



## تحلیل ارتعاشات لوله حاوی جریان سیال، از جنس ماده هدفمند تابعی در راستای ضخامت

مجید سعیدیها<sup>۱\*</sup> و اردشیر کرمی محمدی<sup>۲</sup><sup>۱</sup> دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۱/۲۶؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۰۵/۰۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۱/۰۱

## چکیده

لوله‌های حاوی جریان سیال، مستعد نشان دادن رفتارهای دینامیکی پیچیده‌ای هستند. در این مقاله، رفتار دینامیکی لوله دو سر لولای حاوی جریان سیال که خواص مواد آن به صورت تابعی در راستای ضخامت تغییر می‌کند، مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. تغییرات مدول یانگ در راستای ضخامت و بر اساس قانون توانی فرض شده و معادلات ارتعاشاتی با استفاده از تئوری تیر اویلر برنولی بدست آمده است. معادله دیفرانسیل پاره‌ای، با استفاده از روش گالرکین به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شده است. فرکانس‌های طبیعی برای لوله دو سر مفصل به ازای پارامترهای بی‌بعد بدست آمده و با نتایج لوله همگن مقایسه شده و تاثیر تقویت تدریجی در راستای ضخامت مورد بررسی قرار گرفته است؛ همچنین مقادیر سرعت بحرانی جریان سیال که موجب ناپایداری حرکت لوله می‌گردد، برای پارامتر جرمی مشخص و توزیع‌های مختلف مدول یانگ بدست آمده‌اند. با افزایش مدول یانگ از داخل به خارج لوله، فرکانس‌های طبیعی سیستم افزایش یافته و ناپایداری در سرعت‌های بی‌بعد بالاتری اتفاق می‌افتد.

**کلمات کلیدی:** لوله حاوی جریان سیال؛ تغییر ماده به صورت تدریجی؛ فرکانس‌های طبیعی؛ سرعت بحرانی سیال؛ ناپایداری.

## Vibration Analysis of Pipe Conveying Fluid, Made of Functionally Graded Material in Thickness Direction

M. Saediha<sup>1,\*</sup>, A. Karami Mohammadi<sup>2</sup><sup>1</sup> Ph.D. student., Mech. Eng. Dept., Shahrood Univ., Shahrood, Iran.<sup>2</sup> Assoc. prof., Mech. Eng. Dept., Shahrood Univ., Shahrood, Iran.

## Abstract

The pipes conveying fluid are capable of displaying complex dynamical behaviors. In this paper, the dynamic behavior of a simply supported fluid-conveying pipe made of functionally graded material in thickness direction, is analysed. The Young Modulus are assumed to be graded along the thickness direction according to a simple power law and equations of motion of the Euler-Bernoulli beam are derived. The partial differential equation is discretized to ordinary differential equations by the Galerkin method. The natural frequencies are obtained for different dimensionless parameters and compared with a homogenous pipe conveying fluid, and the effect of gradually changed material has been studied. Dimensionless critical flow velocities which cause instability are obtained for particular mass parameter and different distribution of Young Modulus. The results show that by increasing Young Modulus from inner to outer surface of pipe, the natural frequencies of system increase and instability is occurred in higher critical velocities.

**Keywords:** Pipes Conveying Fluid; Functionally Graded Material; Natural Frequencies; Critical Flow Velocity; Instability.

\* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۲۳-۳۲۳۰۰۲۵۸؛ فکس: ۰۲۳-۳۲۳۰۰۲۵۸

آدرس پست الکترونیک: [m.saediha@shahroodut.ac.ir](mailto:m.saediha@shahroodut.ac.ir)

## ۱- مقدمه

سیستم‌های خطوط لوله جهت انتقال سیالات نه تنها در صنایع نفت و گاز، خطوط تخلیه پمپ، مبدل‌های حرارتی، سیستم‌های میکرو و نانو الکترومکانیکی و غیره [۱-۴] مورد استفاده قرار می‌گیرند، بلکه کاربردهای گسترده عمومی دیگری نیز در صنایع مختلف دارند که توجه بسیاری از محققین را به سوی خود جلب کرده است [۵، ۶]. لوله حاوی سیال در عین حال که ساده‌ترین مساله در زمینه مسائل اندرکنش میان سازه و سیال محسوب می‌شود، مستعد رفتارهای دینامیکی جالب و حائز اهمیتی است. ارتعاشات و ناپایداری لوله‌های حاوی جریان سیال با شرایط مرزی مختلف مورد بررسی محققان قرار گرفته است [۷]. وانگ و همکارانش با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل به بررسی فرکانس‌های طبیعی و سرعت بحرانی لوله‌های حاوی جریان سیال، به ازای شرایط مرزی مختلف پرداخته‌اند [۸]. وانگ و دای، در سال ۲۰۱۲ به بررسی خواص ارتعاشاتی و پایداری لوله حاوی سیال با دو زانوی متقارن در انتهای آن پرداختند و نشان دادند که فرکانس‌های ارتعاشی لوله، کاملاً به زاویه زانوها وابسته است [۹]. اخیراً خیری و فیروزآبادی در مطالعه‌ای دیگر، به بررسی پایداری لوله یکسرگردار با یک نازل مایل در انتهای آن پرداخته‌اند [۱۰]. نای و همکارانش، ارتعاشات اجباری لوله خمیده حاوی جریان سیال را که بر بستر الاستیک غیرخطی، تحت تحریک خارجی قرار گرفته بود، آنالیز کرده و نشان دادند که بزرگی بردار تحریک، میرایی سازه‌ای و سختی بستر، همگی تاثیر بسزایی بر پاسخ حالت ماندگار سیستم دارند [۱۱]. علیزاده و میردامادی [۱۲] با استفاده از روش شبه‌سازی مونت کارلو و ترکیب آن با اجزا محدود، احتمال پایداری و ارتعاشات لوله حاوی جریان سیال را بررسی کرده‌اند. قضاوی و حیدری، اخیراً روی لوله حاوی سیال با حرکت محوری و چرخشی تحقیق کرده‌اند و پاسخ سیستم را بدست آورده و نشان دادند که با افزایش سرعت محوری، سیستم ناپایدار می‌شود [۱۳].

در گذشته، در اغلب بررسی‌ها، جنس لوله‌ها ایزوتروپیک در نظر گرفته می‌شد و آغاز بررسی لوله‌های کامپوزیتی به چند سال اخیر برمی‌گردد [۱۴]. دای و وانگ در سال ۲۰۱۳ به بررسی ارتعاشات و پایداری لوله تشکیل شده از دو جنس مختلف پرداختند [۱۵]. شن و پایدوسیس در سال ۲۰۱۴

انواع مختلف لوله با ساختار تکرار شونده را بررسی کرده و سرعت بحرانی جریان سیال را برای آنها بدست آورده‌اند [۱۶]. وانگ و لیو اخیراً به بررسی رفتار لوله با تکیه‌گاه دوسردرگیر که از مواد متغیر تابعی سرامیک و فولاد ضدزنگ ساخته شده پرداخته‌اند [۱۷]. خادم و همکارش به کنترل ارتعاشات لوله حاوی سیال با جاذب غیرخطی پرداختند [۱۸]. ابراهیمی و همکاران اثر جریان سیال دو فازی در لوله قائم [۱۹] و میرطالبی و همکاران جریان در لوله با سایز میکرو در شرایط مرزی گوناگون را مورد مطالعه قرار دادند [۲۰].

لوله حاوی جریان سیال یک سیستم ژيروسکوپیک پایدار است [۲۱] که با افزایش سرعت سیال، صلبیت لوله کاهش پیدا می‌کند، در نتیجه به ازای افزایش سرعت سیال به اندازه کافی، نیروی گریز از مرکز به نیروی بازگرداننده خمشی غلبه می‌کند و واگرایی<sup>۱</sup> اتفاق می‌افتد که در این حالت ناپایداری از نوع کمانش است و در حیطه دینامیک غیرخطی، دوشاخگی پیچفورک استاتیکی<sup>۲</sup> به آن اطلاق می‌شود.

در این مقاله، فرکانس‌های طبیعی و سرعت بحرانی لوله حاوی جریان سیال، با شرایط مرزی دوسرولوا که مقدار سختی آن در راستای ضخامت، طبق قانون توانی تغییر می‌کند، مورد بررسی قرار گرفته است. در حل عددی جنس خاصی برای سطح داخلی و خارجی لوله در نظر گرفته نشده و از نسبت خواص خارجی به داخلی استفاده شده است. سیال درون لوله ایده‌آل بوده یعنی روان، تراکم ناپذیر و حرکت آن غیرچرخشی است. در نهایت تاثیر نحوه تغییرات سختی لوله بر فرکانس‌های طبیعی و پایداری سیستم مشخص شده است.

## ۲- تئوری و فرمول بندی

میدان جابجایی و کرنش‌ها به صورت رابطه (۱) در نظر گرفته می‌شوند [۲۲]:

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ w(x, z, t) &= w_0(x, t) \end{aligned} \quad (1)$$

<sup>1</sup> Divergence<sup>2</sup> Static Pitchfork Bifurcation

$$\delta K = \int_0^L \int_{A_p} \rho_p \left[ \left( \dot{u}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \right) \left( \delta \dot{u}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right] dA dx + \int_0^L \int_{A_f} \rho_f \left[ V \cdot \delta V + z^2 \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) \right] dA dx \quad (7)$$

که  $\rho_p$  چگالی وزنی لوله،  $\rho_f$  چگالی وزنی سیال،  $A_p$  و  $A_f$  به ترتیب مساحت سطح مقطع لوله و سیال، و  $m_p = \rho_p A_p$  و  $m_f = \rho_f A_f$  به ترتیب چگالی جرمی واحد طول لوله و سیال،  $v$  سرعت جریان سیال و  $V$  بردار سرعت سیال هستند:

$$V = (v \cos \theta + \dot{u}_0) \hat{i} + (-v \sin \theta + \dot{w}_0) \hat{j} \quad (8)$$

که  $\theta = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$  است. منتهج‌های تنش طبق معادله (۹) بدست می‌آیند.

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ M_{xx} \end{Bmatrix} = \int_{A_p} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} \sigma_{xx} dA \quad (9)$$

و همچنین فرضیاتی مطابق روابط (۱۰) در نظر می‌گیریم.

$$m_p = \int_{A_p} \rho_p dA = \rho_p A_p$$

$$\hat{I}_p = \int_{A_p} \rho_p z^2 dA = \rho_p I_p$$

$$m_f = \int_{A_f} \rho_f dA = \rho_f A_f$$

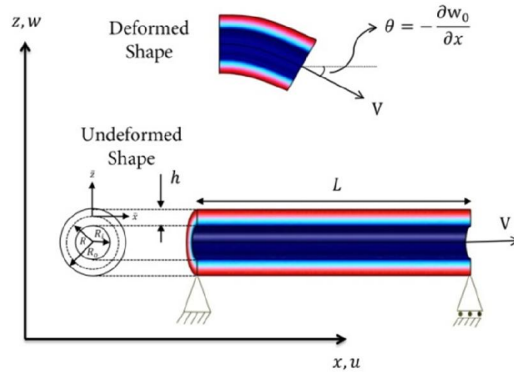
$$\hat{I}_f = \int_{A_f} \rho_f z^2 dA = \rho_f I_f \quad (10)$$

با استفاده از قواعد حساب تغییرات و سپس حذف جملات غیرخطی، معادلات ارتعاشات طولی و عرضی ناهمبسته شده و به ترتیب به صورت معادلات (۱۱) و (۱۲) در می‌آیند:

$$\int_{A_p} E(z) dA \cdot \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + m_f \dot{v} + (m_p + m_f) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0 \quad (11)$$

$$\int z^2 E(z) dA \cdot \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + (m_p + m_f) \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - (\hat{I}_p + \hat{I}_f) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + 2m_f v \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} + m_f v^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + m_f \dot{v} \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

که  $w_0, u_0$  به ترتیب جابجایی در راستای طولی و جانبی لوله هستند. با استفاده از تئوری ون کارمن روابط کرنش - جابه‌جایی به صورت رابطه (۲) بیان می‌شود:



شکل ۱- لوله حاوی جریان سیال، تقویت شده تدریجی در راستای ضخامت

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + z \left( -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) = \varepsilon_{xx}^0 + z \varepsilon_{xx}^1 \quad (2)$$

که در آن:

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_{xx}^1 = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (3)$$

و بقیه کرنش‌ها صفر هستند. در شکل ۱، لوله ساخته شده از مواد متغیر تابعی و حاوی جریان سیال نشان داده شده است. بنابراین اصل تعمیم یافته همیلتون:

$$\int_0^T [(\delta U - \delta V) - \delta K] dt = 0 \quad (4)$$

که  $U$  انرژی پتانسیل،  $V$  کار مجازی انجام شده توسط نیرو خارجی (ناشی از جریان سیال) و  $K$  انرژی جنبشی سیستم هستند [۲۳]:

$$\delta U = \int_0^L \int_{A_p} \sigma_{xx} (\delta \varepsilon_{xx}^0 + z \delta \varepsilon_{xx}^1) dA dx \quad (5)$$

$$\delta V = \int_0^L \left[ m_f v^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} (\sin \theta \delta u_0 + \cos \theta \delta w_0) - m_f \dot{v} (\cos \theta \delta u_0 - \sin \theta \delta w_0) \right] dx \quad (6)$$

در نتیجه با جایگذاری جمله‌های بالا و ساده‌سازی، معادله ارتعاشات عرضی به صورت معادله بی‌بعد (۱۶) بدست می‌آید:

$$\int_{A_p} \frac{z^2 E(\bar{z}) dA}{E_i I} \cdot \ddot{\eta} + \frac{m_f L^2 v^2}{E_i I} \dot{\eta} + \frac{2m_f L v}{E_i I} \left[ \frac{E_i I}{m_p + m_f} \right]^{1/2} \dot{\eta} + \ddot{\eta} = 0 \quad (16)$$

با معرفی پارامترهای بی‌بعد جدید به صورت (۱۷) و (۱۸):

$$U = \left[ \frac{m_f}{E_i I} \right]^{1/2} L v \quad (17)$$

$$\beta = \frac{m_f}{m_p + m_f} \quad (18)$$

که U سرعت بی‌بعد و  $\beta$  پارامتر بی‌بعد جرمی سیال است و همچنین با قرار دادن مقدار  $E(\bar{z})$  از رابطه (۱۴)، معادله بی‌بعد لوله تقویت شده به صورت تدریجی در جهت ضخامت و حاوی جریان سیال بر حسب پارامترهای کنترل کننده  $\beta$  و U بدست می‌آید:

$$\int_{A_p} \frac{z^2 \left[ (E_{Ratio} - 1) \left( \frac{r-R}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + 1 \right] dA}{I} \cdot \ddot{\eta} + U^2 \dot{\eta} + 2\beta^{1/2} U \dot{\eta} + \ddot{\eta} = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (19)$$

در این مقاله تنها به ارتعاشات عرضی پرداخته شده است.

مدول یانگ داخلی و خارجی لوله را به ترتیب  $E_o, E_i$  در نظر گرفته شده و در ضخامت تیر نیز طبق قانون توانی، توسط رابطه (۱۳) مشخص می‌شود [۲۴]:

$$E(\bar{z}) = (E_o - E_i) \left( \frac{\bar{z}}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_i \Rightarrow \begin{cases} E_{\bar{z} \rightarrow \frac{h}{2}} = E_o \\ E_{\bar{z} \rightarrow -\frac{h}{2}} = E_i \end{cases} \quad (13)$$

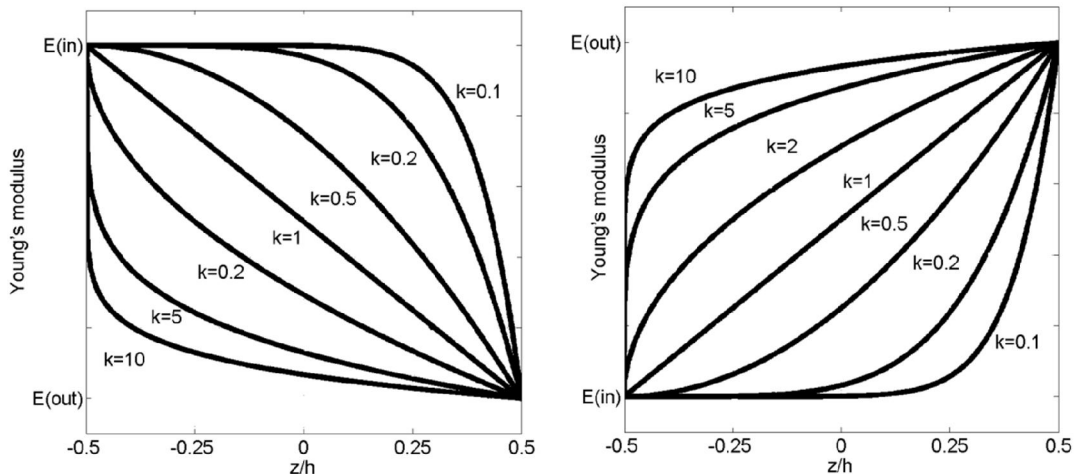
که  $\bar{z}$  شعاع میانگین لوله و توان  $k$  عدد حقیقی است. با تعریف نسبت  $E_{Ratio} = \frac{E_o}{E_i}$  مدول یانگ در ضخامت تیر توسط رابطه (۱۴) تغییر می‌کند:

$$E(\bar{z}) = E(r) = E_i \left[ (E_{Ratio} - 1) \left( \frac{r-R}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + 1 \right] \quad (14)$$

شکل ۲ نحوه تغییر مدول یانگ را در ضخامت لوله برای هر دو حالت نسبت مدول یانگ بزرگتر و یا کوچکتر از یک نشان می‌دهد.

با صرف نظر کردن از ترم اینرسی چرخشی و صفر در نظر گرفتن  $\dot{v}$  (ثابت بودن سرعت درون لوله)، پارامترهای بی‌بعد (۱۵) برای بی‌بعد سازی استفاده شده است:

$$\xi = \frac{x}{L}, \eta = \frac{w}{L}, \tau = \left[ \frac{E_i I}{m_p + m_f} \right]^{1/2} \frac{t}{L^2} \quad (15)$$



شکل ۲- نحوه تغییرات مدول یانگ در راستای ضخامت لوله

### ۳- روش حل

برای تبدیل معادله دیفرانسیل جزئی حاکم بر مسئله به معادله دیفرانسیل معمولی از روش گالرکین استفاده می شود. از این رو جابجایی جانبی لوله به صورت رابطه (۲۰) در نظر گرفته شده است:

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_{j=1}^N \phi_j(\xi) q_j(\tau) \quad (20)$$

که  $\phi_j(\xi)$  توابع ویژه نرمال و  $q_j(\tau)$  مختصات تعمیم یافته است. در این مقاله، توابع ویژه به صورت رابطه (۲۱) انتخاب شده است:

$$\phi_j(\xi) = \sin(j\pi\xi) \quad , \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

که در این تحقیق، شش مود اول در نظر گرفته می شود. توابع شکل مود را در معادله (۱۹) قرار داده و پس از اعمال روش گالرکین،  $N$  معادله با فرم ماتریسی (۲۲) بدست می آید:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = 0 \quad (22)$$

که درایه های ماتریس های  $M$  و  $C$  و  $K$  توسط روابط (۲۳) و (۲۴) و (۲۵) بدست می آیند:

$$m_{ij} = \int_0^1 \phi_i(\xi) \phi_j(\xi) d\xi \quad (23)$$

$$c_{ij} = \int_0^1 2\beta^{1/2} U \phi_i(\xi) \frac{\partial \phi_j(\xi)}{\partial \xi} d\xi \quad (24)$$

$$k_{ij} = \int_0^1 \frac{EI}{I} \cdot \phi_i(\xi) \frac{\partial^4 \phi_j(\xi)}{\partial \xi^4} d\xi + \int_0^1 U^2 \phi_i(\xi) \frac{\partial^2 \phi_j(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi \quad (25)$$

که:

$$\bar{EI} = \int_{A_p} z^2 \left[ (E_{Ratio} - 1) \left( \frac{r-R}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + 1 \right] dA \quad (26)$$

برای بدست آوردن فرکانس های طبیعی، سیستم را به فضای حالت برده و بردار حالت به صورت  $X(t) = [q^T(t) \dot{q}^T]^T$  تعریف شده است. معادله در فضای حالت به صورت زیر بدست می آید:

$$\dot{X}(t) = AX(t) \quad (27)$$

که:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & I \\ \dots & \vdots & \dots \\ -M^{-1} * K & \vdots & -M^{-1} * C \end{bmatrix} \quad (28)$$

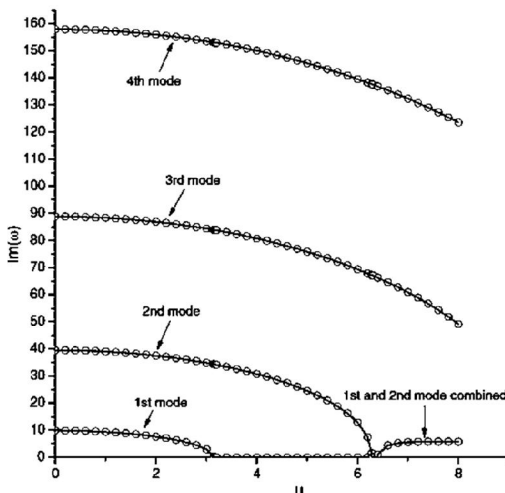
$A$  ماتریسی با ضرایب ثابت است. سپس حل سیستم ارتعاشی را به صورت  $X(t) = e^{\lambda t} x$  در نظر گرفته و با قرار دادن در معادله قبل و تقسیم بر  $e^{\lambda t}$ :

$$Ax = \lambda x \quad (29)$$

که معادله (۲۹)، مساله مقدار ویژه جبری، یک تئوری پایه در مسایل ارتعاشی است و مقدارهای ویژه نشان دهنده فرکانس های سیستم است.

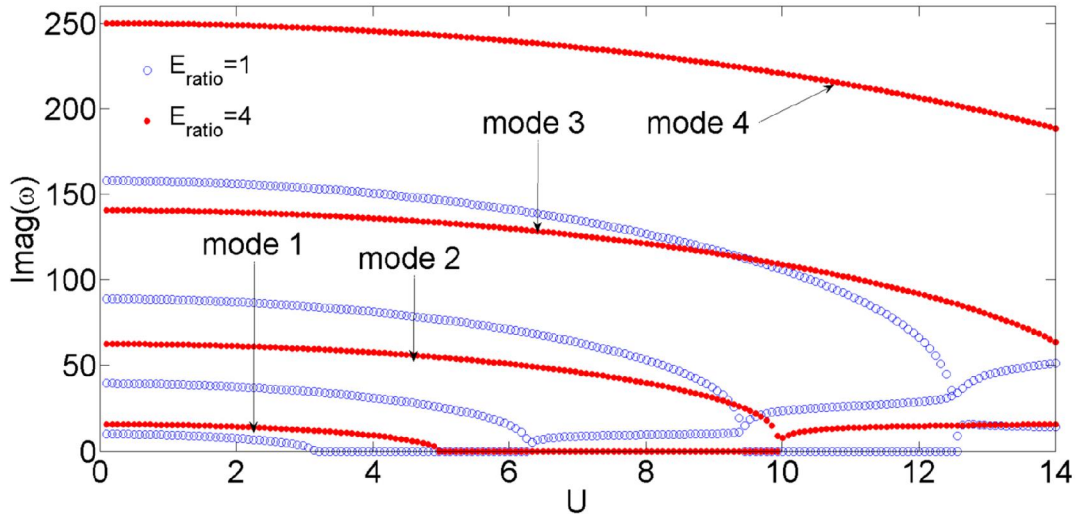
### ۴- نتایج

شش مود اول برای حل در نظر گرفته شده و مقادیر ویژه به صورت مختلط بدست آمده که مقدار موهومی آن همان فرکانس نوسانات سیستم است. مقدار حقیقی به ازای سرعت های پایین سیال صفر است، اما با افزایش سرعت سیال مقدار ویژه حقیقی ظاهر شده و لوله به واسطه پدیده دوشاخگی پیچفورک ناپایدار می شود. در اینجا، صفر شدن مقدار موهومی به معنای صفر شدن فرکانس نوسانات است. ضمن این که مقادیر ویژه، حقیقی و قرینه یکدیگر می شوند. مقادیر ویژه موهومی و حقیقی برای لوله همگن بدست آمده که کاملاً مطابق مرجع [۸] است و در شکل ۳ نشان داده شده است.

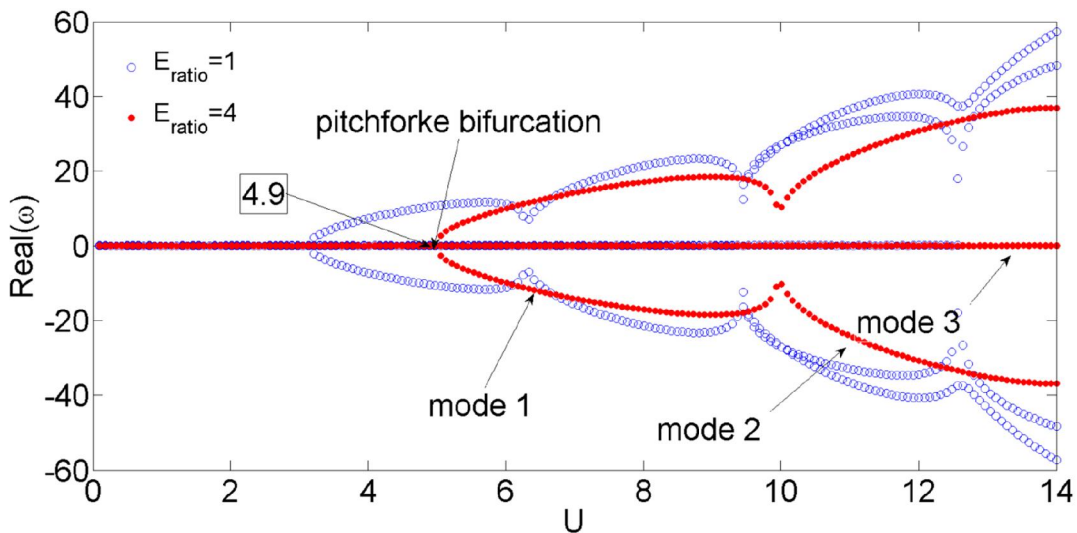


شکل ۳- قسمت موهومی فرکانس های اصلی اول تا چهارم لوله همگن با تکیه گاه ساده و حاوی جریان سیال و  $\beta = 0.1$  (مرجع [۸])

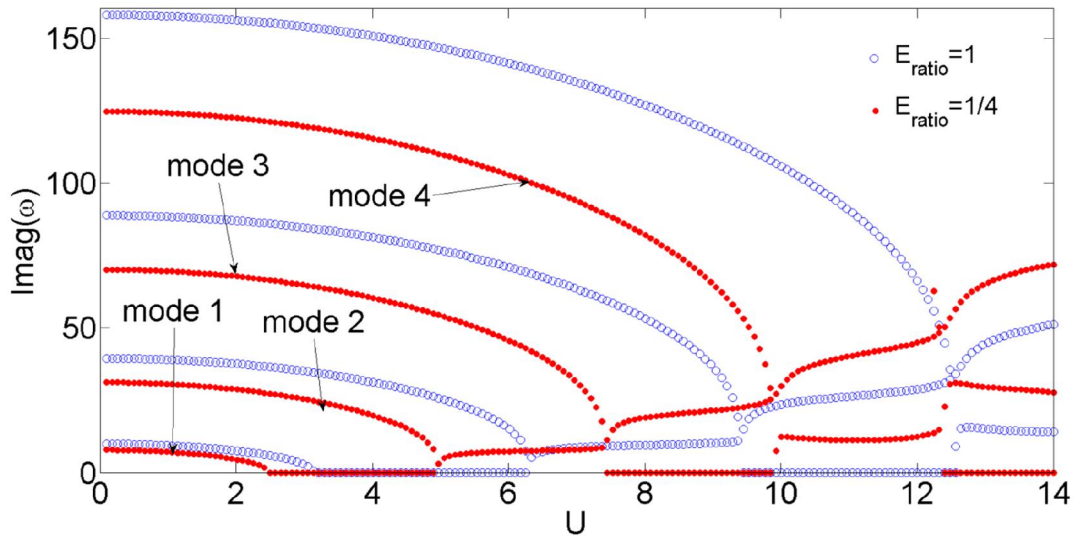
در شکل ۴ تا ۷ فرکانس‌های طبیعی لوله با جنس همگن (نمودار آبی رنگ)، با لوله تقویت شده به صورت تدریجی در جهت ضخامت (نمودار قرمز رنگ)، به ازای سرعت‌های مختلف سیال مقایسه شده است.



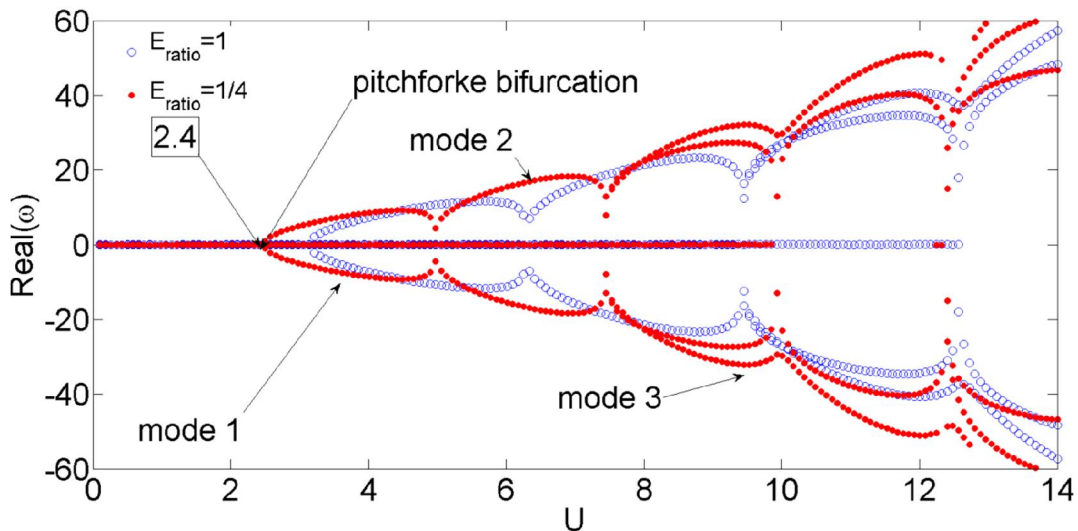
شکل ۴- قسمت موهومی فرکانس‌های اصلی اول تا چهارم لوله دوسرلولا تقویت شده به صورت تدریجی در جهت ضخامت به ازای  $E_{Ratio} = 4$  و  $\beta = 0$ .



شکل ۵- قسمت حقیقی فرکانس‌های اصلی اول تا چهارم لوله دوسرلولا تقویت شده به صورت تدریجی در جهت ضخامت به ازای  $E_{Ratio} = 4$  و  $\beta = 0$ .



شکل ۶- قسمت موهومی فرکانس‌های اصلی اول تا چهارم لوله دوسرلولا تقویت شده به صورت تدریجی در جهت ضخامت به ازای  $E_{Ratio} = 1/4$  و  $\beta = 0$ .



شکل ۷- قسمت حقیقی فرکانس‌های اصلی اول تا چهارم لوله دوسرلولا تقویت شده به صورت تدریجی در جهت ضخامت به ازای  $E_{Ratio} = 1/4$  و  $\beta = 0$ .

یانگ سطح خارج لوله ۴ برابر سطح داخلی است و با در نظر گرفتن  $k = 1$  مدول یانگ در ضخامت لوله به صورت خطی تغییر می‌کند.

با فرض  $0/3$  برای پارامتر جرمی بی‌بعد، دو حالت برای لوله تقویت شده در نظر گرفته شده است؛ در حالت اول که سطح خارجی سختتر از سطح داخلی است و  $E_{Ratio} = 4$  فرض شده که طبق تعریف صورت گرفته در این حالت، مدول

دهنده کاهش فرکانس‌ها نسبت به حالت همگن است؛ همچنین با توجه به شکل ۸ ناپایداری در سرعت پایین‌تر ۲.۴ نسبت به حالت همگن در مود اول روی داده است.

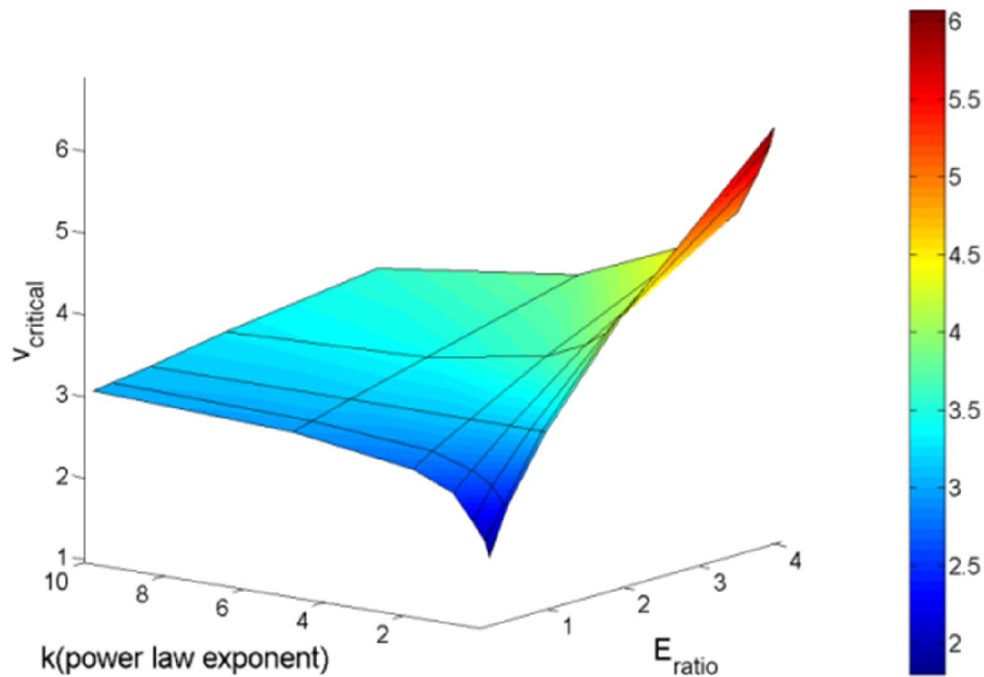
با در نظر گرفتن این که پارامتر جرمی بی‌بعد در شرایط مرزی دوسرولوا، بر سرعت بی‌بعد بحرانی تاثیر ندارد [۵] مقدار آن را ۰.۳ فرض کرده و به ازای مقادیر مختلف پارامترهای  $k$  و  $E_{ratio}$ ، میزان سرعت بحرانی بی‌بعد سیال محاسبه شده و در جدول ۱ گزارش شده است؛ همچنین در شکل ۸ این مقادیر نشان داده شده‌اند.

با توجه به شکل ۸، با افزایش  $E_{ratio}$  (افزایش مدول یانگ در سطح خارجی لوله) سرعت بحرانی افزایش چشمگیری دارد، اما با کاهش آن ناپایداری در سرعت‌های پایین‌تر رخ می‌دهد.

همچنین در شکل ۸ مشخص است که در  $k$ های کوچکتر، به ازای تغییرات نسبت مدول یانگ، سرعت بحرانی در بازه بزرگتری تغییر می‌کند، اما در مقادیر زیاد  $k$ ، این بازه تغییرات کوچک می‌شود و عمده تغییرات زیاد مدول یانگ در ضخامت کمی نزدیک سطح خارجی رخ می‌دهد و مدول یانگ برای اکثر نقاط دیگر ضخامت لوله مقدار تقریباً ثابتی دارد.

در شکل ۴ فرکانس‌های طبیعی لوله با جنس همگن، با لوله تقویت شده به صورت تدریجی در جهت ضخامت، به ازای سرعت‌های مختلف سیال مقایسه شده است. در این حالت تقویت شده، فرکانس‌های اصلی لوله، نسبت به حالت لوله همگن افزایش یافته است. در شکل ۵ قسمت حقیقی فرکانس‌های طبیعی متناظر با همان سرعت‌های سیال نشان داده شده است. برای درک بهتر مقادیر ویژه موهومی و حقیقی متناظر با سرعت‌های مختلف در یک راستا رسم شده‌اند. ابتدا در سرعت‌های پایین قسمت حقیقی فرکانس صفر است که نشان‌دهنده ارتعاش سیستم با فرکانس متناظر با همان سرعت در شکل ۴ است، تا اینکه سیستم در سرعت بی‌بعد ۴.۹ به واسطه پدیده دوشاخگی پیچفورک در مود اول ناپایدار می‌شود. مشخص است که ناپایداری در لوله تقویت شده به صورت تدریجی در این حالت نسبت به حالت همگن در سرعت بالاتری اتفاق افتاده است.

در شکل‌های ۶ و ۷ حالت دیگر  $E_{ratio} = 1/4$  فرض شده که در این شرایط مدول یانگ خارجی  $1/4$  برابر مدول یانگ داخلی است. فرکانس‌های این سیستم و سیستمی با لوله از جنس همگن در شکل ۶ نشان داده شده‌اند که نشان



شکل ۸- سرعت بحرانی بی‌بعد لوله تقویت شده به صورت تدریجی در راستای ضخامت لوله به ازای مقادیر مختلف



جدول ۱- سرعت‌های بحرانی بی‌بعد لوله دوسر لولا تقویت شده تدریجی در راستای ضخامت لوله به ازای

مقادیر مختلف  $k$  و  $E_{ratio}$ 

$k=10$	$k=5$	$k=2$	$k=1$	$k=0.5$	$k=0.2$	$k=0.1$	$E_{ratio}$
3.04	2.94	2.73	2.42	2.20	1.99	1.80	0.25
3.07	3.01	2.88	2.73	2.58	2.37	2.37	0.5
3.14	3.14	3.14	3.14	3.14	3.14	3.14	1
3.29	3.39	3.64	3.87	4.05	4.25	4.30	2
3.54	3.87	4.50	4.96	5.47	5.85	6.07	4

## ۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق به بررسی ارتعاشات و پایداری لوله دو سر لولا و حاوی جریان سیال، تقویت شده به صورت تدریجی در جهت ضخامت، پرداخته شده است. خواص مکانیکی لوله در راستای ضخامت طبق قانون توانی تغییر می‌کند. از تئوری تیر اوایل برنولی برای بدست آوردن معادلات ارتعاشی استفاده شده است. همین روند بی‌بعدسازی می‌تواند برای تعیین معادلات بی‌بعد ارتعاشی لوله FGM حاوی سیال در مقیاس میکرو و نانو یا مسائل دیگر استفاده گردد. با بهره‌گیری از روش گالرکین، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد لوله به ازای سرعت‌های مختلف و در نظر گرفتن حالات مختلف لوله تقویت شده تدریجی، بدست آمده و با لوله از جنس همگن مقایسه شده است.

شش مود اول برای حل در نظر گرفته شده و مقادیر ویژه به صورت مختلط بدست آمده که مقدار موهومی آن، همان فرکانس نوسانات سیستم است. مقدار حقیقی به ازای سرعت‌های پایین سیال صفر است، اما با افزایش سرعت سیال مقدار ویژه حقیقی ظاهر شده و لوله به واسطه پدیده دوشاخگی پیچفورک ناپایدار می‌گردد. صفر شدن مقدار موهومی به معنای صفر شدن فرکانس نوسانات است. ضمن این که مقادیر ویژه، حقیقی و قرینه یکدیگر می‌شوند.

مشخص شد با افزایش مدول یانگ در سطح خارجی لوله نسبت به سطح داخلی، فرکانس‌های طبیعی سیستم افزایش می‌یابد و ناپایداری در لوله بر اثر جریان سیال، در سرعت بالاتری روی می‌دهد؛ همچنین این سرعت‌های بحرانی به

ازای توزیع‌های مختلف مدول یانگ در ضخامت لوله بدست آمده‌اند. مشخص شد، هرچه مدول یانگ لوله در ناحیه سطح خارجی لوله بیشتر باشد، ناپایداری لوله در سرعت‌های بالاتری رخ می‌دهد.

## ۶- مراجع

- [1] Wang L, Liu H, Ni Q, Wu Y (2013) Flexural vibrations of microscale pipes conveying fluid by considering the size effects of micro-flow and micro-structure. *Int J Eng Sci* 71: 92-101.
- [2] Pai M (2008) The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across applied mechanics. *J Sound Vib* 310: 462-492.
- [3] Şimşek M (2010) Dynamic analysis of an embedded microbeam carrying a moving microparticle based on the modified couple stress theory. *Int J Eng Sci* 48: 1721-1732.
- [4] Wang L, Liu HT, Ni Q, Wu Y (2013) Flexural vibrations of microscale pipes conveying fluid by considering the size effects of micro-flow and micro-structure. *Int J Eng Sci* 71: 92-101.
- [5] Paidoussis MP (2013) Fluid-Structure interactions: Slender structures and axial flow. vol 1. Academic Press.
- [6] Paidoussis MP (2008) The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across applied mechanics. *J Sound Vib* 310: 462-492.
- [7] Blevins RD (1990) Flow-induced vibration.
- [8] Ni Q, Zhang Z, Wang L (2011) Application of the differential transformation method to vibration analysis of pipes conveying fluid. *Appl Math Comput* 217: 7028-7038.

- [17] Wang ZM, Liu YZ (2016) Transverse vibration of pipe conveying fluid made of functionally graded materials using a symplectic method. *Nucl Eng Des* 149-159.
- [18] Mamaghani AE, Khadem SE, Bab S (2016) Vibration control of a pipe conveying fluid under external periodic excitation using a nonlinear energy sink. *Nonlinear Dynam* 86: 1761-1795.
- [19] Ebrahimi-Mamaghani A, Sotudeh-Gharebagh R, Zarghami R, Mostoufi N (2019) Dynamics of two-phase flow in vertical pipes. *J Fluid Struct* 87: 150-173.
- [20] Mirtalebi SH, Ahmadian MT, Ebrahimi-Mamaghani A (2019) On the dynamics of micro-tubes conveying fluid on various foundations. *SN Appl Sci* 1: 547.
- [21] Ziegler H (1968) *Principles of structural stability*. Blaisdell, Waltham, MA.
- [22] Sadeghi MH, Karimi-Dona MH (2011) Dynamic behavior of a fluid conveying pipe subjected to a moving sprung mass—an FEM-state space approach. *Int J Pres Ves Pip* 88: 123-131.
- [23] Reddy J, Wang C (2004) *Dynamics of fluid-conveying beams*. Centre for Offshore Research and Engineering, National University of Singapore, CORE Report. 3: 1-21.
- [24] Alshorbagy AE, Eltaher M, Mahmoud F (2011) Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *Appl Math Model* 35: 412-425.
- [9] Wang L, Dai H (2012) Vibration and enhanced stability properties of fluid-conveying pipes with two symmetric elbows fitted at downstream end. *Arch Appl Mech* 82: 155-161.
- [10] Firouz-Abadi R, Askarian A, Kheiri M (2013) Bending-torsional flutter of a cantilevered pipe conveying fluid with an inclined terminal nozzle. *J Sound Vib* 332: 3002-3014.
- [11] Ni Q, Tang M, Luo Y, Wang Y, Wang L (2014) Internal-external resonance of a curved pipe conveying fluid resting on a nonlinear elastic foundation. *Nonlinear Dynam* 76: 867-886.
- [12] Alizadeh A, Mirdamadi H (2015) Free vibration and divergence instability of pipes conveying fluid with uncertain structural parameters. *Modares Mechanical Engineering* 15: 247-254.
- [13] Heydari H, Ghazavi MR, Najafi A (2016) Dynamics analysis of pipe conveying fluid with axial and rotational motion. *Modares Mechanical Engineering* 16: 387-393.
- [14] Zou G, Cheraghi N, Taheri F (2005) Fluid-induced vibration of composite natural gas pipelines. *Int J Solids Struct* 42: 1253-1268.
- [15] Dai H, Wang L, Ni Q (2013) Dynamics of a fluid-conveying pipe composed of two different materials. *Int J Eng Sci* 73: 67-76.
- [16] Shen H, Païdoussis MP, Wen J, Yu D, Wen X (2014) The beam-mode stability of periodic functionally-graded-material shells conveying fluid. *J Sound Vib* 333: 2735-2749.