



تحلیل تنش ورق‌های دایره‌ای با تغییرات ضخامت بصورت نامتقارن عرضی

محمد ملاعلی پور^{۱*} و محمد شرعیات^۲

^۱ استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه مازندران، بابلسر

^۲ استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

مقاله مستقل؛ تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۸/۱۸؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۱۹/۲۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۱/۰۵

چکیده

در این مطالعه تحلیل تنش ورق دایره‌ای با ضخامت متغیر تحت شرایط مرزی گیردار و ساده ارائه شده است. در اکثر مطالعاتی که تاکنون روی ورق‌های با ضخامت متغیر انجام شده است، ضخامت ورق به نحوی تغییر می‌کند که ورق نسبت به لایه میانی متقارن باشد؛ اما در این مقاله برای اولین بار با در نظر گرفتن دو تابع مستقل برای سطوح رویین و زیرین، ورق‌های ضخامت متغیر در حالت عدم تقارن عرضی نیز قابل تحلیل می‌باشند. با استفاده از ترکیب تئوری برشی مرتبه اول و روش الاستیسیته سه بعدی تمامی مولفه‌های تنش‌های برشی و عمودی از جمله، تنش‌های قائم و برشی عرضی استخراج شده‌اند. جهت بررسی دقت نتایج حاصل از تحلیل حاضر، نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از نرم‌افزار آباکوس مقایسه گردیده است که بر اساس الاستیسیته سه بعدی و روش اجزای محدود استخراج شده‌اند. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که حل ارائه شده از دقت بسیار بالایی برخوردار بوده و روند ارائه شده جهت تحلیل تنش ورق‌های دایره‌ای، روشی بسیار موثر است. بر اساس روند ارائه شده در این مطالعه، نمودارهای سه بعدی تنش‌ها بر حسب شعاع و ضخامت براحتی قابل استخراج است که این امر موجب می‌شود، مولفه‌های تنش به صورت موثرتری بررسی شوند.

کلمات کلیدی: تحلیل تنش؛ ورق دایره‌ای؛ ضخامت متغیر؛ حل تحلیلی.

Stress Analysis of Circular Plates with Variable Thickness as Transverse Asymmetric

M.Molla-alipour^{1,*}, M. Shariyat²

¹ Assist. Prof., Mech. Eng., University of Mazandaran, babolsar, Iran.

² Prof., Mech. Eng., K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

Abstract

In this study, stress analysis of circular plate with variable thickness with clamped and simply-supported edge are presented. In the most previous research on the variable thickness plates, midplane symmetric plates were analyzed but as a first time in this study, by using two independent functions for top and bottom surfaces, transverse asymmetric plates can be analyzed. By using the combination of first order shear deformation plate theory and 3D elasticity method the shear and normal stress components such as transverse shear and normal stresses are extracted. For examination of the accuracy of the obtained results based on the presented analysis, the obtained results are compared with those obtained by 3D elasticity of ABAQUS software based on the finite element method. The comparisons show that the presented solution has very good accuracy and presented procedure for stress analysis of circular plates are very effective. Based on the presented procedure in this study, 3D figures of stresses in the radial and thickness directions can be easily extracted and the stress components can be investigated more effectively.

Keywords: Stress Analysis; Circular Plate; Variable Thickness; Analytical Solution.

۱- مقدمه

ورق‌های دایره‌ای یکی از سازه‌های پرکاربرد در صنایع مختلف می‌باشند. به‌عنوان مثال می‌توان به کاربرد آنها در مخازن، سازه‌های شناور، دیسک‌های دوار و سازه‌های میکروالکترومکانیکی اشاره کرد؛ همچنین این ورق‌ها بطور گسترده در صنایع مختلف از جمله، صنایع هوایی و دریایی مورد استفاده قرار می‌گیرد. با توجه به کاربردهای مختلف ورق‌های دایره‌ای، نیاز است تا تحلیل‌های مختلفی روی آنها صورت گیرد و روش‌های مختلف تحلیل با قابلیت‌های متنوع و وسیع توسعه داده شوند تا بتوانند به بررسی کامل ورق‌ها تحت شرایط مختلف بپردازند. در ادامه به برخی از مطالعات انجام شده در زمینه تحلیل استاتیکی ورق دایره‌ای اشاره شده است.

با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی و حل معادلات آن با روش DQM^۱، نای و ژانگ [۱] خمش ورق‌های دایره‌ای با تغییرات نمایی خواص در دو راستای ضخامت و شعاع را بررسی کردند. صحرایی و سعیدی [۲]، خمش متقارن ورق-های دایره‌ای را براساس تئوری مرتبه چهارم ورق و با کمک تئوری کلاسیک ورق^۲ بررسی کردند. سعیدی و همکاران [۳]، خمش و کمانش ورق دایره‌ای متقارن را مورد بررسی قرار دادند و پاسخ‌ها را به‌صورت تحلیلی استخراج کردند. مشات و زنگور [۴]، خمش قطاعی از ورق دایره‌ای نازک را با استفاده از تئوری کلاسیک ورق تحلیل کردند. محققان متعددی از تئوری برشی مرتبه اول^۳ برای تحلیل ورق‌های دایره‌ای استفاده کردند و روش‌های حل مختلفی برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم ارائه و پیشنهاد گردید. در این راستا، ردی و همکاران [۵]، خمش ورق دایره‌ای متقارن را با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول بررسی کردند. بر اساس تئوری برشی مرتبه اول، با استفاده از روش سری توانی^۴ علی‌پور و شرعیات، به تحلیل استاتیکی [۶] ورق دایره‌ای با ضخامت ثابت پرداختند. ملاعلی‌پور [۷] با استفاده از یک حل دقیق فرم بسته، ورق‌های دایره‌ای و حلقوی با تکیه‌گاه الاستیک را تحلیل کرد. ملاعلی‌پور با استفاده از یک حل دقیق فرم بسته

به تحلیل استاتیکی [۸] و بر اساس یک حل سری به تحلیل دینامیکی [۹] ورق‌های دایره‌ای با تغییرات پله‌ای ضخامت پرداخت. گلمکانی و یوسفیان [۱۰]، با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول به تحلیل غیر خطی خمش متقارن محوری صفحات ساندویچی دایره‌ای تحت بار مکانیکی-حرارتی پرداختند. خورشیدی و عنصری نژاد [۱۱]، بر اساس تئوری برشی مرتبه اول، ارتعاش آزاد قطاع کوپل شده با لایه پیزوالکتریک را مورد بررسی قرار دادند. ویوو و ولو [۱۲]، به تحلیل خمش و تنش ورق حلقوی متقارن با تغییرات خطی ضخامت در راستای شعاعی پرداختند. علی‌پور [۱۳ و ۱۴] روند تحلیلی جدیدی برای بررسی تنش‌های ورق‌های ساندویچی دایره‌ای و حلقوی ارائه کرد.

در این مقاله تحلیل تنش ورق‌های دایره‌ای متقارن با تغییرات شعاعی ضخامت بر اساس تئوری برشی مرتبه اول و استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی، مورد بررسی قرار گرفته است. استفاده از تئوری برشی مرتبه اول موجب می‌شود تا نتایجی با دقت مناسب و هزینه محاسباتی نسبتاً پایین استخراج گردد؛ اما از سوی دیگر، این تئوری نتایج مناسبی برای تنش‌های عرضی بدست نمی‌دهد که لازم است، این تنش‌ها توسط تئوری الاستیسیته اصلاح گردند. در واقع با ترکیب این دو تئوری، نتایجی با دقت مناسب و هزینه محاسباتی کم قابل دست‌یابی است. در این تحلیل، ضخامت ورق بنحوی قابل تغییر است که هر یک از سطوح روئین و زیرین به‌صورت مستقل توسط توابع جداگانه قابل تعریف باشند؛ بنابراین ورق‌ها با شکل‌های هندسی متنوع قابل تحلیل می‌باشند. جهت حل معادلات دیفرانسیل حاکم، از یک حل تحلیلی مبتنی بر سری‌های توانی استفاده شده است. با استفاده از اصلاح مولفه‌های تنش عرضی بدست آمده توسط تئوری الاستیسیته سه بعدی، همه مولفه‌های برشی و عمودی تنش از جمله، تنش‌های برشی و عمودی عرضی با دقت بسیار مناسب محاسبه شده است؛ همچنین تنش-فن-میسز ورق برای حالات مختلف هندسی ارائه گردیده است. با توجه به اینکه تاکنون نتایجی برای تحلیل ورق‌های دایره‌ای با تغییرات ضخامت غیرمتقارن عرضی ارائه نشده است، نتایج ارائه شده توسط روند تحلیل پیشنهادی با نتایج حاصل از نرم‌افزار آباکوس مقایسه گردیده است که براساس تئوری

¹ Differential Quadrature Method

² Classical Plate Theory

³ First Order Shear Deformation Theory

⁴ Power Series Method

بر اساس تئوری برشی مرتبه اول توابع جابجایی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$u(r, z, t) = u_0(r, t) + z\psi_r(r, t)$$

$$w(r, z, t) = w_0(r, t) \quad (2)$$

u و w جابجایی‌های درون صفحه‌ای و عرضی ورق می‌باشند. u_0 جابجایی‌های لایه میانی و ψ_r چرخش محور عمود بر صفحه می‌باشند. در تغییر شکل‌های بسیار کوچک، مولفه‌های کرنش به صورت رابطه (۳) خواهند بود.

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (3)$$

مولفه‌های تنش در حالت تنش صفحه‌ای، به صورت روابط (۴)، توسط کرنش و جابجایی قابل بیان می‌باشند.

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r)$$

$$\tau_{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{rz} \quad (4)$$

معادلات حرکت با استفاده از اصل کمینه سازی انرژی قابل استخراج خواهند بود.

$$\int_t (\delta K - \delta U) dt = 0 \quad (5)$$

در رابطه (۵) انرژی داخلی (کرنشی) و V کار نیروهای خارجی می‌باشند که به صورت روابط (۶-۷) قابل بیان هستند.

$$\delta U = \int_V \{\sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \tau_{rz} \delta \gamma_{rz}\} dV \quad (6)$$

$$\delta V = \int_A [q \delta w + T(\delta u_0 + h_r \delta \psi_r)] dA \quad (7)$$

q نیروی عرضی و T نیروی افقی بر واحد سطح می‌باشند که بر سطح رویین ورق اعمال می‌شوند.

با استفاده از روابط (۳)، (۴)، (۶) و (۷)، مجموعه معادلات دیفرانسیل حاکم بر اساس پارامترهای جابجایی توسط رابطه (۵) استخراج خواهند شد:

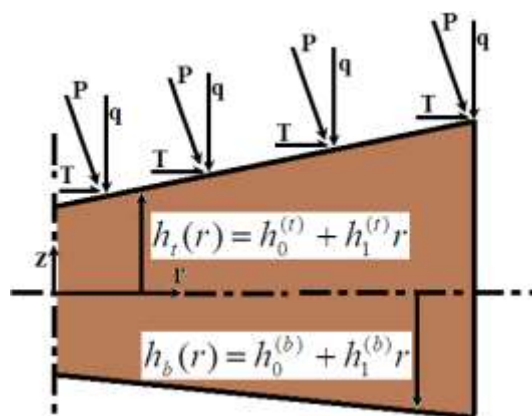
الاستیسیته سه‌بعدی استخراج شده‌اند که این مقایسه نشان از دقت بسیار بالای تحلیل ارائه شده دارد. بر اساس روند تحلیل ارائه شده، تنش‌های مختلف می‌تواند به صورت سه-بعدی در تمام نقاط ورق رسم گردد که به سادگی می‌توان به تحلیل مقاومت تنشی ورق در مقابل نیروهای وارده پرداخت؛ همچنین نتایج نشان داد که در ورق با شرایط مرزی گیردار با افزایش ضخامت در تکیه‌گاه و نواحی مرکز ورق، تنش بیشینه فن-میسز در ورق کاهش می‌یابد؛ همچنین در ورق با شرایط مرزی ساده با افزایش ضخامت مرکز ورق، می‌توان مقدار بیشینه تنش فن-میسز را کاهش داد.

۲- استخراج معادلات حاکم

در این مطالعه، تحلیل استاتیکی ورق دایره‌ای با تغییرات خطی ضخامت، مورد بررسی قرار گرفته است؛ به نحوی که هر یک از سطوح رویین و زیرین ورق مطابق شکل ۱ به صورت مستقل قابلیت تغییر شکل دارند. با توجه به اینکه دو رابطه مستقل برای منحنی‌های دو سطح در نظر گرفته شده است، این منحنی‌ها نسبت به هر سطح دلخواهی می‌توانند اندازه‌گیری شوند تا ورق مورد نظر حاصل شود. در واقع ضخامت ورق بین این دو منحنی خواهد بود.

$$h_t(r) = h_0^{(t)} + h_1^{(t)} r$$

$$h_b(r) = h_0^{(b)} + h_1^{(b)} r \quad (1)$$



شکل ۱- نمای جانبی از ورق دایره‌ای با تغییرات خطی دلخواه سطوح رویین و زیرین

۳- حل معادلات دیفرانسیل حاکم

در این قسمت با حل معادلات دیفرانسیل حاکم با استفاده از سری‌های توانی، توابع جابجایی بدست خواهند آمد. در این روش، هر یک از توابع مجهول به صورت یک سری توانی در نظر گرفته می‌شوند. سپس با جایگذاری سری‌ها در مجموعه معادلات دیفرانسیل حاکم و شرایط مرزی، ضرایب مجهول این سری‌ها و در نتیجه توابع جابجایی بدست خواهند آمد. سری توانی مورد استفاده در این تحلیل، به صورت رابطه (۱۴) خواهد بود.

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ \psi_r \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_k \\ \Psi_k \\ W_k \end{Bmatrix} r^k \quad (14)$$

در روابط فوق، k شماره‌دهنده مربوط به ضرایب سری هندسی سری است. تعداد جملات مورد استفاده از همگرایی پاسخ-های بدست آمده تعیین خواهد شد. با جایگذاری توابع جابجایی بر اساس سری در مجموعه معادلات حاکم (۸) تا (۱۰) و اعمال ساده‌سازی، معادلات حاکم را می‌توان به صورت زیر با ضرایبی از توان‌های مختلف r بیان کرد.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^N \left\{ k(k+2) (\bar{A}a_1 U_{k+1} + \bar{B}b_1 \Psi_{k+1}) + \right. \\ & (k+1)(k+3) (\bar{A}a_0 U_{k+2} + \bar{B}b_0 \Psi_{k+2}) + \\ & (k^2 + 2k + 2\nu - 1) \bar{B}b_2 \Psi_k + T\delta(k) + \\ & \left. (k+1+\nu) (\bar{A}a_1 U_{k+1} + \bar{B}b_1 \Psi_{k+1}) \right\} r^k = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^N \left\{ (k+1+\nu) (\bar{B}b_1 U_{k+1} + \bar{D}d_1 \Psi_{k+1}) \right. \\ & + (k^2 + 2k + 2\nu - 1) (\bar{D}d_2 \Psi_k + \bar{B}b_2 U_k) \\ & + [k(k+1) + 3(\nu-1)] \bar{D}d_3 \Psi_{k-1} \\ & + (k+1)(k+3) (\bar{B}b_0 U_{k+2} + \bar{D}d_0 \Psi_{k+2}) + \\ & k(k+2) (\bar{B}b_1 U_{k+1} + \bar{D}d_1 \Psi_{k+1}) + \\ & \left. - \frac{\kappa^2(1-\nu)}{2} \bar{A} [a_0 \Psi_k - a_1 \Psi_{k-1} - \right. \\ & \left. a_0(k+1)W_{k+1} - a_1 k W_k] + h_1 T \delta(k) \right\} r^k = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^N \left\{ \bar{A}a_0(k+2) [\Psi_{k+1} + (k+1)W_{k+2}] + \right. \\ & \bar{A}a_1(k+1) [\Psi_k + kW_{k+1}] + \\ & \left. a_1 \bar{A} [\Psi_k + (k+1)W_{k+1}] \right\} r^k = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \bar{A}(a_0 + a_1 r) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) u_0 + \\ & \bar{B}(b_0 + b_1 r + b_2 r^2) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) \psi_r \\ & + \bar{A}(a_1 + 2a_2 r) \left(\frac{\partial}{\partial r} + \nu \frac{1}{r} \right) u_0 + \\ & \bar{B}(b_1 + 2b_2 r) \left(\frac{\partial}{\partial r} + \nu \frac{1}{r} \right) \psi_r = -T \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \bar{B}(b_1 + 2b_2 r) \left(\frac{\partial}{\partial r} + \nu \frac{1}{r} \right) u_0 + \\ & \bar{B}(b_0 + b_1 r + b_2 r^2) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) u_0 \\ & \bar{D}(d_1 + 2d_2 r + 3d_3 r^2) \left(\frac{\partial}{\partial r} + \nu \frac{1}{r} \right) \psi_r - \\ & \frac{\kappa^2(1-\nu)}{2} \bar{A}(a_0 + a_1 r) \left(\psi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \\ & \bar{D}(d_0 + d_1 r + d_2 r^2 + d_3 r^3) \\ & \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) \psi_r = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1 r) \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) + \\ & \left(\frac{a_0}{r} + 2a_1 \right) \left(\psi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) = - \frac{2q}{\kappa^2(1-\nu)\bar{A}} \end{aligned} \quad (10)$$

که ثوابت a_i , b_i و d_i با توجه به چگونگی تغییرات ضخامت و براساس محاسبه انتگرال زیر تعیین می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \\ D \end{Bmatrix} = \int_{h_b(r)}^{h_t(r)} \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz$$

$$\begin{aligned} A &= \bar{A}(a_0 + a_1 r), \\ B &= \bar{B}(b_0 + b_1 r + b_2 r^2) \\ D &= \bar{D}(d_0 + d_1 r + d_2 r^2 + d_3 r^3) \end{aligned} \quad (11)$$

شرایط مرزی در شعاع خارجی به دو حالت ساده و گیردار قابل بررسی است:

• شرایط مرزی ساده

$$u|_{r=r_0} = M_r|_{r=r_0} = w|_{r=r_0} = 0 \quad (12)$$

• شرایط مرزی گیردار

$$u|_{r=r_0} = 0, \psi_r|_{r=r_0} = 0, w|_{r=r_0} = 0 \quad (13)$$

مقاله از تئوری الاستیسیته برای اصلاح تنش برشی عرضی و استخراج تنش قائم عرضی استفاده شده است.

در این قسمت توابع مربوط به تنش‌های برشی و قائم عرضی با استفاده از روابط الاستیسیته استخراج خواهند شد. در مختصات قطبی، روابط تعادل الاستیسیته در جهات شعاعی و عرضی بصورت زیر نوشته خواهند شد.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (22)$$

با جایگذاری تنش‌های درون صفحه‌ای از رابطه (۴) در رابطه (۲۱) خواهیم داشت:

$$\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) u_0 + \frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) \psi_r + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0, \quad (23)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه فوق در راستای ضخامت و اعمال مقدار تنش برشی روی سطح روئین ورق، تابع تنش برشی عرضی بدست خواهد آمد.

$$\tau_{rz} = F(z) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) u_0 +$$

$$L(z) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) \psi_r + T_t,$$

$$\left\{ \begin{matrix} F(z) \\ L(z) \end{matrix} \right\} = \int_z^h \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ z \end{matrix} \right\} dz \quad (24)$$

T_t مقدار تنش برشی روی سطح روئین است.

با جایگذاری تنش برشی عرضی بدست آمده از رابطه (۲۴) در رابطه تعادل (۲۲)، انتگرال‌گیری از رابطه حاصله و اعمال شرط تنش عمودی عرضی، توزیع تنش عمودی عرضی بدست خواهد آمد.

$$\sigma_z = \int_z^h \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[rF(z) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) u_0 +$$

$$rL(z) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) \psi_r + rT_t \right] dz + q_t$$

$$(25)$$

q_t تنش قائم عرضی روی سطح روئین است.

با استفاده از روابط (۱۵) تا (۱۷)، ثابت U_i ($i \geq 2$), Ψ_i ($i \geq 2$) و W_i ($i \geq 2$) بر اساس U_1, W_0 و Ψ_1 بدست خواهند آمد. سپس با جایگذاری در شرایط مرزی، سه معادله جهت حل مسئله مقدار ویژه استخراج خواهد شد.

• شرایط مرزی ساده

$$u|_{r=r_0} = \sum_{k=0}^N U_k r_0^k = 0$$

$$M_r|_{r=r_0} = \sum_{k=0}^N \left\{ \bar{B}(b_0 + b_1 r_0 + b_2 r_0^2) U_k + \bar{D}(d_0 + d_1 r_0 + d_2 r_0^2 + d_3 r_0^3) \Psi_k \right\} (k + \nu) r_0^{k-1} = 0$$

$$w|_{r=r_0} = \sum_{k=0}^N W_k r_0^k = 0, \quad (18)$$

• شرایط مرزی گیردار

$$u|_{r=r_0} = \sum_{k=0}^N U_k r_0^k = 0,$$

$$\psi_r|_{r=r_0} = \sum_{k=0}^N \Psi_k r_0^k = 0,$$

$$w|_{r=r_0} = \sum_{k=0}^N W_k r_0^k = 0 \quad (19)$$

r_0 شعاع ورق می‌باشد.

شرایط مرزی (۱۸) و (۱۹) به صورت رابطه (۲۰) بر اساس U_1, W_0 و Ψ_1 قابل بیان می‌باشند.

$$\begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \Psi_1 \\ W_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

با حل این سه معادله، ثابت U_1, W_0 و Ψ_1 نیز بدست خواهد آمد و در واقع سری هر یک از توابع جایجایی محاسبه شده است.

۴- استخراج تنش‌های عمودی و برشی عرضی

با توجه به اینکه تنش قائم عرضی توسط تئوری برشی مرتبه اول قابل محاسبه نبوده و تنش برشی عرضی به صورت مقداری ثابت در راستای ضخامت استخراج می‌شود، در این

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این قسمت نتایج حاصل از حل تحلیلی ارائه گردیده و در حالتی که ضخامت ورق تغییر کند، نتایج حاصل از حل تحلیلی با نتایج حاصل از نرم‌افزار آباکوس (ABAQUS) مقایسه شده است. مطابق شکل ۲، برای استخراج نتایج از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی در حالت متقارن محوری استفاده گردیده تا ضمن دستیابی به پاسخ‌های دقیق‌تر، همه مولفه‌های تنش موجود در ورق قابل محاسبه باشد. در مدلسازی انجام شده، پس از بررسی همگرایی پاسخ و استقلال نتایج از تعداد المان‌ها، از ۱۰۰۰ المان ۸ گرهی (CAX8R) استفاده گردیده است.

بر اساس بررسی‌های انجام شده مشخص شد که با انتخاب ۴۰ تعداد جمله از سری‌ها، پاسخ‌ها همگرا خواهند گردید؛ ولی به علت زمان بسیار کوتاه محاسبات و اطمینان از همگرایی پاسخ‌ها در تحلیل‌های گوناگون، تعداد ۲۰۰ جمله برای هر سری در نظر گرفته شده است. در این مقاله شعاع ورق، ۱ در نظر گرفته شده و ضخامت ورق نسبت آن سنجیده می‌شود.

با توجه به اینکه در سطوح آزاد مورب، تنش برشی عرضی صفر نخواهد بود، تنش برشی عرضی باید با استفاده از

روابط تعادل استخراج شود. در این حالت بر اساس شکل ۳، تنش برشی عرضی با استفاده از تعادل نیرویی استخراج می‌شود.

برای اعمال فشار مورد نظر بطوری که بر سطح عمود باشد، می‌توان از نسبت‌های مناسب مولفه‌های افقی T و عمودی q استفاده کرد. با نوشتن روابط تعادل در جهت شعاعی، تنش برشی عرضی در سطح آزاد استخراج خواهد شد.

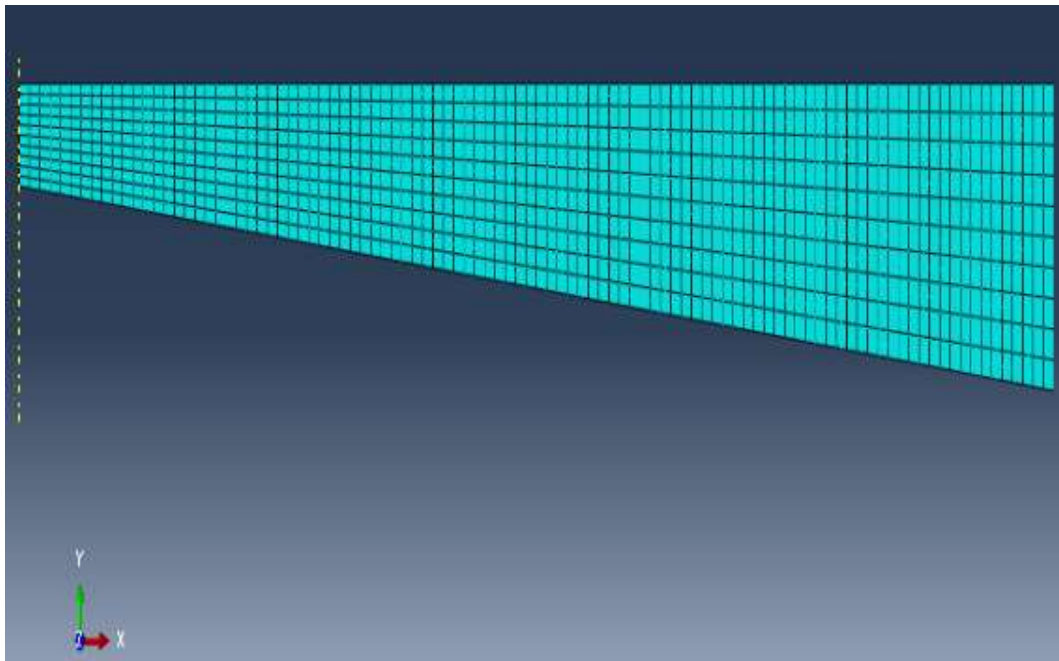
$$\tau_{rz}^{(top)} = \sigma_r^{(top)} \tan(\theta) + \frac{T}{\cos(\theta)} \quad (26)$$

پس از محاسبه تنش برشی عرضی توسط رابطه (۲۶)، با نوشتن روابط تعادل در جهت عمودی، تنش قائم عرضی در سطح آزاد استخراج خواهد شد.

$$\sigma_z^{(top)} = \tau_{rz}^{(top)} \tan(\theta) - \frac{q}{\cos(\theta)} \quad (27)$$

$\tan(\theta)$ از طریق یافتن شیب سطح روئین قابل محاسبه است که با مشتق‌گیری از $h_t(r)$ بدست می‌آید.

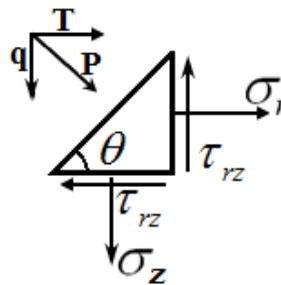
$$\tan(\theta) = \frac{dh_t(r)}{dr} = h_1^{(r)} \quad (28)$$



شکل ۲- مدلسازی ورق در نرم‌افزار آباکوس

۰/۸ رسم گردیده است. در شکل‌های ۶ و ۷ نیز، نمودارهای تنش قائم عرضی رسم شده است. در شکل‌های ۸ و ۹، تنش شعاعی در سطوح رویین و زیرین، در امتداد شعاعی نشان داده شده است.

همانگونه که مشخص است، با استفاده از روند تحلیل بیان شده، می‌توان به کلیه مولفه‌های تنشی در تمامی نقاط ورق با دقت بسیار مناسب دست یافت؛ همچنین حل تحلیلی انجام شده نیز، از کارایی بسیار مناسبی برخوردار است. نکته قابل توجه در نتایج بدست آمده، تنش‌های ایجاد شده در نزدیکی سطوح مورب است. شکل‌های ۴ تا ۷ نشان می‌دهند که در برخی حالات، تنش‌های برشی و قائم عرضی در نزدیکی سطح آزاد مورب دچار تغییر علامت می‌شوند. با توجه به اینکه هیچ نیرویی در سطح آزاد مورب بر ورق اعمال نمی‌شود، با انتخاب جزء بسیار کوچکی از ورق در نزدیکی سطح آزاد زیرین و در راستای موازی و عمود بر این سطح، مولفه‌های تنشی بصورت شکل ۱۰ الف می‌باشند. در واقع با انتخاب جزء ورق به این صورت، تنها یک مولفه عمودی درون



شکل ۳- برشی از ورق در نزدیکی سطح آزاد رویین

همچنین با استخراج تمامی مولفه‌های تنش عمودی و برشی، تنش فن-میسز بصورت رابطه (۲۹) قابل محاسبه است.

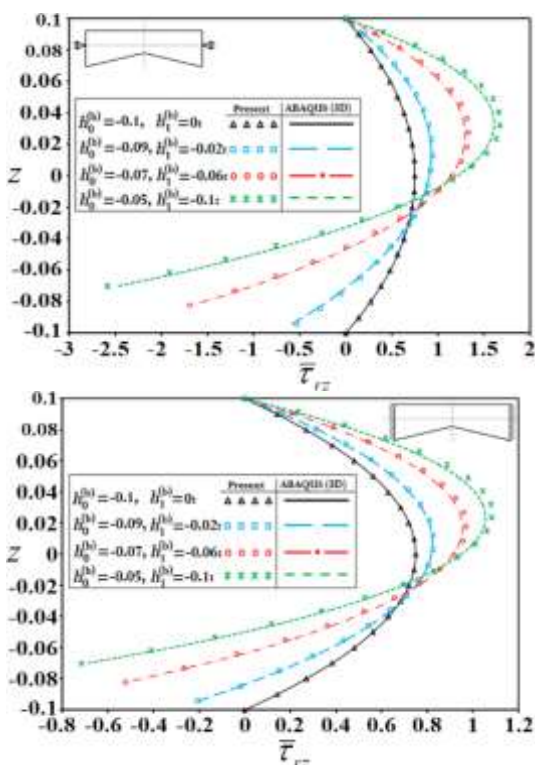
$$\sigma_{V_M} = \sqrt{\frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + 6\tau_{rz}^2}{2}} \quad (29)$$

برای بررسی تغییرات شعاعی ضخامت ورق، دو حالت در نظر گرفته شده است. ابتدا حالتی که یکی از سطوح مسطح بوده و سطح دیگر مورب و دارای شیب‌های مختلف باشد. سپس حالتی که هر دو سطح مورب بوده و ورق نسبت به لایه میانی متقارن باشد. در ادامه تنش‌های عمودی شعاعی، عمودی عرضی، برشی عرضی و تنش فن-میسز برای ورق با تغییرات ضخامت مختلف توسط نمودارهای دو بعدی و سه-بعدی رسم شده‌اند. در شکل‌های رسم شده، تنش‌ها توسط تقسیم آنها بر ضریب یانگ بی‌بعدسازی شده‌اند.

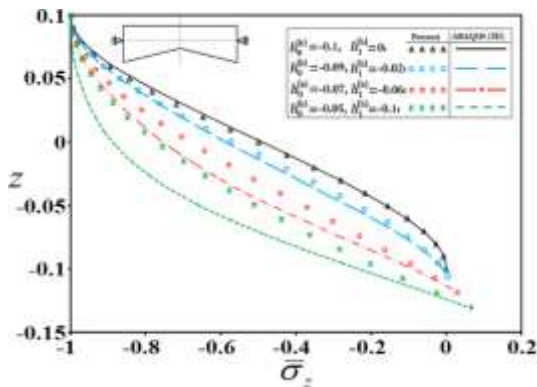
$$\bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_z}{E}, \quad \bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{E}, \quad \bar{\sigma}_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E},$$

$$\bar{\sigma}_{VonMises} = \frac{\sigma_{VonMises}}{E}, \quad \bar{\tau}_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{E} \quad (30)$$

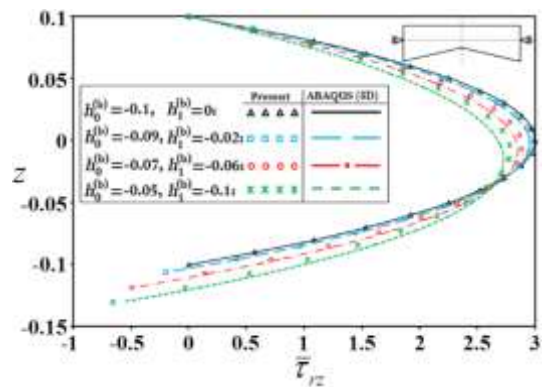
قابل ذکر است که بارگذاری به صورت فشار یکنواخت $\bar{P} = P/E$ که بر سطح رویین ورق اعمال می‌شود، در نظر گرفته شده است. نمودارهای تنش ورق با تکیه‌گاه‌های ساده و گیردار در حالتی که یکی از سطوح صاف بوده و سطح دیگر دارای شیب‌های مختلفی باشد، در شکل‌های ۴ تا ۹ رسم گردیده است. در این شکل‌ها نتایج حاصل از حل ارائه شده با نتایج حاصل از الاستیسیته سه‌بعدی مقایسه شده است که از نرم‌افزار آباکوس بدست آمده‌اند. در شکل‌های ۴ و ۵ تنش برشی عرضی ورق با شرایط تکیه‌گاهی ساده و گیردار برای تغییرات ضخامت مختلف در نسبت‌های شعاعی بی‌بعد ۰/۲ و



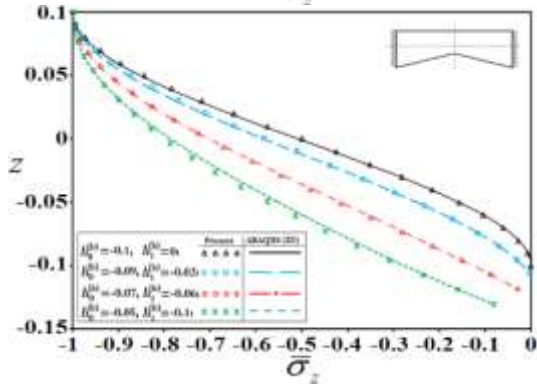
شکل ۴- تنش برشی عرضی در شعاع ۰/۲



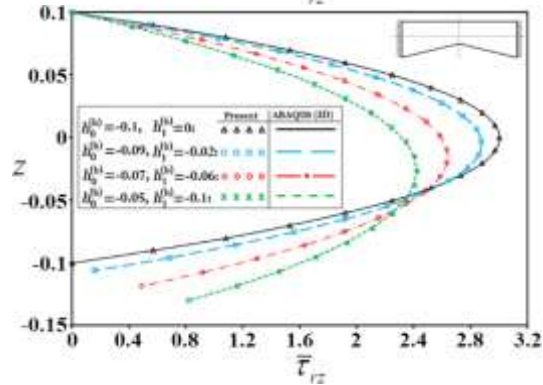
شکل ۷- تنش قائم عرضی ورق در شعاع ۰/۸



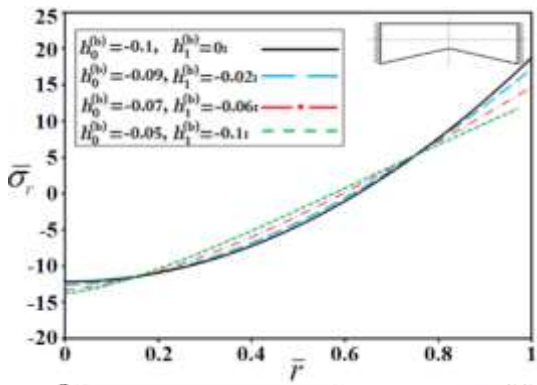
شکل ۸- تنش برشی عرضی در شعاع ۰/۸



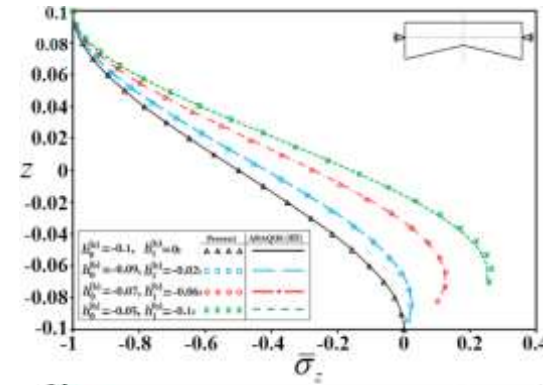
شکل ۹- تنش قائم عرضی در سطح آزاد رویین



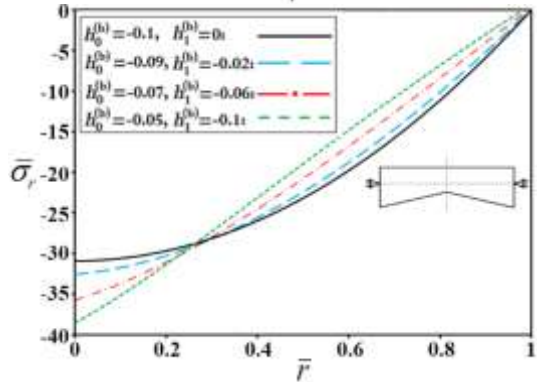
شکل ۱۰- تنش قائم عرضی در شعاع ۰/۲



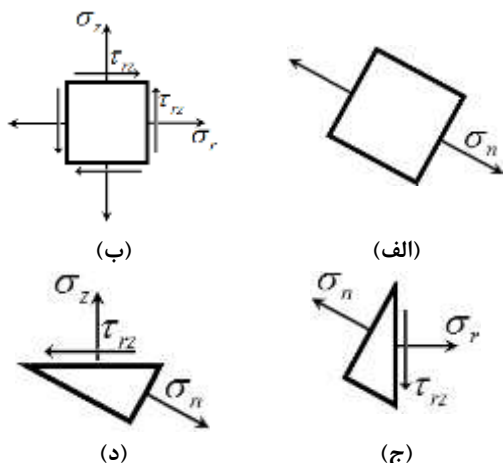
شکل ۱۱- تنش شعاعی در سطح آزاد رویین



شکل ۱۲- تنش شعاعی در شعاع ۰/۲



توجه به مطالب بیان شده برای شکل هندسی مورد بررسی، چگونگی توزیع تنش برشی عرضی در امتداد ضخامت در نقاط مرکزی ورق کاملاً مشابه ورق با تکیه‌گاه ساده است؛ اما در نواحی نزدیک به تکیه‌گاه که تنش شعاعی فشاری است، تنش برشی از مقدار صفر در سطح آزاد رویین به یک مقدار بیشینه رسیده و سپس کاهش می‌یابد، ولی هرگز تغییر علامت نداده و به صفر نیز نمی‌رسد.

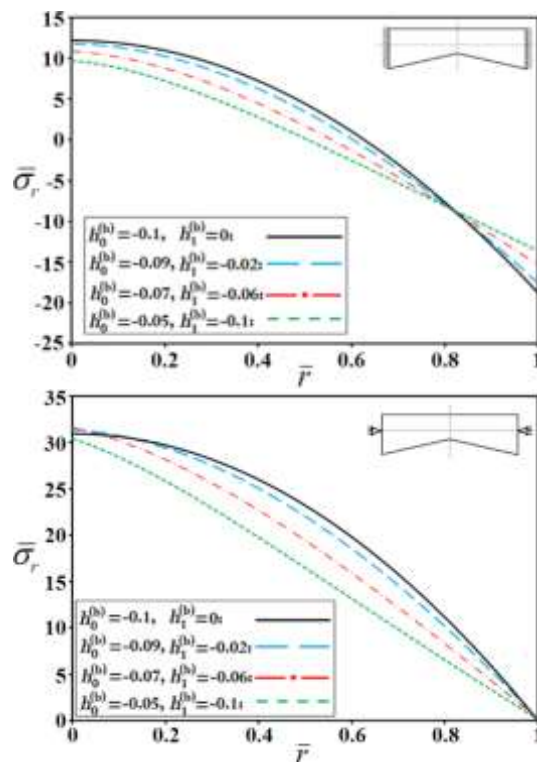


شکل ۱۰- مولفه‌های تنش بر روی المانی از ورق در نزدیکی سطح آزاد زیرین (الف) در راستای موازی و عمود بر سطح آزاد، (ب) در راستای محورهای r و z ، (ج) در راستای موازی و عمود بر سطح آزاد و راستای محور z و (د) در راستای موازی و عمود بر سطح آزاد و راستای محور r

شکل‌های ۶ و ۷ نشان می‌دهند که تنش‌های قائم عرضی نیز، در راستای ضخامت ورق دچار تغییر علامت می‌شود. با بررسی شکل ۱۰ د می‌توان دریافت، چنانچه تنش عمودی موجود بر سطح مورب کششی باشد، تنش قائم عرضی نیز کششی بوده و چنانچه فشاری باشد، تنش قائم عرضی نیز، فشاری خواهد بود. در واقع برآیند تنش‌ها روی سطح افقی در راستای سطح آزاد خواهد بود؛ یعنی

$$\tan(\theta) = dh(r)/dr = \sigma_z / \tau_{rz}$$

در نتیجه به علت کششی بودن تنش عمودی شعاعی در نزدیکی سطح آزاد زیرین، تنش قائم عرضی نیز همواره کششی است. از طرفی با توجه به روابط بیان شده برای



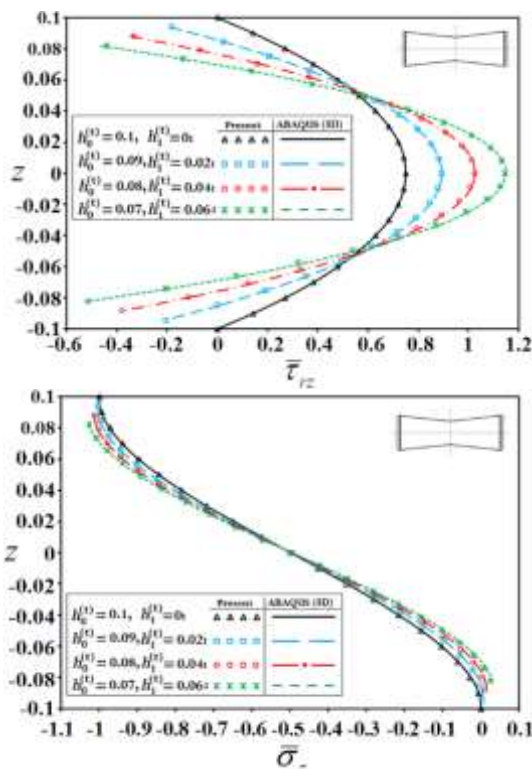
شکل ۹- تنش شعاعی در سطح آزاد زیرین

صفحه‌ای در راستای سطح آزاد وجود خواهد داشت. از سوی دیگر با در نظر گرفتن جزء کوچکی از ورق در راستای محورهای r و z ، مولفه‌های تنش به صورت شکل ۱۰ ب خواهد بود. حال مطابق شکل ۱۰ ج، با انتخاب این جزء کوچک مثلی می‌توان به جهت تنش برشی عرضی دست یافت.

با توجه به این شکل، چنانچه تنش شعاعی به صورت کششی باشد، تنش برشی عرضی در خلاف جهت z (علامت منفی) بوده و چنانچه تنش شعاعی بصورت فشاری باشد، تنش برشی عرضی در جهت z (علامت مثبت) خواهد بود. به عبارت دیگر در سطح عمودی، برآیند تنش‌ها در امتداد سطح آزاد خواهد بود؛ یعنی

$$\tan(\theta) = dh(r)/dr = \tau_{rz} / \sigma_r$$

همانگونه که از شکل ۸ نیز مشخص است، تنش شعاعی ورق گیردار در سطح رویین و در نزدیکی مرکز ورق فشاری بوده و در نزدیکی مرزها کششی می‌باشند؛ همچنین در سطح زیرین و در نزدیکی مرکز ورق تنش شعاعی کششی بوده که نزدیکی مرزها به تنش‌های فشاری تبدیل می‌شود؛ بنابراین با



شکل ۱۱- تنش‌های عرضی در شعاع ۰/۲

همچنین بر اساس شکل ۱۲ مقدار تنش برشی عرضی در نزدیکی تکیه‌گاه همواره مقداری مثبت است. تنش برشی عرضی در سطح رویین، از رابطه تعادل بیان شده توسط رابطه (۲۴) قابل دستیابی است. در این حالت از تغییرات ضخامت مورد بررسی، تنش شعاعی پارامتر تاثیرگذارتری نسبت به نیروی افقی T است و با توجه به فشاری بودن آن در نزدیکی مرکز ورق و کششی بودن آن در نزدیکی تکیه‌گاه، مقدار تنش برشی عرضی در نزدیکی مرکز ورق منفی و در نزدیکی تکیه‌گاه مثبت است.

همچنین مقدار تنش قائم عرضی در سطح آزاد رویین نیز، از رابطه (۲۵) قابل محاسبه است. با توجه به اینکه تنش برشی عرضی در نزدیکی مرکز منفی است، مقدار تنش قائم عرضی بی‌بعد در این نقاط کمتر از ۱- بوده و به علت مثبت بودن تنش برشی عرضی در نزدیکی تکیه‌گاه، مقدار تنش قائم عرضی بیشتر از ۱- است. دلایل تغییرات تنش‌های قائم و برشی عرضی در سطح زیرین، مشابه موارد بیان شده قبلی است.

نسبت‌های تنش برشی عرضی، به تنش شعاعی و تنش قائم عرضی، به تنش برشی عرضی در نزدیکی سطح آزاد زیرین ورق که در حالت مورد بررسی همواره دارای مقداری ثابت در راستای شعاع هستند، با افزایش تنش شعاعی، مقدار تنش برشی عرضی و تنش قائم عرضی نیز افزایش می‌یابد. در ورق با تکیه‌گاه ساده که تنش شعاعی در سطح زیرین از مقداری بیشینه در مرکز ورق به مقدار صفر در مرزها می‌رسد، مقادیر تنش برشی و قائم عرضی در سطح آزاد زیرین نیز، در راستای شعاع کاهش می‌یابند که در شکل‌های نشان داده شده نیز قابل مشاهده است. نکته قابل توجه دیگر، روند تغییرات تنش قائم عرضی است که در ضخامت‌های کمتر، شدیدتر بوده و در ضخامت‌های زیادتر، کندتر است. از تنش‌های عمودی شعاعی رسم شده در سطوح آزاد و در امتداد شعاع مشخص است که در ورق با تکیه‌گاه ساده، مقادیر این تنش‌ها در سطح رویین همواره فشاری و در سطح زیرین همواره کششی است؛ همچنین مقادیر این تنش‌ها در مرکز ورق بیشترین مقدار را دارا بوده و با نزدیک شدن به تکیه‌گاه کاهش می‌یابند. تنش‌های عمودی شعاعی در سطح رویین ورق گیردار، در مرکز بصورت کششی بوده که با نزدیک شدن به تکیه‌گاه، مقدار آن به صفر و سپس مقادیر فشاری در تکیه‌گاه می‌رسد؛ همچنین تنش‌های عمودی شعاعی در سطح زیرین ورق گیردار، در مرکز بصورت فشاری بوده که با نزدیک شدن به تکیه‌گاه، مقدار آن به صفر و سپس مقادیر کششی در تکیه‌گاه می‌رسد.

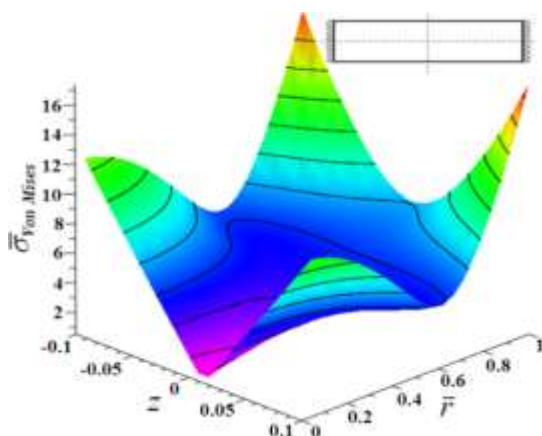
در ادامه ورقی با تکیه‌گاه گیردار و ضخامت متغیر که هر دو سطح آن مورب بوده و ورق نسبت به لایه میانی متقارن باشد، مورد بررسی قرار گرفته است. نمودارهای تنش برشی و قائم عرضی در شکل‌های ۱۱ و ۱۲ رسم شده‌اند. به منظور اعمال فشاری بر سطح رویین ورق، از اعمال همزمان مولفه‌های عمودی و افقی استفاده شده است؛ بنحوی که نیروی برآیند بر سطح عمود گردد. بر اساس شکل ۱۱ مشخص است که مقدار تنش برشی عرضی در نزدیکی مرکز ورق، از مقداری منفی در سطح آزاد رویین به مقداری بیشینه و مثبت در مرکز ورق رسیده و مجدداً در سطح آزاد زیرین به مقداری منفی می‌رسد. البته به منظور برقراری تعادل با نیروی عرضی اعمال شده، برآیند نیروی برشی عرضی باید مثبت باشد.

• در شکل ۱۴ ب، ورق نسبت به لایه میانی متقارن و سطوح رویین و زیرین بصورت مورب می‌باشند که با نزدیک شدن به تکیه‌گاه، ضخامت ورق افزایش می‌یابد. ضخامت در مرکز و تکیه‌گاه، به ترتیب ۰/۱۴ و ۰/۲۶ است.

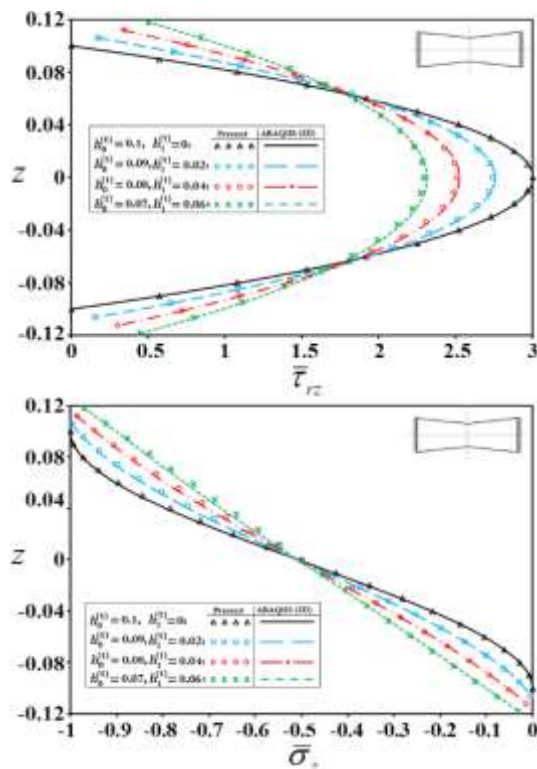
• در شکل ۱۴ ج، سطح رویین ورق ثابت بوده و سطح زیرین بصورت مورب است که با نزدیک شدن به تکیه‌گاه، ضخامت ورق کاهش می‌یابد. ضخامت ورق در مرکز و تکیه‌گاه به ترتیب، ۰/۲۵ و ۰/۱۵ است.

• در شکل ۱۴ د ورق نسبت به لایه میانی متقارن و سطوح رویین و زیرین بصورت مورب می‌باشند که با نزدیک شدن به تکیه‌گاه، ضخامت ورق کاهش می‌یابد. ضخامت در مرکز و تکیه‌گاه به ترتیب ۰/۳ و ۰/۱ است.

همانگونه که در شکل ۱۳ قابل مشاهده است، در ورق گیردار با ضخامت ثابت، تنش‌های حداکثر در تکیه‌گاه و در مجاورت سطوح آزاد رخ می‌دهد و پس از آن، تنش در مرکز و مجاورت سطوح آزاد بیشینه است؛ بنابراین با افزایش ضخامت در قسمت تکیه‌گاه، می‌توان تنش حداکثر را کاهش داد که این امر در شکل‌های ۱۴ الف و ب قابل مشاهده است. در شکل ۱۴ ب به علت کاهش زیاد ضخامت در مرکز ورق، مقدار بیشینه تنش در مرکز اتفاق می‌افتد. با توجه به شکل‌های ۱۴ ج و د مشخص است که با کاهش ضخامت ورق در تکیه‌گاه، تنش‌های بیشینه فن-میسز افزایش می‌یابد.



شکل ۱۳- تنش فن-میسز ورق با ضخامت ثابت ۰/۲

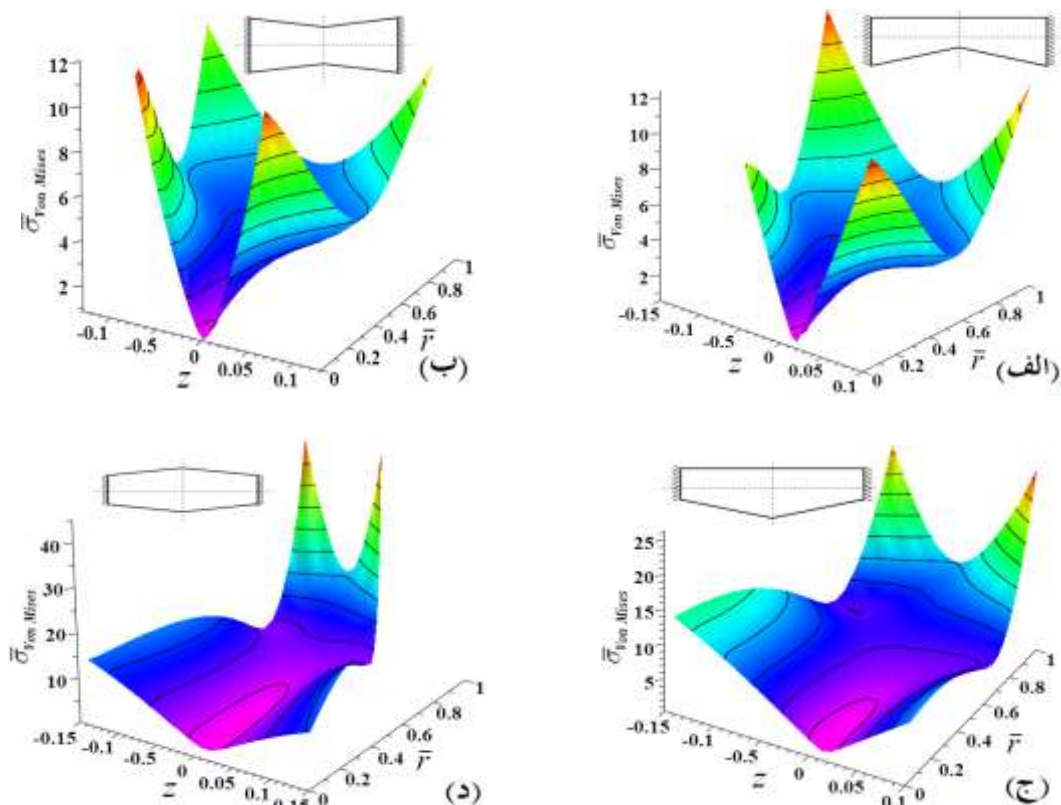


شکل ۱۲- تنش‌های عرضی در شعاع ۰/۸

مقایسه نتایج حاصل از تحلیل حاضر با نتایج الاستیسیته سه‌بعدی استخراج شده از نرم‌افزار آباکوس، نشان‌دهنده دقت بسیار بالای روش ارائه شده است و کارایی روند تحلیل ارائه شده جهت محاسبه تنش‌های برشی و عمودی را اثبات می‌کند.

در پایان به منظور بررسی اثر تغییرات ضخامت بر تنش فن-میسز، مقدار این تنش در کل سطح جسم و بصورت اشکال سه بعدی بر اساس شعاع و ضخامت نشان داده شده است. تنش فن-میسز ورق گیردار با ضخامت ثابت در شکل ۱۳ نشان داده شده است؛ همچنین تنش فن-میسز ورق گیردار با تغییرات ضخامت مختلف، در شکل‌های ۱۴ نشان داده شده است که شامل حالات مختلف تغییرات ضخامت به صورت زیر می‌باشند:

• در شکل ۱۴ الف، سطح رویین ورق ثابت بوده و سطح زیرین بصورت مورب است که با نزدیک شدن به تکیه‌گاه ضخامت ورق افزایش می‌یابد. ضخامت در مرکز و تکیه‌گاه، به ترتیب ۰/۱۵ و ۰/۲۵ است.



شکل ۱۴- تنش فن-میسز ورق با شرایط تکیه‌گاهی گیردار و ضخامت‌های مرکز و تکیه‌گاه به ترتیب الف) ۰/۱۵ و ۰/۲۵ و ب) ۰/۱۴ و ۰/۲۶ و ج) ۰/۲۵ و ۰/۱۵ و د) ۰/۳ و ۰/۱

برشی مرتبه اول و الاستیسیته سه‌بعدی، همه مولفه‌های جابجایی و مولفه‌های تنش از جمله مولفه‌های برشی و قائم عرضی با دقت بسیار مناسب استخراج گردید. مولفه‌های تنش برای ورق‌ها با شکل‌های مختلف بدست آمده و با یکدیگر مقایسه شده است. نشان داده شد که با تغییر ضخامت ورق می‌توان نحوه توزیع تنش را تغییر داد و مقادیر تنش بیشینه را کاهش داد. نتایج نشان می‌دهد که روند تحلیل ارائه شده جهت محاسبه مولفه‌های تنش، از دقت بسیار بالایی برخوردار بوده و قابلیت بررسی ورق‌های ضخامت متغیر در حالت تقارن و یا عدم تقارن نسبت به لایه میانی را دارد؛ همچنین روند تحلیل ارائه شده این قابلیت را دارد که مولفه‌های جابجایی و تنش توسط توابع پیوسته برای کل جسم محاسبه گردد و به طراحان این امکان را می‌دهد تا بسادگی نواحی بحرانی تنش را برای طراحی مناسب‌تر بررسی کنند.

بطور کلی می‌توان نتیجه گرفت که در رابطه با مقدار تنش‌های فن-میسز در ورق گیردار با توجه به بحرانی بودن مقدار تنش در تکیه‌گاه، افزایش ضخامت ورق در مجاورت مرزها موجب کاهش تنش بیشینه خواهد شد. از طرفی با توجه به اینکه پس از مرزها، مرکز ورق دارای شرایط بحرانی است، کاهش بیش از اندازه ضخامت در مرکز ورق موجب می‌شود تنش‌های حداکثر در مرکز رخ دهد؛ بنابراین در بهینه‌ترین حالت تغییرات خطی ضخامت، تغییرات باید بنحوی باشد تا تنش‌های حداکثر در مرکز و مرزها یکسان باشد و یا اینکه ضخامت بنحوی تغییر کند تا ضخامت در نزدیکی مرکز و مرزها بطور همزمان افزایش یابد.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله تحلیل تنش ورق دایره‌ای ضخامت متغیر، مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. با استفاده از ترکیب تئوری

- ۷- مراجع**
- [8] Molla-Alipour M (2016) Dynamic behavior analysis of FG circular and annular plates with stepped variations of thickness under various load. *Modares Mechanical Engineering* 16(7): 251-260. (in Persian)
- [9] Molla-Alipour M (2017) Bending Analysis of FG Circular and Annular Plates with Stepped Thickness Variations by Using a New Exact closed form Solution. *Tabriz Mechanical Engineering* 47(2): 295-302. (In Persian)
- [۱۰] گلمکانی محمد اسماعیل، یوسفیان ثقی علیرضا (۱۳۹۴) تحلیل غیر خطی ترموالاستیک صفحات گرد ساندویچی با هسته تابعی. *مجله مکانیک سازه‌ها و سازه‌ها* ۱۴۲-۱۲۷: ۴(۴).
- [۱۱] خورشیدی کوروش، عنصری نژاد سعید (۱۳۹۵) تحلیل دقیق ارتعاش آزاد ورق‌های قطاعی کوپل شده با لایه پیزوالکتریک با بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول. *مجله مکانیک سازه‌ها و سازه‌ها* ۱۳۸-۱۲۵: ۶(۴).
- [12] Vivio F, Vullo V (2010) Closed form solutions of axisymmetric bending of circular plates having non-linear variable thickness Author links open overlay panel. *Int J Mech Sci* 52(9): 1234-1252
- [13] Alipour M M (2016) A novel economical analytical method for bending and stress analysis of functionally graded sandwich circular plates with general elastic edge conditions, subjected to various loads. *Compos Part B* 95: 48-63.
- [14] Alipour M M (2016) Effects of elastically restrained edges on FG sandwich annular plates by using a novel solution procedure based on layerwise formulation. *Arch Civil Mech Eng* 16: 678-694.
- [1] Nie G, Zhong Z (2007) Axisymmetric bending of two-directional functionally graded circular and annular plates. *Acta Mech Solida Sin* 20(4): 289-295.
- [2] Sahraee S, Saidi AR (2009) Axisymmetric bending analysis of thick functionally graded circular plates using fourth-order shear deformation theory. *Euro J Mechan A/Solids* 28: 974-984
- [3] Saidi AR, Rasoul A, Sahraee S (2009) Axisymmetric bending and buckling analysis of thick functionally graded circular plates using unconstrained third-order shear deformation plate theory. *Comp Struct* 89: 110-119
- [4] Mashat DS, Zenkoura AM (2014) Hygrothermal bending analysis of a sector-shaped annular plate with variable radial thickness. *Comp Struct* 113: 446-458
- [5] Reddy JN, Wang CM, Kitipornchai S (1999) Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates. *Euro J Mechan A/Solids* 18: 185-199.
- [6] Alipour MM, Shariyat M (2010) Stress analysis of two-directional FGM moderately thick constrained circular plates with non-uniform load and substrate stiffness distributions. *Journal of Solid Mechanics* 2(4): 316-331
- [7] Molla-Alipour M (2016), Closed-form solution of circular and annular plates with elastic boundary conditions under non-uniform normal and shear loads. *Modares Mechanical Engineering* 16(6): 29-40. (in Persian)