



کنترل کلاسی از سیستم‌های مرتبه کسری با تاخیر در یک ناحیه مشخص

نرگس طهماسبی^۱، حجت احسنی طهرانی^{۲*} و یدالله اردوخانی^۳^۱ دانشجوی دکتری، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران^۲ دانشیار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران^۳ استاد تمام، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه الزهراء، تهران، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۲/۲۸؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۰۳/۱۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۷/۱۴

چکیده

این مقاله مساله طراحی سیستم‌های کسری تاخیری با مقادیر ویژه حلقه بسته در یک ناحیه مشخص از پایداری را مورد توجه قرار داده است. ایده اصلی، تبدیل سیستم‌های کسری با تاخیر زمانی به سیستم کسری بدون تاخیر معادل است. در ابتدا یک ماتریس پس‌خورده حالت محاسبه می‌کنیم که تمام مقادیر ویژه را به صفر می‌رساند و سپس با استفاده از روشی بر پایه تبدیلات تشابهی و اختصاص دادن مقادیر ویژه به سیستم‌های بدون تاخیر، ماتریس پس‌خورده حالت را در یک بخش از صفحه مختلط محاسبه می‌کنیم. این روش با به کار بردن خواص فرم بردارهای همدم بدست می‌آید. الگوریتم پیشنهاد شده برای قرار دادن مقادیر ویژه حلقه بسته در یک بخش مشخص از صفحه می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد و برای سیستم‌های مرتبه کسری خطی بزرگ مقیاس نیز استفاده گردد؛ همچنین، ملاحظات را می‌توان براحتی برای سیستم‌های دو بعدی و تکین مرتبه کسری توسعه داد؛ همچنین کارآمد بودن روش پیشنهادی از طریق شبیه‌سازی، نشان داده شده است.

کلمات کلیدی: سیستم مرتبه کسری؛ پایداری، زمان-پیوسته؛ تاخیر زمانی؛ ماتریس پس‌خورده حالت؛ مقادیر ویژه، زاویه مشخص.

Control a Class of Fractional-Order Systems with Delay in a Specified Sector

N. Tahmasbi¹, H. Ahsani Tehrani^{2*}, Y. Ordokhani³¹ Ph.D. Student, Math. Sci., Shahrood Univ., Shahrood, Iran.² Assoc. Prof., Math. Sci., Shahrood Univ., Shahrood, Iran.³ Full. Prof., Math. Sci., Alzahra Univ., Tehran, Iran.

Abstract

This paper is concerned with the problem of designing fractional-order time-delay systems with closed-loop eigenvalues in a prescribed region of stability. The main idea is to convert the fractional-order systems with time-delays into an equivalent fractional-order systems without delays. At the first, we compute a state feedback matrix which assigns all the eigenvalues to zero, then by using the method based on similarity transformation and assign the eigenvalues to fractional-order systems without delays compute state feedback matrix in a sector of the complex plane. This method is achieved by implementing properties of vector companion forms. The proposed algorithm can be used for the placement of closed-loop eigenvalues in a specified sector in plane and can be employed for fractional-order linear systems with large-scale. Also, the considerations can be easily extended for two-dimensional (2D) and descriptor fractional-order systems. Also, simulation results are presented to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: Fractional-Order System; Stability; Continues-Time; Time-Delay; State Feedback Matrix; Eigenvalues; Specified Angle.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۲۳۳۲۳۰۰۲۳۵

آدرس پست الکترونیک: ahsani@shahroodut.ac.ir

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، محاسبات کسری کاربرد زیادی در مدل‌سازی معادلات فیزیکی و مهندسی مانند انتشار امواج، شبکه‌های الکتریکی، فناوری نانو، رباتیک و پزشکی داشته است (مراجع [۱،۲] را ببینید). از آنجا که مشتقات کسری دارای خاصیت غیر موضعی و هسته‌های تکین ضعیف هستند [۳]، از این رو آنها ابزاری بسیار خوب برای توصیف حافظه و خواص ارثی فرآیندهای مختلف هستند.

تأخیر زمانی اغلب در سیستم‌های متنوعی مانند سیستم‌های بیولوژیکی [۴] زیستی، صنعتی، الکتریکی، هوایی، فرایندهای شیمیایی، شبکه‌های ارتباطی، کنترل از راه دور [۵] و رباتیک [۶] در بین مسیر ورودی و خروجی سیستم اتفاق می‌افتد، بطوریکه وجود تأخیر زمانی در این سیستم‌ها، باعث عملکرد نامناسب آن‌ها می‌شود. وجود تأخیر باعث می‌شود، معادله مشخصه سیستم تأخیری تعداد نامتناهی ریشه داشته باشد و همین مساله باعث می‌شود، تحلیل این سیستم‌ها با روش‌های کلاسیک مخصوصاً در بررسی پایداری و طراحی کنترل‌کننده پسخورد مشکل باشد. در طی چند دهه اخیر مساله تحلیل پایداری این سیستم‌ها، مورد توجه قرار گرفته است برای اطلاعات بیشتر مرجع [۷] را ببینید.

اولین نتایج در مورد پایداری سیستم‌های کسری، مربوط به قضیه ماتینگون^۱ [۸] است. روش‌های مختلف از پایداری برای سیستم‌های کسری تاخیری، مورد مطالعه قرار گرفته است، از جمله پایداری میتاگ-لفلر^۲ [۹]، پایداری مجانبی [۱۰، ۱۱] و پایداری زمان متناهی^۳ [۱۲]، کنترل مود لغزشی^۴ نیز در [۱۳، ۱۴] برای پایداری سیستم‌های مرتبه کسری با تاخیر زمانی بکار گرفته شده است. پاکزاد و همکاران [۱۵]، یک روش تحلیلی موثر برای بدست آوردن ناحیه پایداری از سیستم‌های کسری تاخیری معرفی کردند. در اکثر برنامه‌های کاربردی پایداری سیستم‌های کنترل شده به تنهایی کافی نیست و نیاز است که قطب‌های سیستم حلقه بسته در ناحیه مشخص از پایداری باشند، روش‌های

مختلفی ارائه شده از جمله فروتا و کیم^۵ [۱۶] روشی برای تخصیص قطب‌های حلقه بسته در دیسک دلخواه معرفی کردند. چو^۶ [۱۷]، روشی دیگر برای تخصیص قطب با کمک شعاع طیفی و تابع انتقال پالسی پیشنهاد کرد، این روش ساده بود، اما تنها برای بررسی موقعیت قطب‌های حلقه بسته کاربرد داشت، نه برای طراحی کنترلگر. فیگوریا و همکارش^۷ [۱۸]، یک رویکرد برای طراحی کنترلگر ارائه دادند که سعی در قرار دادن ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه در ناحیه مشخص از صفحه مختلط بود، این تحلیل براساس تابع تبدیل انجام گرفت، یوان^۸ و همکاران [۱۹]، مساله تنظیم‌کننده درجه دوم خطی (LQR)^۹ با قیود ناحیه قطب‌های حلقه بسته را معرفی کردند. بنر و همکارش^{۱۰} [۲۰] روشی برای پایداری جزئی از سیستم‌های خطی گسسته-زمان بزرگ مقیاس پیشنهاد دادند. طهرانی [۲۱] روشی برای تخصیص مقادیر ویژه سیستم‌های گسسته زمان در دیسک مشخص با استفاده از قضیه گرشگورین ارائه کرد و در [۲۲] پایداری سیستم‌های پیوسته زمان در بازه مشخص از صفحه مختلط را بررسی کرد. آیت‌اللهی [۲۳] یک روش برای تخصیص ماکزیمم و مینیمم مقادیر ویژه حلقه بسته برای سیستم‌های متناوب گسسته-زمان با پسخورد حالت بدست آورد. فرانک^{۱۱} [۲۴] رویکردی برای تخصیص مقادیر ویژه با پسخورد خروجی به منظور کاهش بهره ماتریس پسخورد پیشنهاد داد. برای اطلاعات بیشتر مراجع [۲۵، ۲۶، ۲۷] را ببینید.

با انگیزه از بحث‌های فوق و ایده‌ای از کارهای انجام شده [۲۲، ۲۷] در این مقاله، هدف ارائه یک روش با پیچیدگی محاسباتی کمتر برای محاسبه مقادیر ویژه در یک ناحیه مشخص شده از صفحه مختلط با کنترلگر پسخورد برای کلاسی از سیستم‌های پیوسته-زمان خطی کسری با تاخیر زمانی است.

این مقاله به ترتیب زیر تنظیم شده است، در بخش ۲ بیان مساله آورده شده است. در بخش ۳ روشی برای پایداری

⁵ Furuta and Kim

⁶ Chou

⁷ Figueroa and Romagneli

⁸ Yuan

⁹ Linear quadratic regulator

¹⁰ Benner

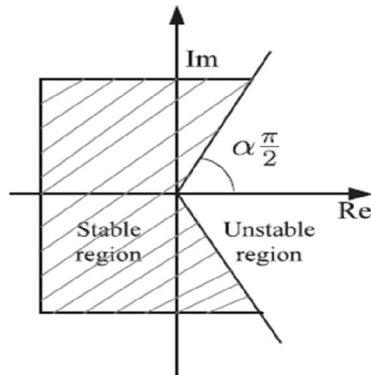
¹¹ Franke

¹ Matignon

² Mittag-Leffler

³ Finite-Time

⁴ Sliding mode Control (SMC)



$$0 < \alpha < 1$$

شکل ۱- ناحیه پایداری برای قضیه ۱

تعریف ۲. [۲۹] یک ماتریس حقیقی $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ماتریس متزلز^۳ نامیده می‌شود، اگر درایه‌های غیر قطری آن نامنفی باشند، یعنی $a_{ij} \geq 0$ برای $i \neq j$ ، فضای همه ماتریس‌های متزلز را با M_n نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲. [۳۰] سیستم کسری (۱) مثبت است، اگر و فقط اگر $A \in M_n$ و $B \in \mathfrak{R}_+^{n \times m}$

قضیه ۳. [۳۰] سیستم مثبت (۱) پایدار مجانبی است، اگر و فقط اگر ماتریس‌های $D \in \mathfrak{R}^{m \times n}$

با $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ و $\lambda_k > 0$ با $k = 1, 2, \dots, n$ وجود داشته باشند بطوریکه شرایط زیر را برآورده کند،

$$\begin{cases} A\Lambda + BD \in M_n \\ (A\Lambda + BD)1_n < 0 \end{cases}$$

وقتی 1_n ماتریسی $n \times n$ که همه درایه‌های آن یک است؛ همچنین با اعمال قانون کنترل پس‌خورد $u(t) = Kx(t)$ ، ماتریس بهره بصورت $K = D\Lambda^{-1}$ بدست می‌آید.

۲- بیان مساله

سیستم کنترل پذیر مرتبه کسری با تاخیرهای زمانی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} D_t^\alpha x(t) = \sum_{k=0}^q [A_k x(t-d_k) + B_k u(t-d_k)], \\ x(t) = x_0(t), t \in [-d, 0], d = \max_k d_k. \end{cases} \quad (3)$$

سیستم‌های کسری با تاخیر زمانی پیشنهاد شده است. در بخش ۴ نتایج شبیه‌سازی و مقایسه‌ای با روش‌های موجود ارائه شده است. سرانجام، بخش ۵ به نتیجه گیری کلی می‌پردازد.

نماد گذاری: مجموعه ماتریس‌های حقیقی $m \times n$ با نماد $\mathfrak{R}^{m \times n}$ نمایش داده خواهد شد. مجموعه ماتریس‌های حقیقی $m \times n$ با درایه‌های نامنفی (مثبت) با $\mathfrak{R}_+^{m \times n}$ نشان داده می‌شود و $\mathfrak{R}_+^n = \mathfrak{R}_+^{n \times 1}$ ماتریس A یا بردار X با درایه‌های منفی با $A < 0$ ($X < 0$) مشخص می‌شود. مجموعه اعداد صحیح نامنفی با Z_+ ، ماتریس همانی $n \times n$ با $I_{n \times n}$ و ماتریس قطری $n \times n$ با $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ که d_i درایه‌های قطر اصلی‌اند نشان داده می‌شود.

۱-۱- تعاریف و پیش نیازها

در این بخش، برخی از تعاریف و قضایای اساسی معرفی می‌گردد که در بخش‌های بعدی استفاده می‌شود. سیستم خطی با مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

وقتی $x(t) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ بردارهای ورودی و $u(t) \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ حالت هستند، $\alpha \in (0, 1]$ و

$${}^c D_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \dot{x}(\tau) = \frac{dx(\tau)}{d\tau}, \quad (2)$$

تعریف کاپوتو^۱ از مشتق کسری α و $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ تابع اوایلر گاما است.

در بقیه این مقاله، نماد $D^\alpha (\cdot)$ نشان دهنده مشتق کاپوتو از مرتبه α است.

قضیه ۱. [۲۸] سیستم کسری (۱) با شرط $B = 0, x(0) \in \mathfrak{R}^n$ و $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ در نظر بگیرید وقتی $\alpha \in (0, 1)$ و $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ این سیستم پایدار مجانبی^۲ است، اگر و فقط اگر $|\arg(\lambda(A))| > \frac{\alpha\pi}{2}$ (شکل ۱ را ببینید).

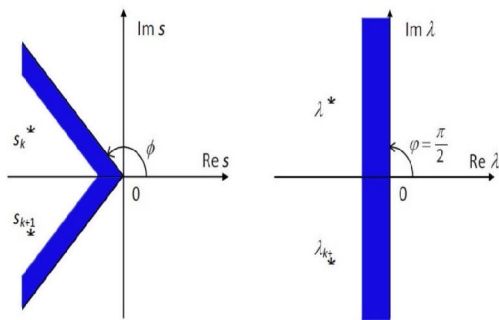
تعریف ۱. [۲۹] سیستم مرتبه کسری (۱) را مثبت می‌نامیم هرگاه $x(t) \in \mathfrak{R}_+^n$ برای $t \geq 0$ و تمام شرایط اولیه $x_0 \in \mathfrak{R}_+^n$ و $u(t) \in \mathfrak{R}_+^m$.

³ Metzler

¹ Caputo

² Asymptotic

مساله تخصیص مقادیر ویژه^۱ در ناحیه مشخص شده موضوعی است که چند دهه گذشته توسط بسیاری از محققین مورد توجه قرار گرفته است. کرباسی و بل^۲ [۳۲] یک الگوریتم برای محاسبه ماتریس پسخورد ارائه کرده‌اند که مقدار ویژه از سیستم حلقه بسته $G = A + BK$ ، در طیف مشخص $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ قرار بگیرد؛ همچنین توسعه روش EVA به روش تخصیص مقادیر ویژه جزئی^۳ برای سیستم‌های مختلفی از جمله سیستم‌های دوبعدی نیز [۳۳] انجام شده است.



شکل ۲- تصویری برای فرع ۱

۳- نتایج اصلی

در این بخش، روشی برای محاسبه ماتریس پسخورد از سیستم‌های کسری تاخیری را پیشنهاد می‌دهیم. ابتدا سیستم کنترل پذیر (۳) را در نظر می‌گیریم، مشابه تعاریف بیان شده در [۳۲] فرض کنید که T تبدیل تشابهی باشد که بر فضای \mathbb{R}^n تعریف شده است. حال فرض می‌کنیم، بردار حالت سیستم توسط ماتریس تبدیل T^{-1} به فضای جدید تبدیل شود، یعنی $x(t) = T\tilde{x}(t)$.

با جایگذاری رابطه فوق در معادله حالت (۳) داریم:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = T^{-1}AT\tilde{x}(t) + T^{-1}Bu(t), \quad (۸)$$

بنابراین،

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} G_0 \\ I_{n-m} \quad \vdots \quad 0_{n-m \times m} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_0 \\ 0_{n-m \times m} \end{bmatrix} \quad (۹)$$

وقتی $x(t) \in \mathbb{R}^n$ و $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردارهای حالت و ورودی هستند و $k = 0, 1, \dots, q, A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ماتریس‌های ثابت حقیقی هستند، ما فرض می‌کنیم $rank(B_k) = m$ و d_k تاخیرهای زمانی با شرط $d_k \geq 0, d_0 = 0$ هستند.

قانون کنترل را بصورت $u(t) = Kx(t)$ در نظر می‌گیریم، وقتی $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ماتریس پسخورد حالت است، بنابراین سیستم حلقه بسته بصورت زیر است:

$$D_t^\alpha x(t) = \sum_{k=0}^q (A_k + B_k K)x(t - d_k), \quad (۴)$$

سیستم فوق با q تاخیر بطور مجانبی پایدار است، اگر و تنها اگر سیستم بدون تاخیر آن پایدار مجانبی باشد [۳۱] در واقع، سیستم تاخیری زمان پیوسته مستقل از تعداد و مقدار تاخیر است [۲۹] است؛ بنابراین، سیستم حلقه بسته کسری بدون تاخیر (۴) را در نظر می‌گیریم،

$$D_t^\alpha x(t) = (A + BK)x(t);$$

$$A = \sum_{k=0}^q A_k, B = \sum_{k=0}^q B_k \quad (۵)$$

هدف یافتن ماتریس K بطوری که ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه،

$$\det[I_n s^\alpha - (A + BK)] = (s^\alpha)^n - a_{n-1}(s^\alpha)^{n-1} + \dots + a_1 s^\alpha + a_0 \quad (۶)$$

در زاویه مشخص شده قرار بگیرد. اکنون با تعریف $\lambda = s^\alpha$ داریم،

$$\det[I_n \lambda - (A + BK)] = \lambda^n - a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (۷)$$

فرض می‌کنیم $\arg(\lambda) = \phi$ و $\arg(s) = \Phi$ ، بنابراین $\phi = \alpha\Phi$ و برای $\Phi = \frac{\pi}{2}$ نتیجه زیر را داریم:

فرع ۱. [۳۰] اگر ریشه‌های چند جمله‌ای (۶) در سمت چپ صفحه مختلط قرار داشته باشند، ریشه‌های چندجمله‌ای (۷) در ناحیه‌ای مشخص شده با $\Phi = \frac{\pi}{2\alpha}$ در سمت چپ صفحه قرار می‌گیرند (به شکل ۲ نگاه کنید).

¹ Eigenvalue Assignment (EVA)

² Karbassi and Bell

³ Partial Eigenvalue Assignment (PEVA)

وقتی $H_0 \in R^{m \times n}$ ، همچنین، دو ماتریس \tilde{H} و \tilde{H}_λ متشابه هستند و دارای مقادیر ویژه یکسان، در نتیجه ماتریس پسخورد زوج (\tilde{A}, \tilde{B}) بصورت زیر تعریف می‌شود:

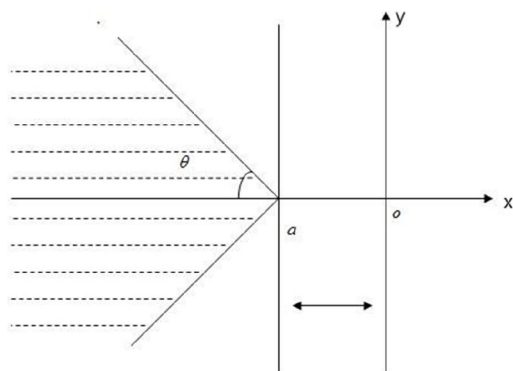
$$\tilde{K} = \tilde{F} + B_0^{-1}H_0 = B_0^{-1}(-G_0 + H_0) \quad (16)$$

قضیه ۵. ماتریس پسخورد حالت، مقادیر ویژه ماتریس $\tilde{F} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ را در ناحیه مشخص شده در شکل ۳ اختصاص می‌دهد. هرگاه فرض کنیم، α_j, β_j, d_j بفرم زیر باشند،

$$\begin{cases} \alpha_j = -k * \text{random}(0,1) + a & k \in N \\ \beta_j = |\alpha_j - a| * \tan(\theta) * \text{random}(0,1) \end{cases} \quad (17)$$

و برای تخصیص مقادیر ویژه حقیقی در بخش از پیش تعیین شده، d_j ها را بصورت زیر انتخاب می‌کنیم،

$$d_j = -k * \text{random}(0,1) + a \quad k \in N \quad (18)$$



شکل ۳- ناحیه مشخص شده در صفحه مختلط

از آنجا که \tilde{K} مقادیر ویژه $\tilde{F} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ را به ناحیه مشخص شده می‌برد، واضح است که کنترلگر $K = \tilde{K}T^{-1}$ هم مقادیر ویژه $\Gamma = A + BK$ را به ناحیه مطلوب تخصیص می‌دهد.

توجه داریم که برای تعیین مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته در طیف $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ فرض می‌کنیم که $D_j = \lambda_j$ برای $j = 1, 2, \dots, n$

۳-۱- الگوریتم

در این بخش ابتدا یک الگوریتم برای پیدا کردن ماتریس پسخورد بدست می‌آوریم که مقادیر ویژه صفر را به سیستم حلقه بسته اختصاص می‌دهد، سپس یک ماتریس بهره تعیین

یک ماتریس بالا مثلثی $B_0 \in R^{m \times m}$ و $G_0 \in R^{m \times n}$ وقتی است. ماتریس پسخوردی که همه مقادیر ویژه را به صفر می‌برد، بصورت زیر بدست می‌آید،

$$u = -B_0^{-1}G_0\tilde{x} = \tilde{F}\tilde{x}, \quad (10)$$

بنابراین، ماتریس پسخورد حالت اولیه برای زوج (B, A) بصورت $F_p = \tilde{F}T^{-1}$ است و ماتریس حلقه بسته بفرم زیر است:

$$\tilde{\Gamma}_0 = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F} = \begin{bmatrix} 0_{m \times n} \\ \vdots \\ I_{n-m} \quad \vdots \quad 0_{n-m \times m} \end{bmatrix} \quad (11)$$

قضیه ۴. [۲۲] ماتریس D بفرم زیر را در نظر بگیرید،

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_k \end{bmatrix}, \quad (12)$$

وقتی که $D_j = [d_j]$ یا $D_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}$ اگر ماتریس قطری D با طیف مشخص شده به ماتریس $\tilde{\Gamma}_0$ اضافه شود، آنگاه مقادیر ویژه ماتریس حاصل برابر مقدار ویژه طیف Λ است.

اثبات. با جمع D با $\tilde{\Gamma}_0$ داریم:

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_i & 0 & \dots & 0 \\ I_1 & 0 & \dots & 0 & D_{i+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & I_r & 0 & 0 & \dots & D_k \end{bmatrix}, \quad (13)$$

با محاسبه $\det(\tilde{H} - \lambda I)$ مشاهده می‌شود که مقادیر ویژه \tilde{H} مشابه مقادیر ویژه D است.

در ادامه، \tilde{H}_λ را با کمک عملیات سطری و ستونی مقدماتی،

$$\begin{cases} \text{Column}(j) - \lambda_j \text{Column}(i) \\ \text{Row}(i) + \lambda_j \text{Row}(j) \end{cases} \quad (14)$$

برای $j = n, n-1, \dots, m, i = j - m$ می‌توان بدست آورد، بنابراین،

$$\tilde{H}_\lambda = \begin{bmatrix} H_0 \\ \vdots \\ I_{n-m} \quad \vdots \quad 0_{n-m \times m} \end{bmatrix} \quad (15)$$

برای تخصیص مقادیر ویژه حقیقی از رابطه (۱۸) کمک می‌گیریم.

$$\text{گام دوم: محاسبه } \tilde{H} = \tilde{T}_0 + D$$

گام سوم: تبدیل \tilde{H} به \tilde{H}_λ با عملیات سطری و ستونی مقدماتی (۱۴).

گام چهارم: محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت $K = F_p + B_0^{-1}H_0T^{-1}$

۴- شبیه سازی عددی

در این بخش، سه مثال عددی برای نشان دادن کارایی و مقایسه روش پیشنهادی با نتایج قبلی ارائه شده است.

مثال ۱: سیستم (۳) با $\alpha = 0.8, q = 2$ و ماتریس‌های

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

برای این منظور ابتدا ماتریس پس‌خورد حالتی که مقادیر ویژه صفر را به سیستم حلقه بسته اختصاص می‌دهد (F_p) را بدست می‌آوریم،

$$F_p = \begin{bmatrix} 1.7090 & -2.2856 & -2.4735 & -0.7208 & -1.9936 & -3.5693 \\ -3.3175 & 0.8086 & 1.0540 & 0.2529 & 2.9120 & 2.6597 \\ -0.6196 & 0.5241 & 0.4805 & -0.3482 & -0.0022 & 0.6213 \\ -0.7398 & 0.5505 & 0.169 & -0.0580 & -0.129 & 0.5683 \end{bmatrix}$$

سپس ماتریس D

$$D = \begin{bmatrix} -10.3379 & 6.3831 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6.3831 & -10.3379 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -29.5564 & 2.2916 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.2916 & -29.5564 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5.9487 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8.4865 \end{bmatrix}$$

اکنون با استفاده از الگوریتم، ماتریس پس‌خورد حالت برابر است با:

می‌کنیم که مقادیر ویژه حلقه بسته را در بخش تعیین شده اختصاص می‌دهد.

ورودی: زوج کنترل پذیر (B, A) و ماتریس‌های T^{-1}

F_p و B_0^{-1} که از الگوریتم بیان شده در [۳۲]

بدست می‌آیند و زاویه θ و $\alpha \in Z_-$ که فاصله رأس زاویه از مبدأ صفحه مختلط است.

خروجی: ماتریس پس‌خورد حالت F بطوریکه سیستم حلقه بسته دارای مقادیر ویژه مورد نظر باشد.

گام اول: ماتریس قطری D از رابطه (۱۲) و برای

تخصیص مقادیر ویژه مختلط در زاویه مشخص

شده مطابق شکل ۳، α_j, β_j را از رابطه (۱۷) و

را در نظر بگیرید. فرض کنید:

$$\Phi = \frac{\pi}{2\alpha} = \frac{5\pi}{8} \Rightarrow \theta = \pi - \Phi = \frac{3\pi}{8}, \alpha = -2$$

با کمک رابطه (۵) داریم،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 8 & 3 & 7 & 7 \\ 8 & 5 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 9 & 1 & 8 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 7 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 2 & 8 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 & 0 \\ 9 & 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 9 \\ 7 & 4 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس حلقه باز (A) برابر است با،

$$\{26.5923, 1.1651 \pm 6.3264i, -7.9665, -3.2591, 0.3031\}$$

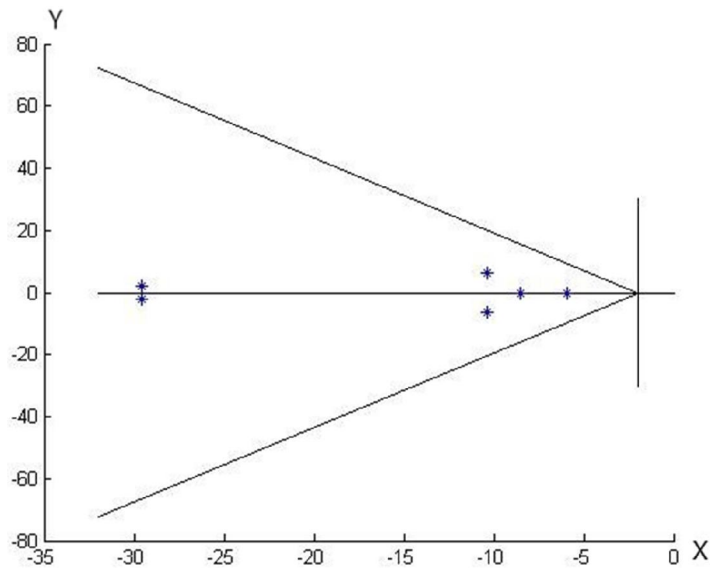
هستند که در تمام صفحه مختلط پخش شده‌اند، برای

تخصیص مقادیر ویژه در زاویه سمت چپ صفحه مختلط از

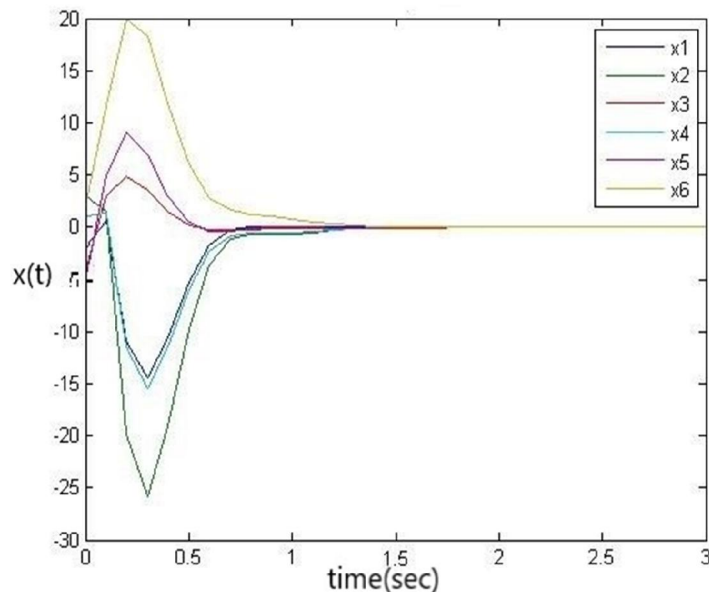
الگوریتم فوق استفاده می‌کنیم.

پاسخ سیستم با بردار اولیه $x(0) = [2, 1, 4, -1, 4, 0]^T$ در شکل‌های ۵ و ۶ نشان داده شده است. طبق شکل‌های فوق بردارهای حالت و ورودی به نقطه تعادل (صفر) همگرا و سیستم پایدارمجبانی است.

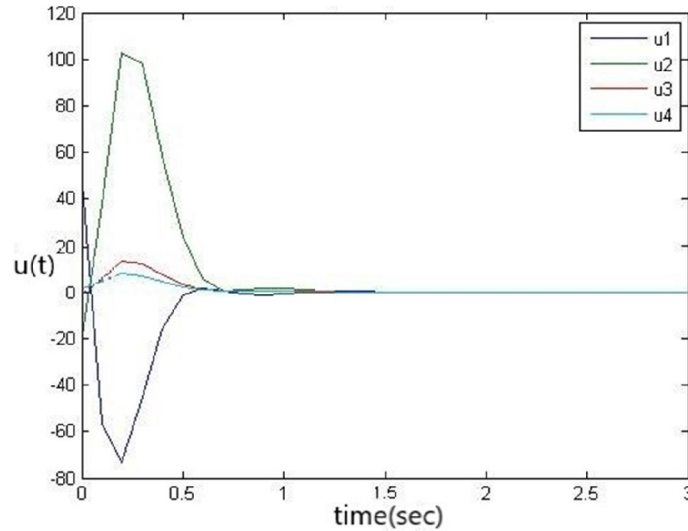
مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته Γ مطابق شکل ۴ در زاویه مشخص شده در سمت چپ صفحه مختلط قرار می‌گیرند و

$$K = \begin{bmatrix} -9.7703 & 2.8729 & -5.6276 & 4.4782 & -10.6416 & 4.4390 \\ 1.6779 & -2.2603 & 5.4429 & -4.1907 & 9.6850 & -6.6785 \\ 2.1476 & -2.7068 & 0.2609 & 0.8367 & 2.5684 & -2.4490 \\ 3.2015 & -1.3293 & -1.8310 & -0.9612 & 0.7471 & 0.2805 \end{bmatrix}$$


شکل ۴- نمایش مقادیر ویژه در ناحیه مشخص از مثال ۱



شکل ۵- رفتار همگرایی مولفه‌های بردار حالت در مثال ۱



شکل ۶- رفتار همگرایی مولفه های بردار ورودی در مثال ۱

از آنجا که سیستم (۱۹) مثبت است، بنابراین ما می‌توانیم روش پیشنهادی را با روش ارائه شده در [۳۰] مقایسه کنیم. با کمک قضیه ۳ و با انتخاب،

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.5 & 2 & 3.5 \\ 4 & 0 & 1.4 \end{bmatrix}$$

داریم،

$$A\Lambda + BD \in M_3, (A\Lambda + BD)1_3 < 0$$

روش ارائه شده در [۳۰] محدود به انتخاب ماتریس‌های D و Λ است و حساس به انتخاب درست و مناسب ماتریس D است، اما روش پیشنهادی الگوریتم ساده و پیچیدگی محاسباتی کمتری دارد.

مثال ۳. معادله حرکت روبات نیوکاسل بصورت زیر را در نظر بگیرید [۳۴]:

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) = mu(t)$$

یا

$$\ddot{q}(t) + 2\beta\dot{q}(t) + w^2q(t) = u(t) \quad (20)$$

مدل ارائه شده به همراه تاخیر حالت مرتبه کسری کوچکی بصورت زیر در نظر گرفته شده است

$$\ddot{q}(t) + 2\beta\dot{q}(t) + w^2q(t) = \gamma q(t-h) + \psi q^\alpha(t-h) + u(t) \quad (21)$$

مثال ۲. سیستم کسری تاخیری زیر را در نظر بگیرید:

$$D_t^{0.7}x(t) = \sum_{k=0}^2 [A_k x(t-k) + B_k u(t-k)] \quad (19)$$

وقتی،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

با استفاده از الگوریتم و با فرض اینکه $a = -2$ و $\theta = \frac{2\pi}{7}$

ماتریس پسخورد بصورت زیر بدست می‌آید:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -10.941 \\ -7.2261 & -0.45 & 1 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته بصورت زیر هستند:

$$\{-6.3884, -2.8377, -8.4411\}$$

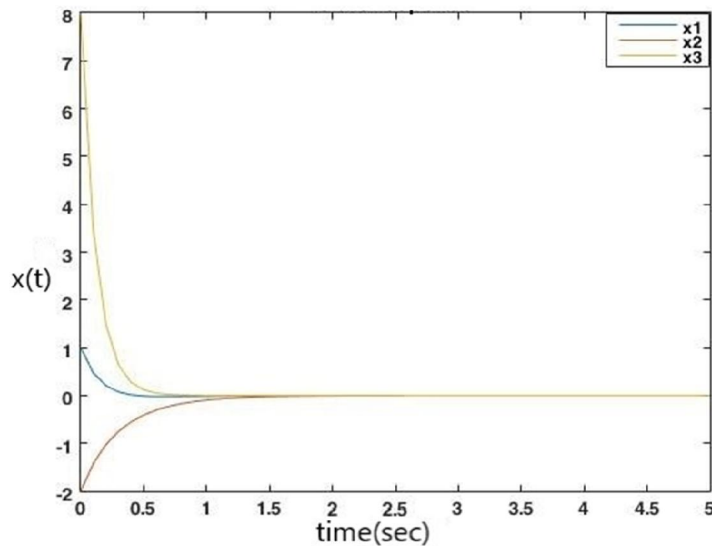
که همگی در ناحیه مشخص شده قرار دارند، به وضوح برطبق شکل‌های ۷ و ۸، بردارهای حالت و ورودی به نقطه تعادل همگرا هستند و سیستم پایدار مجانی است.

بر طبق قضیه ۲ و تعریف سیستم‌های مثبت برای

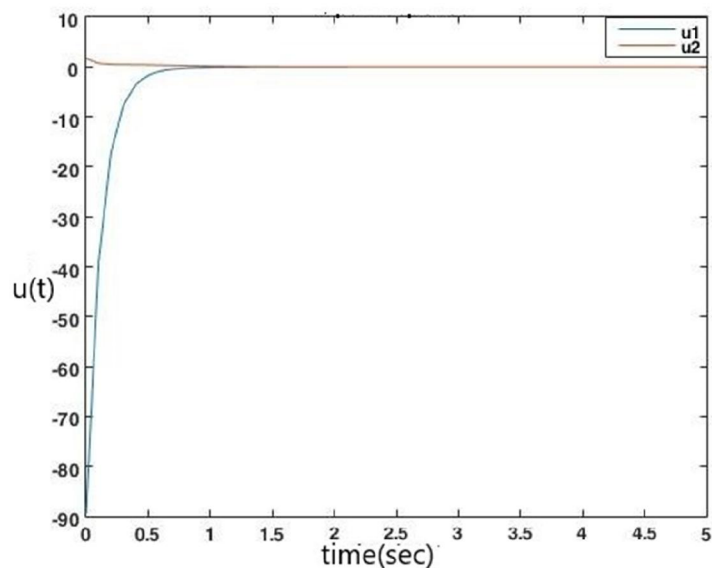
سیستم حلقه بسته (۱۹) داریم،

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -6.2261 & 0.55 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -8.4411 \end{bmatrix} \in M_3,$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in R_+^{3 \times 2}$$



شکل ۷- رفتار همگرایی مولفه‌های بردار حالت در مثال ۲



شکل ۸- رفتار همگرایی مولفه‌های بردار ورودی در مثال ۲

اکنون، می‌توان بر اساس مشتق مرتبه کسری در طرف راست، معادلات سیستم را بیان کرد، سیستم توصیف شده توسط معادله (۲۲) تحت شرایط اولیه داده شده را در نظر بگیرید. با انتخاب متغیرهای حالت بصورت زیر، معادلات فضای حالت (۲۲) که از مرتبه کسری است، بدست می‌آیند.

با شرایط اولیه

$$\begin{cases} q(t) = \varphi(t) \neq 0 - h \leq t \leq 0 \\ \dot{q}(t) = \phi(t) = 0 - h \leq t \leq 0 \\ q^\alpha(t) = \xi(t) = 0 - h \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (22)$$

$$x_1(t) = q(t), x_2(t) = q^\alpha(t), x_3(t) = \dot{q}(t), x_4(t) = q^{(\frac{3}{2})}(t)$$

$$\begin{cases} D_t^\alpha x_1(t) = D_t^{\frac{1}{2}} q(t) = x_2(t) \\ D_t^\alpha x_2(t) = D_t^{\frac{1}{2}} x_2 = x_3(t) \\ D_t^\alpha x_3(t) = D_t^{\frac{1}{2}} x_3 = x_4(t) \\ D_t^\alpha x_4(t) = \ddot{q}(t) = -2\beta x_3(t) - \omega^2 x_1(t) + \gamma x_1(t-h) + \psi x_2(t-h) + u(t) \end{cases}$$

انجام می‌دهد؛ همچنین با استفاده از تبدیلات تشابه‌ی، ماتریس بهره به راحتی و با پیچیدگی محاسباتی کمتری بدست می‌آید.

۴-۱- مقایسه روش‌ها

در این بخش، مزایای روش پیشنهادی را ارائه می‌دهیم و آن را با روش‌های موجود مقایسه می‌کنیم:

I. مزیت روش پیشنهادی، سادگی الگوریتم و کاهش

پیچیدگی محاسباتی نسبت به روش‌های ارائه شده در [۳۰، ۱۳] است و همچنین با کمک روش پیشنهادی ما می‌توانیم ماتریس پسخورد با کمترین نرم را بدست آوریم؛ زیرا مینیمم سازی نرم ماتریس بهره باعث کاهش مصرف انرژی یا هزینه و کاهش نوسانات سیگنال‌های کنترلی و بهبود عملکرد سیستم می‌شود.

II. در مثال ۲، روش پیشنهادی را با روش [۳۰] برای سیستم‌های مثبت مقایسه کردیم، با توجه به مثبت بودن سیستم (۱۹)، با کمک روش پیشنهاد شده، ماتریس پسخورد به آسانی بدست آمد؛ اما در روش بیان شده در [۳۰]، انتخاب مناسب و همزمان ماتریس‌های D و A آسان نیست. با این حال، این روش فقط برای سیستم‌های مثبت کاربرد دارد، اما روش پیشنهادی برای سیستم‌های خطی کسری با تأخیر زمانی ثابت قابل اعمال است.

III. در بسیاری از کاربردهای عملی در سیستم‌های کنترلی هدف، طراحی کنترلگری که باعث افزایش نرخ همگرایی به نقطه تعادل باشد، یکی از این روش‌ها تخصیص مقادیر ویژه در ناحیه مشخص شده در سمت چپ صفحه مختلط است، بطوریکه

بنابراین معادله فضای حالت از مرتبه کسری بصورت زیر است،

$$D_t^{0.5} X(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 & -2\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \psi & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-h) \\ x_2(t-h) \\ x_3(t-h) \\ x_4(t-h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (23)$$

همچنین، می‌توان بفرم زیر هم نمایش داد:

$$\begin{cases} D_t^{0.5} x(t) = AX(t) + A_d X(t-h) + Bt(t) \\ X(t) = \varphi_x(t), -h \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (24)$$

حال پارامترهای ربات را بصورت زیر در نظر می‌گیریم،

$$\omega^2 = 17 \frac{k}{m}, 2\beta = 12 \frac{c}{m}, \gamma = 1, \psi = 3, h = 1, a = -1,$$

جرم ($m=2500\text{kg}$)، ضریب اصطحکاک دمپینگ ($c=32\text{Ns/mm}$) و سختی خطی سنسورنیرو ($K=44.5\text{N/mm}$)

ماتریس پسخوردی که مقادیر ویژه زیر را

$$\{-12.4845, -5.4560, -4.7942, -2.0729\}$$

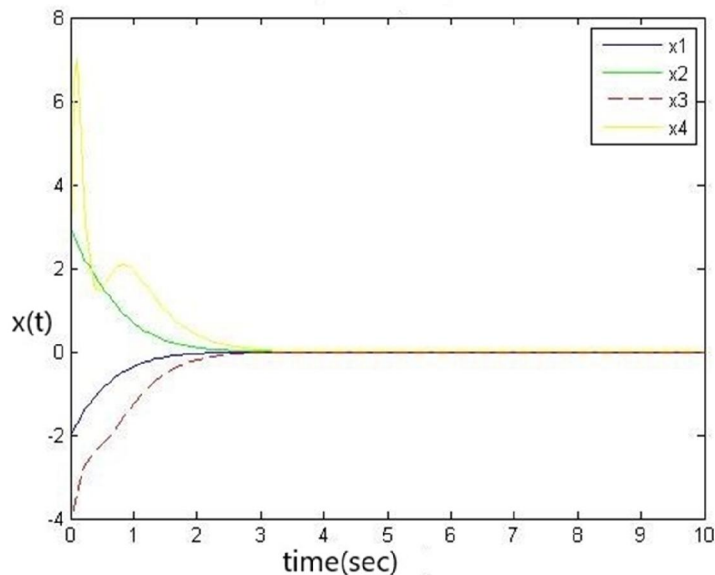
از سیستم حلقه بسته به سمت چپ صفحه مختلط انتقال می‌دهد بصورت زیر بدست می‌آید:

$$K = [-658.9295 \quad -643.0463 \quad -189.2523 \quad -24.8076]$$

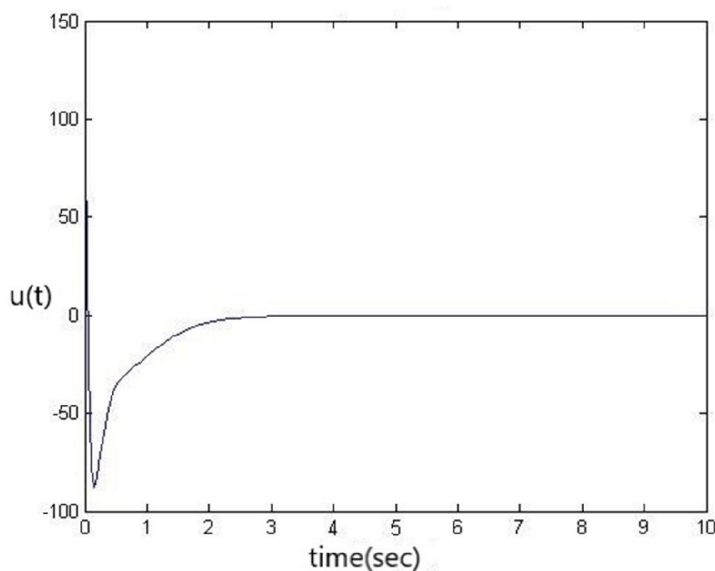
پاسخ سیستم در شکل ۸ نشان داده شده است. همانطور که در شکل‌های ۹ و ۱۰ می‌بینید، سیستم پایدار مجانبی است با بردار اولیه $x(0) = [-2, 3, -4, 1]^T$.

ما این مثال را با روش ارائه شده در [۱۴، ۱۳] مقایسه می‌کنیم که براساس کنترل مود لغزشی است، روش پیشنهادی بدون پیدا کردن سطح لغزشی مناسب و بررسی شرایط پیچیده لازم و کافی مساله را حل می‌کند و پایدارسازی کلاسی از سیستم‌های خطی کسری تاخیری را

¹ Sliding Modre Control (SMC)



شکل ۹- رفتار همگرایی مولفه‌های بردار حالت در مثال ۳



شکل ۱۰- رفتار همگرایی بردار ورودی در مثال ۳

بدست آورد، اما با روش [۳۰]، انتخاب مناسب ماتریس D با ابعاد بزرگ براحتی امکان پذیر نیست.
 V. از شکل‌های ۴ تا ۱۰، مشاهده می‌شود که محدود کردن دامنه پایداری در یک بخش مشخص از

با روش پیشنهادی و انتخاب مناسب a می‌توان سرعت همگرایی را افزایش داد.
 IV. برای سیستم‌های بزرگ مقیاس نیز می‌توان، براحتی با کمک روش پیشنهادی و روش تخصیص مقادیر ویژه جزئی (PEVA)، ماتریس پسخورد را

- [10] Hu JB, Lu GP, Zhang SB, Zhao LD (2014) Lyapunov stability theorem about fractional system without and with delay. *Commun Nonlinear Sci* doi:10.1016/j.cnsns.2014.05.013.
- [11] Zhang H, et al. (2018) Lyapunov functional approach to stability analysis of Riman-Liouville fractional neural networks with time-varying delays. *Asian J Control* 20(6): 114-120.
- [12] Naifar O, Nagy AM, Ben Makhlouf A, Kharrat M and Hammami MA (2018) Finite-time stability of linear fractional-order time-delay systems. *Int J Robust Nonlinear Control* 1-8.
- [13] Ammour A, Djennoune D, Bettayeb M (2016) Stabilization of fractional-order linear systems with state and input delay. *Asian J Control* 18(1): 1-9.
- [14] Yousefi M, Binazadeh T (2016) Delay-independent sliding mode control of time-delay linear fractional order systems. *T I Meas Control* 1-12.
- [15] Pakzad, MA, Nekoui MA (2014) Stability map of multiple time-delayed fractional-order systems. *Int J Control Autom* 12(1): 37-43.
- [16] Furuta T, Kim SB (1987) Pole assignment in a specified disk. *IEEE T Automat Contr* 32: 423-427.
- [17] Chou JH (1991) Pole assignment robustness in a specified disk. *Syst Control* 16: 41-44.
- [18] Figueroa JL, Romagnoli JA (1994) An algorithm for robust pole assignment via polynomial approach. *IEEE T Automat Contr* 3: 831-835.
- [19] Yuan, L, Achenie LEK, Jiang W (1996) Linear quadratic optimal output feedback control for systems with poles in a specified region. *Int J Control* 64: 1151-1164.
- [20] Benner P, Castillo M, Quintanaorti MS (2001) Partial stabilization of large-scale discrete-time linear control systems. Technical Report, University of Bremen, Germany.
- [21] Tehrani HA (2008) Assignment of eigenvalues in a disc $D(c, r)$ of Complex plane with application of the gerschgorin theorem. *World Appl Sci J* 5 (5): 576-581.
- [22] Ahsani Tehrani H (2013) Stabilization of dynamic systems by localization of eigenvalues in a specified Interval. *J Math Comput Sci* 7: 144-153.
- [23] Ayatollahi M (2013) Maximal and minimal eigenvalue assignment for discrete-time periodic systems by state feedback. *Optim Lett* 7: 1119-1123.
- [24] Franke M (2014) Eigenvalue assignment by static output feedback on a new solvability condition and the computation of low gain feedback matrices. *Int J Control* 87: 64-75.

صفحه مختلط و انتخاب درست α باعث افزایش سرعت همگرایی به نقطه تعادل و بهبود همگرایی سیستم حلقه بسته می‌شود.

۵- نتیجه گیری

یک الگوریتم جدید توسط کنترلگر پس‌خورده برای قرار دادن مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته در ناحیه مشخصی از صفحه مختلط معرفی شد. این روش با استفاده از خواص فرم همدم برداری و تبدیلات تشابهی بردار حالت بدست می‌آید. مزیت این روش نسبت به روش‌های موجود سادگی و پیچیدگی محاسباتی کمتر آن است؛ همچنین، روش پیشنهادی را می‌توان براحتی برای سیستم‌های بزرگ مقیاس، دوبعدی، تکین (توسیع یافته) و متناوب از مرتبه کسری نیز تعمیم داد.

۶- مراجع

- [1] Dzielinski A, Sierociuk D, Sarwas G (2010) Some applications of fractional-order calculus. *Bull Pol Ac Tech* 58(4): 583-592.
- [2] Rihan FA, Hashish A (2016) Dynamics of tumor-immune system with fractional-order. *Tumor Res* 2(1).
- [3] Pakzad MA, Nekoui MA, Pakzad S (2013) Stability analysis of time-delayed linear fractional-order systems. *Int J Control Autom* 11(3): 519-525.
- [4] Rihan FA, Lakshmanan S, et al. (2018) Fractional-order delayed predator-prey systems with Holling type-II functional response. *Nonlinear Dyn* (Doi:10.1007/s11071-015-1905-8).
- [5] Li y (2018) Stabilization of teleoperation systems with communication delays: An IMC approach. *J Robot* (<http://dx.doi.org/10.1155/2018/1018086>).
- [6] Fateh MM, Baluchzadeh M (2012) Optimal discrete-time control of robot manipulators in repetitive tasks. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 2(3): 35-44.
- [7] Friedman E (2014) Introduction to time-delay systems: Analysis and control. New York, Springer.
- [8] Matignon D (1996) Stability results on fractional diessential equations to control processing. *Computational Engineering in Systems and Application Multiconference* 2: 963-968.
- [9] Liu S, Jiang W, Li X, Zhou XF (2015) Lyapunov stability analysis of fractional nonlinear systems. *Appl Math Lett* (DoI: 10.1016/j.aml.2015.06.018).

- in sectors of left half complex plane by state-feedbacks. *Control Cybern* 39 (3): 783-795.
- [31] Kaczorek T (2009) Stability of positive continuous-time linear systems with delays. *Bull Pol Ac Tech* 57(4).
- [32] Karbassi SM, Bell DJ (1994) A new method of parametric eigenvalue assignment in state feedback control. *IEE Proceedings D141*: 223-226.
- [33] Tehrani HA, Enjili F (2014) A new method for the stability of discrete-time two-dimensional systems defined by the Roesser mode. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 4(2): 67-74.
- [34] Lazarevic, MP (2006) Finite time stability analysis of PD^α fractional control of robotic time-delay systems. *Mech Res Commun* 33: 269-279.
- [25] Liu M, Jing Y and Zhang S (2004) Regional pole assignment for uncertain delta-operator systems. *J Control Theory Appl* 4: 406-410.
- [26] Grammont L, Largila A (2006) Krylov method revisited with an application to the localization of eigenvalues. *Numer Func Anal Opt* 27: 583-618.
- [27] Ahsani Tehrani H (2014) Localization of eigenvalues in small specified regions of complex plane by state feedback matrix. *Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran* 25(2): 157-164.
- [28] Monje CA, et al. (2010) *Fractional-order systems and controls fundamentals and applications*. Springer, London.
- [29] Kaczorek T (2011) *Selected problems of fractional systems theory*. springer-verlag berlin heidelberg. doi: 10.1007/978-3-642-20502-6.
- [30] Kaczorek T (2010) Stabilization of fractional positive continuous-time linear systems with delays