



الگوریتم بازگشتی استخراج معادلات حرکت ربات فضایی چندبازویی با استفاده از معادلات لاگرانژ بر حسب شبه مختصات

عبدالمجید خوشنود^۱، سینا حیدری صومعه^{۲*} و محمدرضا حسینی نامی^۳

^۱ دانشیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

^۲ کارشناس ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

^۳ کارشناس ارشد، مهندسی هوافضا، پژوهشکده سامانه های فضایی

مقاله مستقل؛ تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۱/۲۲؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۰۴/۳۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۰/۰۸

چکیده

استخراج معادلات حرکت ربات‌های فضایی چند بازویی با توجه به تعداد درجات آزادی بالا به امری مشکل بدل می‌گردد؛ لذا به دست آوردن روشی ساده امری ضروری است که حین شبیه‌سازی دینامیکی بتواند این سیستم‌های پیچیده را مدل‌سازی کند. در این مقاله، الگوریتمی جهت تشکیل معادلات حرکت یک ربات فضایی با تعداد دلخواهی بازو که هر بازو متشکل از تعدادی لینک دلبخواه است، با استفاده از معادلات لاگرانژ بر حسب شبه مختصات به دست آمده است. نوآوری این مقاله در به دست آوردن فرمی ابتکاری است که در آن دیگر نیازی به تشکیل انرژی جنبشی و محاسبه مشتقات جزئی وجود ندارد و در نتیجه پیچیدگی‌های معمول روش لاگرانژ حذف شده است. جهت استخراج معادلات حرکت، ابتدا معادلات حرکت با استفاده از فرمولاسیون لاگرانژ بر حسب شبه مختصات بیان شده است. در ادامه با استفاده از روابط سینماتیکی بازگشتی به محاسبه ترم‌های مشتقات جزئی موجود در معادلات حرکت پرداخته شده است. در نهایت یک ربات دو بازویی که هر بازو متشکل از دو لینک با مفاصل دورانی است، با استفاده از الگوریتم بازگشتی معرفی شده در این مقاله مدل‌سازی و در نرم‌افزار متلب شبیه‌سازی شده است. سپس نتایج شبیه‌سازی با نمودارهای حاصل از نرم‌افزار آدامز مقایسه گردیده. صحت الگوریتم ذکر شده با توجه به تطابق نمودارها اثبات گردیده است.

کلمات کلیدی: ربات فضایی چند بازویی؛ معادلات حرکت؛ الگوریتم بازگشتی؛ شبه مختصات.

A Recursive Algorithm to Exploit a Multiple-Arm Space Manipulator Equations of Motion by the Lagrange Method in terms of Quasi-Coordinates

A. Khoshnood¹, S.H. Someeh^{2,*}, M. H. Nami³

¹ Assoc. Prof., Aerospace Eng., Khajeh Nasir Toosi Univ., Tehran, Iran.

² Msc., Aerospace Eng., Khajeh Nasir Toosi Univ., Tehran, Iran.

³ Msc., Aerospace Eng., Satellite research center, Tehran, Iran.

Abstract

According to high degrees of freedom of multiple-arm space manipulators, it is cumbersome to exploit equations of motion of such systems. In this paper, an algorithm is provided by using Lagrange equations in terms of quasi-coordinates to construct equations of motion of a space robot with multiple arms which each arm has an arbitrary number of links. Lack of constructing kinematic energy. To exploit equations of motion, first equations of motion have been expressed by Lagrange formulation in terms of quasi-coordinates. The innovation in this paper is lied within a novel form which results in the elimination of computing kinematic energy term and partial derivatives, therefore the common complexities of Lagrange method gets vanished. Then the calculation of partial derivative terms has been done by using recursive kinematic equations. At the end a dual arm robot, which each arm has two links with spherical joints, has been modeled by the recursive algorithm presented in this paper and simulated by MATLAB. Then, the results of simulation have been compared by line graphs conducted by ADAMS. Authenticity of the aforementioned algorithm has been proved by correspondence of attained figures.

Keywords: Multiple-Arm Space Manipulator; Equations of Motion; Recursive Algorithm; Quasi-Coordinates.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۲۱ ۷۳۰۶۴-۲۱۵؛ فکس: ۰۲۱ ۷۷۷۹-۱۰۴۵

آدرس پست الکترونیک: khoshnood@kntu.ac.ir

۱- مقدمه

اغلب ماهواره‌های ارسال شده به فضا مأموریت خود را با موفقیت به اتمام می‌رسانند، اما در برخی از موارد با شکست-هایی نیز مواجه شده‌اند. در گذشته شکست‌های حامل از تعداد بیش‌تری نسبت به شکست‌های مدارهای برخوردار بود؛ اما پیشرفت فناوری در زمینه طراحی و ساخت حامل‌ها، منجر به وارونه شدن نسبت فوق شده است. علاوه بر این، سوخت هر ماهواره‌ی پرتاب شده در نهایت به اتمام می‌رسد و باید از رده خارج گردد، حتی اگر ماهواره به‌طور کامل عملیاتی باشد. بنا به دلایل ذکرشده، ناسا در اوایل دهه ۸۰ میلادی به اهمیت عملیات سرویس در مدار جهت حفظ دارایی‌هایش پی برد. لغت سرویس مداری (OOS¹) به نگهداری سامانه‌های فضایی در مدار شامل، تعمیر، مونتاژ، سوخت‌گیری و یا ارتقا فضایی، اشاره دارد. شایان ذکر است، این مأموریت‌های پیچیده فضایی انگیزه توسعه فناوری‌های نوین رباتیک در فضا و برخی آزمایش‌های بی‌سرنشین و سرنشین دار شده است [۱].

یک سیستم رباتیک فضایی (که تحت عنوان منیپولاتور فضایی یا ربات فضایی نیز شناخته می‌شود) برای یک مأموریت OOS به‌طور معمول شامل سه جزء اصلی است: فضایی پایه یا ماهواره سرویس‌دهنده، یک یا چند منیپولاتور n درجه آزادی متصل به ماهواره‌ی سرویس‌دهنده و فضایی‌های هدف که باید مورد سرویس قرار گیرد.

فرآیند گیراندازی وظیفه‌ی اصلی یک ربات فضایی است. پس از اتمام مانورهای تقرب دوربرد و کوتاه‌برد، فضایی‌های سرویس‌دهنده در یک فاصله ایمن قرار می‌گیرد. سپس عملیات گیراندازی شروع می‌شود که خود به چهار فاز تقسیم می‌شود؛ فاز اول در رابطه با مشاهده و طرح‌ریزی جهت دریافت حرکت و مشخصات فیزیکی ماهواره هدف است. در این فاز طرح گرفتن هدف توسط بازوی رباتیک ریخته می‌شود؛ فاز دوم شامل کنترل ربات جهت حرکت به سوی مکان گیراندازی تعیین شده است، به طوری که بازوی رباتیک آماده‌ی گیر انداختن هدف باشد؛ فاز سوم شامل گیراندازی هدف (برخورد فیزیکی) است که در آن بازوی رباتیک قطعه‌ی گیراندازی ماهواره هدف را به طور فیزیکی می‌گیرد؛ فاز چهارم، فاز پسا گیراندازی است. در این فاز هدف

گیرانداخته شده به همراه سیستم سرویس دهنده پایدار می‌شود [۲].

استفاده از ربات‌های چند بازویی دارای مزایایی از دیدگاه عملیات مداری است. در این گونه ربات‌ها، یکی از بازوها جهت ردیابی مسیر مورد استفاده قرار می‌گردد؛ در حالی که بازوهای دیگر وظیفه جبران عکس‌العملی را بر عهده دارند که به پایه ربات وارد شده است [۳]. از همین رو استخراج معادلات حرکت ربات‌های چند بازویی جهت شبیه‌سازی دینامیکی و طراحی سیستم کنترل، امری بسیار ضروری است.

امروزه روش‌های بسیاری جهت استخراج معادلات حرکت مورد استفاده قرار می‌گیرند که هر یک دارای مزایا و معایبی هستند. هوکر و مارگولیس از الگوریتمی استفاده کردند که بر پایه‌ی روش نیوتن-اوایلر بود، جهت استخراج معادلات حرکت یک سری از اجسام صلب متصل به یکدیگر که نویسندگان تحت عنوان "درخت توپولژیک" آن را معرفی نموده‌اند [۴]. این روش گرچه منجر به معادلات حرکت نسبتاً ساده‌ای می‌شود، اما حذف جبری نیروها و گشتاورهای قیدی به وجود آمده در حین استخراج معادلات امری طاقت‌فرسا است. دیگر روش موجود اصل دالامبر است که در آن باید ترم‌های شتاب و مشتقات سرعت زاویه‌ای محاسبه شوند که منجر به محاسبات جبری بسیار طولانی می‌شود [۵]. وفا و دوبوسکی بر اساس مفهومی ابتکاری، تحت عنوان "منیپولاتور مجازی"^۲، اقدام به استخراج معادلات حرکت کردند [۶]. موسویان و پاپادوپولس در پژوهشی، دو روش بردار گرانیگاهی^۳ و روش مسیر مستقیم را با یکدیگر مقایسه کرده و نشان داده‌اند که روش بردار گرانیگاهی به طور محسوسی از حجم محاسبات کمتری جهت تحلیل مکان و سرعت برخوردار است که منجر به معادلاتی با ترم‌های ساده‌تر می‌گردد [۷]؛ همچنین، موسویان و پاپادوپولس با استفاده از فرمولاسیون لاگرانژ اقدام به مدل‌سازی یک ربات آزاد پرواز فضایی چند بازویی کرده‌اند [۸]. اگرچه این روش معایب روش‌های ذکر شده را نداشت، اما نیاز به محاسبه مشتقات جزئی برای یک سیستم پیچیده منجر به یک روند بسیار

² Virtual Manipulator

³ Barycentric Vector method

¹ On-Orbit Servicing

سیستم‌های مکانیکی، احتمال پایه‌ریزی فرمی از معادلات بولتزمن-هامل، مناسب برای سیستم مورد نظر وجود دارد. همان‌طور که پیش‌تر نیز اشاره شد، از مزایای معادلات بولتزمن-هامل، قابلیت ارائه فرم‌های متفاوتی از آن است که می‌تواند به ازای حالت‌های خاصی از سیستم‌های دینامیکی، از پیچیدگی‌ها و جزئیات فراوان فرم رایج این معادلات اجتناب نماید. نوآوری این مقاله در استخراج فرمی از معادلات بولتزمن-هامل است که برای سیستم دینامیکی مورد بررسی در این مقاله، دارای مزیت قابل‌توجهی است. مزیت این فرم، عدم نیاز به تشکیل انرژی جنبشی به صورت تابعی از مختصات تعمیم‌یافته و شبه‌سرعت‌ها است که تأثیر چشم‌گیری در کاهش پیچیدگی‌های محاسباتی دارد. این مزیت در حالی حاصل شده است که ایده اولیه، صرفاً به استفاده از حساب دیفرانسیل ماتریسی از همان ابتدای استخراج فرم مذکور خلاصه می‌شود.

در این مقاله، در بخش دوم دینامیک جسم صلب مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس در بخش سوم معادلات لاگرانژ برای ربات فضایی بر حسب شبه مختصات معرفی می‌گردد که در این بخش زیربخش‌هایی همچون معرفی مدل و انرژی ربات فضایی نیز مطرح شده است. در بخش چهارم روابط سینماتیکی به فرم بازگشتی ارائه شده است و در ادامه در بخش پنجم به محاسبه مشتقات جزئی پرداخته شده است. در بخش ششم شبیه‌سازی و صحت‌سنجی مدل به دست آمده برای یک ربات فضایی دو بازویی ارائه شده است. در انتها در بخش هفتم نتیجه‌گیری آورده شده است که اهم آن بدین شرح است که روشی بر پایه روش لاگرانژ ارائه شده است که خاصیت بازگشتی دارد. با توجه به عدم نیاز به تشکیل رابطه انرژی و مشتق‌گیری به صورت جزئی از آن بر اثر استفاده از شبه مختصات، این روش از سهولت و حجم محاسباتی کمتر نسبت به روش لاگرانژ برخوردار است.

۲- دینامیک جسم صلب

فرم ماتریسی معادلات نیوتن-اولر برای یک جسم صلب متحرک در فضا با استفاده از نقطه مرکز جرم عبارت است از:

$$m\dot{V} + [\omega]mV = \sum_{sys} F \quad (1)$$

$$I\dot{\omega} + [\omega]I\omega = \sum_{sys} M \quad (2)$$

طولانی و معادلات حرکت بغرنج گردید [۹]. کیلاو^۱ و ماير با استفاده از مفهوم هندسه دیفرانسیلی در فضای ریمانی و مفهوم گروه‌های لی روشی را ابداع نمودند که فارغ از مشتق‌گیری بود. آن‌ها از این روش برای استخراج معادلات حرکت یک سازه درختی غیرهولونومیک بر پایه روش لاگرانژ استفاده کردند [۱۰]. در پژوهشی دیگر خوشنود و همکاران، تلاطم سوخت را در یک وسیله نقلیه هوافضایی تحت عنوان مدل‌سازی دینامیکی چند جسمی در نظر گرفته و با استفاده از معادلات بولتزمن-هامل به استخراج معادلات دینامیکی آن پرداخته‌اند [۱۱].

از جمله مقالات داخلی ارائه شده در زمینه استخراج معادلات دینامیکی می‌توان به کار پژوهشی خوشنود و مرادی اشاره کرد که در آن جهت مدل‌سازی یک ماهواره با صفحه‌های خورشیدی انعطاف‌پذیر از روابط لاگرانژ استفاده شده است [۱۲]. پرهیخته و همکاران برای مدل‌سازی یک ربات سیار چرخ‌دار نیز از روش لاگرانژ استفاده کرده‌اند [۱۳] و در مقاله‌ای دیگر فاتح و کیقبادی برای مدل‌سازی دینامیکی یک ربات تک چرخ الکتریکی از روشی مشابه بهره‌جسته‌اند [۱۴]. همچنین خوشنود و همکاران با استفاده از فرمی ابتکاری بر اساس معادلات بولتزمن-هامل اقدام به مدل‌سازی دینامیکی ربات‌های فضایی و زمینی در حالت زنجیر باز کردند [۱۵]. کورایم و شافعی با استفاده از روش گیبس-اپل بازگشتی روند استخراج معادلات حرکت یک ربات با مفاصل دورانی-کشویی را نشان داده‌اند [۱۶].

ایده‌ی اساسی معادلات بولتزمن-هامل بر مفاهیمی تحت عنوان "شبه مختصات" و "شبه سرعت‌ها" استوار است؛ کمیت‌هایی که در مقابل "مختصات تعمیم‌یافته" و "سرعت‌های تعمیم‌یافته" در روش لاگرانژ قرار می‌گیرند. معادلات بولتزمن-هامل به علت استفاده از مفاهیم مذکور و نیز به این دلیل که از معادلات لاگرانژ استخراج می‌شود، در برخی مراجع "معادلات لاگرانژ بر حسب شبه مختصات" نیز نامیده شده است. از شاخصه‌های بارز این روش مدل‌سازی، قابلیت تغییر فرم آن است، به گونه‌ای که به ازای هر ساختار از

¹ Keilau

$$Q_p = \sum_{sys} \frac{\partial(p + C^T \rho)}{\partial p} C^T F = \sum_{sys} C^T F \quad (6)$$

$$Q_\theta = \sum_{sys} \frac{\partial(p + C^T \rho)}{\partial \theta} C^T F \\ = \sum_{sys} \left(\frac{\partial C^T \rho}{\partial \theta} \right) C^T F \quad (7)$$

با قرار دادن معادلات فوق در سمت راست معادلات (۴) و (۵)، معادلات دینامیکی به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$m\dot{V} + CC^T mV = \sum_{sys} CC^T F = \sum_{sys} F \quad (8)$$

$$I\dot{\omega} + (D^T)^{-1} \left(\dot{D}^T - \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) I\omega + \left(-(D^T)^{-1} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) mV \\ = \sum_{sys} (D^T)^{-1} \left(\frac{\partial C^T \rho}{\partial \theta} \right) C^T F \quad (9)$$

در معادله (۹) عبارتی حاوی مومنوم خطی دیده می‌شود که در معادله‌ی (۲) حضور ندارد. برای اینکه امکان مقایسه دو معادله مذکور فراهم گردد، یک عبارت صفر به صورت mV به طرف چپ معادله‌ی (۲) اضافه می‌گردد. بدین ترتیب، معادله‌ی (۲) را می‌توان به صورت (۱۰) نیز نوشت:

$$I\dot{\omega} + \llbracket \omega \rrbracket I\omega + \llbracket V \rrbracket mV = \sum_{sys} M \quad (10)$$

حال با تفریق معادله‌ی (۱) از معادله (۸) و نیز تفریق (۲) از معادله (۱۰)، روابطی به صورت (۱۱-۱۲) حاصل می‌گردند:

$$\llbracket \omega \rrbracket - CC^T mV = 0 \quad (11)$$

$$\left(\llbracket \omega \rrbracket + (D^T)^{-1} \left(\dot{D}^T - \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) \right) I\omega \\ + \left(\llbracket V \rrbracket + (D^T)^{-1} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) mV \\ = \sum_{sys} (D^T)^{-1} \left(\frac{\partial C^T \rho}{\partial \theta} \right) C^T F \\ = \sum_{sys} \left(\llbracket \rho \rrbracket - (D^T)^{-1} \left(\frac{\partial C^T \rho}{\partial \theta} \right) C^T \right) F \quad (12)$$

حال می‌توان اثبات نمود که تمامی عبارت‌های داخل پرانتز صفرند. به عبارت دیگر، خواهیم داشت:

$$\dot{C} = -\llbracket \omega \rrbracket C = 0 \quad (13)$$

در آن m جرم جسم، I ماتریس اینرسی حاصل از تجزیه‌ی تانسور اینرسی جسم در یکی از دستگاه‌های بدنی آن، V ماتریس ستونی حاصل از تجزیه بردار سرعت خطی مرکز جرم جسم صلب نسبت به چارچوب اینرسی در دستگاه بدنی، ω ماتریس ستونی حاصل از تجزیه بردار سرعت زاویه‌ای جسم صلب نسبت به چارچوب مرجع اینرسی تجزیه شده در دستگاه بدنی، F ماتریس ستونی حاصل از تجزیه بردار برآیند نیروهای خارجی وارد بر جسم در دستگاه بدنی و M ماتریس ستونی حاصل از تجزیه بردار برآیند گشتاورهای وارد بر جسم صلب حول مرکز جرم در دستگاه بدنی هستند؛ همچنین عملگر ماتریسی کراس^۱ به صورت رابطه (۳) تعریف می‌شود:

$$a = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \llbracket a \rrbracket \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

از طرفی با ترکیب معادلات به دست آمده در مرجع جانکینز [۱۷] و روش‌های حساب دیفرانسیل ماتریسی، می‌توان نشان داد که معادلات حرکت جسم صلب با استفاده از روش شبه مختصات به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$m\dot{V} + CC^T mV = CQ_p \quad (4)$$

$$I\dot{\omega} + (D^T)^{-1} \left(\dot{D}^T - \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) I\omega \\ + \left(-(D^T)^{-1} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) mV = (D^T)^{-1} Q_\theta \quad (5)$$

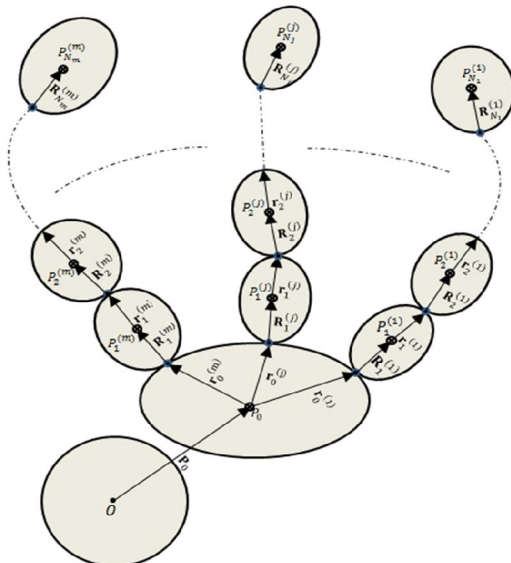
که در آن C ماتریس دوران از دستگاه اینرسی به دستگاه بدنی، p ماتریس ستونی حاصل تجزیه بردار مکان مرکز جرم در دستگاه اینرسی، θ ماتریس ستونی حاوی زوایای وضعیت دستگاه بدنی نسبت به دستگاه اینرسی، D ماتریس تبدیل از نرخ زمانی زوایای وضعیت (θ) به سرعت زاویه‌ای (ω) از Q_p و Q_θ نیز به ترتیب نیروهای تعمیم یافته‌ی متناظر با p و θ هستند. اگر F ماتریس ستونی حاصل از تجزیه \vec{F} (یک نیروی دلخواه وارد شده بر جسم) در دستگاه بدنی و ρ ماتریس ستونی حاصل از تجزیه بردار مکان محل اعمال \vec{F} نسبت به مرکز جرم در دستگاه بدنی باشند، آنگاه با استفاده از تعریف نیروهای تعمیم یافته، خواهیم داشت:

² Matrix Cross Operator

دستگاهی غیر از دستگاه بدنی لینک α از بازوی β بیان شود، به یک ماتریس اینرسی با درایه‌های متغیر با زمان می‌انجامد. واضح است که چنین حالتی به علت نیاز به مشتق‌گیری‌های جزئی و زمانی از ماتریس‌های اینرسی مطلوب نیست. همچنین عبارت $\Omega_\alpha^T(\beta)I_\alpha(\beta)\Omega_\alpha(\beta)$ تنها زمانی می‌تواند در رابطه‌ی انرژی جنبشی مورد استفاده قرارگیرد که $\Omega_\alpha(\beta)$ نیز همانند $I_\alpha(\beta)$ در دستگاه بدنی لینک α از بازوی β بیان شده باشد؛ همچنین بیان سرعت‌های خطی در دستگاه بدنی به روابط سینماتیکی بازگشتی منظم‌تری می‌انجامد.

۳-۲- معرفی مدل

ربات‌های فضایی را می‌توان به‌صورت مجموعه‌ای متشکل از یک بدنه‌ی اصلی (فضایم‌ای ربات) و یک یا چند بازوی منشعب شده از فضایم‌ا در نظر گرفت، به طوری که هر یک از بازوها دارای تعداد معلومی لینک باشند. در این مقاله به منظور نشان دادن قابلیت و جامعیت روش ارائه شده الگوریتمی جهت تشکیل معادلات حرکت یک ربات فضایی با آرایش هندسی معلوم، اما با تعداد دلخواه بازو و لینک ارائه شده است (شکل ۱). به‌علاوه، مفاصل در حالت کلی دارای یک تا سه درجه آزادی دورانی هستند.



شکل ۱- شماتیک یک ربات فضایی چند بازویی

$$(D^T)^{-1} \left(\dot{D}^T - \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) = \llbracket \omega \rrbracket \quad (14)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -D^T \llbracket V \rrbracket \quad (15)$$

$$\frac{\partial C^T \rho}{\partial \theta} = D^T \llbracket \rho \rrbracket C \quad (16)$$

به علاوه، با توجه به اینکه $V = C\dot{p}$ و با استفاده از اتحادهای مرتبط با عملگر کراس، معادله (۱۵) به صورت (۱۷) قابل بازنویسی است:

$$\frac{\partial C\dot{p}}{\partial \alpha} = -D^T \llbracket C\dot{p} \rrbracket = -D^T C \llbracket \dot{p} \rrbracket C^T \quad (17)$$

در ادامه اشاره می‌شود، روابطی مشابه معادلات (۸) و (۹) برای ربات فضایی (به عنوان سیستمی متشکل از چندین جسم صلب با اتصالات مفصلی) نیز قابل استخراج است که در مدل‌سازی دینامیکی ربات فضایی بسیار مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

۳- معادلات لاگرانژ بر حسب شبه مختصات برای ربات فضایی

این بخش خود به چند زیربخش تقسیم می‌گردد که در ادامه آورده شده است.

۳-۱- انرژی جنبشی ربات فضایی

با توجه به خاصیت جمع‌پذیری، انرژی جنبشی ربات فضایی به صورت مجموع انرژی‌های جنبشی تک تک اعضای ربات محاسبه می‌گردد. به عبارت دیگر، به سادگی می‌توان نوشت:

$$K = \frac{1}{2} m_0 V_0^T V_0 + \frac{1}{2} \omega_0^T I_0 \omega_0 + \sum_{\beta=1}^n \sum_{\alpha=1}^{n_\beta} \left(\frac{1}{2} m_\alpha(\beta) V_\alpha^T(\beta) V_\alpha(\beta) + \Omega_\alpha^T(\beta) I_\alpha(\beta) \Omega_\alpha \right) \quad (18)$$

که در آن β ، α و n_β به ترتیب شمارنده‌ی لینک‌ها، شمارنده‌ی بازوها، تعداد لینک‌های بازوی β و تعداد بازوها هستند. نکته حائز اهمیت‌تری که در مورد رابطه‌ی انرژی جنبشی وجود دارد، این است که کمیت‌های ماتریسی $I_\alpha(\beta)$ ، $V_\alpha(\beta)$ و $\Omega_\alpha(\beta)$ همگی در دستگاه بدنی متناظر با اندیس-شان بیان شده‌اند. تانسور اینرسی $\vec{I}_\alpha(\beta)$ در صورتی که در

در کلیه روابط فوق عبارات زیر صادق است:

$$\beta = 1, \dots, n, \quad \alpha = 1, \dots, n_\beta, \quad V_0(\beta) = V_0 \quad (28)$$

۳-۴- محاسبه مشتقات جزئی

همانطور که در معادلات (۱) مشاهده می‌شود، چهار عبارت حاوی مشتق جزئی به صورت $\frac{\partial K}{\partial \omega_i(j)}$ ، $\frac{\partial K}{\partial \omega_0}$ و $\frac{\partial K}{\partial V_0}$ وجود دارند که در ادامه به محاسبه‌ی آن‌ها پرداخته خواهد شد. با مشتق‌گیری از طرفین رابطه‌ی (۱۸) نسبت به V_0 و استفاده از قاعده زنجیره‌ای در حساب و دیفرانسیل ماتریسی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial K}{\partial V_0} = m_0 V_0 + \sum_{\beta=1}^{n_\beta} \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial V_\alpha(\beta)}{\partial V_0} m_\alpha(\beta) V_\alpha(\beta) \right) \quad (29)$$

حال برای محاسبه‌ی $\frac{\partial V_\alpha(\beta)}{\partial V_0}$ از رابطه‌ی (۲۷) داریم:

$$\frac{\partial V_\alpha(\beta)}{\partial V_0} = \frac{\partial V_{\alpha-1}(\beta)}{\partial V_0} [C_{\alpha-1}^\alpha(\beta)]^T \quad (30)$$

که در آن:

$$\beta = 1, \dots, n, \quad \alpha = 1, \dots, n_\beta \quad (31)$$

رابطه‌ی فوق بیانگر یک رابطه بازگشتی است که با قرار دادن $\alpha = 1$ ، تمامی مقادیر $\frac{\partial V_\alpha(\beta)}{\partial V_0}$ را در اختیار می‌گذارد. به ازای $\alpha = 1$ رابطه‌ی اخیر به صورت (۳۲) به دست می‌آید:

$$\frac{\partial V_1(\beta)}{\partial V_0} = \frac{\partial V_0(\beta)}{\partial V_0} [C_0^1(\beta)]^T = [C_0^1(\beta)]^T \quad (32)$$

با طی روندی مشابه، عبارت $\frac{\partial K}{\partial \omega_0}$ به صورت (۳۳) محاسبه می‌گردد:

$$\frac{\partial K}{\partial \omega_0} = I_0 \omega_0 + \sum_{\beta=1}^{n_\beta} \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial V_\alpha(\beta)}{\partial \omega_0} m_\alpha(\beta) V_\alpha(\beta) + \Omega_\alpha^T(\beta) I_\alpha(\beta) \Omega_\alpha \right) \quad (33)$$

با مشتق‌گیری از طرفین رابطه‌ی (۲۴) نسبت به ω_0 داریم:

$$\frac{\partial \Omega_\alpha(\beta)}{\partial \omega_0} = \frac{\partial \Omega_{\alpha-1}(\beta)}{\partial \omega_0} [C_{\alpha-1}^\alpha(\beta)]^T \quad (34)$$

از طرفی به ازای $\alpha = 1$ ، رابطه‌ی زیر حاصل می‌گردد:

$$\frac{\partial \Omega_1(\beta)}{\partial \omega_0} = \frac{\partial \Omega_0(\beta)}{\partial \omega_0} [C_0^1(\beta)]^T = [C_0^1(\beta)]^T \quad (35)$$

بدین ترتیب، عبارت $\frac{\partial \Omega_\alpha(\beta)}{\partial \omega_0}$ به ازای سایر مقادیر α از رابطه‌ی (۳۴) به دست می‌آیند.

با انجام محاسبات طولانی که در مرجع [۱۶] آورده شده است، می‌توان نشان داد که معادلات لاگرانژ بر حسب شبه مختصات برای ربات فضایی نشان داده شده در شکل ۱ به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\left(\frac{d}{dt} + \llbracket \omega_0 \rrbracket \right) \frac{\partial K}{\partial V_0} = F_0 \quad (19)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \llbracket \omega_0 \rrbracket \right) \frac{\partial K}{\partial \omega_0} + \llbracket V_0 \rrbracket \frac{\partial K}{\partial V_0} = M_0 \quad (20)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \llbracket \omega_i(j) \rrbracket \right) \frac{\partial K}{\partial \omega_i(j)} + E_i(j) = M_i(j) \quad (21)$$

در آن $E_i(j)$ به صورت رابطه (۲۲) تعریف می‌شود:

$$E_i(j) \stackrel{\text{def}}{=} -(D_i^T(j))^{-1} \frac{\partial K}{\partial \vartheta_i(j)} \quad (22)$$

۳-۳- تحلیل سینماتیکی به فرم بازگشتی

قضیه جمع سرعت‌های زاویه‌ای ایجاب می‌کند که:

$$\vec{\Omega}_\alpha(\beta) = \vec{\Omega}_{\alpha-1}(\beta) + \vec{\omega}_\alpha(\beta) \quad (23)$$

که در آن $\vec{\omega}_\alpha(\beta)$ سرعت زاویه‌ای لینک α از بازوی β نسبت به لینک $\alpha - 1$ از همان بازو است. بیان ماتریسی معادله فوق عبارت است از:

$$\Omega_\alpha(\beta) = C_{\alpha-1}^\alpha(\beta) \Omega_{\alpha-1}(\beta) + \omega_\alpha(\beta) \quad (24)$$

رابطه‌ی (۲۵) ارتباط میان بردارهای مکان را مشخص می‌کند:

$$\vec{P}_\alpha(\beta) = \vec{P}_{\alpha-1}(\beta) + \vec{r}_{\alpha-1}(\beta) + \vec{R}_\alpha(\beta) \quad (25)$$

که در آن $\vec{P}_\alpha(\beta)$ بیانگر بردار مکان مراکز جرم لینک‌ها نسبت به نقطه‌ی مرجع اینرسی هستند. حال با مشتق‌گیری زمانی از طرفین معادله‌ی فوق نسبت به چارچوب اینرسی و استفاده از قضیه‌ی انتقال نرخ تغییرات^۱ به رابطه‌ی (۲۶) برای سرعت‌های خطی می‌انجامد:

$$\vec{V}_\alpha(\beta) = \vec{V}_{\alpha-1}(\beta) + \vec{\Omega}_{\alpha-1}(\beta) \times \vec{r}_{\alpha-1}(\beta) + \vec{\Omega}_\alpha(\beta) \times \vec{R}_\alpha(\beta) \quad (26)$$

بیان ماتریسی عبارت فوق به فرم (۲۷) است:

$$V_\alpha(\beta) = C_{\alpha-1}^\alpha(\beta) (V_{\alpha-1}(\beta) - \llbracket r_{\alpha-1}(\beta) \rrbracket \Omega_{\alpha-1}(\beta)) - \llbracket R_\alpha(\beta) \rrbracket \Omega_\alpha(\beta) \quad (27)$$

^۱ Rate of Change Transport Theorem

$$\frac{\partial K}{\partial \omega_i(j)} = \sum_{\alpha=i}^{n_j} \left(\frac{\partial V_\alpha(j)}{\partial \omega_i(j)} m_\alpha(j) V_\alpha(j) + \frac{\partial \Omega_\alpha(j)}{\partial \omega_i(j)} I_\alpha(j) \Omega_\alpha(j) \right) \quad (41)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۲۴) به طوری که $\alpha = i$ و $\beta = j$ باشند، رابطه‌ی (۴۲) حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial \Omega_i(j)}{\partial \omega_i(j)} = I_{3 \times 3} \quad (42)$$

از طرفی به ازای سایر مقادیر α از فرم $(\alpha = i + 1, i + 2, \dots, n_\beta)$ یک رابطه‌ی بازگشتی به فرم (۴۳) به دست می‌آید: بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \Omega_\alpha(j)}{\partial \omega_i(j)} = \frac{\partial \Omega_{\alpha-1}(j)}{\partial \omega_i(j)} [C_{\alpha-1}^\alpha(j)]^T \quad (43)$$

بدین ترتیب تمامی عبارت‌ها به فرم $\frac{\partial \Omega_\alpha(j)}{\partial \omega_i(j)}$ با استفاده از روابط اخیر محاسبه می‌شوند. طی روندی مشابه، یک رابطه‌ی بازگشتی به صورت زیر جهت محاسبه‌ی ترم‌های $\frac{\partial V_\alpha(j)}{\partial \omega_i(j)}$ به دست می‌آید:

$$\frac{\partial V_i(j)}{\partial \omega_i(j)} = [R_i(j)] \quad (44)$$

$$\frac{\partial V_\alpha(j)}{\partial \omega_i(j)} = \left(\frac{\partial V_{\alpha-1}(j)}{\partial \omega_i(j)} + \frac{\partial \Omega_{\alpha-1}(j)}{\partial \omega_i(j)} [r_{\alpha-1}(j)] \right) \cdot [C_{\alpha-1}^\alpha(j)]^T + \frac{\partial \Omega_\alpha(j)}{\partial \omega_i(j)} [R_\alpha(j)] \quad (45)$$

لازم به ذکر است که در رابطه‌های (۴۴) و (۴۵)، $\frac{\partial \Omega_\alpha(j)}{\partial \omega_i(j)}$ پیش‌تر با استفاده از رابطه‌های (۴۲) و (۴۳) به دست آمده و بنابراین هیچ محاسبه‌ی دیگری جهت تولید عبارت $\frac{\partial V_\alpha(j)}{\partial \omega_i(j)}$ باقی نمی‌ماند. در ادامه به محاسبه‌ی $\frac{\partial K}{\partial \vartheta_i(j)}$ می‌پردازیم که در رابطه‌ی (۲۲) ظاهر شده است. با مشتق‌گیری از رابطه‌ی (۱۸) نسبت به $\vartheta_i(j)$ داریم:

$$\frac{\partial K}{\partial \vartheta_i(j)} = \sum_{\alpha=i}^{n_j} \frac{\partial V_\alpha(j)}{\partial \vartheta_i(j)} m_\alpha(j) V_\alpha(j) + \frac{\partial \Omega_\alpha(j)}{\partial \vartheta_i(j)} I_\alpha(j) \Omega_\alpha(j) \quad (46)$$

با ضرب عبارت $-(D_i^T(j))^{-1}$ در طرفین رابطه‌ی (۴۶) به رابطه‌ی (۴۷) می‌رسیم:

همچنین در مورد عبارت $\frac{\partial V_\alpha(\beta)}{\partial \omega_0}$ با استفاده از رابطه‌ی (۲۷) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial V_\alpha(\beta)}{\partial \omega_0} = \left(\frac{\partial V_{\alpha-1}(\beta)}{\partial \omega_0} + \frac{\partial \Omega_{\alpha-1}(\beta)}{\partial \omega_0} [r_{\alpha-1}(\beta)] \right) \cdot [C_{\alpha-1}^\alpha(\beta)]^T + \frac{\partial \Omega_\alpha(\beta)}{\partial \omega_0} [R_\alpha] \quad (36)$$

با توجه به اینکه تمامی ترم‌های $\frac{\partial \Omega_\alpha(\beta)}{\partial \omega_0}$ از رابطه‌ی بازگشتی (۳۴) به دست آمده‌اند، تنها با قرار دادن $\alpha = 1$ در رابطه‌ی اخیر، سایر ترم‌های $\frac{\partial V_\alpha(\beta)}{\partial \omega_0}$ ($\alpha = 2, \dots, n_\beta$) به دست می‌آیند. به ازای $\alpha = 1$ داریم:

$$\frac{\partial V_1(\beta)}{\partial \omega_0} = [r_0(\beta)] [C_0^1(\beta)]^T + \frac{\partial \Omega_1(\beta)}{\partial \omega_0} [R_1(\beta)] \quad (37)$$

که در آن، $\frac{\partial \Omega_1(\beta)}{\partial \omega_0}$ پیش‌تر از معادله‌ی (۳۵) به دست آمده است.

حال با مشتق‌گیری ماتریسی از طرفین معادله‌ی (۱۸) نسبت به $\omega_i(j)$ ، رابطه‌ی (۳۸) حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial K}{\partial \omega_i(j)} = \sum_{\beta=1}^{n_\beta} \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial V_\alpha(\beta)}{\partial \omega_i(j)} m_\alpha(\beta) V_\alpha(\beta) + \frac{\partial \Omega_\alpha(\beta)}{\partial \omega_i(j)} I_\alpha(\beta) \Omega_\alpha(\beta) \right) \quad (38)$$

با کمی دقت، رابطه‌ی فوق قابل ساده‌سازی به شرح زیر است. با توجه به نحوه‌ی تعریف بردارهای مکان در شکل ۱ هیچگونه ارتباط سینماتیکی میان دو بازوی مختلف وجود ندارد.

$$\forall \beta \neq j : \frac{\partial V_\alpha(\beta)}{\partial \omega_i(j)} = \frac{\partial \Omega_\alpha(\beta)}{\partial \omega_i(j)} = 0_{3 \times 1} \quad (39)$$

همچنین طبق روابط سینماتیکی، سرعت‌های زاویه‌ای نسبی لینک‌های جلوتر در سرعت‌های خطی و زاویه‌ای مطلق لینک‌های پیشین حضور ندارند، به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$\forall \alpha < i : \frac{\partial V_\alpha(j)}{\partial \omega_i(j)} = \frac{\partial \Omega_\alpha(j)}{\partial \omega_i(j)} = 0_{3 \times 1} \quad (40)$$

بدین ترتیب، قرار دادن روابط (۳۹) و (۴۰) در رابطه‌ی (۳۸) به رابطه‌ی ساده برای $\frac{\partial K}{\partial \omega_i(j)}$ می‌انجامد. رابطه‌ی مذکور عبارت است از:

بدین ترتیب عبارت $E_i(j)$ با استفاده از روابط (۵۳) و (۵۴) به صورت بازگشتی قابل محاسبه است.

با توجه روابط به دست آمده از مرجع [۱۵] در رابطه‌ی (۱۸)، F_0 ماتریسی ستونی حاوی مؤلفه‌های بردار نیروی برآیند وارد بر کل سیستم است که در دستگاه بدنی فضایی ربات بیان گردیده و همچنین M_0 یک ماتریس ستونی شامل گشتاور کل حول مرکز جرم فضایی ربات است که آن نیز در دستگاه بدنی فضایی ربات بیان گردیده است. $M_i(j)$ یک ماتریس ستونی حاوی مؤلفه‌های بردار گشتاور برآیند وارد بر سیستمی شامل لینک‌های $i(j)$ تا $n(j)$ نسبت به اولین مفصل لینک $i(j)$ است.

۴- شبیه‌سازی و صحت‌سنجی

نتایج شبیه‌سازی یک ربات فضایی دو بازویی که هر بازو متشکل از دو لینک است و هر مفصل دارای سه درجه آزادی دورانی است، در زیر برای شرایط اولیه‌ی صفر و نیروهای وارد شده به صورت $F_2(1) = [1, -1, 1]^T$ و $F_2(2) = [2, -2, -2]^T$ آورده شده است. هر یک از نیروهای فوق به ترتیب نیروی وارد شده بر انتهای لینک دوم از بازوی اول و نیروی وارد شده بر انتهای لینک دوم از بازوی دوم است. شکل ۲ ربات مورد نظر را نشان می‌دهد. نکته دیگری که حائز اهمیت می‌باشد، این است که کلیه مفاصل و لینک‌ها صلب است. تمامی پارامترهای مورد نیاز جهت شبیه‌سازی در جدول ۱ ارائه شده است.

$$\alpha = i : A(i, i, j) = \llbracket V_{i-1}(j) - \llbracket r_{i-1}(j) \rrbracket \Omega_{i-1}(j) \rrbracket + B(i, i, j) \llbracket R_i(j) \rrbracket \quad (52)$$

$$\alpha > i : A(\alpha, i, j) = (A(\alpha - 1, i, j) + B(\alpha - 1, i, j) \llbracket r_{\alpha-1}(j) \rrbracket) [C_{\alpha-1}^{\alpha}]^T + B(\alpha, i, j) \llbracket R_{\alpha}(j) \rrbracket \quad (53)$$

$$E_i(j) = \sum_{\alpha=i}^{n_j} A(\alpha, i, j) m_{\alpha}(j) V_{\alpha}(j) + B(\alpha, i, j) I_{\alpha}(j) \Omega_{\alpha}(j) \quad (47)$$

که در آن داریم:

$$A(\alpha, i, j) \stackrel{\text{def}}{=} -\left(D_i^T(j)\right)^{-1} \frac{\partial V_{\alpha}(j)}{\partial \vartheta_i(j)} \quad (48)$$

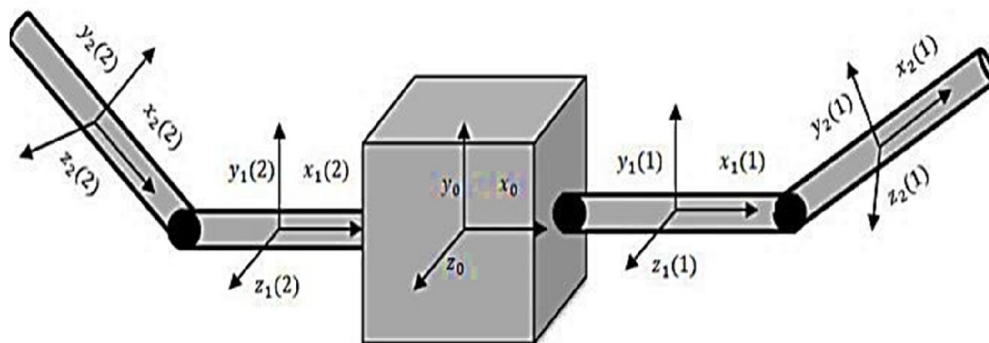
$$B(\alpha, i, j) \stackrel{\text{def}}{=} -\left(D_i^T(j)\right)^{-1} \frac{\partial \Omega_{\alpha}(j)}{\partial \vartheta_i(j)} \quad (49)$$

عبارت $B(\alpha, i, j)$ با توجه به روابط بازگشتی زیر حاصل می‌گردد:

$$\alpha = i : B(i, i, j) = \llbracket C_{i-1}^i(j) \Omega_{i-1}(j) \rrbracket \quad (50)$$

$$\alpha > i : B(\alpha, i, j) = B(\alpha - 1, i, j) [C_{i-1}^{\alpha}(j)]^T \quad (51)$$

از طرفی $A(\alpha, i, j)$ عبارت نیز با استفاده از روابط بازگشتی زیر قابل محاسبه است:



شکل ۲- شماتیک یک ربات فضایی

جدول ۱- پارامترهای ربات فضایی

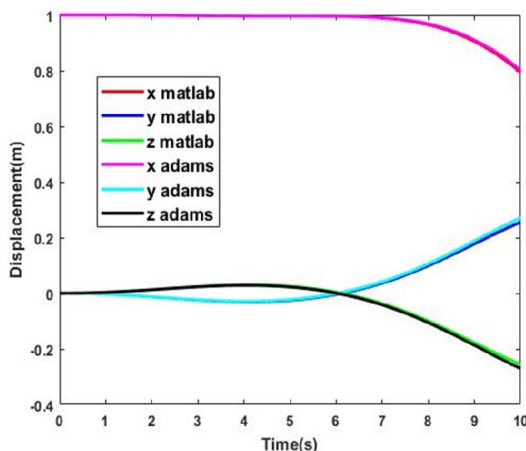
پارامتر	مقادیر
$m_1(1) = m_2(1) = m_1(2) = m_2(2)$	61.27 (kg)
m_0	400 (kg)
$r_0(1) = r_1(1) = r_2(1) = r_1(2) = r_2(2) = r_0(2)$	0.5 (m)
$R_1(1) = R_2(1) = R_1(2) = R_2(2)$	0.5 (m)
$I_{xx1}(1) = I_{xx2}(1) = I_{xx1}(2) = I_{xx2}(2)$	5.144 (kg.m ²)
$I_{yy1}(1) = I_{yy2}(1) = I_{yy1}(2) = I_{yy2}(2)$	5.144 (kg.m ²)
$I_{zz1}(1) = I_{zz2}(1) = I_{zz1}(2) = I_{zz2}(2)$	0.076 (kg.m ²)
$I_{xx0} = I_{yy0} = I_{zz0}$	900 (kg.m ²)

همانطور که ملاحظه می‌شود، نمودارهای فوق جابجایی مکان مرکز جرم اجزای تشکیل دهنده ربات در مدل تحلیلی را با نمودار حاصل از مدل ایجاد شده در نرم‌افزار آدامز مقایسه می‌کند که در نرم‌افزار متلب انجام شده است و از تطابق بسیار خوبی برخوردار است. علت انحرافات جزئی موجود عدم امکان به صفر رساندن اصطکاک در مفاصل در نرم‌افزار آدامز است.

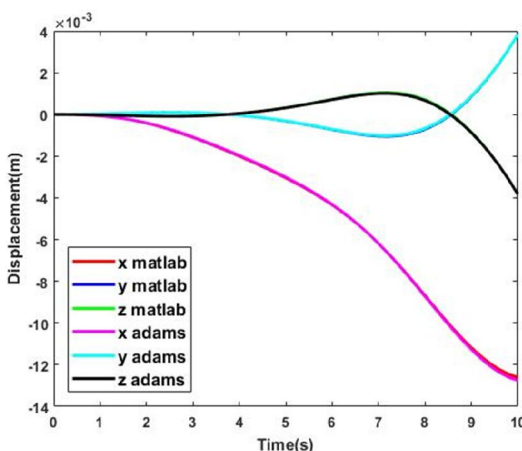
در ادامه در اشکال ۸، ۹، ۱۰ و ۱۱ تطابق وضعیت‌های حاصل از شبیه‌سازی تحلیلی و نرم‌افزار آدامز بررسی گردیده است.

شبیه‌سازی ربات فضایی در محیط نرم‌افزار متلب صورت گرفته و صحت‌سنجی نتایج به وسیله مقایسه آن‌ها با نمودارهای حاصل از نرم‌افزار تحلیل دینامیکی آدامز انجام شده است که بر پایه روابط لاگرانژ کدنویسی شده است. شایان ذکر است، در مقاله‌های متعددی از این روش جهت صحت‌سنجی روش‌های دینامیکی ارائه شده استفاده شده است؛ چراکه صحت نرم‌افزار آدامز سنجیده شده و مورد تایید است [۱۸].

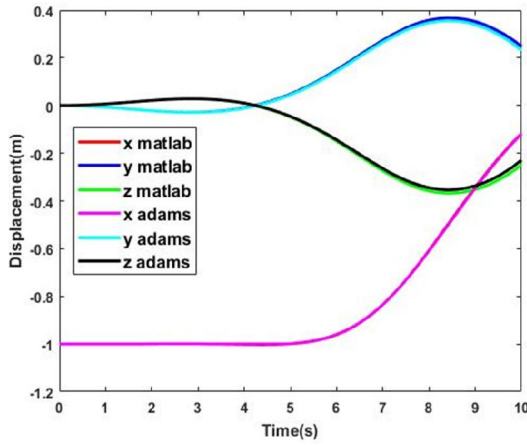
در اشکال ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ جابجایی مکان مرکز جرم اعضای ربات فضایی در دو مدل تحلیلی و مدل نرم‌افزار آدامز به ازای ورودی یکسان مقایسه شده‌اند.



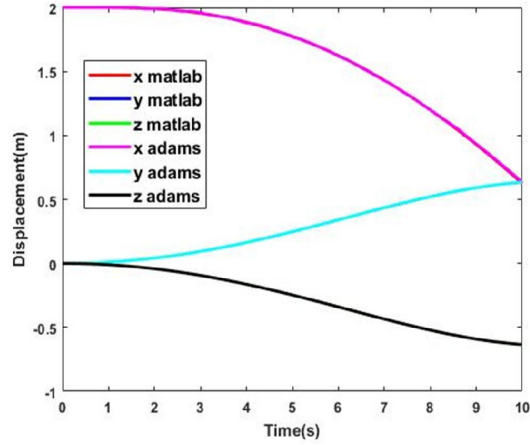
شکل ۴- جابجایی مکان مرکز جرم لینک ۱ از بازوی ۱



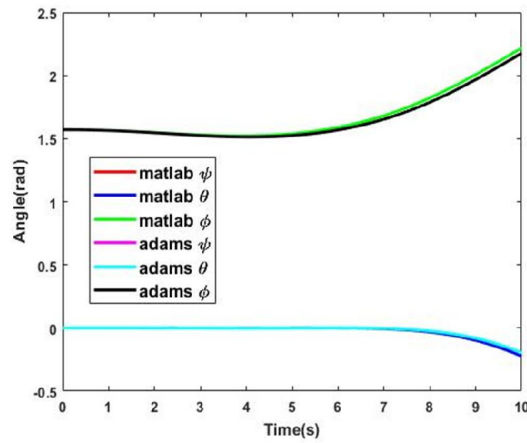
شکل ۳- جابجایی مکان مرکز جرم فضای پیمای ربات



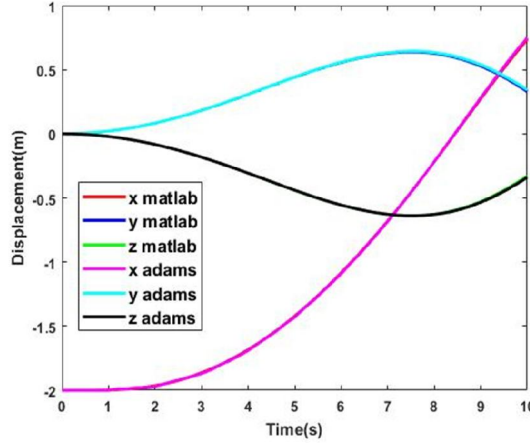
شکل ۶- جابجایی مکان مرکز جرم لینک ۱ از بازوی ۲



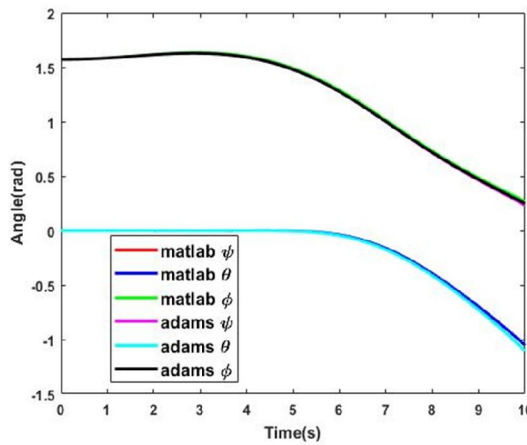
شکل ۵- جابجایی مکان مرکز جرم لینک ۲ از بازوی ۱



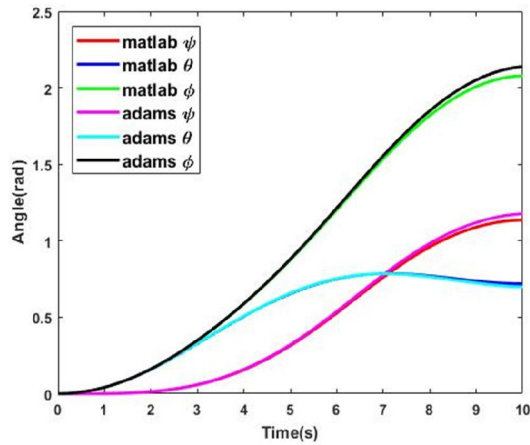
شکل ۸- وضعیت لینک ۱ از بازوی ۱



شکل ۷- جابجایی مکان مرکز جرم لینک ۲ از بازوی ۲

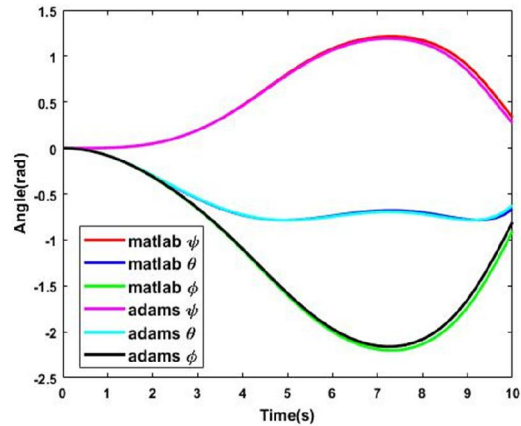


شکل ۱۰- وضعیت لینک ۱ از بازوی ۲



شکل ۹- وضعیت لینک ۲ از بازوی ۱

ω بردار سرعت زاویه‌ای جسم صلب نسبت به چارچوب مرجع اینرسی تجزیه شده در دستگاه بدنی
 Ω بردار حاصل از تجزیه بردار سرعت زاویه‌ای جسم صلب نسبت به چارچوب مرجع اینرسی تجزیه شده در دستگاه اینرسی
 m جرم جسم
 I ممان اینرسی جسم
 F بردار نیروهای وارده بر جسم
 M بردار گشتاورهای وارده بر جسم
 C ماتریس دوران از دستگاه اینرسی به دستگاه بدنی
 p ماتریس ستونی حاصل تجزیه بردار مکان مرکز جرم در دستگاه اینرسی
 θ ماتریس ستونی حاوی زوایای وضعیت دستگاه بدنی نسبت به دستگاه اینرسی
 D ماتریس تبدیل از نرخ زمانی زوایای وضعیت به سرعت زاویه‌ای
 $\dot{\theta}$ نرخ زمانی زوایای وضعیت
 Q_p نیروهای تعمیم یافته‌ی متناظر با p
 Q_θ نیروهای تعمیم یافته‌ی متناظر با θ
 ρ ماتریس ستونی حاصل از تجزیه بردار مکان محل اعمال نیزه نسبت به مرکز جرم در دستگاه بدنی
 α شمارنده‌ی لینک‌ها
 β شمارنده‌ی بازوها
 n تعداد بازوها
 n_β تعداد لینک‌های بازوی β
 K انرژی جنبشی



شکل ۱۱- وضعیت لینک ۲ از بازوی ۲

در نمودارهای فوق زوایای هر یک از لینک‌های ربات در دو مدل تحلیلی و مدل آدامز بررسی شده است که بیان‌گر انطباق مطلوب بین دو مدل است. آنچنان که در قبل گفته شد، اختلاف جزئی موجود ناشی از عدم صفر بودن اصطکاک در مفاصل در مدل آدامز است.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک الگوریتم بازگشتی برای ربات‌های فضایی چند بازویی با تعداد لینک دلخواه بر پایه‌ی روش لاگرانژ ارائه شد. این روش با استفاده از مزایای شبه مختصات و شبه سرعت‌ها به خوبی توانسته است، معایب روش نیوتن-اولبر و روش لاگرانژ را پوشش دهد و به معادلاتی ساده جهت مدل‌سازی دینامیکی ربات‌های فضایی بیانجامد. از دیگر مزایای این روش، کاهش چشم‌گیر حجم محاسبات است که از اهمیت بسزایی در سیستم‌های پیچیده برخوردار است. علت این امر عدم نیاز به محاسبه انرژی جنبشی، عدم نیاز به مشتق‌گیری جزئی و بازگشتی بودن الگوریتم است. در ادامه، صحت مدل تحلیلی به دست آمده با استفاده از مقایسه‌ی نمودارهای حاصل از شبیه‌سازی یک ربات دو بازویی و نمودارهای به دست آمده از نرم‌افزار آدامز تأیید گردید.

۶- فهرست علائم

V بردار سرعت خطی

- flyers and their computation. *J Robotic Syst* 15(4): 207-216.
- [8] Moosavian SAA, Papadopoulos E (2004) Explicit dynamics of space free-flyers with multiple manipulators via SPACEMAPLE. *Adv Robotics* 18(2): 223-244.
- [9] Banerjee AK (2003) Contributions of multibody dynamics to space flight: A brief review. *J Guid Control Dynam* 26(3): 385-394.
- [10] Kielau G, Maïßer P (2003) Nonholonomic multibody dynamics. *Multibody Syst Dyn* 9(3): 213-236.
- [11] Khoshnood A, Azad I, Hasani S (2016) Vibration suppression of an underactuated dynamic system using virtual actuators. *J Vib Acoust* 138(6): 61.
- [12] Maryamnegari HM, Khoshnood A (2015) Dynamics modeling and active vibration control of a satellite with flexible solar panels. *Modares Mechanical Engineering* 14(16): 57-66.
- [13] Parhikhteh1 M, Mohammadpour O, Tavasoli A (2017) Optimal control of skid steer wheeled mobile robots by analytical approach. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 7(4): 135-145.
- [14] M.M. Fateh, J. Keighobadi (2014) Adaptive Fuzzy Control of an Electrical Single-Wheel Robot, *Solid and Fluid Mech.*, 5, 1, pp. 61-75.
- [15] Aazad E, Khoshnood AM, Razavi SMA (2016) Dynamics modeling of open-chain terrestrial and space robots using a form of Boltzmann-Hamel equations. *Modares Mechanical Engineering* 16(6): 127-137.
- [16] Korayem AMSMH (2011) Application of recursive Gibbs-Apple formulation in deriving the motion equation of revolute-prismatic joints. *Modares Mechanical Engineering* 12(3): 1-10.
- [17] Schaub H, Junkins JL (2003) *Analytical mechanics of space systems*. Reston: AIAA 244-272.
- [18] Cherian V, Jalili N, Ayglon V (2009) Modelling, simulation, and experimental verification of the kinematics and dynamics of a double wishbone suspension configuration. *P I Mech Eng D-J Aut* 223(10): 1239-1262.
- نیروی وارده به فضایی پایه F_0
- گشتاور وارده به فضایی پایه M_0
- بردار سرعت خطی فضایی پایه V_0
- بردار سرعت زاویه‌ای فضایی پایه ω_0
- بردار مکان از ابتدای لینک α بازوی β از به مرکز جرم $\vec{R}_\alpha(\beta)$
- بردار مکان از مرکز جرم به انتهای لینک α بازوی $\vec{r}_\alpha(\beta)$

۷- مراجع

- [1] Dubowsky S (1987) Advanced methods for the dynamic control of high performance robotic devices and manipulators with potential for applications in space. NASACR-181061.
- [2] Flores-Abad A, Ma O, Pham K, Ulrich S (2014) A review of space robotics technologies for on-orbit servicing. *Prog Aerosp Sci* 68: 1-26.
- [3] Yoshida K, Kurazume R, Umetani Y (1991) Dual arm coordination in space free-flying robot. *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2516-2521.
- [4] Hooker W, Margulies G (1965) The dynamical attitude equations for n-body satellite. *J Astronaut Sci* 12: 123.
- [5] Baruh H (2000) Another look at the describing equations of dynamics. *J Chin Soc Mech Eng* 21(1): 15-23.
- [6] Vafa Z, Dubowsky S (1987) On the dynamics of manipulators in space using the virtual manipulator approach. *Proceedings 1987 IEEE International Conference on*, 4: 579-585.
- [7] Moosavian SAA, Papadopoulos E (1998) On the kinematics of multiple manipulator space free-