



حل عددی جریان چندلایه هسته - حلقه دو سیال با لزجت‌های متفاوت به روش المان طیفی

مهران پارسایی^۱، علی اکبر دهقان^۲، محمد سفید^{۳*}، آزاده جعفری^۴ و احسان ایزدپناه^۵

^۱ دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران

^۲ استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران

^۳ دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران

^۴ استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران

^۵ استادیار، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۸/۳۰، تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۰۹/۱۷، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۱/۲۶

چکیده

هدف از این مقاله توسعه یک الگوریتم جداسازی مرتبه بالا جهت شبیه‌سازی جریان چندلایه حلقه- هسته دو سیال با ویسکوزیته‌های مختلف درون کانال دوبعدی است. برای این شبیه‌سازی، معادلات جریان سیال تراکم ناپذیر (ناویر- استوکس) و معادله غلظت (کسر حجمی) حل شده‌اند. جریان دوفاز بر اساس تکنیک حجم سیال و با استفاده از درونیایی هارمونیک مدل شده است. معادلات به لحاظ مکانی به روش المان طیفی گسسته‌سازی شده‌اند و برای انتگرال گیری زمانی نیز از روش آدامز- بشفورث استفاده شده است. طرح تصحیح سرعت به عنوان یک الگوریتم مرتبه بالا برای جداکردن متغیرها در اینجا توسعه داده شده است. برای اعتبار سنجی، نتایج عددی با حل تحلیلی جریان توسعه یافته مقایسه شده‌اند. این مقایسه شامل، بررسی توزیع سرعت و گرادیان فشار است؛ همچنین درجه دقت روش عددی به لحاظ مکانی و زمانی، مورد ارزیابی قرار گرفته است. شکل جریان حلقه- هسته به ازای تغییر پارامترهای گوناگون بررسی شده و با نتایج آزمایشگاهی و عددی مقایسه شده است. بررسی‌ها نشان می‌دهد که ضخامت ورودی هسته و عدد رینولدز دو پارامتر مهم در تعیین الگوی جریان حلقه- هسته می‌باشند.

کلمات کلیدی: جریان چندلایه حلقه- هسته؛ روش المان طیفی؛ جریان درون کانال؛ شبیه سازی عددی.

Numerical Solution to the Multi-Layer Core-Annular Flow of Two Fluids with Different Viscosities using Spectral Element Method

M. Parsaei¹, A.A. Dehghan², M. Sefid^{3,*}, A. Jafari⁴, E. Izadpanah⁵

¹ Ph.D. Student, Mech. Eng., Yazd Univ., Yazd, Iran.

² Prof., Mech. Eng., Yazd Univ., Yazd, Iran.

³ Assoc. Prof., Mech. Eng., Yazd Univ., Yazd, Iran.

⁴ Assis. Prof., Mech. Eng., Tehran Univ., Tehran, Iran.

⁵ Assis. Prof., Mech. Eng., Persian Gulf Univ., Bushehr, Iran.

Abstract

The aim of this article is to develop a high order splitting scheme for the simulation of multi-layer core-annular flow of two fluids with different viscosities inside the two-dimensional channel. For this simulation, the incompressible fluids flow equations (Navier- Stokes) and concentration (volume fraction) equation are solved. The two-phase flow is modeled by the volume of fluid technique and with harmonic interpolation. The spectral element method is used for the spatial discretization and Adams- Bashforth method is adopted for the time integration. Velocity correction scheme is developed here as a high order splitting scheme for the coupling issue. To validate the numerical results they are compared with the analytic solution of fully developed flow. This comparison includes outflow velocity profile and pressure gradient. Also, the accuracy of numerical method has been investigated spatially and temporally. The form of core- annular flow has been investigated for various parameters and the results have been compared with experimental and other numerical works. Investigations show that the Reynolds number and core inlet thickness are two important parameters on the pattern of core- annular flow.

Keywords: Multi-Layer Core-Annular Flow; Spectral Element Method; Channel Flow; Numerical Simulation.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۳۵-۳۱۲۳۴۶۰؛ فکس: ۰۳۵-۳۸۲۱۲۸۷۱

آدرس پست الکترونیک: mhsefid@yazd.ac.ir

۱- مقدمه

وجود جریان چندلایه به صورت عمده، در انتقال سیالات سنگین، اکستروژن و پوشش سطحی قابل مشاهده است. در انتقال سیالات سنگین یک سیال با ویسکوزیته کم نظیر آب بین سیال با ویسکوزیته بالا و سطح جامد قرار می‌گیرد و باعث کاهش توان پمپاژ مورد نیاز برای انتقال سیال ویسکوز، می‌شود. مورد اخیر اهمیت ویژه‌ای در صنایع نفت، با توجه به کاهش منابع با کیفیت نفت سبک پیدا کرده است [۱].

اومز و همکاران [۲]، به بررسی فیزیکی جریان سیال چندلایه درون لوله پرداختند. آن‌ها فرض کردند که جریان درون هسته به قدری لزج است که عملاً گرادیان سرعتی در این ناحیه وجود ندارد و این ناحیه به صورت یک توده جامد درون سیال حرکت می‌کند. آن‌ها نشان دادند که وجود امواج ریبیل^۱ (امواج با طول موج کوچک) در فصل مشترک سیال با توده جامد باعث ایجاد گرادیان فشار و در نتیجه نیروی فشاری وارد بر هسته می‌شود که نیروی شناوری ناشی از اختلاف چگالی هسته و حلقه را خنثی می‌کند. بای و همکاران [۳] نیز، جریان سیال هسته را به صورت جامد و قابل تغییر شکل با سطح مشترک موج‌دار ولی با شکل ثابت در نظر گرفتند و با روش سعی و خطا و در نظر گرفتن معادلات جریان سیال در حلقه، معادله انتگرالی اندازه حرکت در هسته و شرایط مرزی سطح مشترک دو سیال توانستند، این شکل را به همراه طول موج و گرادیان فشار کلی به دست آورند.

در زمینه شبیه‌سازی جریان حلقه- هسته می‌توان به کار گاش و همکاران [۴]، کاشیک و همکاران [۵] و نیز تحقیق اخیر شای و همکارانش [۶] اشاره کرد. هر سه کار اخیر به شبیه‌سازی جریان سیال حلقه- هسته‌ای آب- نفت به کمک بسته نرم‌افزاری فلوئنت با استفاده از تکنیک حجم سیال^۲ و البته در هندسه‌های مختلف پرداخته‌اند. هندسه کار گاش و همکارانش [۴]، یک لوله عمودی است. کاشیک و همکاران [۵]، انقباض و انبساط ناگهانی را بررسی کرده‌اند و شای و همکاران [۶]، انواع جریان دوفازی نفت- آب را در لوله

افقی مورد مطالعه قرار داده‌اند. در هر سه کار اخیر مطالعات جامعی روی جریان سیال دوفازی مورد بحث، صورت گرفته است که شامل، ارایه توزیع سرعت و فشار، کانتورهای کسر حجمی، بررسی جریان‌های ثانویه و گرادیان‌های فشار است.

دی‌الس و همکاران [۷]، مشاهدات آزمایشگاهی خود را راجع به جریان هسته- حلقه دو سیال با لزجت متفاوت گزارش کردند. مهمترین بخش کار آنان مشاهده ناپایداری- های صدفی و قارچ‌گونه در جریان هسته- حلقه بود.

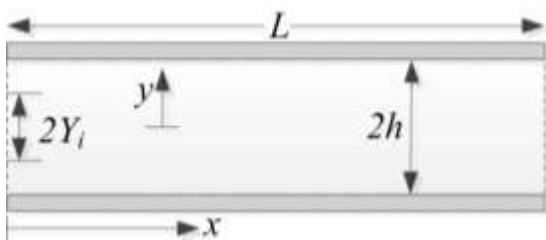
از آن‌جا که کانال دوبعدی برای مقاصد نظیر، پوشش سطحی و تولیدات لایه‌ای کاربرد دارد، در کار حاضر این هندسه برای جریان در نظر گرفته شده است. هرمزی و همکاران [۸]، جریان چندلایه دو سیال را درون کانال دوبعدی با استفاده از روش المان محدود شبیه‌سازی کردند. هر دو سیال چگالی یکسان داشتند و سیال وسط از نوع تنش تسلیم‌دار بود. آنان ضمن ارائه توزیع سرعت و کانتورهای کسر حجمی که جریان حلقه- هسته را نشان می‌داد، به بررسی پایداری فیزیکی این جریان و پدیده‌های قابل مشاهده در این جریان از جمله ناپایداری‌های صدفی و قارچی در این نوع از جریان پرداختند.

از میان روش‌های عددی، برای مدل‌سازی جریان دوفازی سیالات درون کانال، بیشتر روش‌هایی نظیر، حجم محدود و المان محدود مرتبه پایین مورد استفاده داشته است؛ اما این روش‌ها، به عنوان روش‌های مرتبه پایین می‌توانند در مدل‌سازی خصوصیات جریان‌های پیچیده مانند، انواع ناپایداری- های جریان ناقص عمل کنند یا اینکه دست کم زمان مصرفی برای این مدل‌سازی‌ها بسیار زیاد باشد. برای رفع این موانع، روش‌های مرتبه بالا مانند روش المان طیفی پیشنهاد شده‌اند. روش المان طیفی که بوسیله پاترا [۹] برای نخستین بار مطرح شد، هم توانایی و انعطاف روش المان محدود را در برخورد با هندسه‌های پیچیده داراست و هم ناپایداری‌های موجود در جریان را با دقت بسیار خوبی نشان می‌دهد. از نظر زمان مصرفی حافظه نیز، بسیار بهینه هستند. کارنایاداکیس و شروین [۱۰] برای مدل‌سازی جریان سیال تراکم‌ناپذیر از این روش بهره جستند. دیویل و فیشر [۱۱]، برای شبیه‌سازی جریان پیچیده سیال ویسکوالاستیک از این روش استفاده

¹ Ripple Waves

² Volume of Fluid (VOF)

$2Y_i$ وارد شده و جریان مورد نظر شکل می‌گیرد. سیال حلقه نیز همزمان وارد می‌شود. سرعت ورودی متوسط به کانال برابر U است. در خروجی کانال، فشار روی صفر ثابت شده است. در ورودی و نیز دیواره‌ها فشار از طریق گرادیان و چرخش سرعت به دست می‌آید. برای توصیف از مختصات کارتیزین استفاده شده است و مرکز مختصات در ورودی و روی خط تقارن کانال واقع است.



شکل ۱- هندسه مسأله

تحلیل جریان سیال نیاز به حل معادلات پیوستگی و اندازه حرکت دارد که برای سیال تراکم ناپذیر با کمک معادلات ناویر- استوکس انجام می‌گیرد. در جریان‌های دو فازی این کار پیچیدگی بیشتری دارد و نیاز به استفاده از معادلاتی است که در عین دقیق بودن، قابل حل کردن باشند. برای جریان دوفازی از نوع حلقه- هسته که دو سیال از هم به صورت مشخصی جدا هستند، روش کسر حجمی گزینه مناسبی است که مبتنی بر مختصات اویلری است. در این روش معادلات پیوستگی و اندازه حرکت همراه با معادله غلظت برای معین کردن هر فاز به صورت همزمان حل می‌شوند [۴]. پورمؤید و همکاران، به همین روش جریان دوفازی درون محفظه آب‌شیرین‌کن خورشیدی را برای به دست آوردن مرز دو سیال مدل‌سازی نمودند [۱۴].

در کار حاضر، این معادلات به صورت بدون بعد ارائه می‌گردند. برای بی‌بعدسازی این معادلات، از مقیاس‌های زیر استفاده شده است:

$$x_i^* = \frac{x_i}{h}, u_i^* = \frac{u_i}{U}, t^* = t \frac{U}{h}, P^* = \frac{P}{\rho U^2} \quad (1)$$

پارامترهای ستاره‌دار پارامترهای بدون بعد هستند. متغیر x_i بردار موقعیت، u_i بردار سرعت، t زمان و P مبین فشار است. پارامتر ρ اشاره به چگالی دو سیال دارد. به این ترتیب عرض کانال بین -1 و 1 تغییر می‌کند. از این به بعد برای

کردند و جعفری [۱۲]، روی بهبود ناپایداری‌های عددی مرتبط با این روش برای سیال ویسکوالاستیک کار کرد.

از سوی دیگر مسأله جفت شدگی متغیرهای اولیه نظیر، فشار و سرعت در کار با روش‌های عددی از لحاظ دقت بسیار تعیین کننده است. در طرح‌های جداسازی^۱، سیستم معادلات به یک سری از معادلات برای متغیرهای اولیه تقسیم می‌گردد و سپس گسسته‌سازی مکانی و انتگرال‌گیری‌های زمانی انجام می‌شوند. خطای یک روش جداسازی ممکن است، از مرتبه پایین باشد و در عمل استفاده از یک روش مرتبه بالا را در گسسته‌سازی زمانی و مکانی بی‌فایده کند؛ بنابراین یک روش مرتبه بالای کامل شامل، خطای تقطیع مرتبه بالا در مکان و زمان و همین‌طور روش خارج‌سازی معادلات از حالت جفت شدگی می‌شود. کارنیاداکیس و همکاران [۱۳]، یک روش جداسازی مرتبه بالا را برای جریان سیال تراکم‌ناپذیر (معادلات ناویر- استوکس) پیاده‌سازی نمودند.

هدف پژوهش حاضر، در وهله نخست توسعه و ارزیابی یک حلگر المان طیفی مبتنی بر طرح تصحیح سرعت کارنیاداکیس برای برقراری و مشاهده جریان دوفازی حلقه- هسته درون کانال دوبعدی است. پس از معرفی توسعه ایجاد شده بر الگوریتم کارنیاداکیس برای حل معادله کسر حجمی، به بررسی دقت و سرعت همگرایی روش مذکور پرداخته شده است. در نهایت سودمندی هر کار عددی به میزان بازتولید مشاهدات فیزیکی موجود مرتبط است. به این لحاظ ضمن مقایسه نتایج کار عددی حاضر با جواب‌های تحلیلی، به صورت پدیداری الگوهای جریان تولید شده بررسی و با سایر کارهای عددی و آزمایشگاهی مقایسه شده است.

۲- تئوری حاکم

۲-۱- معادلات مدل

دامنه مسأله مورد بحث در این مقاله که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، شامل کانالی به طول L و عرض $2h$ است که در ابتدا فقط سیال حلقه در آن وجود دارد و ساکن است. سیال هسته در لحظه $t = 0$ در اثر اختلاف فشار از طریق ورودی به عرض

^۱ Splitting schemes

ثابت (جریان پوازیه) می‌توان حل تحلیلی برای این جریان در نظر گرفت. این حل، از جهت اعتبار سنجی و مقایسه با نتایج عددی ارائه می‌شود و ضمن آن فرض می‌شود که مرز دو سیال کاملاً صاف و بدون موج هستند که البته برای Re های کوچک فرضی منطقی است [۷]. در شکل ۲ پارامترهای ضخامت هسته در ورودی و خروجی کانال نشان داده شده است. به دلیل بقای جرم، در اثر کاهش سرعت جریان سیال حلقه در مجاورت دیوار جامد منطقی است که سطح مقطع آن افزایش یابد. برای $y_i \leq |y| \leq 0$ ، از معادلات **Error! Reference source not found.** و (۳) بدست می‌آید:

$$C = 1, \quad \frac{dP}{dx} = \frac{r_\mu}{Re} \frac{d^2u}{dy^2}, \quad (5)$$

و برای $y_i < |y| \leq 1$:

$$C = 0, \quad \frac{dP}{dx} = \frac{1}{Re} \frac{d^2u}{dy^2}, \quad (6)$$

حل معادلات (۵) و (۶) با فرض مرز معین و بدون موج، منجر به یک معادله دو ضابطه‌ای برای توزیع مؤلفه طولی سرعت $u(y)$ می‌شود که به صورت رابطه (۷) است:

$$u(y) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} \left[1 - y_i^2 \left(1 - \frac{1}{r_\mu} \right) - \frac{y^2}{r_\mu} \right] & 0 \leq |y| \leq y_i, \\ \frac{\alpha}{2} [1 - y^2] & y_i < |y| \leq 1, \end{cases} \quad (7)$$

و در آن $\alpha = Re(-dP/dx)$ است و با توجه به شرط پیوستگی از طریق معادله (۸) به دست می‌آید:

$$\alpha = \frac{3}{1 - y_i^3 \left(1 - \frac{1}{r_\mu} \right)}, \quad (8)$$

۳- روش عددی

۳-۱- روش المان طیفی

در کد محاسباتی به کار رفته، معادلات به لحاظ مکانی به روش المان طیفی گسسته شده‌اند. بر این اساس به ازای $L = 8$ دامنه حل به ۸ المان مستطیلی با ابعاد 2×1 افراز شده است. اصولاً، جز برای نمایش نتایج خروجی، شبکه بندی دامنه حل در این روش معنایی ندارد، زیرا محاسبات بر مبنای هر المان صورت می‌گیرد. هر کدام از این المان‌ها به یک المان استاندارد محاسباتی با مختصات $1 \leq \xi, \eta \leq -1$

سادگی پارامترهای بدون بعد به صورت بدون ستاره نوشته می‌شوند. معادلات اندازه حرکت و پیوستگی بر اساس روش کسر حجمی بدون بعد به صورت رابطه (۲) هستند:

$$u_{i,j} = 0, \\ Re \left[\frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right] u_i = \left[\frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{C(r_\mu^{-1} - 1) + 1} \right]_{,j} - P_{,i}, \quad (2)$$

که در آن C بیانگر کسر حجمی یا همان غلظت سیال هسته است. برای تقریب ویسکوزیته دو سیال از درون‌یابی هارمونیک استفاده شده است که بوسیله پاتانکار [۱۵] پیشنهاد شده است. معادله غلظت به صورت رابطه (۳) است:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \right] C = 0, \quad (3)$$

در روابط **Error! Reference source not found.** و (۳)، $i = 1, 2$ اندیس آزاد و $j = 1, 2$ اندیس تکراری است. سه گروه بدون بعد در معادلات فوق موجود است:

$$r_\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, Re = \frac{\rho U h}{\mu_2}, Pe = \frac{U h}{D_m}, \quad (4)$$

که به ترتیب عبارتند از: r_μ نسبت ویسکوزیته سیال هسته به حلقه، عدد رینولدز، Re و عدد پکله، Pe متغیر μ ، ویسکوزیته سیال است. زیر نویس ۱ به سیال هسته و زیر نویس ۲ به حلقه اشاره دارد. ملاحظه می‌شود که Re بر مبنای ویسکوزیته سیال حلقه تعریف شده است. می‌توان عدد رینولدز مربوط به سیال هسته را به صورت Re/r_μ در نظر گرفت. پارامتر D_m بیانگر ضریب نفوذ مولکولی است که در تعریف Pe کاربرد دارد و مقدار آن برای آب در حدود $10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ است [۱۶]؛ بنابراین می‌توان تخمین زد که برای مقدار $Re \sim 10$ ، مقدار Pe در مرتبه اندازه 10^6 باشد که نشان می‌دهد، غلظت در سطح مشترک دو سیال نفوذ ناچیزی دارد. فرض دیگری که در این‌جا مطرح است این که از اثر کشش سطحی بین دو سیال صرف‌نظر می‌شود که خود می‌تواند مانند یک چشمه اندازه حرکت صفحه‌ای عمل کند [۱۵].

۲-۲- حل تحلیلی

از آن‌جا که درون کانال عبارات غیر خطی ضعیف هستند، با فرض جریان دائمی و توسعه یافته تحت اثر گرادیان فشار

المان از آن انتگرال گیری می شود. انتگرال گیری جزء به جزء منجر می شود به:

$$-\int \nabla \omega D(u) \nabla u d\Omega + \int \lambda \omega u d\Omega = \int \omega f d\Omega - [\omega D(u) \nabla u]_{\partial\Omega}, \quad (12)$$

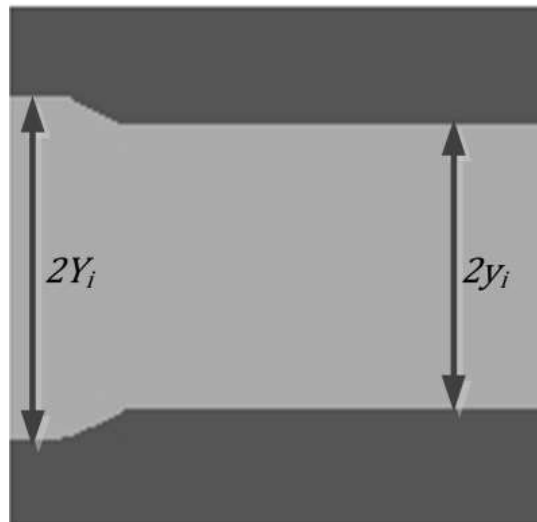
که در آن $\partial\Omega$ مبین مرز المان است و شرایط مرزی را پوشش می دهد. بر اساس روش گالرکین تابع وزن به صورت همسان با تابع بسط پایه مودال (ϕ_p) انتخاب می شود. پس از اعمال مشتقات و انتگرال های معادله، معادلات دیفرانسیل معمولی وابسته به زمان برای المان ایجاد می شود. برای کل دامنه حل باید معادلات را تجمیع نمود، به نحوی که تضمین شود، روی مرز المان های دارای سطح مشترک، متغیر عمومی u یکسان باشد. برای جزییات بیشتر پیرامون نگاشت به مختصات محلی استاندارد، انتگرال گیری عددی و تجمیع معادلات می توان به [۱۷] رجوع نمود.

۳-۲- طرح تصحیح سرعت توسعه یافته

از آن جا که متغیرهای اولیه سرعت، فشار و کسر حجمی در معادلات مدل **Error! Reference source not found.** (۳) در هم جفت شده اند، نیاز به الگوریتمی برای جدا کردن این متغیرها وجود دارد که در ضمن مرتبه بالای طرح عددی را حفظ کند. کارنیاداکیس و همکاران [۱۳]، رابطه جدیدی برای محاسبه فشار استخراج کردند که منجر به یک الگوریتم جداسازی مرتبه بالا برای حل معادلات جریان سیال تراکم ناپذیر می شود و به طرح تصحیح سرعت موسوم است. این الگوریتم سه مرحله اساسی دارد. در هر مرحله انتگرال گیری های زمانی بر پایه روش مرتبه بالای آدامز- بشفورث صورت گرفته است. در مرحله نخست، بر اساس عبارات گذرا، $\partial u_i / \partial t$ ، و جابجایی، $u_j u_{i,j}$ در معادله اندازه حرکت که مورد اخیر به صورت صریح ارزیابی می شود، یک سرعت واسطه نخستین \tilde{u}_i محاسبه می گردد. به صورت:

$$\tilde{u}_i = \sum_{q=0}^{J-1} \frac{\alpha_q}{\gamma_0} u_i^{n-q} + \Delta t \sum_{q=0}^{J-1} \frac{\beta_q}{\gamma_0} [u_j u_{i,j}]^{n-q}, \quad (13)$$

که در آن n نماینده گام زمانی معلوم است. پارامتر Δt اندازه گام زمانی است. ضرایب α_q ، β_q و γ_0 نیز، مربوط به روش عددی آدامز- بشفورث برای انتگرال گیری زمانی است و J نیز مرتبه این انتگرال گیری را نشان می دهد [۱۸].



شکل ۲- پارامترهای ضخامت هسته در ورودی و خروجی کانال

نگاشته شده و هر کدام از متغیرهای اولیه شامل فشار، سرعت و غلظت روی این المان، از طریق یک بسط پایه تانسوری تقریب زده می شود. برای متغیر عمومی u :

$$u(\xi, \eta) \cong \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N \phi_p(\xi) \phi_q(\eta) \tilde{u}_{pq}, \quad (9)$$

که در آن \tilde{u}_{pq} ضریب مجهول است؛ N درجه بسط پایه را نشان می دهد که هر چه بیشتر باشد، مقدار تقریب به واقع نزدیک تر است و به تابع ϕ_p or ϕ_q بسط پایه مودال گفته می شود که بر اساس تابع ژاکوبی قابل تعریف به صورت زیر است:

$$\phi_p = \begin{cases} (1-\xi)/2 & \text{for } p=0, \\ \frac{(1-\xi)(1+\xi)}{2} \mathbb{P}_{p-1}^{1,1} & \text{for } 0 < p < N, \\ (1+\xi)/2 & \text{for } p=N. \end{cases} \quad (10)$$

عبارت $\mathbb{P}_{p-1}^{1,1}$ تابع ژاکوبی را نشان می دهد [۱۷]. با در نظر گرفتن مشتقات مکانی و خطی سازی عبارات غیر خطی می توان ثابت نمود، همه معادلات مدل، قابل تبدیل به معادله مدل هلمهلتز هستند؛ به صورت:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(D(u) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \lambda \right] u = f, \quad (11)$$

که در آن f چشمه و λ ضریب معادله هلمهلتز هستند. پارامتر D نیز ضریب نفوذ نام دارد [۱۰]. برای گسسته سازی مکانی ابتدا فرم ضعیف معادله (۱۱) حاصل می شود. برای این کار، طرفین معادله در یک تابع وزن ضرب شده و روی دامنه

(۲۰)

و سپس معادله هلمهلتز بر اساس عبارات گذرا و نفوذ، $C_{,jj}/Pe$ ، برای یافتن C در مرحله جدید شکل می‌گیرد، به صورت:

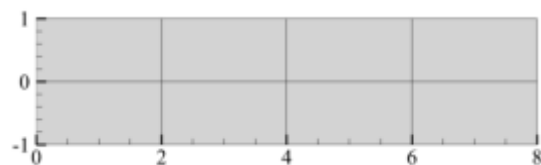
$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - Pe \frac{\gamma_0}{\Delta t} \right] C^{n+1} = - \left(Pe \frac{\gamma_0}{\Delta t} \right) \bar{C}. \quad (21)$$

برای انجام این شبیه‌سازی در ++C از کد Nektar++ استفاده شده است که یک کد منبع باز است و چارچوبی قوی و مطمئن برای حل معادلات با مشتقات جزئی به روش المان طیفی فراهم می‌کند و برای معادلات اخیر توسعه داده شده است [۱۹].

۴- نتایج

۴-۱- مطالعه استقلال نتایج از درجه بسط و گام زمانی

در قدم اول، مقادیر مناسب برای درجه بسط پایه N و اندازه گام زمانی Δt برای تضمین استقلال حل از مقادیر فوق تعیین شده است. همان‌طور که پیش از این اشاره شد، به ازای $L = 8$ ناحیه حل به ۸ المان تقسیم شده است که ۲ المان در راستای عرض کانال و ۴ المان در راستای طول قرار می‌گیرند و همه المان‌ها دارای ابعاد 2×1 هستند. در شکل ۳ المان‌های دامنه حل در حالت $L = 8$ نمایش داده شده‌اند.



شکل ۳- المان‌ها به ازای $L = 8$

برای طول‌های بزرگتر، تعداد المان‌های طولی افزایش داده شده است. در کار حاضر ابعاد المان‌ها ثابت است و تنها درجه بسط پایه برای دقت بیشتر، بر اساس مطالعه نوع p افزایش می‌یابد. در جدول ۱ نتایج مربوط به بررسی میزان استقلال نتایج از درجه بسط پایه و گام زمانی گردآوری شده است. این نتایج به ازای پارامترهای $Re = 1$ و $r_\mu = 10$ به دست آمده است. تعداد گام‌ها در هر مورد بر اساس زمان نهایی $t = 10$ تنظیم شده است. در هر مورد زمان پردازش (CPU) به ثانیه ذکر شده که مشاهده می‌شود، زمان کوچکی

در مرحله بعد دیورژانس گرادیان فشار و عبارت گذرا و اعمال شرط پیوستگی، منجر به معادله پواسون برای فشار می‌شود؛ به صورت:

$$p^{n+1}_{,jj} = \left(\frac{\gamma_0}{\Delta t} \right) \tilde{u}_{j,j}, \quad (14)$$

که در آن $n + 1$ به گام زمانی جدید و مجهول اشاره دارد. همچنین بر اساس پیشنهاد [۱۳] برای محاسبه فشار در مرز ورودی از رابطه:

$$-\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} = \sum_{q=0}^{J-1} \beta_q \left[u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \right]^{n-q}, \quad (15)$$

که u مؤلفه طولی سرعت است و برای دیواره‌های جامد نیز از رابطه (۱۶) استفاده شده است:

$$Re \left[\frac{\partial p^{n+1}}{\partial y} \right] = \sum_{q=0}^{j-1} \beta_q \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^{n-q} \right]^{n-q}, \quad (16)$$

دیواره با استفاده از عبارات گذرا و گرادیان فشار در گام جدید می‌توان دومین سرعت واسطه \tilde{u}_i را به صورت جبری یافت:

$$\tilde{u}_i = \tilde{u}_i + \left(\frac{\Delta t}{\gamma_0} \right) p_{,i}^{n+1}, \quad (17)$$

که عبارت چشمه را برای معادله هلمهلتز تشکیل می‌دهد و با آن سرعت را در مرحله جدید می‌توان بدست آورد. به صورت زیر:

$$\left[\left(D(u_i) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{,j} - Re \frac{\gamma_0}{\Delta t} \right] u_i^{n+1} = - \left(Re \frac{\gamma_0}{\Delta t} \right) \tilde{u}_i \quad (18)$$

که در آن ضریب نفوذ D بر اساس معادله **Error!** به صورت رابطه

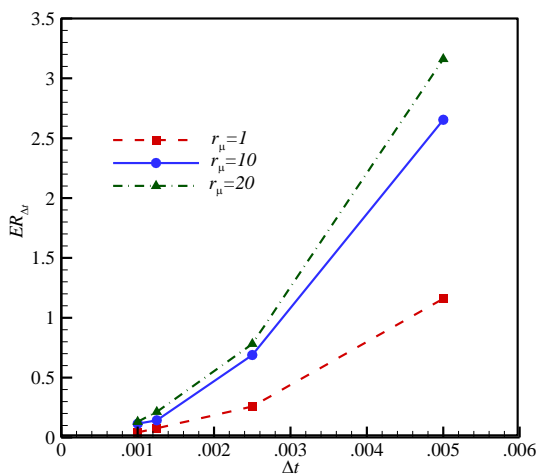
(۱۹) تعریف می‌گردد:

$$D(u_i) = [C(r_\mu^{-1} - 1) + 1]^{-1}, \quad (19)$$

که C از گام معلوم n محاسبه می‌شود.

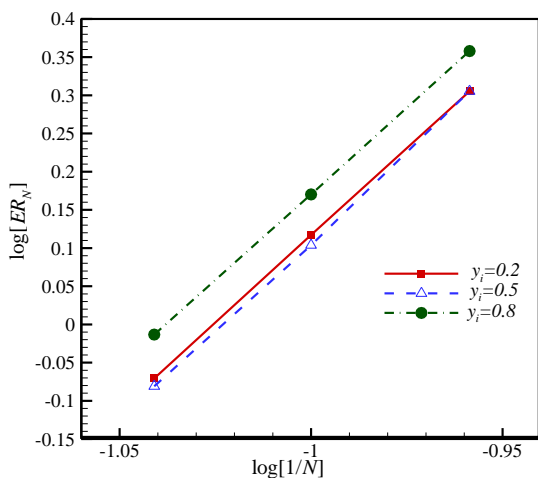
الگوریتم فوق در دو قسمت توسعه داده شده است. یکی ارتقای معادله هلمهلتز به صورت معادله (۱۸) است. در الگوریتم پیشنهادی [۱۳] عبارت $D(u_i)$ برابر ۱ است و دیگر توسعه الگوریتم فوق برای محاسبه C همراه با بقیه متغیر- هاست. به این ترتیب که در ابتدا یک غلظت واسطه \bar{C} بر اساس عبارات گذرا، $\partial C / \partial t$ و جابجایی $u_j C_{,j}$ در معادله (۳) بدست می‌آید که شبیه به معادله (۱۳) است:

$$\bar{C} = \sum_{q=0}^{J-1} \frac{\alpha_q}{\gamma_0} C^{n-q} + \Delta t \sum_{q=0}^{J-1} \frac{\beta_q}{\gamma_0} [u_j C_{,j}]^{n-q},$$



شکل ۴- نمودار دقت گام زمانی برای $Re = 1$ و $\gamma_i = 0.5$ و $r_\mu = 1, 10, 20$

در شکل ۵ نیز نمودار لگاریتمی- لگاریتمی دقت مکانی به ازای پارامترهای $Re = 1$ و $r_\mu = 10$ و برای مقادیر مختلف γ_i نمایش داده شده است. دوباره در این جا نیز درصد اختلاف نرم بینهایت را در گام زمانی معین برای سرعت افقی با حل دقیق نشان می‌دهد. شیب هر سه خط در حدود 4.5 است و با توجه به تعریف مرتبه دقت نشان می‌دهد که روش عددی به لحاظ مکانی دارای مرتبه دقت $o(4.5)$ است. در این جا $1/N$ معیاری برای نظریف مکانی یا همان اندازه شبکه است؛ اگر چه شبکه در این جا به لحاظ روش عددی معنایی ندارد.



شکل ۵- نمودار لگاریتمی- لگاریتمی دقت مکانی برای

است و از مزایای این روش به حساب می‌آید. همچنین در هر مورد خطای نسبی نرم بینهایت با مورد قبل از آن آورده شده است که به صورت رابطه (۲۲) تعریف می‌شود،

$$R.E. = \frac{|u_{new} - u_{previous}|_\infty}{|u_{previous}|_\infty} \times 100, \quad (22)$$

که در آن $| \cdot |_\infty$ بیانگر نرم بینهایت است و در نهایت حالت ۷ از جدول ۱ برای ادامه مطالعات انتخاب شده است.

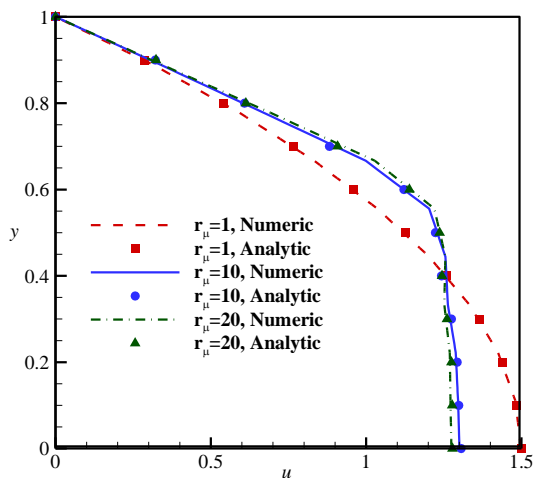
۴-۲- ارزیابی دقت حل عددی

در شکل ۴ نمودار دقت نتایج به ازای گام‌های زمانی مختلف نشان داده شده است. در این نمودار پارامتر $ER_{\Delta t}$ درصد اختلاف نرم بینهایت را با حل دقیق، در مقدار معلوم از گام زمانی، برای سرعت افقی، u ، در حالت توسعه یافته نشان می‌دهد. پارامترها روی $Re = 1$ و $\gamma_i = 0.5$ ثابت شده‌اند و نتایج به ازای r_μ های مختلف گردآوری شده است. با توجه به نمودار می‌توان نتیجه گرفت که این روش دارای دقت زمانی از مرتبه $o(2)$ است. منظور از خطا در این جا اختلاف با حل دقیق است. افزایش r_μ خطا را افزایش می‌دهد.

جدول ۱- بررسی میزان استقلال نتایج از درجه بسط پایه و گام زمانی

مورد	Δt	N	زمان مصرفی CPU(s)	R.E.
مطالعه درجه بسط پایه				
۱	10^{-2}	8	50.4	-
۲	10^{-2}	9	64.5	2.02
۳	10^{-2}	10	80.8	1.27
۴	10^{-2}	11	100.3	0.83
مطالعه گام زمانی				
۵*	$10^{-2}/2$	10	160.3	1.16
۶	$10^{-2}/4$	10	306.4	0.278
۷	$10^{-2}/8$	10	638.3	0.067
۸	10^{-3}	10	810.0	0.042

(*) مورد ۵ با مورد ۳ مقایسه شده است.



شکل ۷- مقایسه توزیع سرعت عددی و حل تحلیلی برای $r_\mu = 1, 10, 20$ و به ازای $y_i = 0.5, Re = 1$

در شکل ۸ فشار عددی و تحلیلی در طول کانال به ازای پارامترهای $Re = 1, r_\mu = 10$ و به ازای y_i های مختلف نشان داده شده است. گرادیان فشار در دو حالت $y_i = 0.5$ و $y_i = 0.8$ بسیار نزدیک هستند. این مقادیر از معادله (۸) قابل استحصال است. همان طور که از این معادله انتظار می‌رود و از شکل نیز پیداست، افزایش ضخامت سیال هسته تأثیر شدیدی روی گرادیان فشار دارد. به لحاظ فیزیکی این طور به نظر می‌رسد که سیال هسته به دلیل لزجت بیشتر باعث افزایش افت فشار می‌شود و هر چه میدان حرکت این سیال وسیع‌تر شود، میزان افت فشار نیز بیشتر می‌شود.

۴-۴- بررسی الگوهای جریان هسته- حلقه

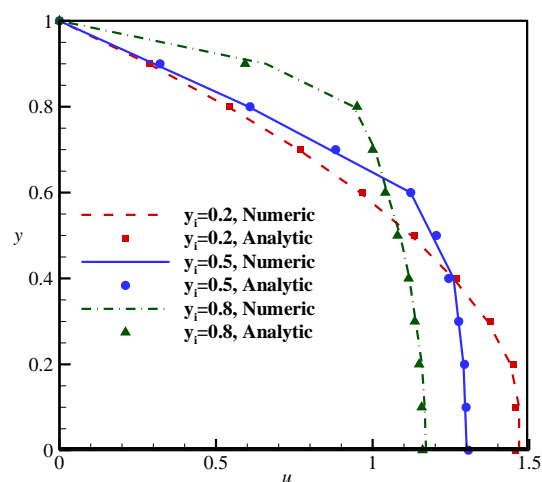
پس از بررسی لازم درباره دقت و صحت نتایج عددی، می‌توان روی مشخصه‌های فیزیکی جریان بیش از پیش متمرکز شد. در شکل ۹ کانتور غلظت به ازای $Re = 1, Y_i = 0.6$ ، توزیع سرعت در زمان‌های مختلف نشان داده شده است. توزیع سرعت در مقاطع مختلف نیز، همزمان قابل مشاهده است. تأثیر حرکت سیال هسته روی توزیع سرعت در شکل ۹ مشخص است. در ابتدا که یک سیال وجود دارد، توزیع سرعت کاملاً سهموی است. با حرکت سیال هسته به سمت انتهای کانال توزیع سرعت تحت تأثیر حضور این سیال تغییر می‌کند تا بالاخره در سراسر کانال جریان حلقه- هسته و

$Re = 1, r_\mu = 10$ و به ازای $y_i = 0.2, 0.5, 0.8$

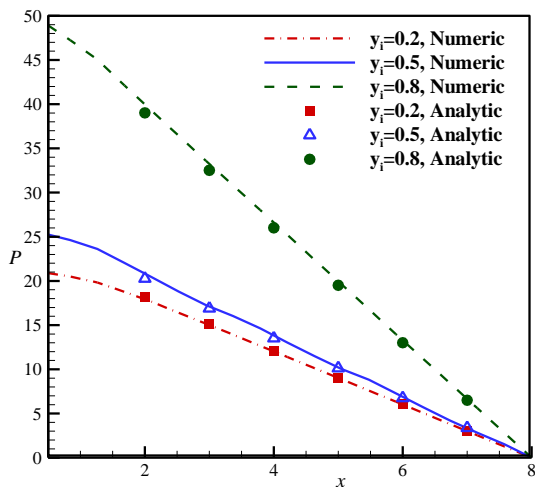
۴-۳- اعتبارسنجی نتایج

در شکل ۶ توزیع سرعت در حالت توسعه یافته، که در خروجی کانال برقرار می‌شود، برای $Re = 1, r_\mu = 10$ و به ازای y_i های مختلف نشان داده شده است. این نتایج با مقادیر حاصل از حل تحلیلی، یعنی معادله (۷) مقایسه شده‌اند. در هر مورد شکستگی نمودار و تغییر شیب آن در $y = y_i$ مشهود است.

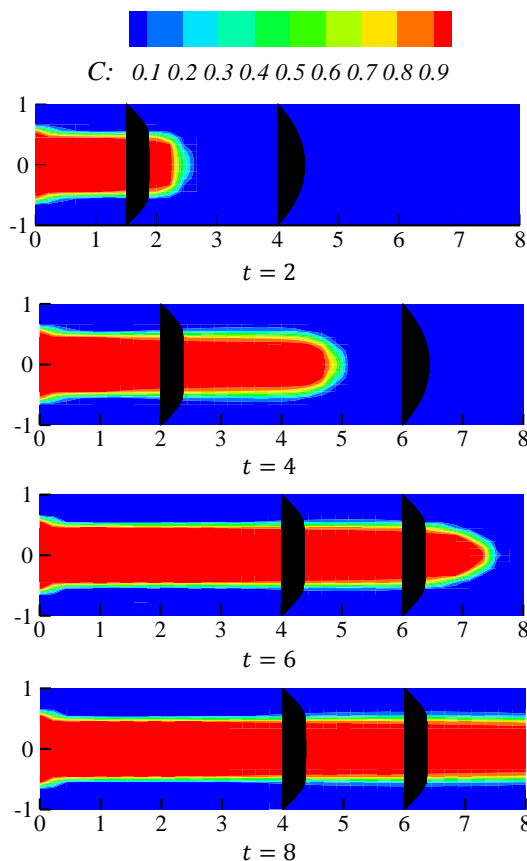
در شکل ۷ نتایج مربوط به توزیع سرعت توسعه یافته به ازای پارامترهای $Re = 1, y_i = 0.5$ و مقادیر مختلف r_μ در دو حالت عددی و تحلیلی با هم مقایسه شده‌اند. حالت $r_\mu = 1$ مانند این است که دو سیال، دارای خواص یکسان هستند و تنها رنگ متفاوت دارند؛ بنابراین کاملاً قابل انتظار است که توزیع سرعت سهموی مربوط به تک سیال را داشته باشیم. حالات $r_\mu = 10$ و $r_\mu = 20$ بسیار به هم نزدیک هستند و با افزایش پارامتر r_μ نباید توزیع خیلی متفاوتی را انتظار داشت. بر اساس معادله (۷) نیز، این نتیجه قابل فهم است که هر چه r_μ بیشتر باشد، اثر آن روی تغییر توزیع سرعت ضعیف‌تر می‌شود؛ چون در مخرج قرار گرفته است. برای گرادیان فشار حالت توسعه یافته نیز، بر مبنای معادله (۸) می‌توان چنین نتیجه‌ای را انتظار داشت. همگرایی قابل قبول نتایج عددی به حل تحلیلی قابل مشاهده است.



شکل ۶- مقایسه توزیع سرعت عددی با حل تحلیلی برای $Re = 1, r_\mu = 10$ و به ازای $y_i = 0.2, 0.5, 0.8$



شکل ۸- فشار در طول کانال برای $Re = 1$ و $r_\mu = 10$ و $y_i = 0.2, 0.5, 0.8$ همراه با مقادیر تحلیلی گرادیان فشار



شکل ۹- کانتور غلظت به همراه توزیع سرعت در مقاطع مختلف به ازای $Re = 1$, $Y_i = 0.6$, $r_\mu = 10$ در زمان‌های مختلف $t = 2, 4, 6, 8$

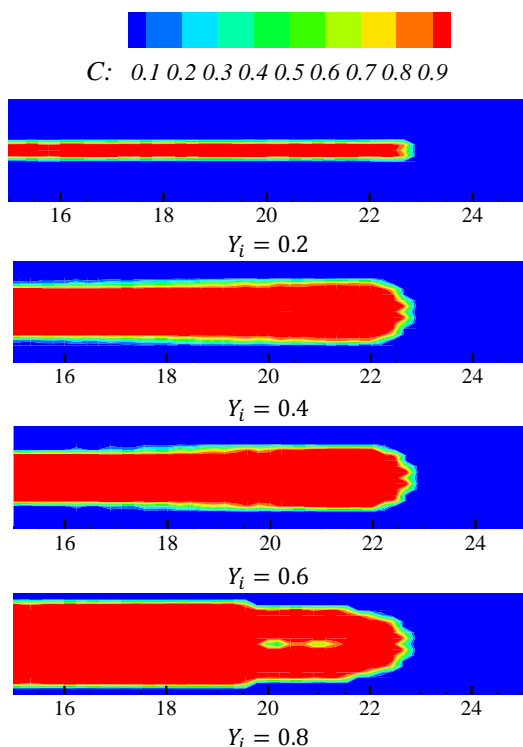
توزیع سرعت دائمی مورد نظر شکل می‌گیرد. الگوی شکل گیری جریان حلقه- هسته در عدد Re کوچک قابل مشاهده است. ضخامت جریان هسته نسبت به طول ورودی آن کوچکتر است. علت این فاصله بین ورودی تا محل شکل- گیری خطوط موازی جریان هسته بقای جرم است. سرعت سیال حلقه در مجاورت مرز صفر است. هر چه فاصله از ورودی بیشتر می‌شود، اثر لایه مرزی باعث تأثیر بیشتر مرز روی جریان حلقه و کم شدن سرعت متوسط آن و در نتیجه مطابق شرط بقای جرم، افزایش مقطع آن می‌شود. همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، این طول از مرتبه اندازه ضخامت ورودی سیال هسته است؛ همان‌طور که بوسیله مشاهدات دی- آلس و همکاران [۷] نشان داده شده است. جبهه جلویی جریان ناپایداری خفیفی را نشان می‌دهد. این قسمت در ابتدا که هنوز به طور کامل شکل نگرفته تخت بوده و به تدریج حالت دوکی شکل پیدا می‌کند و از انتهای کانال خارج می‌شود.

در شکل ۱۰ کانتور غلظت جریان هسته- حلقه به ازای $Re = 10$ ، $Y_i = 0.6$ ، $r_\mu = 10$ در $L = 32$ و $t = 20$ و به ازای Re های مختلف نشان داده شده است. برای بررسی بهتر، بازه مکانی که در آن جبهه جلویی موج قابل رؤیت باشد، نمایش داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، با افزایش Re ناپایداری‌های کوچک موجی شکل تقویت شده و در $Re = 1000$ به ناپایداری صدفی تبدیل می‌شود. در حالت $Re = 1$ جریان کاملاً منظم و بدون ناپایداری به نظر می‌رسد. جبهه جلویی جریان حالت نوک‌تیز و دوکی شکل دارد. با افزایش Re به مقدار 10 ناپایداری‌های موج‌گونه خفیفی روی جریان هسته مشاهده می‌شود. در $Re = 100$ ضمن کاسته شدن از طول جبهه جلویی همگرای جریان و در واقع پهن‌تر شدن آن، ناپایداری‌های بین‌لایه‌ای موجی نیز تقویت شده و نیز مشاهده می‌گردد، قسمتی از سیال حلقه نیز درون سیال هسته حبس می‌شود. در حالت $Re = 1000$ نیز مشاهده می‌شود که جبهه جلویی دوباره حالت برجسته (صدفی) پیدا می‌کند. این‌طور به نظر می‌رسد که صدفی شدن جریان در اثر نوعی انباشتگی جریان هسته در حلقه در Re های بالا اتفاق می‌افتد.

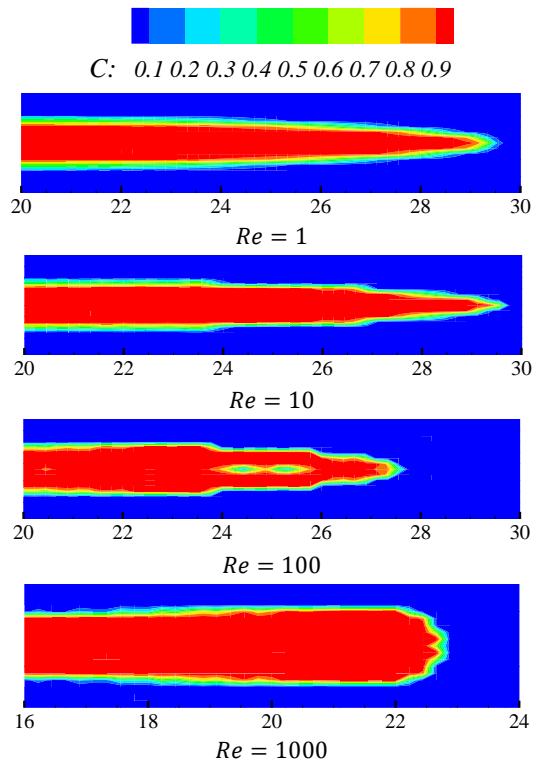
دارد. با افزایش r_μ و در مقادیر کوچک r_μ ، یعنی $r_\mu = 1, 2, 3$ ، جبهه جلویی جریان از حالت دوکی شکل به صورت تخت‌تر متمایل می‌شود. به نظر می‌رسد که در نسبت‌های لزجت زیاد، یعنی $r_\mu \geq 10$ ، همان‌طور که تأثیر r_μ بر توزیع سرعت و افت فشار کم‌رنگ می‌شود که این بر اساس معادلات (۷) و (۸) قابل انتظار است. تأثیر آن روی الگوی جبهه جریان هسته نیز کمتر می‌شود.

۵- نتیجه‌گیری

جریان حلقه- هسته دو سیال با ویسکوزیته‌های مختلف در کار حاضر بررسی شد. روش المان طیفی برای گسسته‌سازی مکانی و برای انتگرال‌گیری زمانی روش آدامز-بشفورث به کار گرفته شده است. برای جداکردن معادلات جفت شده پیوستگی، اندازه حرکت و کسر حجمی (غلظت)، الگوریتم تصحیح سرعت کارنیاداکیس برای کار حاضر توسعه و روی چارچوب کد عددی منبع باز Nektar++ پیاده‌سازی شده است.



شکل ۱۱- کانتور غلظت به ازای $Re = 1000$ ، $r_\mu = 30$ ، $L = 32$ ، در $t = 20$ به ازای $Y_i = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$



شکل ۱۰- کانتور غلظت به ازای $Y_i = 0.6$ ، $r_\mu = 10$ ، $L = 32$ در زمان $t = 20$ و $Re = 1, 10, 100, 1000$

در شکل ۱۱ جریان هسته- حلقه برقرار شده برای ضخامت‌های مختلف هسته در ورودی Y_i دیده می‌شود. در حالت $Y_i = 0.2$ ناپایداری مشاهده نمی‌شود که نتایج [۸] نیز این مسأله را تأیید می‌کند؛ ولی با افزایش Y_i به تدریج الگوی صدفی در جبهه جلویی شروع به شکل‌گیری می‌کند و افزایش می‌یابد. همچنین ملاحظه می‌گردد، در $Y_i = 0.8$ جبهه جلویی به دلیل نداشتن فضای لازم برای صدفی شدن حالت دوکی شکل به خود می‌گیرد. همچنین در این حالت مقداری از سیال حلقه درون هسته محبوس می‌شود.

برای ملاحظه تأثیر نسبت لزجت r_μ بر الگوی جریان، در شکل ۱۲ نمودار پیشروی جریان هسته به ازای مقادیر گسترده‌ای از r_μ و $Re = 20$ نمایش داده شده است. همچنین برای نمایش تأثیر جریان هسته بر توزیع سرعت، در مقطع $x = 4$ که جبهه جلویی جریان از آن گذشته است، توزیع سرعت نیز الحاق شده است. ملاحظه می‌شود که پارامتر r_μ تأثیر بسیار ناچیزی بر الگوی جبهه جریان هسته

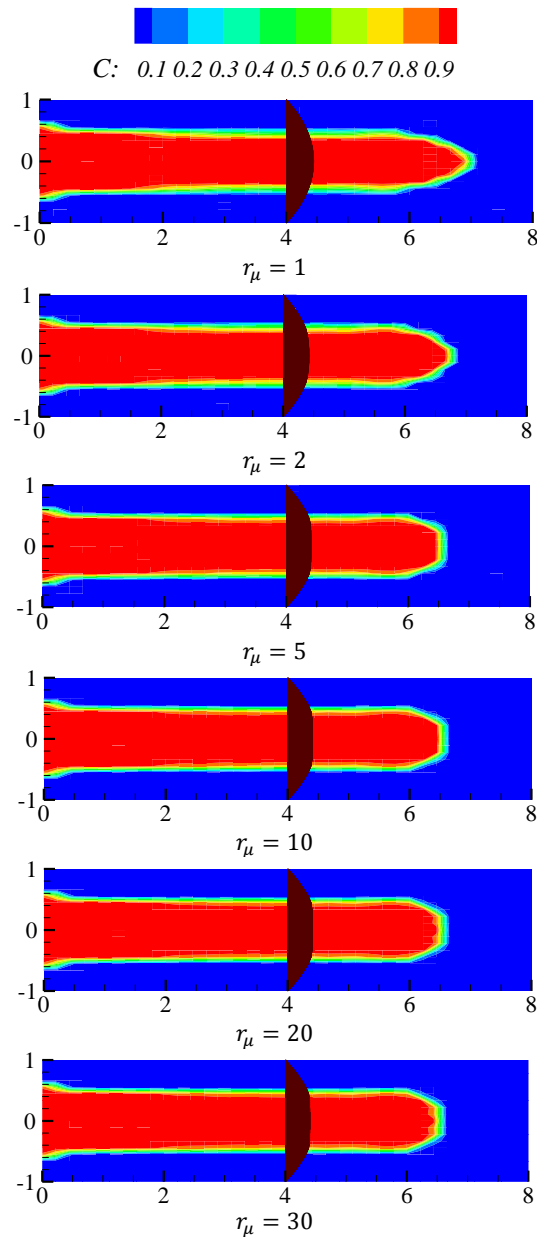
در طول کانال در حالت توسعه یافته با حل تحلیلی مقایسه شدند؛ همچنین کانتورهای کسر حجمی به منظور مشاهده و بررسی جریان حلقه- هسته به ازای پارامترهای مختلف بررسی شد. بررسی این نوع جریان دوفاز نشان می‌دهد، در برد $Re < 1000$ و $r_{\mu} < 30$ ضخامت هسته Y_i و عدد دو پارامتر مهم در تعیین الگوی جریان هستند. با افزایش ضخامت هسته، Y_i ، الگوی جریان در ابتدا متمایل به حالت صدفی و بعد حالت دوکی شکل پیدا می‌کند. با افزایش عدد Re شکل الگوی جریان هسته از حالت دوکی شکل و همگرا به صدفی و همراه با امواج کوچک متمایل می‌شود. افزایش r_{μ} باعث پهن تر شدن توزیع سرعت در مرکز کانال و افزایش افت فشار می‌گردد و جز در عدد Re کوچک تأثیر چندانی بر ساختار جبهه جلویی جریان نشان نمی‌دهد.

۶- علایم

نیم عرض کانال، (m)	h
طول کانال، (m)	L
درجه بسط پایه	N
مؤلفه طولی سرعت	u
نیم ضخامت خروجی هسته	y_i
نیم ضخامت ورودی هسته	Y_i
بالانویس‌ها	
گام زمانی	n
زیرنویس‌ها	
سیال هسته	1
سیال حلقه	2
$\partial/\partial x_j$	$,j$
$\partial^2/\partial x_j \partial x_j$	$,jj$

۷- مراجع

[1] Martínez-Palou R, Mosqueira M, Zapata B (2011) Transportation of heavy and extra-heavy crude oil



شکل ۱۲- کانتور غلظت به ازای $Re = 20$ ، $Y_i = 0.6$ در $t = 5$ به ازای $r_{\mu} = 1, 2, 5, 10, 20, 30$ به همراه توزیع سرعت الحاق شده در $x = 4$

میزان استقلال نتایج از گام زمانی و درجه بسط پایه نشان داده شده است. زمان مصرفی CPU بسیار کوتاه است. حل عددی مذکور، سرعت همگرایی مکانی از مرتبه ۲ برای گام زمانی و از مرتبه ۴.۵ به ازای افزایش درجه بسط پایه را نشان می‌دهد. توزیع سرعت در خروجی کانال و نیز افت فشار

- [11] Fiétier N, Deville M (2003) Time-dependent algorithms for the simulation of viscoelastic flows with spectral element methods: applications and stability. *J Comput Phys* 186(1): 93-121.
- [12] Jafari A, Fiétier N, Deville M (2010) A new extended matrix logarithm formulation for the simulation of viscoelastic fluids by spectral elements. *Comput Fluids* 39(9): 1425-1438.
- [13] Karniadakis G, Israeli M, Orszag S (1991) High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *J Comput Phys* 97(2): 414-443.
- [14] Pourmoayed, A, Rahmati R, Gholami M (2018) A New Model for Two-Phase Flow in a Solar Still Improved by a Porous Layer. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 8(1): 171-182.
- [15] Patankar S, (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publishing Corporation.
- [16] Le Bars M, Davaille A (2002) Stability of thermal convection in two superimposed miscible viscous fluids. *J Fluid Mech* 471: 339-363
- [17] Bolis A (2013) *Fourier Spectral/hp Element Method: Investigation of Time-Stepping and Parallelisation Strategies*. PhD Thesis, in Department of Aeronautics. Imperial College London.
- [18] Gear C, (1971) *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*. Prentice Hall PTR.
- [19] Cantwell C, Moxey D, Bolis A, Sherwin S (2015) Nektar++: An open-source spectral/ element framework. *Comput Phys Commun* 192: 205-219.
- by pipeline: A review. *J Petrol Sci Eng* 75(4): 274-282.
- [2] Ooms G, Segal A, Van A (1983) A theoretical model for core-annular flow of a very viscous oil core and a water annulus through a horizontal pipe. *Int J Multiphas Flow* 10(1): 41-60.
- [3] Bai R, Kelkar K, Joseph D (1996) Direct Simulation of Interfacial Waves in a High Viscosity Ratio and Axisymmetric Core Annular Flow. *J Fluid Mech* 32: 1-34.
- [4] Ghosh S, Das G, Das P (2010) Simulation of core annular downflow through CFD—A comprehensive study. *Chem Eng Process* 49(11): 122-128.
- [5] Kaushik V, Ghosh S, Das G, Das P (2012) CFD simulation of core annular flow through sudden contraction and expansion. *J Petrol Sci Eng* 86(Supplement C): 153-164.
- [6] Shi J, Gourma M, Yeung H (2017) CFD simulation of horizontal oil-water flow with matched density and medium viscosity ratio in different flow regimes. *J Petrol Sci Eng* 151(Supplement C): 373-383.
- [7] d’Olce M, Martin J, Salin D, Talon L (2008) Pearl and mushroom instability patterns in two miscible fluids core annular flows. *Phys Fluids* 20(2): 14-24.
- [8] Hormozi S, Burchard K, Frigaard I (2011) Multi-layer channel flows with yield stress fluids. *J Non-Newton Fluid* 166(5-6): 262-278.
- [9] Patera A (1984) A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion. *J Comput Phys* 54(3): 468-488.
- [10] Karniadakis G, Sherwin S (1999) *Spectral/hp Element Methods for CFD*. Oxford University Press, New York.