



تحلیل دینامیکی اتوفریتاژ تحت بارگذاری گذرا در استوانه جدار ضخیم از مواد مدرج تابعی با در نظر گرفتن رفتار کار سختی به روش عددی

سید حسین رضی موسوی^۱، مجتبی محزون^{۲*}، محمد حسن کدیور^۲ و حسین محمدی^۳

^۱ دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

^۲ استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

^۳ استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

مقاله مستقل؛ تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۵/۰۳؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۱۱/۲۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۲/۲۸

چکیده

در این مقاله برای تحلیل دینامیکی پروسه اتوفریتاژ و تعیین تنش پسماند و رفتار هنگام اعمال فشار کاری، از روش عددی استفاده شده است. ابتدا معادلات دینامیکی استخراج شده، سپس معادلات حاصل براساس روش تفاضل محدود به معادلات گسسته تبدیل گردیده است. از معادلات دیفرانسیل حرکت، با توجه به هندسه و شرایط مرزی انتگرال گیری شده، سپس با استفاده از قضیه گوس انتگرال روی سطح با انتگرال روی محیط جایگزین گردیده است. پس از آن، تأثیر بارگذاری گذرا و هندسه با استفاده از انتشار امواج تنش الاستوپلاستیک در مواد مدرج تابعی در پروسه اتوفریتاژ، مورد بررسی قرار گرفته است. تنش پسماند ایجاد شده در اثر اعمال فشار داخلی در سیلندرها، باعث تغییر ظرفیت باربری خواهد شد. نتایج برای مواد مدرج تابعی متفاوت خواهد بود که تغییر خواص مکانیکی این مواد به طور پیوسته و تابعی تغییر می‌کند. بی‌بعدسازی در تحلیل دینامیکی در راستای شعاع برخلاف تحلیل‌های استاتیکی تابع پارامترهای دینامیکی بوده و براساس تغییر اندازه هندسی، پاسخ‌های متفاوتی را آشکار می‌سازد.

کلمات کلیدی: مواد مدرج تابعی؛ اتوفریتاژ؛ استوانه جدار ضخیم؛ حل عددی گذرا؛ امواج تنش الاستوپلاستیک.

Dynamic Analysis of Autofrettage under Transient Loading in FG Thick-Walled Cylinder with Work Hardening Behavior Using Numerical Method

S. H. Razi mousavi¹, Mojtaba Mahzoon^{2*}, M. H. Kadivar², H. Mohammadi³

¹ Ph.D., Mech. Eng., Shiraz Univ., Shiraz, Iran.

² Prof., Mech. Eng., Shiraz Univ., Shiraz, Iran.

³ Assist. Prof., Mech. Eng., Shiraz Univ., Shiraz, Iran.

Abstract

In the present article, a numerical procedure is developed for dynamic analysis of residual stress in the process of autofrettage under working pressure. The governing dynamical equations are discretized using finite difference method. Toward This end, differential equations are integrated and by employing divergence theorem surface integrals are converted to boundary integrals. Finally, the C/C++ numerical programming is prepared using the explicit Lagrangian formalism. The effect of transient loading and geometry is investigated in the process of autofrettage on functionally graded cylinders considering elasto-plastic stress wave propagation. The residual stress resulting from internal pressure changes structural load bearing capacity of the cylinder. For functionally graded materials whose material properties change continuously, dynamical analysis yield results which are entirely different as compared with their static counterparts due to the change in wave length and acoustic impedance. In the static analysis the dimensionless forms of equations can be developed from the onset, while in the dynamic analysis the physical dimensions gain importance due to inherent properties of the stress waves.

Keywords: FGMs; Autofrettage; Thick-Walled Cylinder; Transient Numerical Modeling; Elasto-Plastic Stress Wave

۱- مقدمه

بماند. پس از برداشتن فشار، برگشت الاستیک لایه‌های خارجی، سبب ایجاد فشردگی در لایه درونی و در نتیجه ایجاد تنش پسماند فشاری می‌شود. تغییر در خواص مواد و مدل‌های مختلف سیلان پلاستیک (منحنی تنش- کرنش) سبب ایجاد تغییر در این تنش پسماند خواهد شد و در نتیجه مقدار افزایش باربری نیز تغییر خواهد کرد [۴].

از کاربردهای روش اتوفریتاژ، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد: راکتورهای هسته‌ای، انواع لوله‌های سلاح، انژکتور موتورهای دیزل، مخازن تحت فشار یا مسیرهای انتقال سیال در کارخانه‌های تولید مواد شیمیایی و پتروشیمی، دستگاه برش و اثر جت، مسیرهای انتقال سیالات، سیلندرهای هیدرولیک، شیرهای کنترل فشار سرچاهی استخراج نفت، مخازن گاز CNG و نظائر آن.

در موارد ذکر شده، شرایط بارگذاری دینامیکی یا استاتیکی به صورت دمایی و مکانیکی می‌باشند که در پاره‌ای موارد در بازه زمانی کوتاهی رخ می‌دهد که با استفاده از اتوفریتاژ، استحکام به وزن یا استحکام به هزینه را می‌توان بهبود داد.

۱-۱- مواد مدرج تابعی و انتشار امواج الاستوپلاستیک

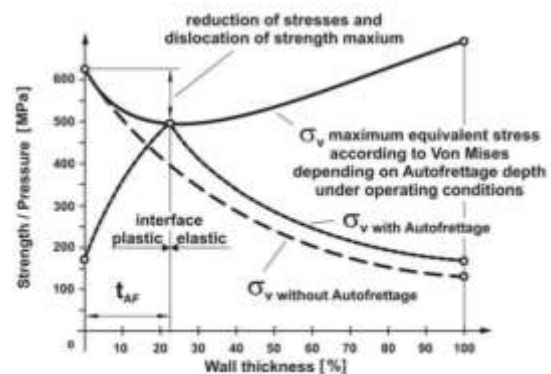
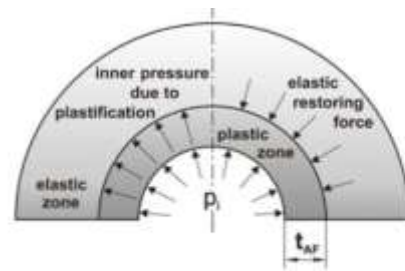
خواص الاستیسیسته مؤثر مواد FG توسط ژانگ و همکارانش با استفاده از روش اجزاء محدود با استفاده از نرم‌افزار آباکوس در سال ۱۹۹۸ مورد مطالعه قرار گرفت [۵]. تئوری مرتبه بالا برای مواد مدرج تابعی در سال ۱۹۹۹، توسط پیندرا و ابودی ارائه شد [۶].

تحقیقات زیادی در مورد تحلیل تنش پسماند و تغییر شکل در سیلندرهای جدار ضخیم تحت شرایط اتوفریتاژ توسط محققانی همچون، فرانکلین [۷]، چن [۸] و استیسی [۹] انجام گرفته است. پارکر اتوفریتاژ در سیلندر جدار ضخیم تحت شرایط مختلف باربرداری را مورد مطالعه قرار داد [۱۰]. لیویری و لازارین، اثر باشینگر در اتوفریتاژ را به صورت تحلیلی مورد مطالعه قرار دادند [۱۱].

در سال ۲۰۱۵ بیات و طوسی مدل الاستوپلاستیک برای یک محور توخالی استوانه‌ای از مواد مدرج تابعی تحت پیچش را به صورت تحلیلی ارائه کردند، در این روش از مدل TTO برای مدل الاستوپلاستیک مواد مدرج تابعی استفاده کردند [۱۲]. در سال ۲۰۱۵ کومار و مولیک، اتوفریتاژ مخازن

مواد مدرج تابعی در زمره مواد غیرهمگن است که خواص آنها به طور پیوسته از یک نقطه به نقطه دیگر، در راستای معین تغییر می‌کند. به عبارت دیگر، این مواد به طور تدریجی و پیوسته از ماده‌ای به ماده دیگر تبدیل می‌شوند [۱]. به طور کلی از هندسه‌های متقارن محوری مانند استوانه و کره در کاربردهای مختلف صنعتی استفاده می‌شود که تحت شرایط بارگذاری فشار یا دما قرار دارند. جهت افزایش عمر و قابلیت تحمل شرایط بارگذاری دمایی و مکانیکی بیشتر و کاهش وزن به توانایی تحمل بار، از روش‌هایی همچون اتوفریتاژ استفاده می‌شود.

در اتوفریتاژ با ایجاد یک ناحیه پلاستیک، می‌توان تنش پسماندی در لایه‌های درونی یا بیرونی ایجاد نمود که تحمل باربری جسم را افزایش دهد [۲]. یک نمونه اثر اتوفریتاژ در شکل ۱ نشان داده شده است [۳].



شکل ۱- تنش شعاعی و محیطی در پروسه اتوفریتاژ [۳]

اتوفریتاژ در تعریف اولیه عبارتست از: اعمال فشار داخلی به اندازه کافی برای ایجاد قسمتی از ناحیه درونی به صورت پلاستیک تا جایی که لایه خارجی در محدوده الاستیک باقی

۱-۲- معادلات حرکت

در مختصات استوانه‌ای r - θ - z در حالت متقارن محوری، جابجایی U_r و V_θ در راستای محورهای مختصات r - θ در نظر گرفته شده و جابجایی W_z عمود بر صفحه است. معادله دینامیکی حاکم پس از ساده سازی مطابق رابطه (۱) خواهد بود.

$$\begin{cases} \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \right) + r\dot{\theta}^2 \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} \right) \\ \frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \right) \end{cases} \quad (1)$$

در معادله (۱) متغیر ρ نشان‌دهنده چگالی ناحیه در مختصات موضعی است. برای مواد مدرج تابعی، تغییر خواص مکانیکی سازه در راستای r ، به صورت تابعی در نظر گرفته می‌شود. σ_{ij} مولفه‌های تنسور تنش، \dot{r} و \dot{z} سرعت در راستای محوره‌های r و z است.

۲-۲- قانون پایستگی جرم

قانون پایستگی جرم به صورت $\frac{dM}{dt} = 0$ است که M جرم ناحیه است. بر این اساس نسبت حجم به حجم اولیه، حجم نسبی^۲ نامیده می‌شود و به صورت $V_r = \frac{V}{V_0} = \frac{M/\rho}{M/\rho_0} = \frac{\rho_0}{\rho}$ تعریف می‌شود.

۳-۲- مؤلفه‌های نرخ کرنش

مؤلفه‌های نرخ کرنش در مختصات r - θ - z (لاگرانژی) با توجه نرخ کرنش به صورت رابطه (۲) خواهد بود.

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{rr} = \frac{\partial \dot{r}}{\partial r}, \quad \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{\dot{r}}{r}, \quad \dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \\ \dot{\gamma}_{r\theta} = r \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial r}, \quad \dot{\gamma}_{\theta z} = \frac{\partial (r\dot{\theta})}{\partial z}, \quad \dot{\gamma}_{zr} = \frac{\partial \dot{r}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial r} \end{cases} \quad (2)$$

۴-۲- مؤلفه‌های نرخ تنش انحرافی

مؤلفه‌های نرخ تنش انحرافی مطابق رابطه (۳) بیان می‌شود.

استوانه‌ای تحت فشار با مقطع بیضوی در قیاس با حالت بدون اتوفریتاژ را با استفاده از نرم افزار Ansys مدل‌سازی کردند [۱۳].

در کلیه تحقیقات انجام شده، روش حل به صورت بارگذاری استاتیکی است و اثر تغییر اندازه هندسه و ایجاد ناحیه پلاستیک تحت شرایط بارگذاری گذرا برای مواد مدرج تابعی، قابل بررسی نبوده است. در این مقاله، تحلیل گذرا برای سیلندرهای جدار ضخیم تحت شرایط اتوفریتاژ به صورت عددی و گذرا، مورد بررسی قرار گرفته است و تفاوت آن با مدل‌سازی استاتیکی نیز ارائه می‌شود.

۱-۲- روش حل عددی جهت مدل‌سازی اتوفریتاژ

در این تحلیل از روش تفاضل محدود صریح لاگرانژی^۱ به صورت گذرا استفاده خواهد شد. در این روش از معادلات دیفرانسیل حرکت با توجه به هندسه و شرایط مرزی، انتگرالگیری می‌شود. سپس با استفاده از قضیه گوس، انتگرال روی سطح با انتگرال روی محیط جایگزین می‌شود [۱۳].

۲- معادلات دینامیکی حاکم در پروسه اتوفریتاژ

در تحلیل تنش پسماند حاصل از اتوفریتاژ در سیلندر جدار ضخیم ساخته شده از مواد مدرج تابعی، از روش تفاضل محدود صریح لاگرانژی به صورت گذرا استفاده خواهد شد.

امواج تنش ایجاد شده در ساختار مذکور، به صورت الاستوپلاستیک در نظر گرفته می‌شود. در این روش با جداسازی لایه‌های مختلف مواد مدرج تابعی، سازه به لایه‌های مختلف با خصوصیات مادی متفاوت در هر لحظه تبدیل می‌شود و از مدل‌های سیلان ارائه شده برای مواد مدرج تابعی با در نظر گرفتن کار سختی در این تحلیل استفاده می‌شود. ابتدا معادلات دینامیکی حاکم جهت مدل‌سازی اتوفریتاژ بیان می‌شود، سپس معادلات براساس روش تفاضل محدود تفکیک می‌گردد. این معادلات به شرح زیر است.

² Relative Volume

¹ Lagrangian Explicit Finite Difference Method

محلی است. کمیت نرخ کرنش برای المان دوبعدی متقارن محوری، مطابق رابطه (۸) خواهد بود.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \cos^2 \alpha + \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} \sin^2 \alpha + \left(\frac{\partial \dot{z}}{\partial r} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial z} \right) \sin \alpha \cos \alpha \quad (۸)$$

۲-۹- مدل ترموالاستوپلاستیک برای مواد مدرج تابعی

در مواد مدرج تابعی براساس جزء حجمی، مدل‌های مختلفی ارائه شده است که در آنها تغییرات خواص مکانیکی به صورت تابعی از جزء حجمی است که جزء حجمی برای هندسه استوانه‌ای در راستای شعاع به صورت $V_f = f_0((r_0 - r)/(r_0 - r_i))^n$ بیان می‌شود که r_0 شعاع خارجی، r_i شعاع داخلی، r موقعیت مکانی شعاعی، f_0 ضریب توزیع، V_f جزء حجمی و n توان جزء حجمی است.

پارامترهای مکانیکی برای مواد مدرج تابعی در حالت الاستوپلاستیک مطابق روابط (۹) تا (۱۱) بیان می‌شود. زیر نویس c سرامیک و m فلز، V_f جزء حجمی براساس سرامیک، q_f نسبت تنش به کرنش، طبق رابطه $q_r = (\sigma_c - \sigma_m)/|\varepsilon_c - \varepsilon_m|$ ، E مدول الاستیسیته، σ_y تنش تسلیم اولیه و H ضریب ارتجاعی مماسی است [۱۴].

$$E = \left[(1 - V_f) E_m \frac{q_r + E_c}{q_r + E_m} + V_f E_c \right] \times \left[(1 - V_f) \frac{q_r + E_c}{q_r + E_m} + V_f \right]^{-1} \quad (۹)$$

$$\sigma_y = \sigma_{ym} \left[(1 - V_f) \frac{q_r + E_m}{q_r + E_c} \frac{E_c}{E_m} V_f \right] \quad (۱۰)$$

$$H = \left[(1 - V_f) H_m \frac{q_r + E_c}{q_r + H_m} + V_f E_c \right] \times \left[(1 - V_f) \frac{q_r + E_c}{q_r + H_m} + V_f \right]^{-1} \quad (۱۱)$$

۳- معادلات گسسته و روش حل

با این روش معادلات مجزا شده در دستگاه لاگرانژی بدست می‌آید که با حل صریح گذرای معادلات گسسته بدست آمده روی نواحی شبکه، نتایج گذرا برای مدل‌های مختلف حاصل خواهد شد.

$$\begin{cases} \dot{s}_{rr} = 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_{rr} - \frac{1}{3} \dot{V} \right), & \dot{\sigma}_{r\theta} = \mu \dot{\gamma}_{r\theta} \\ \dot{s}_{\theta\theta} = 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_{\theta\theta} - \frac{1}{3} \dot{V} \right), & \dot{\sigma}_{\theta z} = \mu \dot{\gamma}_{\theta z} \\ \dot{s}_{zz} = 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_{zz} - \frac{1}{3} \dot{V} \right), & \dot{\sigma}_{zr} = \mu \dot{\gamma}_{zr} \end{cases} \quad (۳)$$

$(\dot{\sigma}_{zr}, \dot{\sigma}_{r\theta}, \dot{\sigma}_{\theta z}), (\dot{s}_{rr}, \dot{s}_{\theta\theta}, \dot{s}_{zz})$ به ترتیب نرخ تنش انحرافی و نرخ تنش برشی، V حجم، \dot{V} نرخ تغییر حجم و μ مدول برشی می‌باشند.

۲-۵- معادله نرخ فشار

معادله نرخ فشار به صورت رابطه (۴) استفاده می‌شود. ضریب k مدول حجمی و \dot{p} نرخ تغییر فشار است.

$$\dot{p} = -k \left(\frac{\dot{V}}{V} \right) \quad (۴)$$

۲-۶- مؤلفه‌های تنش کل

مؤلفه‌های نرمال تنش کل، مطابق رابطه (۵) بیان می‌شود [۱۶].

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -(p + q) + s_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} = -(p + q) + s_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} = -(p + q) + s_{zz} \end{cases} \quad (۵)$$

۲-۷- معیار فون میسر

اگر Y تنش سیلان پلاستیک و $2J_2$ ناوردای دوم تنسور تنش انحرافی باشد، برای سیلان پلاستیک ماده از رابطه (۶) برای چک کردن و تصحیح تنش استفاده می‌شود.

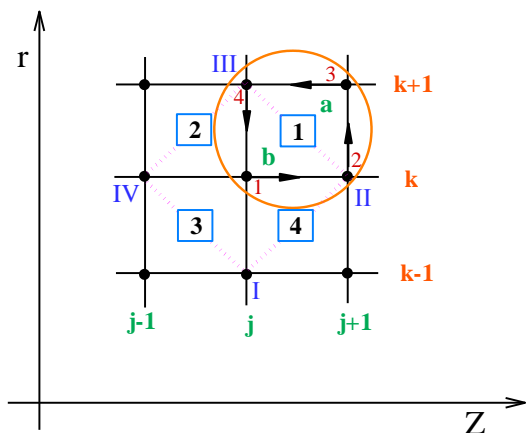
$$\sqrt{2J_2} - \sqrt{2/3}Y \leq 0 \quad (۶)$$

۲-۸- کل لزجت مصنوعی

برای پایداری حل عددی از لزجت مصنوعی استفاده می‌شود که به صورت رابطه (۷) تعریف می‌شود.

$$q = c_0^2 \rho L^2 \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 + c_L \rho L a \left| \frac{dS}{dt} \right| \quad (۷)$$

c_0 و c_L ثابت بوده و کمیت dS/dt نرخ کرنش در جهت بردار شتاب (جهت بردار شتاب در یک المان متقارن محوری، پس از محاسبه شتاب به صورت عددی) حاصل می‌شود. L اندازه المان که برابر طول حاصل از برخورد بردار شتاب با اضلاع المان، $a = \sqrt{p/\rho}$ سرعت محلی صوت و ρ چگالی



شکل ۲- مدل دو بعدی برای استخراج روابط گسسته

۳-۱- ناحیه جرم

برای محاسبه مساحت ناحیه 1 و حجم همین ناحیه در حالت متقارن محوری حول محور z مطابق شکل ۲، از رابطه (۱۲) استفاده می‌شود.

$$V_{[1]} = \bar{Y}_a A_a + \bar{Y}_b A_b, \quad A_{[1]} = A_a + A_b$$

$$\bar{Y}_a = \frac{1}{3}(r_2 + r_3 + r_4)$$

$$\bar{Y}_b = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_4)$$

$$A_a = \frac{1}{2}[z_2(r_3 - r_4) + z_3(r_4 - r_2) + z_1(r_2 - r_3)]$$

$$A_b = \frac{1}{2}[z_2(r_4 - r_1) + z_4(r_1 - r_2) + z_1(r_2 - r_4)]$$

(۱۲)

$V_{Zone} = 2\pi V_{[Zone]}$ حجم واقعی ناحیه دوران یافته حول محور z و A مساحت ناحیه است. a و b نشان دهنده مثلث تشکیل شده درون ناحیه است که در شکل ۲ مشاهده می‌شود. لازم به ذکر است، در محاسبات عددی برای سادگی در کلیه روابط عدد 2π به صورت ساده شده از روابط حذف گردیده از این رو از متغیر $V_{[1]}$ استفاده شده است

۳-۲- معادله حرکت

با توجه به روش گفته شده، معادله حرکت با توجه به شکل ۲ و تعریف ناحیه و نقاط گرهی به عنوان مثال در راستای x، مطابق رابطه (۱۳) است.

هندسه به شبکه‌های لاگرانژی تبدیل می‌شود که با جریان در حرکت است. برای یک شبکه، متغیر $r_{j,k}^{n+\frac{1}{2}}$ نشان دهنده موقعیت r نقطه (j,k) در مختصات لاگرانژی و زمان t^n است. نقاط در زمان بین n و n+1 به صورت $r_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} = (r_{j,k}^{n+1} + r_{j,k}^n)$ تعریف می‌شود؛ بنابراین $r_{j,k}^{n+\frac{1}{2}}$ سرعت گره (j,k) را در زمان $t^{n+\frac{1}{2}}$ بیان می‌کند.

موقعیت و سرعت برای یک ناحیه، در نقاط گره‌ای آن ناحیه مقداره‌ی می‌شوند؛ در صورتی که پارامترهای ترمودینامیکی مثل فشار، حجم و انرژی در مرکز ناحیه شبکه، مقدار دهی می‌شوند. از بازه زمانی $\Delta t^n = (\Delta t^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t^{n-\frac{1}{2}})$ برای تعریف توزیع فشار در زمان t^n استفاده می‌شود؛ در حالی که برای سرعت‌های یک گره لاگرانژی، از بازه زمانی $\Delta t^{n+\frac{1}{2}}$ استفاده می‌شود. این بازه زمانی با استفاده از شرط پایداری برای هر دوره زمانی تعیین می‌شود.

مطابق شکل ۲ هندسه متقارن محوری به نقاطی تقسیم‌بندی می‌گردند که پس از اتصال نقاط مشخص شده به یکدیگر شبکه‌بندی چهارضلعی ایجاد می‌شود که در حقیقت شبکه‌بندی خواهیم داشت که ارتباط بین گره‌های کناری کاملاً مشخص است.

در شکل ۲ گره (j,k) از ۸ گره اطراف آن مشخص شده است که در حقیقت یک گره مشترک در ۴ اطراف آن است. برای گره‌ها از عدد (مثال 1) و برای ناحیه که با استفاده از ۴ گره ایجاد می‌گردد، از علامت مربع اطراف عدد در فرمول نویسی (مثال 1) استفاده می‌شود.

هر ناحیه با ۴ گره معرفی می‌شود. برای یک گره مرکزی که با ۴ ناحیه محصور شده است با در نظر گرفتن حرکت پادساعتگرد نواحی از [1] تا [4] مشخص می‌گردند. شماره‌های I تا IV به همین ترتیب، مطابق شکل ۲ برای ۴ ناحیه کنار هم و محصور کننده گره مرکزی شماره‌گذاری می‌شود. برای ناحیه [1] نیز به صورت پادساعتگرد از 1 تا 4 گره‌ها شماره‌گذاری شده و به دو ناحیه مثلثی a و b تقسیم می‌شود. همین تقسیم بندی برای سایر نواحی نیز انجام خواهد گرفت.

پارامترهای مورد استفاده در روابط، مطابق روابط (۲۰) تا (۲۲) تعریف می‌شود.

$$A_{\square}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (A_{\square}^{n+1} + A_{\square}^n) \quad (20)$$

$$\left(\frac{\dot{V}_r}{V_r}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \left(\frac{V_r^{n+1} - V_r^n}{V_r^{n+\frac{1}{2}}}\right) \left(\frac{1}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}\right) \quad (21)$$

$$V_{r\square}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (V_{r\square}^{n+1} + V_{r\square}^n) \quad (22)$$

در نتیجه تغییرات کرنش مطابق روابط (۲۳) تعریف می‌شود. برای سایر نواحی و جهت‌ها، روابط به صورت مشابه بدست می‌آید.

$$(\Delta \varepsilon_{rr})_{\square}^{n+\frac{1}{2}} = (\dot{\varepsilon}_{rr})_{\square}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \quad (23)$$

۳-۵- مؤلفه‌های تنش

مؤلفه تنش انحرافی به صورت رابطه (۲۴) بدست می‌آید. باید توجه کرد که به دلیل چرخش المان، برای تصحیح تنش‌ها مقداری به نام δ به تنش‌ها اضافه می‌شود.

$$(s_{rr})_{\square}^{n+1} = (s_{rr})_{\square}^n + 2\mu_{\square} \left[\Delta \varepsilon_{rr}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta V_r}{V_r}\right)^{n+\frac{1}{2}} \right]_{\square} + (\delta_{rr})_{\square}^n \quad (24)$$

برای سایر نواحی و جهت‌ها، روابط به صورت مشابه است. اگر یک المان جرمی در صفحه $Z-r$ و بازه زمانی $\Delta t^{n+\frac{1}{2}} = \Delta t^{n+1} - \Delta t^n$ به اندازه ω_r دوران کند، تنش‌هایی که در سیستم مختصات $Z-r$ بیان می‌شود، بایستی در موقعیت جدید خود تصحیح شوند. این تصحیح مطابق رابطه (۲۵) و (۲۶) انجام می‌گیرد.

$$\sin(\omega_r) = \frac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}{2A_{\square}^{n+\frac{1}{2}}} \{ [(\dot{r}_2 - \dot{r}_4)(r_3 - r_1) - (r_2 - r_4)(\dot{r}_3 - \dot{r}_1) - [(\dot{z}_2 - \dot{z}_4)(z_3 - z_1) - (z_2 - z_4)(\dot{z}_3 - \dot{z}_1)]]_{\square}^{n+\frac{1}{2}} \} \quad (25)$$

$$\delta_{rr}^n = - \left(\frac{s_{zz}^n - s_{rr}^n}{2} \right) (\cos(2\omega_r) - 1) + \sigma_{zr}^n \sin(2\omega_r) \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \dot{r}_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} &= \dot{r}_{j,k}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^n}{2\varphi_{j,k}^n} [(\sigma_{rr})_{\square}^n (z_{II}^n - z_{III}^n) \\ &+ (\sigma_{rr})_{\square}^n (z_{III}^n - z_{IV}^n) + (\sigma_{rr})_{\square}^n (z_{IV}^n - z_I^n) \\ &+ (\sigma_{rr})_{\square}^n (z_I^n - z_{II}^n) - (\sigma_{zr})_{\square}^n (r_{II}^n - r_{III}^n) \\ &- (\sigma_{zr})_{\square}^n (r_{III}^n - r_{IV}^n) - (\sigma_{zr})_{\square}^n (r_{IV}^n - r_I^n) \\ &- (\sigma_{zr})_{\square}^n (r_I^n - r_{II}^n)] + \Delta t^n [(\beta)_{j,k}^n] \end{aligned} \quad (13)$$

σ_{ij} ($i = j$) مولفه تنسور تنش کل، σ_{ij} ($i \neq j$) مولفه تنسور تنش برشی و n نشان‌دهنده مقدار کمیت‌ها در زمان t^n است. سایر پارامترها مطابق روابط (۱۴) تا (۱۶) است.

$$\beta_{j,k}^n = \frac{1}{4} \left\{ \left[(\sigma_{rr}^n - \sigma_{\theta\theta}^n) \left(\frac{A^n}{M}\right) \right]_{\square} + \left[(\sigma_{rr}^n - \sigma_{\theta\theta}^n) \left(\frac{A^n}{M}\right) \right]_{\square} + \left[(\sigma_{rr}^n - \sigma_{\theta\theta}^n) \left(\frac{A^n}{M}\right) \right]_{\square} + \left[(\sigma_{rr}^n - \sigma_{\theta\theta}^n) \left(\frac{A^n}{M}\right) \right]_{\square} \right\} \quad (15)$$

$$r_{j,k}^{n+1} = r_{j,k}^n + \dot{r}_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \quad (16)$$

۳-۳- بایستاری جرم

جرم ناحیه 1 مطابق رابطه (۱۷) محاسبه می‌شود. نسبت چگالی تغییر یافته به چگالی اولیه، مطابق رابطه (۱۸) محاسبه می‌شود.

$$M_{\square} = \left(\frac{\rho_0}{V_r^0} V^0 \right)_{\square} \quad (17)$$

$$V_{r\square}^{n+1} = \left(\frac{\rho_0}{M_{\square}} V^{n+1} \right) \quad (18)$$

۳-۴- مؤلفه‌های نرخ کرنش

مؤلفه‌های نرخ کرنش برای $\dot{\varepsilon}_{rr}$ مطابق رابطه (۱۹) است.

$$\begin{aligned} (\dot{\varepsilon}_{rr})_{\square}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{-1}{2A_{\square}^{n+\frac{1}{2}}} [(\dot{r}_2 - \dot{r}_4)(z_3 - z_1) \\ &- (z_2 - z_4)(\dot{r}_3 - \dot{r}_1)]_{\square}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (19)$$

غیر فیزیکی، از لزجت مصنوعی استفاده شده است [۱۵] و [۱۶].

۴- صحنه‌گذاری روش حل با محاسبه تنش پسماند

۴-۱- صحنه‌گذاری و قیاس نتایج تنش پسماند ارائه شده با روش حل کنونی

برای صحنه‌گذاری برنامه عددی تهیه شده، تحلیلی براساس نتایج ارائه شده، انجام شده است. در این مدل‌سازی سیلندر تحت شرایط اتوفریتاژ قرار دارد، خصوصیات هندسی و مکانیکی برای ماده NiCrMoV125 عبارتست از:

$$(r_i = 14.60 \text{ cm}, r_o = 30.50 \text{ cm})$$

$$\rho = 7800.00 \text{ kg/m}^3, E = 268.0 \text{ GPa}, \nu = 0.29,$$

$$Y = 700.0 \text{ MPa}, H = 75 \text{ GPa}, n = 1.0$$

ابتدا فشار 736 MPa به مدت 5 ms به ناحیه درونی سیلندر وارد شده سپس در مدت 5 ms فشار برداشته می‌شود. به دلیل انتشار امواج تنش در راستای شعاع سیلندر و برهم کنش در زمان‌های مختلف مدت زمانی نیاز است تا تنش به حالت پایدار برسد. نتایج حاصل از روش حل عددی ارائه شده با نتایج تحقیقات در شکل ۳ مورد قیاس قرار گرفته است. نمودار شکل ۳ هم‌خوانی خوبی با نتایج ارائه شده و نتایج تحلیل عددی را نشان می‌دهد.

۴-۲- بررسی اثر مدل‌سازی دینامیکی در قیاس با روش استاتیکی

جهت تحلیل پاسخ مدل‌سازی دینامیکی و قیاس تفاوت‌های این روش با حل استاتیکی در پروسه اتوفریتاژ، خواص هندسی و مکانیکی سیلندر را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$(r_i = 0.150 \text{ cm}, r_o = 0.475 \text{ cm})$$

$$\rho = 7800.00 \text{ kg/m}^3, E = 200.0 \text{ GPa}, \nu = 0.3,$$

$$Y = 280.0 \text{ MPa}, H = 0.22698 \text{ GPa}, n = 0.43$$

با توجه به مقادیر تنش انحرافی محاسبه شده در روابط، مؤلفه‌های تنش کل به صورت رابطه (۲۷) نوشته می‌شود.

$$(\sigma_{rr}^{n+1})_{\square} = (s_{rr}^{n+1})_{\square} + \left(p^{n+1} + q^{n+\frac{1}{2}} \right)_{\square} \quad (27)$$

p فشار هیدرواستاتیک و q لزجت مصنوعی است. برای سایر نواحی و جهت‌ها به طریق مشابه خواهد بود.

۳-۶- معیار تنش فون میسز و کرنش پلاستیک

رابطه فون میسز برای چک کردن سیلان ماده به صورت روابط (۲۸) و (۲۹) نوشته می‌شود.

$$2J^{n+1} = (s_{zz}^{n+1})^2 + (s_{rr}^{n+1})^2 + (s_{\theta\theta}^{n+1})^2 + 2[(\sigma_{zr}^{n+1})^2 + (\sigma_{r\theta}^{n+1})^2 + (\sigma_{\theta z}^{n+1})^2] \quad (28)$$

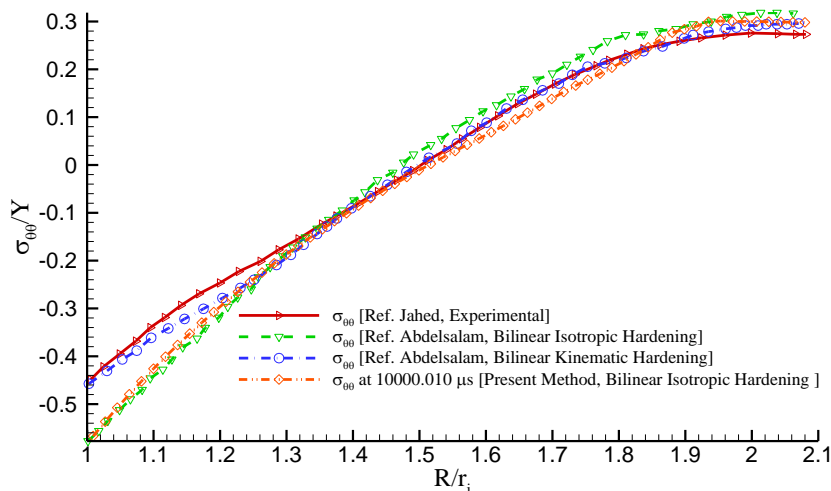
$$m^{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{(Y^0)^n}{\sqrt{2} J^{n+1}}} \quad (29)$$

در رابطه (۲۸) Y^0 تنش سیلان است که از معادله ترکیبی رفتار ماده بدست می‌آید. اگر $m^{n+1} \geq 1$ باشد، هر یک از تنش‌های انحرافی به عنوان مقدار اولیه برای مرحله بعدی، استفاده می‌شود. اگر $m^{n+1} < 1$ هر یک از تنش‌های انحرافی را در m^{n+1} ضرب کرده و برای مرحله بعدی به کار برده می‌شود، تغییر کرنش پلاستیک با تعریف m^{n+1} مطابق رابطه (۳۰) تعریف می‌شود.

$$(\Delta \varepsilon^p)^{n+1} = \left(\frac{1}{m^{n+1}} - 1 \right) \left(\frac{Y^0}{3\mu} \right)^n \quad (30)$$

۳-۷- شرایط مرزی و بارگذاری

برای مدل‌سازی هندسه با شرایط مرزی فشار زمانمند در پروسه اتوفریتاژ در مرز ناحیه‌ای غیرحقیقی در نظر گرفته می‌شود و در این حالت در مرکز المان فشار گذرا اعمال شده و در معادله حرکت برای آن نواحی مقادیر شرایط مرزی اعمال می‌شود. برای قیود مرزی کناری و گوشه‌ای در راستای محور r از قید مرزی معین در محور r و سطح آزاد استفاده می‌شود. جهت پایدارسازی و جلوگیری از نوسانات



شکل ۳- منحنی قیاس تنش پسماند حاصل از نتایج آزمایشگاهی، عددی و روش حل کنونی [۱۳ و ۱۴]

استاتیکی با این نرم افزار برای فشار 140 MPa نشان داده شده است. همانگونه که مشاهده می گردد، توزیع تنش کاملاً متفاوت بوده و تغییر شکل در این محدوده فشار کاملاً در محدوده الاستیک است.

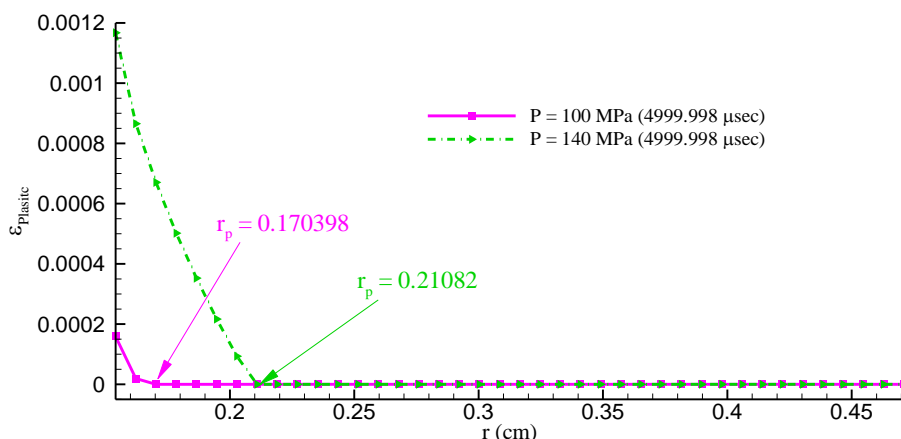
پس از مشاهده نتایج تحلیل استاتیکی همین مدلسازی به صورت دینامیکی با استفاده از نرم افزار آباکوس هم انجام شده است و نتایج با روش حل کنونی، مورد قیاس قرار گرفته است.

در شکل ۸ نتایج کرنش پلاستیک تحت شرایط بارگذاری گذرا نشان داده شده است و مشاهده می شود که در تحلیل دینامیکی ناحیه کرنش پلاستیک ایجاد می شود.

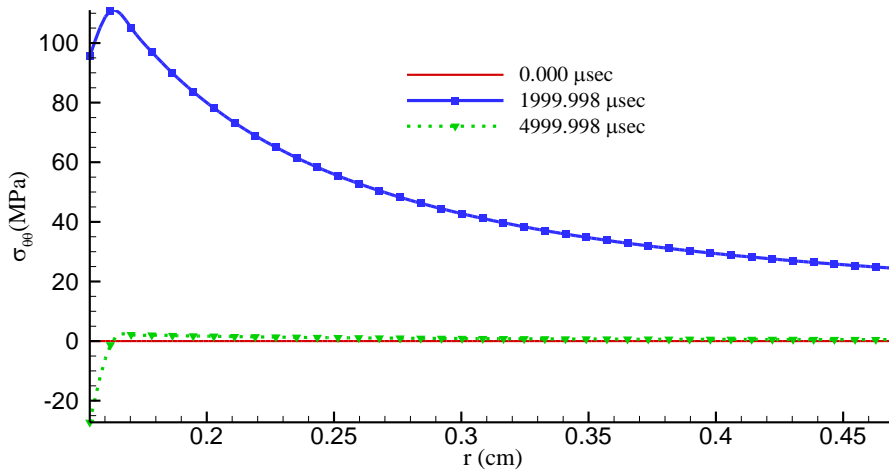
جهت نشان دادن نتایج دینامیکی در قیاس با نتایج استاتیکی در این مدل با اعمال فشار درونی از 100 MPa تا 140 MPa رفتار در حالت استاتیکی و دینامیکی بررسی می شود. پس از اعمال فشار درونی به صورت گذرا، کرنش پلاستیک ایجاد می گردد که برای لایه میانی در راستای شعاع نتایج کرنش مطابق شکل ۴ است.

در شکل های ۵ و ۶ توزیع تنش محیطی در راستای شعاع بر حسب زمان نشان داده شده است.

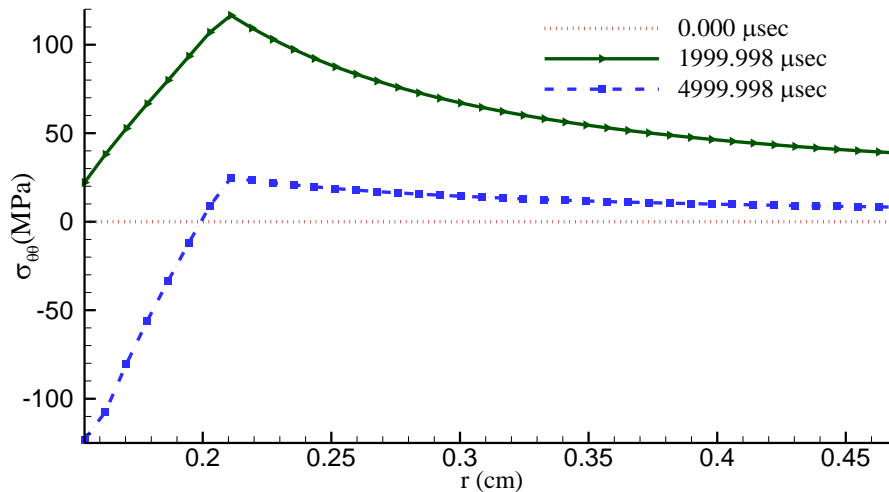
نتایج تحلیل با استفاده از روش اجزاء محدود و نرم افزار آباکوس در دو حالت استاتیکی و دینامیکی برای همین مساله انجام گرفته است [۱۷]. در شکل ۷ نتایج حاصل از تحلیل



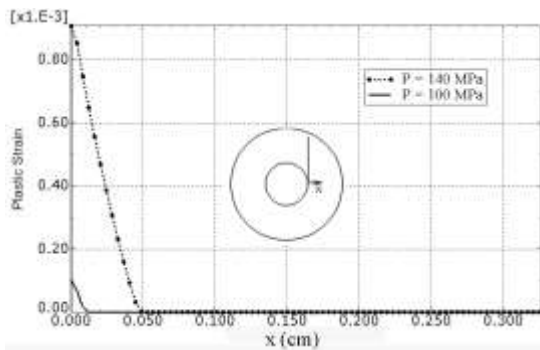
شکل ۴- محدوده پلاستیک ایجاد شده برای حالت بارگذاری گذرا به روش حل کنونی



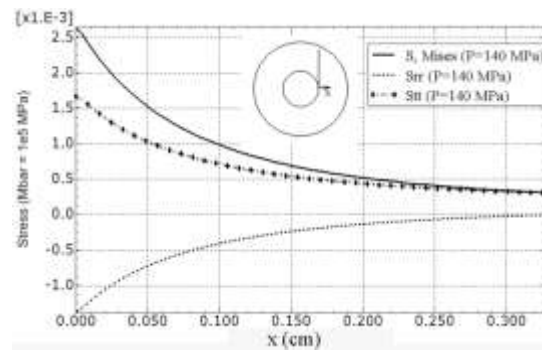
شکل ۵- توزیع تنش محیطی برای حالت بارگذاری گذرا P=100 MPa به روش حل کنونی



شکل ۶- توزیع تنش محیطی برای حالت بارگذاری گذرا P=140 MPa به روش حل کنونی



شکل ۸- کرنش پلاستیک حاصل از تحلیل دینامیکی با نرم افزار اجزاء محدود آباکوس



شکل ۷- توزیع تنش در حالت تحلیل استاتیکی برای نرم افزار اجزاء محدود آباکوس با P=140 MPa

ماده مدرج تابعی را به صورت ترکیبی از ماده فلزی NiCrAlY و ماده سرامیکی PSZ در نظر می‌گیریم. خواص مکانیکی عبارتست از:

$$\rho_m = 7800.00 \text{ kg/m}^3, E_m = 56.0 \text{ GPa}, \nu_m = 0.25,$$

$$Y_m = 106.0 \text{ MPa}, H_m = 12 \text{ GPa}, n = 1.0$$

$$\rho_c = 2370.00 \text{ kg/m}^3, E_c = 80, \nu_c = 0.25,$$

$$H_c = 80 \text{ GPa}, n = 1.0, q_r = 17.2 \text{ GPa}$$

۵-۱- سیلندر با مشخصات هندسی $r_i = 10 \text{ cm}$ $r_o = 20 \text{ cm}$

در این حالت برای مواد مدرج تابعی، از ترکیب لایه درونی فلزی و لایه بیرونی سرامیک استفاده می‌شود. تغییر فشار داخلی جهت اتوفریتاژ از 60 MPa تا 90 MPa در نظر گرفته می‌شود. فشار کاری 40 MPa اعمال می‌شود. این فشار کاری در حالت عادی در محدوده تغییر شکل الاستیک است. در شکل ۱۱ نحوه اعمال فشار اتوفریتاژ و فشار کاری بر حسب زمان نشان داده شده است.

با اعمال بارگذاری و باربرداری به دلیل ایجاد ناحیه درونی پلاستیک تنش پسماندی ایجاد می‌شود که پس از اعمال فشار کاری توزیع تنش، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در شکل ۱۲ و شکل ۱۳، توزیع کرنش پلاستیک در راستای ضخامت پس از اتمام پروسه اتوفریتاژ بر حسب پارامترهای ماده مدرج تابعی و فشار متفاوت نشان داده شده است.

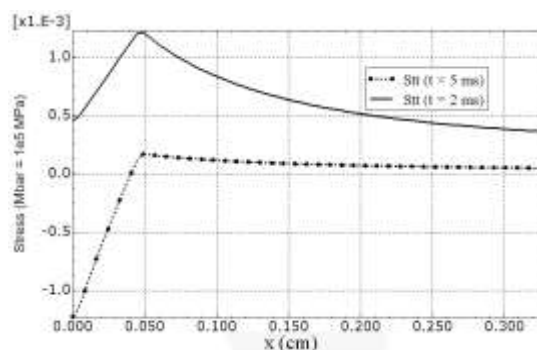
تنش محیطی در زمان اعمال فشار اتوفریتاژ برای پارامترهای متفاوت مواد مدرج تابعی، در شکل ۱۴ ارائه شده است.

توضیح اینکه برای تعیین موقعیت در راستای شعاعی بایستی شعاع داخلی به اعداد محور افقی اضافه گردد. در این حالت شعاعی که در آن کرنش پلاستیک برابر صفر می‌شود برابر است با

$$r_p (P = 100) = 0.15 + 0.0202989 = 0.1702989 \text{ cm}$$

$$r_p (P = 140) = 0.15 + 0.061023 = 0.211023 \text{ cm}$$

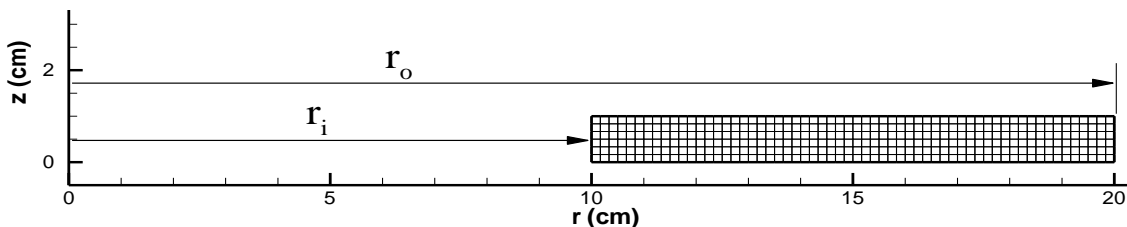
در شکل ۹ توزیع تنش با حل دینامیکی در نرم‌افزار اجزاء محدود ارائه شده است.



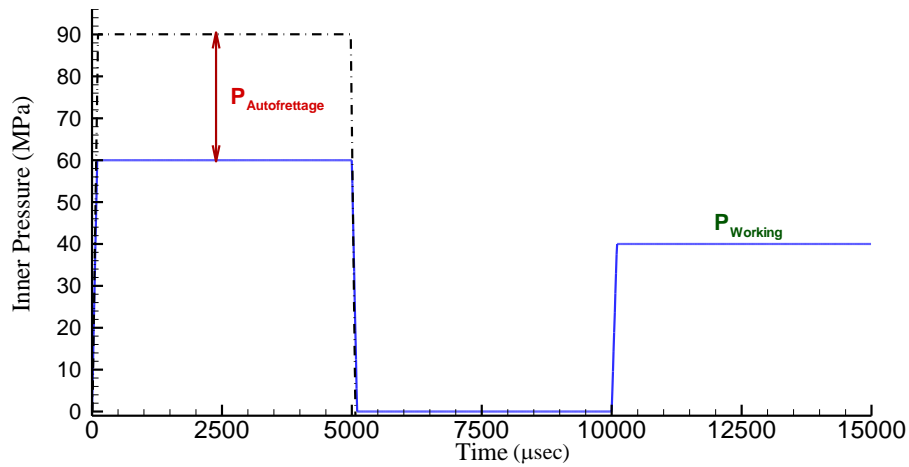
شکل ۹- توزیع تنش در حالت $P=140 \text{ MPa}$ و گذرا با نرم‌افزار آباکوس

۵- نتایج تحلیل دینامیکی اتوفریتاژ در سیلندر ساخته شده از مواد مدرج تابعی

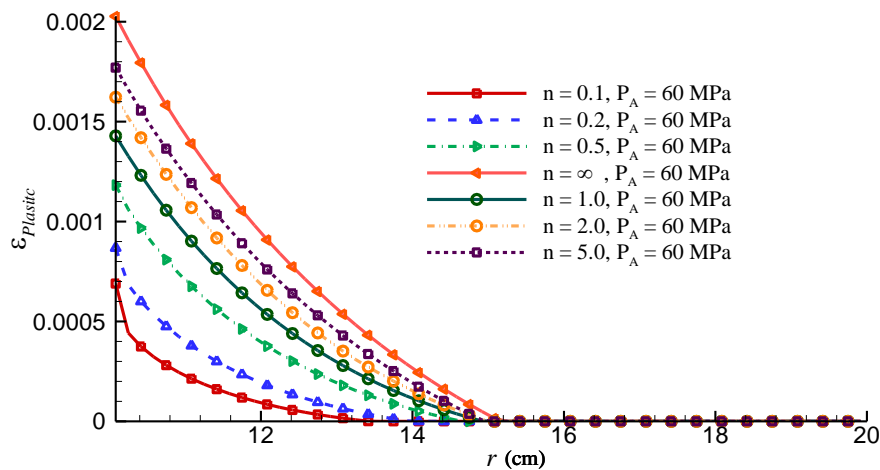
سیلندر استوانه‌ای با تقارن محوری حول محور z مطابق با شبکه‌بندی شکل ۱۰ در نظر می‌گیریم. برای بررسی اثر هندسه واقعی دو حالت در نظر گرفته می‌شود.



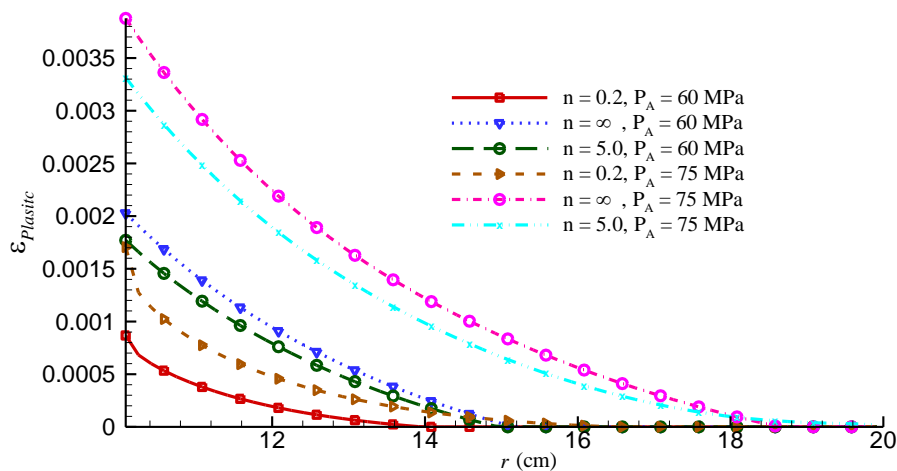
شکل ۱۰- هندسه بندی شده برای تحلیل اتوفریتاژ



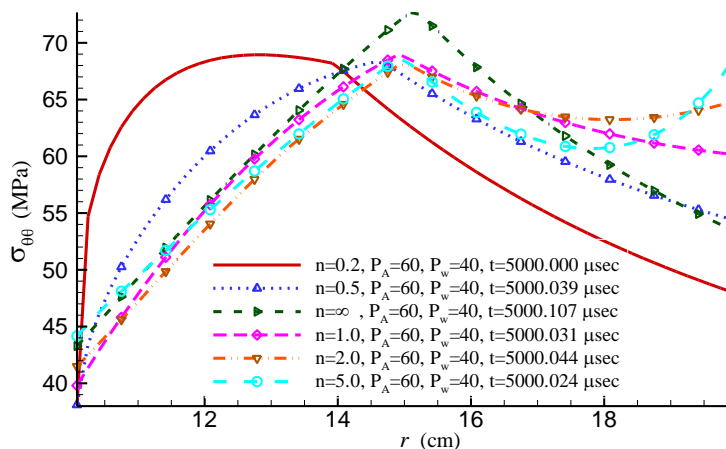
شکل ۱۱- نحوه اعمال فشار اتوفریتاژ و فشار کاری



شکل ۱۲- توزیع کرنش پلاستیک برای مواد مدرج تابعی و فشار یکسان



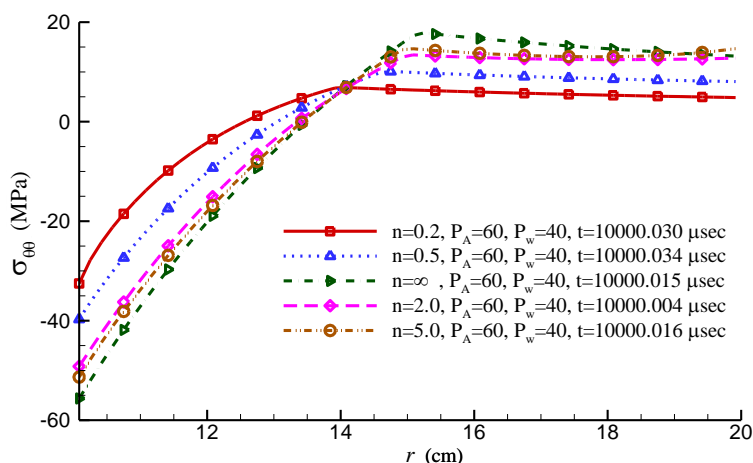
شکل ۱۳- توزیع کرنش پلاستیک برای مواد مدرج تابعی و فشار متفاوت



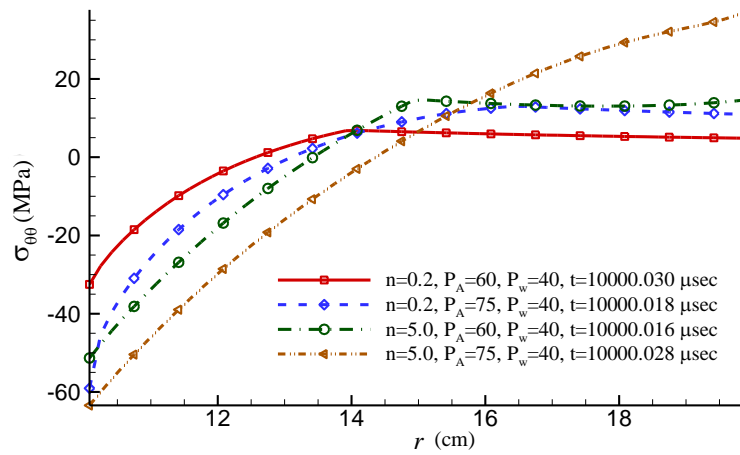
شکل ۱۴- توزیع تنش محیطی در زمان 5 ms برای ضرایب متفاوت مدرج تابعی

داد. در شکل ۱۷ توزیع تنش پس از اتوفریتاژ و اعمال فشار کاری نشان داده شده است. توزیع تنش فون میسر در زمان اعمال فشار اتوفریتاژ با در نظر گرفتن کار سختی برای مواد مدرج تابعی، در شکل ۱۸ ارائه شده است. در صورتی که فشار اتوفریتاژ تغییر کند، توزیع تنش فون میسر متفاوت بوده و به صورت نمودار شکل ۱۹ خواهد بود. در حالتی که فشار کاری پس از پروسه اتوفریتاژ اعمال گردد، توزیع تنش فون میسر براساس پارامترهای ماده مدرج تابعی مطابق شکل ۲۰ خواهد بود.

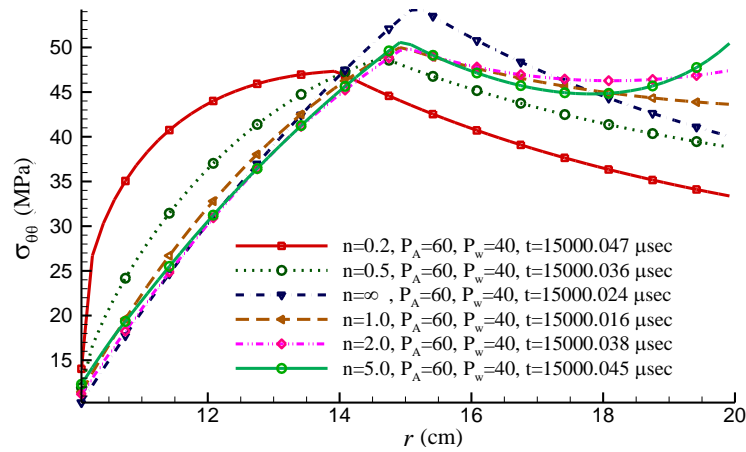
در شکل ۱۵ تنش پسماند ناشی از اتوفریتاژ در زمان 10 ms نشان داده شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود، توزیع تنش پسماند در ناحیه درونی و بیرونی برای ضرایب مختلف متفاوت است. در صورتی که فشار اتوفریتاژ تغییر کند، توزیع تنش پسماند هم دچار تغییر می‌شود که در شکل ۱۶ این تغییرات ارائه شده است. پس از اتوفریتاژ فشار کاری 40 MPa اعمال می‌شود که در اثر تنش پسماند موجود توزیع تنش محیطی کاملاً متفاوت بوده و در نتیجه باعث تغییر در تنش معادل فون میسر شده که در مجموع ظرفیت باربری را افزایش خواهد



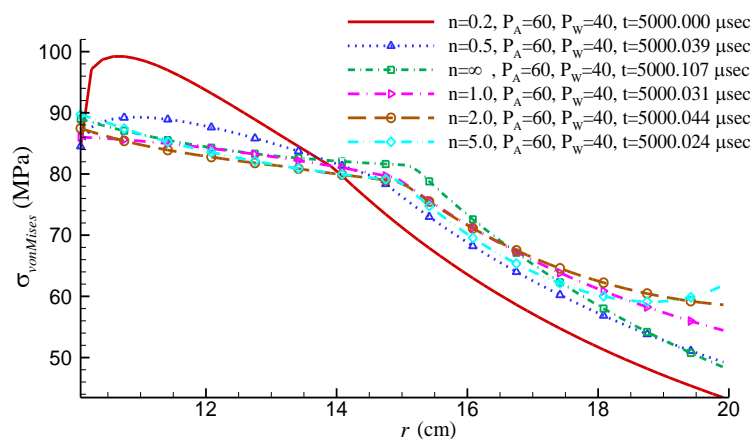
شکل ۱۵- توزیع تنش محیطی پسماند در زمان 10 ms



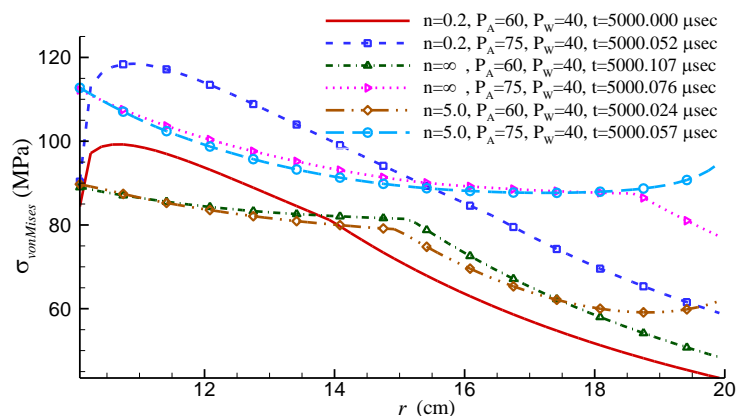
شکل ۱۶- توزیع تنش محیطی پسماند با تغییر فشار اتوفریتاژ



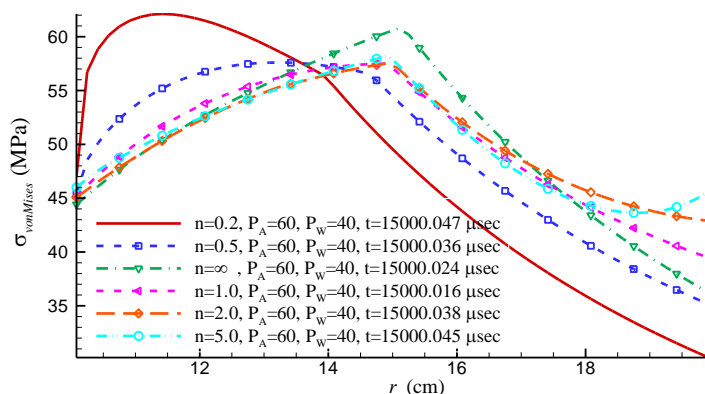
شکل ۱۷- توزیع تنش حاصل از فشار کاری پس از اتوفریتاژ



شکل ۱۸- توزیع تنش فون میسر در پروسه اتوفریتاژ با فشار یکسان



شکل ۱۹- توزیع تنش فون میسز در پروسه اتوفریتاژ با فشار متفاوت



شکل ۲۰- توزیع تنش فون میسز در هنگام اعمال فشار کاری در پروسه اتوفریتاژ

نشان داده شده است. در شکل ۲۵ و شکل ۲۶، تنش محیطی پسماند در شرایط مختلف مشخصات مواد مدرج تابعی در راستای شعاع نشان داده شده است.

۶- نتیجه گیری

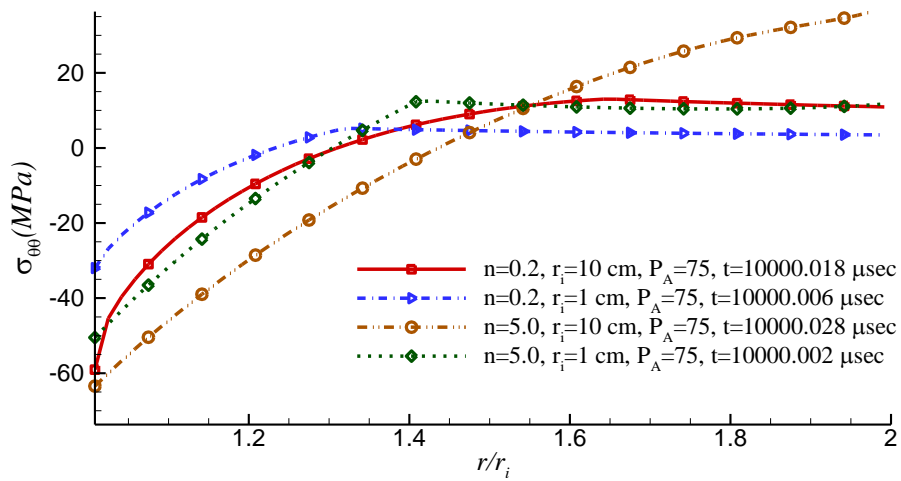
اتوفریتاژ در سیلندرها باعث کاهش فشار محیطی در نواحی درونی سیلندر می‌شود. در مواد مدرج تابعی همانگونه که مشاهده شد، براساس ضریب توزیع و نحوه ترکیب، محدوده کرنش پلاستیک و توزیع تنش‌ها در راستای شعاع متفاوت است. این نتایج در تحلیل استاتیکی و دینامیکی نیز، تفاوت‌هایی دارد که علت آن تغییر ضریب امپدانس اکوستیکی و تاثیر آن در برهم کنش امواج تنش است. در نتیجه برای یک شرایط بارگذاری می‌توان ترکیبی از مواد

۵-۲ سیلندر با مشخصات هندسی $r_i = 1 \text{ cm}$ و $r_o = 2 \text{ cm}$

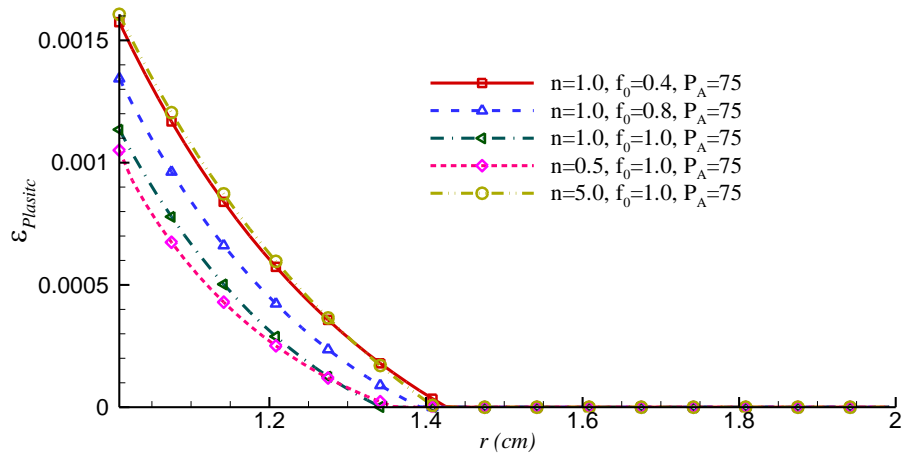
جهت بررسی اثر هندسه، شعاع داخلی و خارجی برای این حالت، یک دهم حالت قبل در نظر گرفته می‌شود. تفاوت تنش پسماند در حالت اول و دوم (پس از تغییر اندازه واقعی شعاع درونی و ثابت نگهداشتن نسبت شعاع خارجی به داخلی) با بی‌بعد کردن شعاع در شکل ۲۱ نشان داده شده است.

در صورتیکه ضرایب توزیع f_0 برای ماده مدرج تابعی تغییر کند، محدوده شعاع پلاستیک نیز تغییر خواهد کرد که این تغییرات در شکل ۲۲ نشان داده شده است.

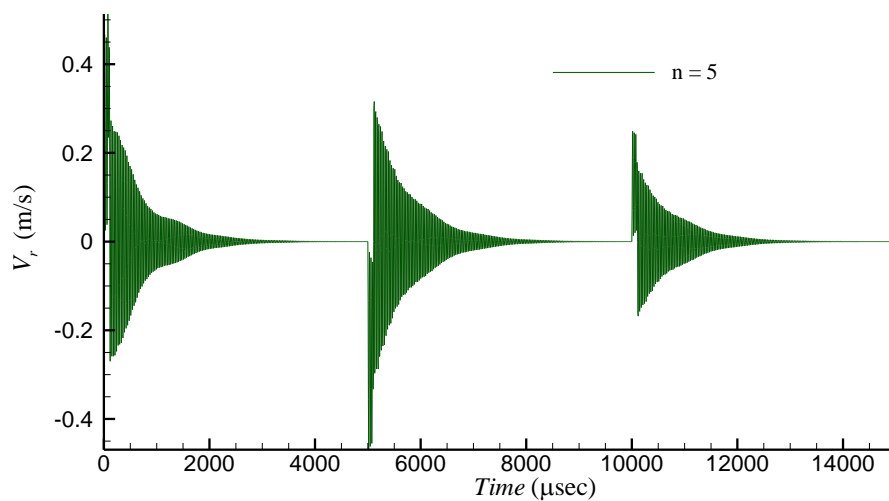
تغییرات سرعت ذره برای شعاع درونی و ماده مدرج تابعی با $n=5$ در پروسه اتوفریتاژ و باربرداری و اعمال فشار کاری در شکل ۲۳ و ناحیه بزرگنمایی شده در شکل ۲۴



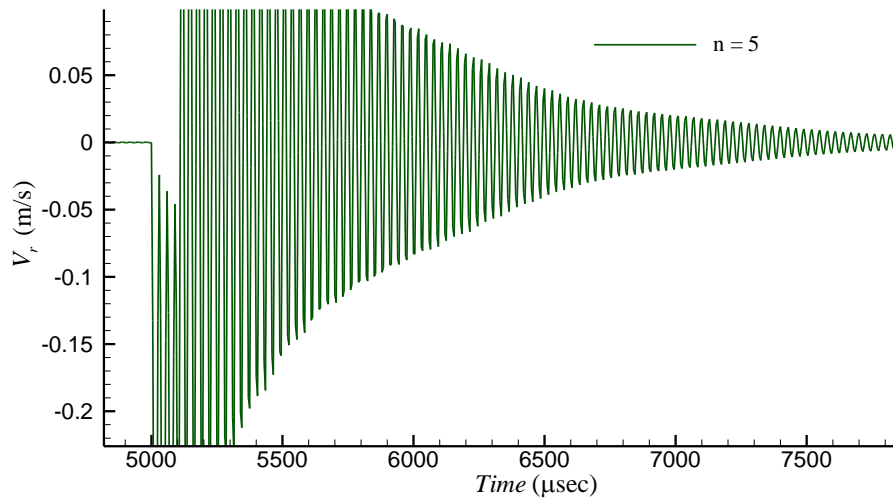
شکل ۲۱- قیاس اثر هندسه واقعی در توزیع تنش پسماند



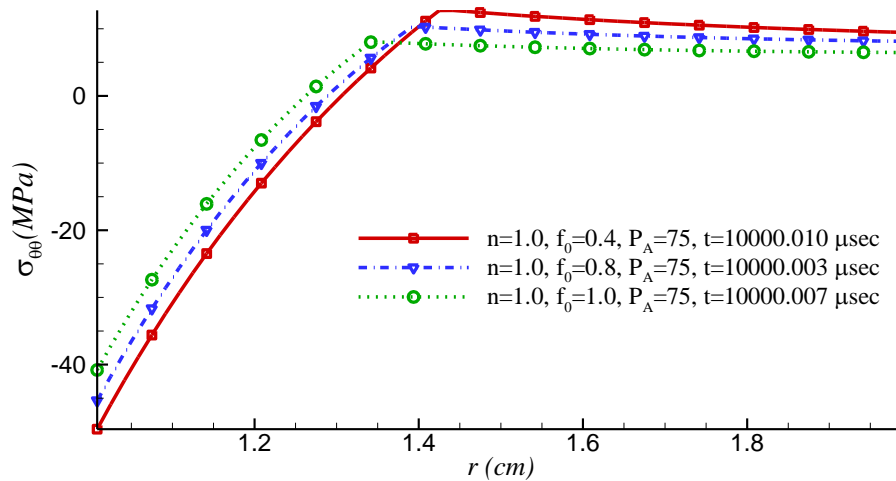
شکل ۲۲- تغییر محدوده کرنش پلاستیک براساس ضریب توزیع



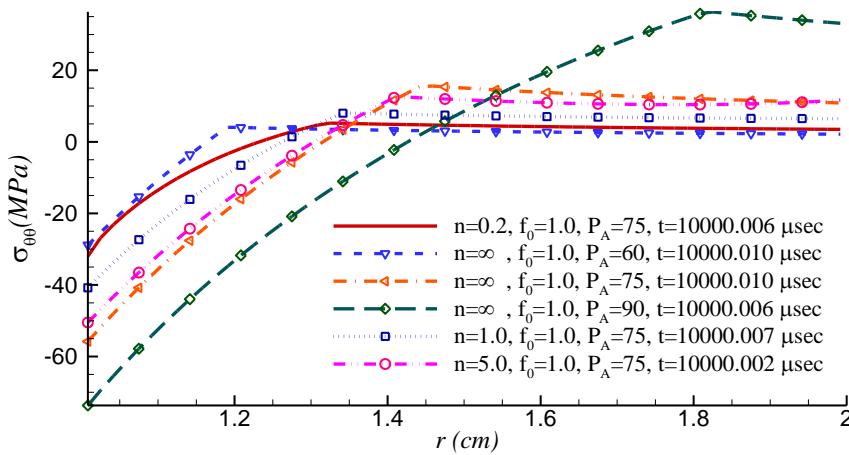
شکل ۲۳- سرعت ذره برای شعاع درونی و n=5



شکل ۲۴- بزرگنمایی سرعت ذره در شکل ۲۳



شکل ۲۵- توزیع تنش محیطی پسماند برای ضریب توزیع متفاوت



شکل ۲۶- توزیع تنش محیطی پسماند برای فشار اتوفرنیاز متفاوت

- [7] Franklin GJ, Morrison JLM (1960) Autofrettage of cylinders: Prediction of pressure, external expansion curves and calculation of residual stresses. *Proc Inst Mech Eng* 174: 947-974.
- [8] Chen PCT (1986) Stress and deformation analysis of autofrettaged high pressure vessels. ASME special publication PVP. ASME United Engineering Center, New York.
- [9] Stacey A, Webster GA (1988) Determination of residual stress distributions in autofrettaged tubing. *Int J Pres Ves Pip* 31: 205-220.
- [10] Parker AP, Underwood JH (1998) Influence of the bauschinger effect on residual stress and fatigue lifetimes in autofrettaged thick-walled cylinders. *Am Soc Test Mater* 29: ASTM STP 1321.
- [11] Livieri P, Lazzarin P (2002) Autofrettaged cylindrical vessels and bauschinger effect: an analytical frame for evaluating residual stress distributions. *J Press Vess-T ASME* 124: 38-45.
- [12] Bayat Y, Ekhteraei Toussi H (2015) Elastoplastic torsion of hollow FGM circular shaft. *Journal of Computational and Applied Research in Mechanical Engineering* 4(2): 165-180.
- [13] Moulick M, Kumar S (2015) Comparative stress analysis of elliptical and cylindrical pressure vessel with and without Autofrettage consideration using finite element method. *Int J Adv Eng Res Stud E-ISSN2249-8974*.
- [14] Kalali AT, Hadidi-Moud S (2013) A semi-analytical approach to elastic-plastic stress analysis of FGM pressure vessels. *Journal of Solid Mechanics* 5: 163-173.
- [15] Wilkins ML (1980) Use of artificial viscosity in multi-dimensional fluid dynamic calculations. *Journal of Computational Physics*. Vol. 36, pp. 281-303, 1980.
- [16] Caramana EJ, Shashko MJ (1998) Elimination of artificial grid distortion and hourglass-type motion by means of lagrangian subzonal masses and pressure. *J Comput Phys* 142: 142-521.
- [17] ABAQUS 6.14 user manual, Dassault Systemes, 2014.
- مدرج تابعی را انتخاب کرد که تحت شرایط کاری دارای بیشترین تنش پسماند محیطی در شعاع درونی و کمترین تنش کششی در شعاع بیرونی سیلندر باشد.
- نتایج دینامیکی نشان دهنده این موضوع است که هرچه اندازه هندسی جسم بزرگتر شود، به دلیل زمان طولانی‌تر برگشت موج تنش و اثر برهم کنش تنش‌ها، رفتار جسم به سمت شرایط استاتیکی نزدیکتر می‌شود؛ اما در حالت کلی کلیه پارامترهای دینامیکی از جمله زمان بارگذاری و خواص مواد همچون اندازه واقعی هندسه در پاسخ‌ها نقش خواهند داشت؛ بنابراین چنانچه نتایج بخواهد در قالب آنالیز ابعادی ارائه شود، بایستی نقش پارامترهای دینامیکی و خواص آکوستیکی در تنظیم پارامترهای بدون بعد لحاظ شود.

۷- مراجع

- [1] Suresh S, Mortensen A (1998) *Functionally Graded Materials*. London. UK IOM Communication Limited.
- [2] Bhatnagar RM (2013) Modeling, validation and design of autofrettage and compound cylinder. *Eur J Mech A-Solid* 39: 17-25.
- [3] Trieb F, Poelzl J (2005) Autofrettage – basic information and practical application on components for waterjet cutting. *WJTA American Waterjet Conference*. Houston, Texas, August 21-23.
- [4] Abdelsalam OMR Y (2012) Analysis and optimization of autofrettaged and shrink-fitted compound cylinders under thermo-mechanical loads. PhD Thesis. Concordia University, Montreal, Quebec Canada.
- [5] Grujicic M, Zhang Y (1998) Determination of effective elastic properties of functionally graded materials using voroni cell finite element method. *Mater Sci Eng* 251: 64-76.
- [6] Aboudi J, Pindera M, Arnold SM (1999) Higher-order theory for functionally graded materials. *Compos Part B-Eng* 30: 777-832.