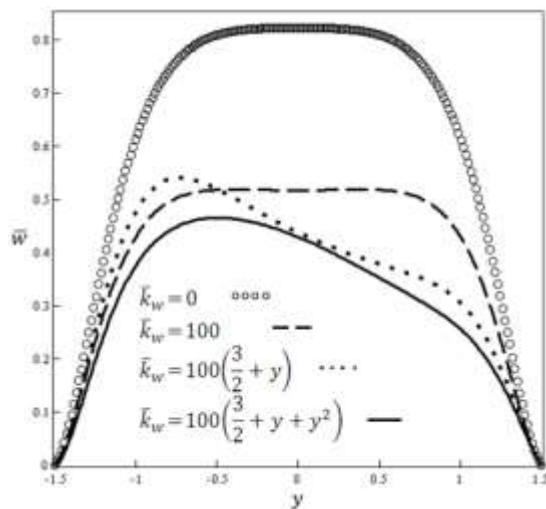
اثر تکیه گاه الاستیک غیر یکنواخت بر خیز ورق مستطیلی در شکل ۴ نشان داده شده است. همانگونه که قابل انتظار می باشد، قسمت هایی که ثابت الاستیک تکیه گاه کمتر است، خیز بیشتری در آن نقاط بوجود می آید.

اثر همزمان ضرایب عمودی (\bar{k}_w) و برشی (\bar{k}_s) تکیه گاه الاستیک بر خیز وسط ورقی که تحت بارگذاری یکنواخت عرضی قرار دارد، در شکل ۵ نشان داده شده است. مشخص است که با افزایش این ضرایب خیز ورق به سمت صفر میل می کند؛ همچنین روند کاهش خیز ورق با افزایش قدرت تکیه گاه کاهش می یابد.

شکل های ۴ و ۵ نشان می دهند، روند تحلیل بیان شده این امکان را فراهم می آورد تا محققان اثر پارامترهای مختلف مورد نظر را بسادگی و بصورت توابعی پیوسته بررسی کنند.



(ب)

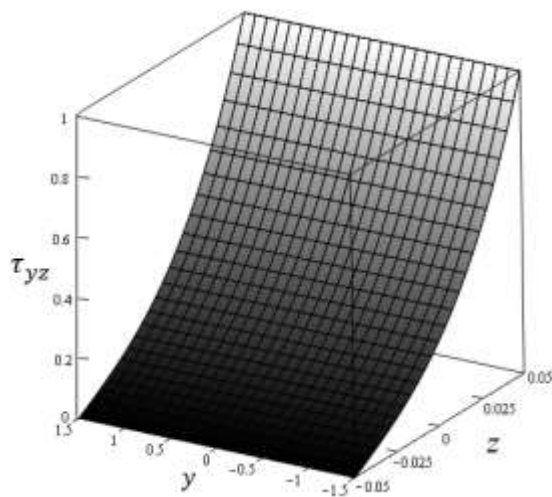


(الف)

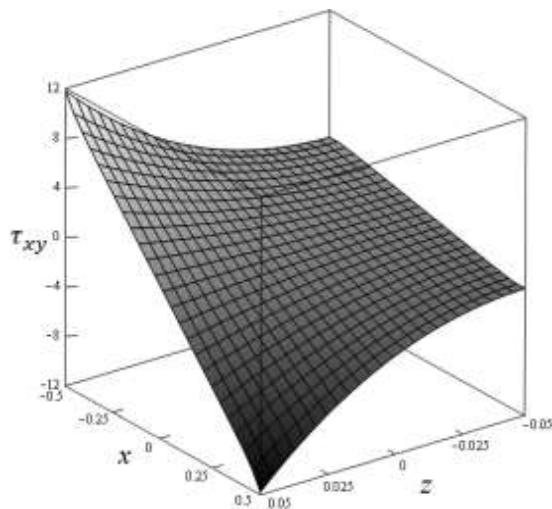
شکل ۴- اثرات تکیه گاه الاستیک روی خیز ورق هدفمند مستطیلی گیردار (الف) توزیع های مختلف تکیه گاه الاستیک

و (ب) نمای سه بعدی برای $\bar{k}_w = 100 \left(\frac{3}{2} + y + y^2 \right)$

شکل ۶- جابجایی درون صفحه‌ای ورق مستطیلی هدفمند تحت بارگذاری برشی یکنواخت با شرایط مرزی غلطکی تنش‌های برشی عرضی (τ_{yz}) و درون صفحه‌ای (τ_{xy}) در شکل ۷ ارائه شده‌اند. مشخص است که شرایط مرزی تنش برشی عرضی کاملاً برقرار شده و از ۱ در سطح رویین به صفر در سطح زیرین می‌رسد؛ همچنین با توجه به اعمال نیروی مماسی در سطح رویین، تنش برشی درون صفحه‌ای با افزایش z مقادیر بزرگتری خواهد داشت. با توجه به اینکه در این حالت هیچگونه گشتاور خمشی وجود ندارد، خیز در ورق ایجاد نخواهد شد. تعادل گشتاوری

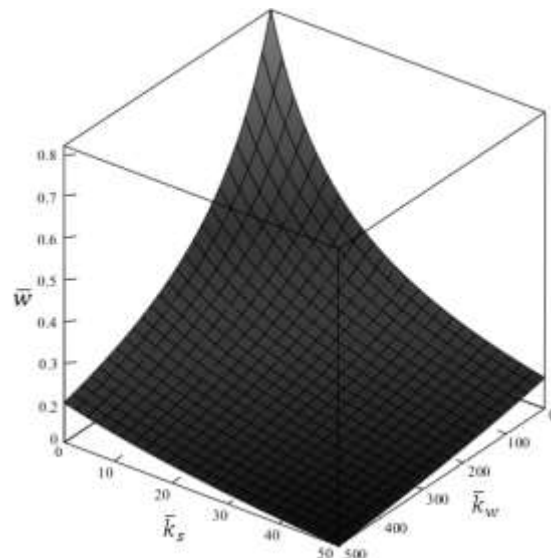


(الف)

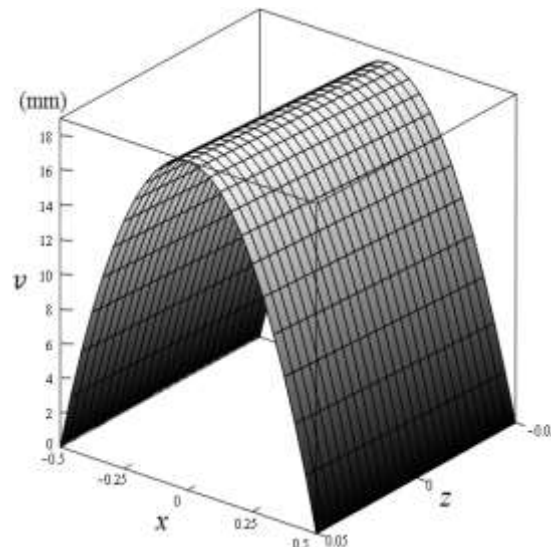


(ب)

و τ_{xy} می‌باشند که تنها در راستای x و z تغییر می‌کنند. همانگونه که انتظار می‌رود، با توجه به مقید بودن این مولفه جابجایی در مرزهای $x=a/2$ و $x=-a/2$ بیشترین جابجایی در $x=0$ رخ می‌دهد و با توجه به اینکه نیروی برشی روی سطح رویین اعمال می‌شود با افزایش z ، جابجایی افقی سطح اندکی افزایش می‌یابد.



شکل ۵- اثرات همزمان تکیه‌گاه الاستیک برشی و عرضی روی خیز مرکز ورق مستطیلی هدفمند



شکل ۷- تنش‌های برشی ورق مستطیلی هدفمند تحت نیروی برشی یکنواخت با شرایط مرزی غلطکی الف) تنش برشی عرضی و ب) تنش برشی درون صفحه‌ای نیز توسط گشتاورهای حاصل از نیروی مماسی و تنش‌های برشی برقرار می‌گردد. با در نظر گرفتن بخش دلخواهی از ورق، تعادل گشتاوری بصورت رابطه (۲۴) قابل بیان است.

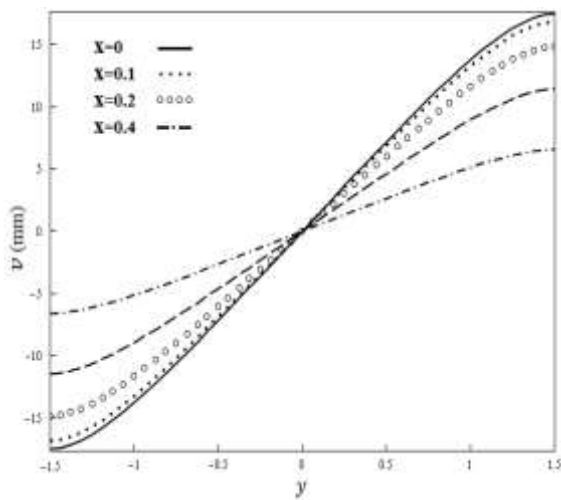
شکل ۷- تنش‌های برشی ورق مستطیلی هدفمند تحت نیروی برشی یکنواخت با شرایط مرزی غلطکی الف) تنش برشی عرضی و ب) تنش برشی درون صفحه‌ای نیز توسط گشتاورهای حاصل از نیروی مماسی و تنش‌های برشی برقرار می‌گردد. با در نظر گرفتن بخش دلخواهی از ورق، تعادل گشتاوری بصورت رابطه (۲۴) قابل بیان است.

$$\Delta y \iint \tau_{yz} dz dx - \iint z \tau_{xy} dz dy - \frac{h}{2} \iint T_y dx dy + M_y = 0 \quad (24)$$

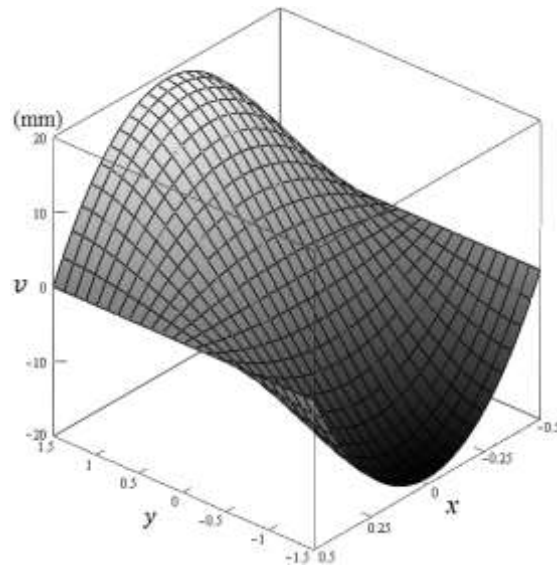
در شکل‌های ۸ تا ۱۱ اثر بارگذاری مماسی غیریکنواخت در راستای y بنحوی که نیروی مماسی بصورت خطی در راستای y تغییر می‌کند ($T_y = \gamma$) روی ورق با تکیه‌های ساده غلطکی نشان داده شده است. جابجایی درون صفحه‌ای و خیز ورق تحت بارگذاری غیریکنواخت در شکل‌های ۸ و ۹ نشان داده شده است.

بعنوان مثال چنانچه بخشی از ورق در محدوده $0 \leq x \leq a/4$ و $0 \leq y \leq b/4$ در نظر گرفته شود، نیروی ناشی از تنش برشی عرضی در $y = b/4$ برابر با $0.0877N$ و بازوی گشتاور $b/4$ ، گشتاور ناشی از تنش برشی درون صفحه‌ای در $x=0$ برابر با صفر و در $x=a/2$ برابر با $-0.0279N.m$ ، همچنین گشتاور ناشی از نیروی خارجی نسبت به لایه میانی برابر با

مشاهده می‌شود که بارگذاری غیریکنواخت مماسی سبب بوجود آمدن گشتاورهای خمشی و در نتیجه خیز ورق می‌شود. همچنین همانگونه که مشاهده می‌شود و قابل انتظار نیز است، جابجایی درون صفحه‌ای متناسب با بارگذاری اعمالی در راستای اعمال بار است.

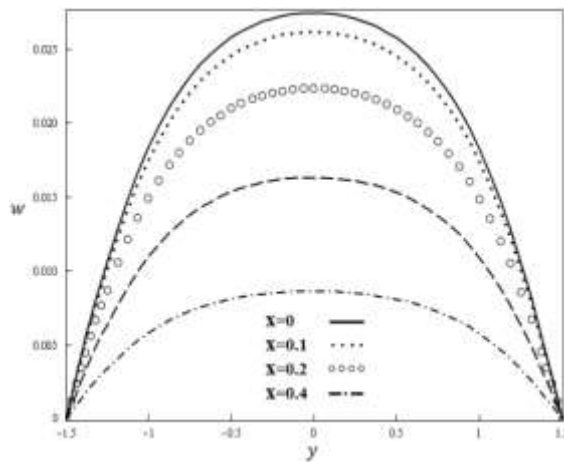


(ب)

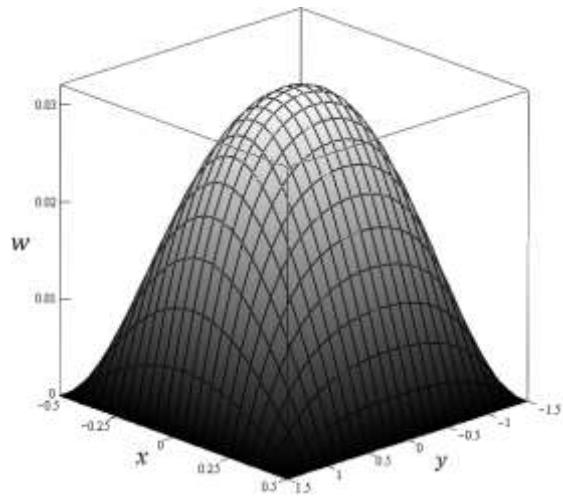


(الف)

شکل ۸- جابجایی درون صفحه‌ای ورق مستطیلی هدفمند تحت نیروی برشی غیریکنواخت با شرایط مرزی غلطکی الف) نمای سه‌بعدی و ب) نمای دوبعدی



(ب)



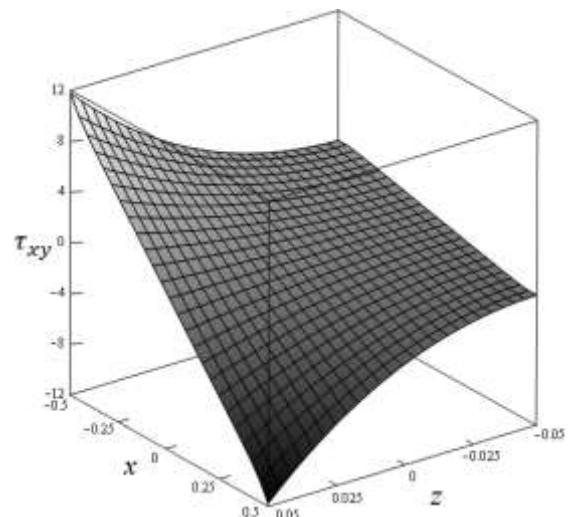
(الف)

شکل ۹- خیز ورق مستطیلی هدفمند تحت نیروی برشی غیریکنواخت با شرایط مرزی غلطکی (الف) نمای سه‌بعدی و (ب) نمای دوبعدی

صفر و غیر یکنواخت نیز کاملاً برقرار گردیده است. مقادیر تنش‌های برشی τ_{xz} و τ_{xy} در لایه‌های رویین بزرگتر است که دلیل اصلی این نکته نیز تغییرات جنس ورق است که سفتی ورق از لایه زیرین تا لایه رویین بتدریج افزایش می‌یابد.

۴- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

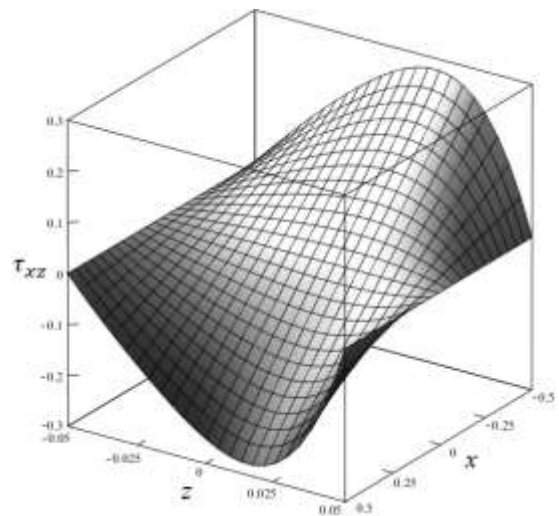
در این مقاله روش سری توانی برای تحلیل ورق‌های مستطیلی هدفمند توسعه داده شده است. برای اولین بار پنج معادله دیفرانسیل پاره‌ای توسط روش تحلیلی جدید حل شده است. بر اساس روش تحلیلی بیان شده ورق تحت شرایط مختلف قابل تحلیل بوده و تمامی مولفه‌های جابجایی و تنش قابل دست‌یابی می‌باشد. نتایج نشان داد که حل تحلیلی ارائه شده از دقت بسیار مناسبی برخوردار است. مشاهده گردید که نتایج بصورت تابعی از پارامترهای مختلف بدست آمده است و روند تحلیل بیان شده این امکان را فراهم می‌آورد تا محققین اثر پارامترهای مختلف مورد نظر را بسادگی و بصورت تابعی پیوسته بررسی کنند. از سوی دیگر این نکته موجب می‌شود، اطلاعات مناسبی برای دست‌یابی به حالات بهینه استخراج گردد.



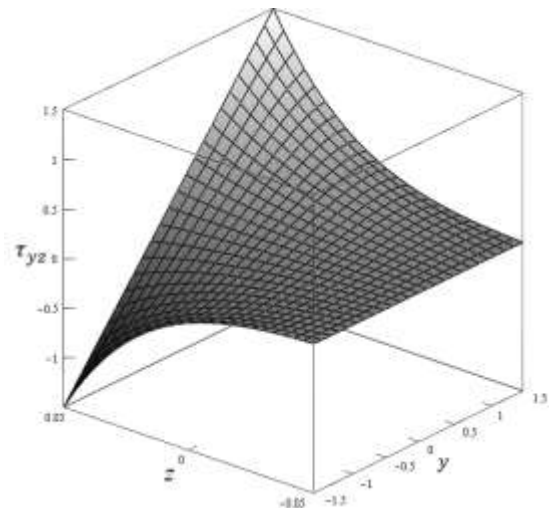
شکل ۱۰- تنش برشی درون‌صفحه‌ای ورق مستطیلی هدفمند تحت نیروی برشی غیریکنواخت با شرایط مرزی غلطکی

تنش برشی درون‌صفحه‌ای در شکل ۱۰ و تنش‌های - برشی عرضی در شکل ۱۱ نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌گردد که تنش برشی τ_{xz} در سطوح آزاد صفر است؛ همچنین تنش برشی τ_{yz} در سطح آزاد زیرین صفر بوده و در سطح آزاد رویین برابر با نیروی مماسی اعمالی است که در راستای y تغییر می‌کند. لذا مشخص است که شرایط مرزی تنش‌های برشی عرضی در سطوح آزاد حتی در حالت غیر

جابجایی درون صفحه‌ای در جهت y ، m	v
جابجایی درون صفحه‌ای لایه میانی در جهت x ، m	u_0
جابجایی درون صفحه‌ای لایه میانی در جهت y ، m	v_0
چرخش مقطع در جهت x	φ_x
چرخش مقطع در جهت y	φ_y
جابجایی عرضی، m	w
کرنش عمودی در جهت x	ε_x
کرنش عمودی در جهت y	ε_y
کرنش برشی در صفحه xy	γ_{xy}
کرنش برشی در صفحه xz	γ_{xz}
کرنش برشی در صفحه yz	γ_{yz}
کرنش عمودی در جهت x ، N/m^2	σ_x
کرنش عمودی در جهت y ، N/m^2	σ_y
کرنش برشی در صفحه xy ، N/m^2	τ_{xy}
کرنش برشی در صفحه xz ، N/m^2	τ_{xz}
کرنش برشی در صفحه yz ، N/m^2	τ_{yz}
مدول یانگ، N/m^2	E
مدول یانگ فلز خالص، N/m^2	E_m
مدول یانگ سرامیک خالص، N/m^2	E_c
نسبت حجمی سرامیک	V_f
ضریب پواسون	ν
نیروی برشی اعمالی در جهت x ، N/m^2	T_x
نیروی برشی اعمالی در جهت y ، N/m^2	T_y
نیروی عرضی در جهت z ، N/m^2	q



(الف)



(ب)

شکل ۱۱- تنش‌های برشی عرضی ورق مستطیلی هدمند تحت نیروی برشی غیریکنواخت با شرایط مرزی غلطکی
الف) τ_{xz} و ب) τ_{yz}

۵- علائم و نشانه‌ها

طول ورق در جهت x ، m	a
طول ورق در جهت y ، m	b
ضخامت ورق، m	h
جابجایی درون صفحه‌ای در جهت x ، m	u

- elastic foundation. *J Struct Fluid Mech* 6(3): 137-147. (In Persian)
- [12] Salehipour H, Hosseini R, (2015) Dynamic response of curved sandwich beam with a soft flexible core subjected to radial low velocity impact. *J Struct Fluid Mech* 5(1): 1-11. (In Persian)
- [13] Mikaeeli S, Behjat Ba (2016) 3-D bending analysis of thick functionally graded plate in different boundary conditions using element-free galerkin (EFG) method. *J Struct Fluid Mech* 6(2): 109-120. (In Persian)
- [14] Rajabi I, Khalili SM R, Shariyat M (2016) Bending analysis of sandwich and laminated composite plates containing piezoelectric layers by improved global-local theory. *J Struct Fluid Mech* 6(2):121-137. (In Persian)
- [15] Asemi K, Salehi M, Akhlaghi M (2014) Three dimensional biaxial buckling analysis, of functionally graded annular sector plate fully or partially supported on Winkler elastic foundation. *Aerosp Sci Technol* 39: 426-41
- [16] Bagheri H, Kiani Y, Eslami MR (2018) Asymmetric thermal buckling of temperature dependent annular FGM plates on a partial elastic foundation. *Comput Math Appl* 75 (5): 1566-1581
- [17] Alinaghizadeh F, Kadkhodayan M. (2014) Large deflection analysis of moderately thick radially functionally graded annular sector plates fully and partially rested on two-parameter elastic foundations by GDQ method. *Aerosp Sci Technol* (39) :260-71
- [18] Jamalpoor A, Ahmadi-Savadkoobi A, Hosseini-Hashemi S (2016) Free vibration and biaxial buckling analysis of magneto-electro-elastic microplate resting on visco-Pasternak substrate via modified strain gradient theory. *Smart Mater Struct* 25(10):105035
- [19] Zenkour AM (2006) Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Appl Math Model* 30: 67-84.
- [20] Sobhy M (2015) Levy-type solution for bending of single-layered graphene sheets in thermal environment using the two-variable plate theory. *Int J Mech Sci* 90:171-178.
- [21] Arikoglu A, Ozkol I (2010) Vibration analysis of composite sandwich beams with viscoelastic core by using differential transform method. *Compos Struct* 92(12): 3031-3039.
- [22] Yalcin HS, Arikoglu A, Ozkol I (2009) Free vibration analysis of circular plates by differential transformation method. *Appl Mathe Comput* 212: 377-386.
- k_w ضریب سفتی تکیه‌گاه الاستیک عمودی، N/m^3
- k_s ضریب سفتی تکیه‌گاه برشی، N/m
- ۶- مراجع
- [1] Eftekhari SA, Jafari AA (2012) High accuracy mixed finite element-Ritz formulation for free vibration analysis of plates with general boundary conditions. *Appl Math Comput*. 219: 1312-1344.
- [2] Pan B, Li R, Su Y, Wang B, Zhong Y (2013) Analytical bending solutions of clamped rectangular thin plates resting on elastic foundations by the symplectic superposition method. *Appl Math Letters* 26: 355-361.
- [3] Senjanović I, Tomić M, Vladimir N, Hadžić N (2015) An approximate analytical procedure for natural vibration analysis of free rectangular plates. *Thin-Walled Struct* 95: 101-114.
- [4] Zhang S, Xu L (2017) Bending of rectangular orthotropic thin plates with rotationally restrained edges: A finite integral transform solution. *Appl Math Modelling* 46:48-62.
- [5] Amirpour M, Das R, Flores EIS (2017) Bending analysis of thin functionally graded plate under in-plane stiffness variations. *Appl Math Modelling* 44: 481-496.
- [6] Lisboa TV, Marczak RJ (2017) A Recursive Methodology for Semi-Analytical Rectangular Anisotropic Thin Plates in Linear Bending. *Appl Math Modelling* 48:711-730.
- [7] Tian B, Li R, Zhong Y, (2015) Integral transform solutions to the bending problems of moderately thick rectangular plates with all edges free resting on elastic foundations. *Appl Math Modelling* 39.
- [8] Abedi M, Jafari-Talookolaei RA, Valvo PS (2016) A new solution method for free vibration analysis of rectangular laminated composite plates with general stacking sequences and edge restraints. *Comput Struct* 175:144-156.
- [9] Ghashochi-Bargh H, Razavi S (2017) A simple analytical model for free vibration of orthotropic and functionally graded rectangular plates. *Alexandria Eng J*, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aej.2017.02.005>.
- [10] Ai ZY, Zhang YF (2015) The analysis of a rigid rectangular plate on a transversely isotropic multilayered medium. *Appl Math Model* 39(20): 6085-6102.
- [11] Khorshidi K, Bakhsheshi A, Ghadirian H (2016) The study of the effects of thermal environment on free vibration analysis of two dimensional functionally graded rectangular plates on pasternak

- stress and displacement response prediction of the annular FGM sandwich plates. *Compos Struct* 106: 426-445.
- [27] Molla-Alipour M (2016) Dynamic behavior analysis of FG circular and annular plates with stepped variations of thickness under various load. *Modares Mech Eng* 16(7): 251-260. (In Persian)
- [28] Bhaskarand K, Dhaoya J (2009) Straight forward power series solutions for rectangular plates. *Compos Struct* 89(2): 259-261.
- [29] Alipour MM (2016) An analytical approach for bending and stress analysis of cross/angle-ply laminated composite plates under arbitrary non-uniform loads and elastic foundations. *Arch Civil Mech Eng* 16(2): 193-210.
- [23] Alipour MM, Shariyat M (2013) A semi-analytical solution for buckling analysis of variable thickness two-directional functionally graded circular plates with non-uniform elastic foundations. *J Eng Mech* 139: 664-676.
- [24] Alipour MM, Shariyat M (2014) Analytical stress analysis of annular FGM sandwich plates with non-uniform shear and normal tractions, employing a 3D elasticity-type double superposition zigzag theory. *Aerospace SciTech* 32: 235-259.
- [25] Alipour MM, Shariyat M (2014) An analytical global-local Taylor transformation-based vibration solution for annular FGM sandwich plates supported by nonuniform elastic foundations. *Arch Civil Mech Eng* 14: 6-24.
- [26] Alipour MM, Shariyat M (2013) Analytical zigzag-elasticity transient and forced dynamic