



## طراحی و تنظیم کنترل مقاوم مد لغزشی-تناسبی-مشتقی $PD-SMC$ در پایداری سازی بازوی ربات دو درجه آزادی

ولی اله غفاری<sup>۱\*</sup>، غلامرضا جمالی<sup>۲</sup>، وحید میگلی<sup>۱</sup> و مجتبی میرزایی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> استادیار، گروه مهندسی برق، دانشگاه خلیج فارس  
<sup>۲</sup> دانش‌آموخته کارشناسی ارشد، گروه مهندسی برق، دانشگاه خلیج فارس  
<sup>۳</sup> استادیار، پژوهشکده علوم و فنون هوا دریا، دانشگاه شیراز

نوع مقاله، تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۰/۰۸؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۰۵/۲۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۱/۰۱

### چکیده

یک سیستم کنترل مد لغزشی-تناسبی-مشتقی  $PD-SMC$  برای ردیابی مسیر حرکت بازوی ربات دو درجه آزادی دارای عدم قطعیت، در این مطالعه ارائه شده است. در حضور عدم قطعیت و تغییر پارامترهای یک سیستم غیرخطی، کنترل مد لغزشی  $SMC$ ، روش مقاومی می‌باشد. با به‌کارگیری روش کنترل تناسبی-مشتقی  $PD$ ، سیستم حلقه بسته دارای پاسخ سریع و محدوده پایداری نیز افزایش می‌یابد. بنابراین در قانون  $PD-SMC$ ، از ویژگی‌های دو نوع کنترل  $SMC$  و  $PD$  استفاده می‌شود. با بهره‌گیری از تئوری پایداری لیاپانوف، پایداری سیستم کنترل حلقه بسته، با قانون  $PD-SMC$ ، نشان داده خواهد شد. دیده می‌شود اگر بهره‌های قانون  $PD-SMC$  در یک نامساوی ماتریسی صدق کنند آن گاه با استفاده از قانون  $PD-SMC$ ، دینامیک بازوی ربات دو درجه آزادی پایدار مجانبی می‌گردد. در نتیجه، خطای ردیابی و مشتق‌های مرتبه اول و دوم آن به صفر همگرا خواهد شد. برای ارزیابی سیستم کنترل طراحی شده، ابتدا با روش بهینه‌سازی الگوریتم ژنتیک، یک مساله مینیمم‌یابی حل شده و پارامترهای قانون  $PD-SMC$  تنظیم می‌شود. سپس این قانون کنترل در یک ربات دو درجه آزادی استفاده شده است. نتایج شبیه‌سازی‌های انجام شده، کارآمدی و مقاوم بودن روش کنترل طراحی شده را در مقایسه با سایر روش‌ها نشان می‌دهد.

**کلمات کلیدی:** کنترل تناسبی-مشتقی؛ کنترل مد لغزشی؛ تحلیل پایداری؛ کنترل بازوی ربات.

## Design and Tuning of Robust Proportional-Derivative Sliding-Mode Control (PD-SMC) in Stabilization of 2-DOF Robot Manipulator

V. Ghaffari<sup>1,\*</sup>, G. Jamali<sup>2</sup>, V. Meigoli<sup>1</sup>, M. Mirzaei<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Assistant Professor of Electrical Engineering, Persian Gulf University, Bushehr, Iran.

<sup>2</sup> M. Sc. of Electrical Engineering, Persian Gulf University, Bushehr, Iran.

<sup>3</sup> Assistant Professor of Mechanical Engineering, Hydro-Aeronautical Research Center, Shiraz University, Shiraz, Iran.

### Abstract

A proportional-derivative sliding-mode control ( $PD-SMC$ ) scheme is addressed for tracking problem of a two-degree of freedom robot manipulator. The sliding-mode control ( $SMC$ ) may be a robust method in presence of parameters change and system uncertainties. In a typical control problem, the proportional-derivative ( $PD$ ) control law provides a fast response while the stability of the closed loop system is increased. Hence a two degree of freedom robot manipulator is considered. Then the asymptotic stability of closed loop system with the  $PD-SMC$  policy would be shown by using of the well-known Lyapunov stability theory. As a result of this paper, the asymptotic stability criteria would be checked in term of some simple matrix inequalities. Having satisfaction of such matrix inequalities in the tracking problem of the robot manipulator, the tracking error and its derivative would be converged to zero. In order to compare the results with the other control approaches, the controller parameters are firstly tuned in an optimization way via the genetic algorithm ( $GA$ ) method. Then some numerical examples are provided to show the effectiveness and robustness of the  $PD-SMC$  in comparing with the existing methods.

**Keywords:** PD Control; Sliding-Mode Control; Stability Analysis; Robotic Manipulator Control.

\* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۰۷۷-۳۱۲۲۲۲۶۹؛ فکس: ۰۰۷۷-۳۳۴۴۰۳۷۶

آدرس پست الکترونیک: [vghaffari@pgu.ac.ir](mailto:vghaffari@pgu.ac.ir)

## ۱- مقدمه

امروزه بازوهای ربات به طور چشم‌گیری در صنایع مختلفی از قبیل هوافضا، پزشکی، نظامی و... استفاده می‌شوند. سیستم کنترل ربات بایستی به گونه‌ای طراحی شود تا بازوی ربات فرمان مرجع را با خطای قابل قبولی دنبال نمایند [۱، ۲]. همچنین متناسب با تغییرات پیش‌بینی نشده‌ای که در مسیر این ربات‌ها قرار می‌گیرند رفتار مناسب نشان دهند. عدم دقت در مدل‌سازی دینامیکی می‌تواند اثرات نامطلوبی بر عملکرد و یا پایداری آن داشته باشد. پس در طراحی عملی، بایستی آن‌ها را صریحاً در نظر گرفت [۳].

در حضور عدم قطعیت<sup>۱</sup> و تغییر پارامترهای سیستم، کنترل مد لغزشی<sup>۲</sup> روش مقاومی می‌باشد. کنترل مد لغزشی شامل دو فاز دستیابی و لغزش می‌باشد. به دلیل وجود تابع علامت در قانون کنترل، فاز دستیابی در زمان محدود اتفاق می‌افتد و بعد از زمان محدود، حالت‌های سیستم روی سطح لغزش قرار گرفته و به نقطه تعادل می‌رسند [۴]. وجود پدیده چترینگ در سیگنال کنترل، مهم‌ترین مشکل قانون کنترل مد لغزشی می‌باشد. یک روش برای حذف پدیده چترینگ، استفاده از توابع هموار به جای تابع علامت می‌باشد [۵]. در چنین شرایطی می‌توان در همسایگی سطح لغزش، یک لایه مرزی با ضخامت معینی انتخاب گردد. در نتیجه اگر تابع همواری مثل اشباع به جای تابع علامت انتخاب شود آن وقت فاز دستیابی به آن لایه مرزی در زمان محدود خواهد بود. بدیهی است با افزایش ضخامت لایه مرزی، زمان دست‌یابی به لایه مرزی نیز کاهش می‌یابد [۶].

کنترل مد لغزشی، از یک قسمت نامی و جملات اضافی به خاطر مقابله با عدم قطعیت‌ها تشکیل شده است. در طراحی کنترل مد لغزشی به جای سیستم مرتبه بالا، ابتدا یک سطح لغزش که دارای مرتبه پایین‌تری است مناسب انتخاب می‌گردد. سپس برای دینامیک سطح لغزش، طراحی قانون کنترل انجام می‌شود [۷].

در کنترل مد لغزشی، اگر چه متغیر لغزش در زمان محدود پایدار می‌گردد اما سیستم حلقه بسته با کنترل مد لغزشی پایدار مجانبی می‌گردد. چنین ساده سازی اجازه می‌-

دهد رفتار سیستم‌های دینامیکی مرتبه بالا با سیستم مرتبه پایین معادل جایگزین شود. با کنترل مد لغزشی نشان داده شده است که عملکرد قابل قبولی با وجود عدم قطعیت‌های سیستم بدست می‌آید [۸، ۹]. چنین رویکردی در ازای بهای زیاد در قانون کنترل به دست می‌آید. گرچه عدم قطعیت سیستم در کنترل مد لغزشی لحاظ شده است اما این مسئله نوعاً با سایر منابع عدم قطعیت، در تضاد است. مثلاً حضور دینامیک‌های صرف‌نظر شده ممکن است فعالیت‌های کنترلی زیادی را ایجاد کند. پس بین عملکرد ردیابی و عدم قطعیت سیستم انجام مصالحه ضروری می‌باشد. در امر کنترل و پایدار سازی بازوی ربات، از روش‌های کنترلی فراوانی از قبیل کنترل  $PID$ ، مد لغزشی، خطی‌سازی با فیدبک، کنترل غیرخطی و غیره استفاده شده است [۳، ۱۰].

دسته خاصی از ربات‌ها که در کاربردهای صنعتی بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرد ربات‌های دو درجه آزادی می‌باشد. یک روش بهینه مبتنی بر یادگیری، برای کنترل زاویه بازوی ربات در [۱۱] پیشنهاد شده است. از کنترل مد لغزشی مرتبه بالا می‌توان برای پایدارسازی بازوی ربات استفاده نمود [۹].

برای کنترل ربات دو درجه آزادی مطالعات متنوعی صورت گرفته است. پایداری سرتاسری ربات برای ردیابی مسیر ربات با کنترل  $PID$  بررسی و نشان داده شده است. کنترل  $PID$  بدون جبرانگر می‌تواند برای ردیابی مسیر ربات غیرخطی، پایداری سراسری را تضمین کند [۱۲]. در [۱۳] یک کنترل  $PID$  برای تعقیب مسیر ربات طراحی شده است. عمده‌تأ با تضمین نمودن پایداری سیستم حلقه بسته، طراحی قانون انجام می‌شود. پس مهم‌ترین مسأله در بکارگیری کنترل  $PID$ ، وجود یک الگوریتم مناسب برای تنظیم پارامترهای آن می‌باشد. روش‌ها و الگوریتم‌های استاندارد متنوعی برای تنظیم ضرایب کنترل  $PID$  در سیستم‌های دینامیکی پیشنهاد شده است [۱۴]. به دلیل وجود محدودیت، عموماً روش‌های موجود قابل استفاده در بازوی ربات برای تنظیم ضرایب کنترل  $PID$  کارساز نیست. در کنترل زاویه بازوی ربات، ضرایب کنترل  $PID$  را می‌توان با روش‌های عددی مبتنی بر بهینه‌سازی از قبیل الگوریتم ژنتیک [۱۵]، منطق فازی [۱۶]، الگوریتم ازدحام ذرات [۱۷]، روش مبتنی بر ماتریس اینرسی و بردار گشتاور گرانش [۱۸]، تنظیم نمود.

<sup>1</sup> Uncertainty

<sup>2</sup> Sliding Mode Control

سطح لغزش نیز بررسی می‌گردد. بنابراین انتظار داریم با روش کنترلی  $PD-SMC$  بازوی ربات، پاسخ سریعی داشته و در برابر عدم قطعیت نیز مقاوم باشد. از مزیت دیگر روش  $PD-SMC$ ، آن است پارامترهای قانون کنترل مانند کنترل  $PID$  وابستگی و حساسیت شدیدی به پارامترها ندارد. برای کنترل موقعیت در یک ربات دارای حرکت خطی، روش کنترلی  $PD-SMC$  استفاده شده است [۳۰، ۳۱]. ماتریس جرم در بازوی ربات دارای حرکت خطی ماتریس ثابتی می‌باشد. اما در یک ربات دارای حرکت چرخشی، ماتریس اینرسی ثابت نبوده و وابسته به زاویه چرخش ربات می‌باشد. به دلیل مدل دینامیکی متفاوت در یک ربات دارای چرخش در مقایسه با ربات خطی و وابستگی ماتریس اینرسی به زاویه ربات، قانون کنترل پیشنهاد شده در [۳۱] مستقیماً قابل استفاده نیست. بنابراین ابتدا مساله پایداری و طراحی قانون کنترل در یک ربات دو درجه آزادی فرموله می‌گردد. با استفاده از تئوری پایداری لیپانف، قانون  $PD-SMC$  در یک ربات دو درجه آزادی دارای چرخش استخراج می‌گردد. سپس نتیجه بدست آمده در آن ربات شبیه‌سازی می‌شود. در مقاله [۳۱]، عملکرد سیستم کنترل در نظر گرفته نشده و تنها به پایداری سیستم حلقه بسته پرداخته شده است. پس از دیگر معایب روش کنترل [۳۱]، عدم وجود یک الگوریتم مناسب برای انتخاب پارامترهای قانون کنترل می‌باشد. به همین منظور، برای تنظیم ضرایب قانون کنترل، ابتدا معادله‌های دیفرانسیل و عبارت‌های شامل مشتق، با روش عددی اویلر گسسته‌سازی می‌گردد. سپس برای تنظیم پارامترهای کنترل  $PD-SMC$ ، یک تابع هزینه مربعی انتخاب می‌شود. در نتیجه، انتخاب مناسب پارامترهای قانون کنترل، به حل یک مساله بهینه‌یابی عددی تبدیل می‌گردد. در نهایت با در نظر گرفتن قیدهای حاکم بر مساله با استفاده از الگوریتم ژنتیک، مقادیر بهینه پارامترهای قانون کنترل تعیین می‌گردد.

در این مقاله، ابتدا در بخش دوم مدل دینامیکی ربات دو درجه آزادی بررسی می‌گردد. در بخش سوم، کنترل مدلزشتی و در بخش چهارم نیز تنظیم، طراحی و تحلیل پایداری سیستم حلقه بسته، با روش کنترلی  $PD-SMC$  پرداخته شده است. در بخش پنجم نتایج روش کنترل بدست

ردیابی و تعقیب مجانبی بازوی ربات با استفاده از کنترل  $PD$  به همراه کنترل پیشخور در [۱۹] مطالعه شده است. برای پایداری بازوی ربات دارای عدم قطعیت دینامیکی، یک کنترل تطبیقی وابسته به مدل طراحی شده است [۲۰]. از مهم‌ترین تفاوت بین روش کنترل مقاوم و روش‌های کنترل تطبیقی آن است که در روش‌های تطبیقی معمولاً عدم قطعیت سیستم، پارامتری (از نوع خطی نسبت پارامترهای نامعلوم) بوده و به دلیل بروزسانی ضرایب کنترل، حجم محاسبات بالاتری در قانون کنترل وجود دارد. در طراحی کنترل مقاوم، عدم قطعیت معمولاً به صورت غیر ساختاری در نظر گرفته می‌شود و در مقایسه با نوع تطبیقی، حجم محاسبات کمتری خواهد داشت. همچنین روش‌های کنترل مقاوم، در مقایسه با کنترل تطبیقی، فرم عمومی‌تری داشته و در دسته وسیع‌تری از سیستم‌های دارای عدم قطعیت می‌توانند به کار گرفته شوند. با در نظر گرفتن تاخیر زمانی در حلقه کنترل، بازوی ربات با استفاده از یک کنترل مدلزشتی پایدار مجانبی شده است [۲۱]. برای کنترل زاویه بازوی ربات، می‌توان یک شبکه عصبی انتخاب نمود. با آموزش آن شبکه عصبی، رفتار بازوی ربات را با وجود قید و عدم قطعیت، مدل‌سازی و حرکت بازوی ربات شبیه‌سازی گردد. [۲۲-۲۴]. از یک کنترل تطبیقی مبتنی بر معکوس مدل دینامیکی برای کنترل بازوی ربات استفاده شده است [۲۵]. کنترل و ردیابی ربات، با کنترل مدلزشتی دارای ساختار متغیر بررسی شده است [۲۶].

با وجود عدم قطعیت در مدل سیستم، کنترل مدلزشتی فازی برای کنترل بازوی ربات در [۲۷، ۲۸] طراحی شده است. برای تنظیم پارامترهای کنترل فازی می‌توان از الگوریتم تکاملی استفاده نمود [۲۹].

با تقریب هموار برای تابع اشباع، در حضور عدم قطعیت و نویز، کنترل مدلزشتی مقاوم می‌باشد. به دلیل وجود عبارت مشتق‌گیر، قانون کنترل  $PD$ ، دارای پاسخ سریع و محدوده پایداری بیشتری است. کنترل مدلزشتی - تناسبی - مشتقی  $PD-SMC$ ، ترکیبی از ویژگی‌های دو نوع کنترل  $PD$  و  $SMC$  می‌باشد. با قانون  $PD-SMC$ ، عدم قطعیت‌های سیستم به صورت غیرساختاری<sup>۱</sup> در نظر گرفته شده و پایداری مجانبی

<sup>۱</sup> Unstructured Uncertainty

با جایگزینی رابطه (۲) در معادله (۱)، مدل دینامیکی ربات مورد نظر به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$J_0 \ddot{\theta} + \gamma \cos \theta_2 \dot{J} \ddot{\theta} + B \dot{\theta} + \Gamma(\theta, \dot{\theta}) + D = \tau \quad (3)$$

با فرض این که مقادیر شتاب زاویه‌ای  $\ddot{\theta}(t)$  قابل اندازه‌گیری می‌باشد، ورودی مجازی  $\hat{\tau}(t)$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{\tau} = \tau - \gamma \cos \theta_2 \dot{J} \ddot{\theta} - \Gamma(\theta, \dot{\theta}) \quad (4)$$

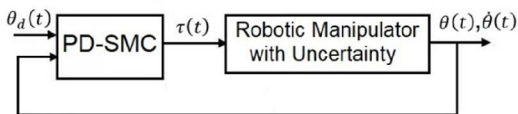
بنابراین مدل دینامیکی ربات دو درجه آزادی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$J_0 \ddot{\theta} + B \dot{\theta} + D = \hat{\tau} \quad (5)$$

در این مطالعه می‌خواهیم زاویه‌های بازوی ربات  $\theta(t)$ ، زاویه مطلوب  $\theta_d(t)$  را به صورت مجانبی دنبال کند. پس بردار خطای ردیابی  $E(t)$  به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$E(t) = \theta_d(t) - \theta(t) \quad (6)$$

در این تعریف  $\theta_d(t)$ ،  $\dot{\theta}_d(t)$  و  $\ddot{\theta}_d(t)$  به ترتیب بردار مطلوب موقعیت، سرعت و شتاب زاویه ای بازوی ربات بوده و مقادیر معلومی می‌باشند. به منظور سادگی مساله، فرض می‌شود بردارهای  $\theta_d$ ،  $\dot{\theta}_d$  و  $\ddot{\theta}_d$  در زمان محدود می‌باشند. نمودار بلوکی سیستم کنترل مورد استفاده در امر تعقیب مسیر برای بازوی ربات دو درجه آزادی، در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲- نمودار بلوکی سیستم کنترل در ربات دو درجه آزادی

با طراحی کنترل  $\tau(t)$ ، زاویه ربات  $\theta(t)$  زاویه مطلوب  $\theta_d(t)$  را به صورت مجانبی دنبال خواهد نمود  $(\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \theta_d(t))$ . از آن جا که می‌خواهیم سیگنال مرجع دنبال شود بایستی معادله‌ها بر حسب خطا  $E$  نوشته شود. با لحاظ نمودن رابطه (۶)، معادله (۵) به صورت زیر می‌باشد:

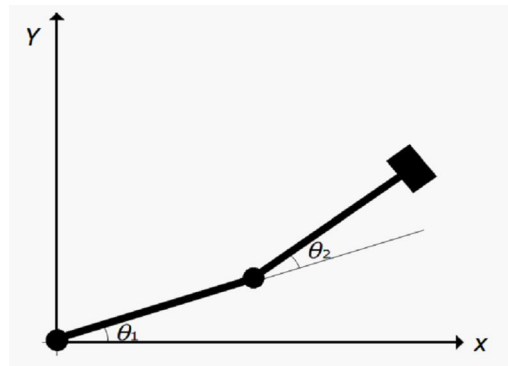
$$J_0(\ddot{\theta}_d - \ddot{E}) + B(\dot{\theta}_d - \dot{E}) + D = \hat{\tau} \quad (7)$$

با تعریف بردار  $P = J_0 \ddot{\theta}_d + B \dot{\theta}_d + D$ ، رابطه (۷) به صورت زیر نوشته می‌شود:

آمده، در بازوی یک ربات شبیه‌سازی شده است. در بخش آخر نتیجه‌گیری مقاله گنجانیده شده است.

## ۲- مدل دینامیکی ربات دو درجه آزادی

یک ربات دو درجه آزادی مطابق شکل ۱ در صفحه X - Y در نظر بگیرد.



شکل ۱- شماتیک ربات دو درجه آزادی

معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت بازوی ربات به صورت زیر می‌باشد [۳۰]:

$$J(\theta_2) \ddot{\theta} + B \dot{\theta} + \Gamma(\theta, \dot{\theta}) + D = \tau \quad (1)$$

در رابطه (۱)،  $\theta(t) = [\theta_1(t) \ \theta_2(t)]^T \in \mathbb{R}^2$  بردار موقعیت زاویه‌ای،  $\tau(t) \in \mathbb{R}^2$  بردار گشتاور کنترل،  $J(\theta_2)$  ماتریس اینرسی،  $\Gamma(\theta, \dot{\theta})$  گشتاور ناشی از مرکز ترکیبی از نوسانات،  $B$  ماتریس سختی و  $D$  بردار عدم قطعیت می‌باشد. فرض می‌گردد عدم قطعیت از نوع غیرساختاری و کراندار می‌باشد. عبارت‌های  $J(\theta_2)$ ،  $\Gamma(\theta, \dot{\theta})$  و  $B$  به شرح زیر می‌باشد:

$$J(\theta_2) = \begin{bmatrix} \alpha + 2\gamma \cos \theta_2 & \beta + \gamma \cos \theta_2 \\ \beta + \gamma \cos \theta_2 & \beta \end{bmatrix}$$

$$\Gamma(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} -\gamma \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin \theta_2 \\ \gamma \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس اینرسی  $J(\theta_2)$  به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$J(\theta_2) = J_0 + \gamma \cos \theta_2 \dot{J} \quad (2)$$

در رابطه (۲)، ماتریس‌های ثابت  $J_0$  و  $\dot{J}$  به صورت زیر می‌باشد:

$$J_0 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \beta \end{bmatrix}, \dot{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{V} = S^T (J_0^{-1}P - H \operatorname{sgn}(S)) = S^T J_0^{-1}P - |S|H \quad (14)$$

ماتریس  $H \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  بایستی به گونه‌ای انتخاب می‌گردد تا شرط  $H \geq \frac{P_b}{\|J_0\|} I_2$  برقرار شود. آن وقت مشتق تابع لیاپانف منفی خواهد بود. برای سادگی  $H$  می‌تواند قطری انتخاب گردد. در نتیجه نقطه تعادل  $S = 0$  پایدار مجانبی می‌گردد. اگر چه سطح لغزش  $S = 0$  پایدار مجانبی می‌باشد اما اگر اطراف سطح لغزش یک لایه مرزی تعریف شود آن وقت فاز دستیابی به آن لایه مرزی در زمان محدود اتفاق خواهد افتاد. سیستم حلقه بسته با کنترل مد لغزشی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{E} = -\lambda E + S \\ \dot{S} = J_0^{-1}P - H \operatorname{sgn}(S) \end{cases} \quad (15)$$

برای تحلیل پایداری سیستم حلقه بسته، تابع علامت با تقریب هموار شده آن جایگزین می‌گردد. با استفاده روش دوم پایداری لیاپانف، مطابق پیوست ۲، دیده می‌شود ماتریس ژاکوبین دارای مقادیر ویژه منفی بوده پس سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی می‌باشد. بنابراین برای ربات دو درجه آزادی، کنترل مد لغزشی به صورت زیر می‌باشد:

$$\tau = J_0 H \operatorname{sgn}(\dot{E} + \lambda E) + (\lambda J_0 - B)\dot{E} + \gamma \cos \theta_2 \ddot{\theta} + \Gamma(\theta, \dot{\theta}) \quad (16)$$

در کنترل مد لغزشی (۱۶)، عبارت مشتقی با ضریب معلوم  $\lambda J_0 - B$  ظاهر گردید. ممکن است ترم‌های تناسبی و مشتقی دیگری اضافه شود و پایداری و عملکرد سیستم بهبود یابد.

در ادامه به دنبال آن می‌باشیم یک کنترل مد لغزشی دارای عبارت‌های تناسبی و مشتقی برای بازوی ربات دو درجه آزادی طراحی کنیم.

#### ۴- کنترل بازوی ربات دو درجه آزادی با استفاده

##### از روش مد لغزشی-تناسبی-مشتقی PD-SMC

در بخش پیشین دیده شد قانون کنترل مد لغزشی (۱۶) دارای عبارت‌های مشتقی و تناسبی ثابتی بود. اگر قانون کنترل مد لغزشی شامل عبارت‌های مشتقی و تناسبی (غیر از آن چه در بخش پیش بود) انتخاب شود، سیستم حلقه بسته می‌تواند پایدار باشد و حتی عملکرد بهتری داشته باشد. پس عبارت‌های مشتقی و تناسبی به قانون کنترل (۱۶) اضافه

$$J_0 \ddot{E} + B \dot{E} = P - \hat{t} \quad (8)$$

طبق فرض، زاویه مطلوب  $\theta_d(t)$  و مشتق‌های اول و دوم آن محدود می‌باشند. در نتیجه بردار عدم قطعیت  $P(t)$  نیز در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\|P(t)\|_{\infty} \leq P_b \quad (9)$$

در رابطه (۹)،  $P_b$  بیانگر کران بالای بردار  $P(t)$  می‌باشد. بدیهی است اگر سیستم کنترل (۸) باشد و  $P = \hat{t}$  انتخاب شود، آن وقت خطای ردیابی به سمت صفر همگرا خواهد شد. در ادامه برای ربات دو درجه آزادی توصیف شده با رابطه (۳)، با ایده مد لغزشی، یک سیستم کنترل طراحی می‌شود تا زاویه‌های ربات  $\theta$ ، زاویه مطلوب  $\theta_d$  را دنبال کند.

#### ۳- کنترل بازوی ربات با روش مد لغزشی SMC

در این بخش برای بازوی ربات، یک قانون کنترل به روش مد لغزشی طراحی می‌شود. کنترل مد لغزشی یک روش کنترل مقاوم فیدبک حالت برای سیستم‌های غیرخطی است که ساختار آن برای رسیدن به عملکرد مطلوب تغییر پیدا می‌کند. در طراحی کنترل مد لغزشی فرض آن است که کنترل می‌تواند به صورت آنی از یک ساختار به ساختار دیگر تغییر کند. ولی در عمل به دلیل تاخیر محاسباتی و محدودیت روبرو می‌شویم. قانون کنترل  $\hat{t}(t)$  به نحوی طراحی می‌شود که خروجی قادر باشد مسیر مطلوب را ردیابی کند. علاوه بر آن خطای ردیابی و مشتق‌های آن به سمت صفر میل کند. برای کنترل مد لغزشی، سطح لغزش  $S(t)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S = \dot{E} + \lambda E \quad (10)$$

در رابطه (۱۰)،  $\lambda$  شیب سطح لغزش و عددی مثبت می‌باشد. هدف کنترل، پایدار کردن متغیر لغزش و همگرایی آن به صفر می‌باشد. مشتق سطح لغزش به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{S} = \ddot{E} + \lambda \dot{E} = J_0^{-1} \left( (\lambda J_0 - B)\dot{E} + P - \hat{t} \right) \quad (11)$$

اگر بردار کنترل مجازی  $\hat{t}(t)$  به صورت زیر انتخاب شود:

$$\hat{t} = (\lambda J_0 - B)\dot{E} + J_0 H \operatorname{sgn}(J_0 \dot{E} + \lambda E) \quad (12)$$

دینامیک سطح لغزش به صورت زیر در می‌آید:

$$\dot{S} = J_0^{-1}P - H \operatorname{sgn}(S) \quad (13)$$

با انتخاب تابع لیاپانف  $V = \frac{1}{2} S^T S$ ، مشتق آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

مشتق تابع  $V$  نسبت به زمان به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \dot{E}^T L_1 E + \dot{E}^T L_2 \dot{E} + \dot{E}^T L_3 \ddot{E} + \dot{E}^T L_4 E \\ & + E^T L_2 \ddot{E} = \dot{E}^T L_1 E + \dot{E}^T L_2 \dot{E} \\ & + \dot{E}^T L_3 J_0^{-1} J_0 \ddot{E} + \dot{E}^T L_4 E \\ & + E^T L_2 J_0^{-1} J_0 \ddot{E} \end{aligned} \quad (22)$$

با جایگزینی رابطه (۱۹) در (۲۲) رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \dot{E}^T L_1 E + \dot{E}^T L_2 \dot{E} + \dot{E}^T L_4 E \\ & + (\dot{E}^T L_3 J_0^{-1} + E^T L_2 J_0^{-1})(P - H \operatorname{sgn}(\dot{E} + \lambda E) \\ & - (B + K_D)\dot{E} - K_P E) \end{aligned} \quad (23)$$

رابطه (۲۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \dot{E}^T L_1 E + \dot{E}^T L_2 \dot{E} + \dot{E}^T L_4 E \\ & + (\dot{E}^T L_3 J_0^{-1} + E^T L_2 J_0^{-1})(P - H \operatorname{sgn}(\dot{E} + \lambda E)) \\ & - \dot{E}^T L_3 J_0^{-1}(B + K_D)\dot{E} - \dot{E}^T L_3 J_0^{-1} K_P E \\ & - E^T L_2 J_0^{-1}(B + K_D)\dot{E} - E^T L_2 J_0^{-1} K_P E \end{aligned} \quad (24)$$

بنابراین رابطه (۲۴) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \dot{E}^T (L_1 + L_4 - (L_2 J_0^{-1}(B + K_D))^T - L_3 J_0^{-1} K_P) E \\ & + \dot{E}^T (L_2 - L_3 J_0^{-1}(B + K_D)) \dot{E} - E^T L_2 J_0^{-1} K_P E \\ & + (\dot{E}^T L_3 J_0^{-1} + E^T L_2 J_0^{-1})(P - H \operatorname{sgn}(\dot{E} + \lambda E)) \end{aligned} \quad (25)$$

ماتریس‌های  $L_1, L_2, L_3$  و  $L_4$  بایستی به گونه‌ای انتخاب شوند که ماتریس  $L$  مثبت موکد شده و رابطه زیر برقرار شود:

$$L_1 + L_4 - (L_2 J_0^{-1}(B + K_D))^T - L_3 J_0^{-1} K_P = 0 \quad (26)$$

یک انتخاب می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$L_1 = L_3 J_0^{-1} K_P, L_4 = (L_2 J_0^{-1}(B + K_D))^T$$

حال اگر  $L_2 = \lambda J_0$  و  $L_3 = J_0$  انتخاب گردد آن وقت ماتریس‌های  $L_1$  و  $L_4$  نیز به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$L_1 = K_P, L_4 = \lambda(B + K_D)$$

با ماتریس‌های  $L_1, L_2, L_3$  و  $L_4$  دیده می‌شود روشن است ماتریس  $L$  مثبت موکد می‌گردد. پس با جایگذاری  $L_1, L_2, L_3$  و  $L_4$ ، رابطه (۲۵) به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \dot{E}^T (\lambda J_0 - (B + K_D)) \dot{E} - \lambda E^T K_P \\ & + (\dot{E} + \lambda E)^T (P - H \operatorname{sgn}(\dot{E} + \lambda E)) \end{aligned} \quad (27)$$

با توجه به رابطه (۱۸)، نامساوی زیر بدیهی می‌باشد:

$$\begin{aligned} (\dot{E} + \lambda E)^T H \operatorname{sgn}(\dot{E} + \lambda E) &= |\dot{E}^T + \lambda E^T| H \\ &\geq |\dot{E}^T + \lambda E^T| P_b \geq (\dot{E}^T + \lambda E^T) P \end{aligned} \quad (28)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

شده و با انتخاب یک تابع لیاپانف مناسب، محدوده مجاز ضرایب مشتقی و تناسبی تعیین می‌شود.

#### ۴-۱- طراحی قانون کنترل PD-SMC

با ترکیب ایده‌های کنترل مدل‌غزشی SMC و کنترل PD می‌توان به قانون کنترل PD-SMC دست یافت. در ادامه به منظور طراحی کنترل PD-SMC از تئوری پایداری لیاپانف، بهره‌گرفته شده است. برای پایدار مجانبی بودن سیستم حلقه بسته، محدوده مجاز پارامترهای قانون PD-SMC تعیین می‌گردد.

**قضیه:** اگر برای بازوی ربات دو درجه آزادی توصیف

شده با رابطه (۳)، قانون کنترل زیر انتخاب شود:

$$\tau = K_P E + K_D \dot{E} + H \operatorname{sgn}(\dot{E} + \lambda E) + \gamma \cos \theta_2 \dot{\theta} + \Gamma(\theta, \dot{\theta}) \quad (17)$$

در (۱۷)، ماتریس‌های  $K_P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ،  $K_D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  و

$H \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} \lambda > 0 \\ H \geq P_b I_2 \\ B + K_D > \lambda J_0 \\ K_P > \lambda^2 J_0 \end{cases} \quad (18)$$

آنگاه سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی شده و خطای ردیابی و مشتق‌های مرتبه اول و دوم آن همگرا به صفر خواهد شد.

**اثبات:** با استفاده از روابط (۱) و (۱۷)، سیستم کنترل

حلقه بسته می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$J_0 \ddot{E} + (B + K_D) \dot{E} + K_P E + H \operatorname{sgn}(\dot{E} + \lambda E) = P \quad (19)$$

در رابطه (۱۹)، بردار  $S = \dot{E} + \lambda E$ ، سطح لغزش، ماتریس‌های  $K_P$  و  $K_D$  بهره‌های تناسبی و مشتقی، ماتریس  $H$  بهره کنترل مدل‌غزشی،  $\lambda$  شیب سطح لغزش و  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  تابع علامت می‌باشد.

برای بررسی پایداری سیستم حلقه بسته (۱۹)، تابع

لیاپانف زیر را در نظر بگیرد:

$$V = \frac{1}{2} [E^T(t) \quad \dot{E}^T(t)]^T L \begin{bmatrix} E(t) \\ \dot{E}(t) \end{bmatrix} \quad (20)$$

ماتریس  $L$  مثبت موکد بوده و به فرم بلوکی زیر می‌باشد:

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L_2^T & L_3 + L_4 \end{bmatrix} \quad (21)$$

پس داریم:

$$L_1 = L_1^T > 0, L_3 = L_3^T > 0, L_4 = L_4^T > 0$$

در نتیجه در روش  $PD-SMC$ ، فقط  $\gamma$  پارامتر تنظیم خواهد شد و ماتریس‌های  $K_D$ ،  $K_D$  و  $K_P$  به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$K_P = \begin{bmatrix} K_P^{11} & 0 \\ 0 & K_P^{22} \end{bmatrix}, K_D = \begin{bmatrix} K_D^{11} & 0 \\ 0 & K_D^{22} \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} H^{11} & 0 \\ 0 & H^{22} \end{bmatrix}$$

بردار  $\beta \in \mathbb{R}^7$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\beta = [\lambda \quad K_P^{11} \quad K_P^{22} \quad K_D^{11} \quad K_D^{22} \quad H^{11} \quad H^{22}]$$

در این مطالعه برای تنظیم پارامترهای  $\beta$  از روش بهینه‌سازی الگوریتم ژنتیک استفاده می‌گردد. الگوریتم ژنتیک یک روش عددی جستجو برای یافتن جواب بهینه می‌باشد. در الگوریتم ژنتیک از ویژگی‌های تکاملی موجودات زنده مانند، جمعیت اولیه، وراثت، احتمال جهش، ترکیب، اصول انتخابی داروین و غیره برای یافتن جواب بهینه استفاده می‌شود. بدیهی است تابع هزینه (معیار خطا) بایستی وابسته به مقادیر  $\beta$  می‌باشد. پس تابع هزینه  $J_p(\beta)$  را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$J_p = \sum_{k=0}^{k_f} \xi^T(kT) Q \xi(kT) + \tau^T(kT) R \tau(kT) \quad (31)$$

در رابطه (۳۱)، بردار  $\xi(kT) = [E^T(kT) \quad \dot{E}^T(kT)]^T$  و سیگنال کنترل  $\tau(kT)$  با رابطه (۱۷) داده شده است. همچنین عبارت‌های  $Q \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  و  $R \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  ماتریس‌های وزن مناسب در بهینه‌سازی مساله تنظیم پارامتر می‌باشند.

تابع هزینه (۳۱) مشابه با شاخص عملکرد  $LQR$  مرسوم در کنترل بهینه انتخاب شده است. بنابراین در رابطه (۳۱)، علاوه بر خطای ردیابی  $E(kT)$ ، مشتق (تغییرات) خطای ردیابی و سیگنال ورودی کنترل  $\tau(kT)$  نیز لحاظ شده است. در مقایسه با معیار خطای متداول مانند انتگرال مربع خطا  $ISE^1$ ، رابطه (۳۱)، فرم عمومی‌تری دارد. اگر در معیار عملکرد (۳۱)، مقادیر  $R = 0_{2 \times 2}$  و  $Q = \text{diag}(I_2, 0_{2 \times 2})$  انتخاب شود آن وقت رابطه زیر بدست می‌آید:

$$J_p = \sum_{k=0}^{k_f} E^T(kT) E(kT) = \sum_{k=0}^{k_f} \|E(kT)\|^2 \quad (32)$$

در نتیجه رابطه (۳۱) به معیار خطای  $ISE$  منجر خواهد شد.

$$(\dot{E} + \lambda E)^T (P - H \text{sgn}(\dot{E} + \lambda E)) < 0 \quad (29)$$

با توجه به روابط (۲۷) و (۲۹)، خواهیم داشت:

$$\dot{V} \leq 0 \quad (30)$$

دیده شد که تابع لیاپانف  $V$  یک تابع مثبت موکد بوده و مشتق آن نسبت به زمان  $\dot{V}$  یک تابع منفی موکد می‌باشد. پس سیستم حلقه بسته، پایدار مجانبی می‌گردد. با استفاده از روش  $PD-SMC$ ، سطح لغزش  $S = \dot{E} + \lambda E$  پایدار مجانبی می‌باشد. بنابراین بازوی ربات دو درجه آزادی با استفاده از قانون کنترل  $PD-SMC$  پایدار مجانبی سراسری شده و بردار خطای ردیابی  $E(t)$  و مشتق آن  $\dot{E}(t)$  به سمت صفر همگرا می‌گردد.

به دلیل وجود تابع علامت در قانون کنترل (۱۷)، حول نقطه تعادل متغیر لغزش نزدیک به صفر می‌گردد. پس در سیگنال کنترل نوسانات شدید ظاهر می‌گردد. به این نوسانات پدیده چترینگ اطلاق می‌گردد. برای رفع مشکل چترینگ در سیگنال کنترل می‌توان تابع علامت را با تابع غیرخطی همواری مانند تابع اشباع تقریب زد.

#### ۴-۲- تنظیم پارامترهای قانون کنترل $PD-SMC$

هر کدام از روش‌های کنترل  $SMC$  و  $PD-SMC$  دارای تعدادی پارامتر طراحی بود. به عنوان مثال، در روش  $SMC$  دارای شیب  $\lambda$  و یک پارامتر ماتریسی  $H$  و همچنین روش  $PD-SMC$  دارای شیب  $\lambda$  و سه پارامتر ماتریسی  $H$ ،  $K_D$  و  $K_P$  بود. بدون از دست دادن کلیت مساله و برای سادگی، می‌توان روش کنترل  $SMC$  را حالت خاصی از روش  $PD-SMC$  در نظر گرفت ( $K_D = 0$  و  $K_P = 0$ ). برای تنظیم پارامترهای طراحی ماتریس‌های  $H$ ،  $K_D$  و  $K_P$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$K_P = \begin{bmatrix} K_P^{11} & K_P^{12} \\ K_P^{21} & K_P^{22} \end{bmatrix}, K_D = \begin{bmatrix} K_D^{11} & K_D^{12} \\ K_D^{21} & K_D^{22} \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} H^{11} & H^{12} \\ H^{21} & H^{22} \end{bmatrix}$$

در نتیجه برای طراحی  $PD-SMC$  بایستی ۱۳ پارامتر تنظیم شود. شیب  $\lambda$  و ماتریس‌های  $H$ ،  $K_D$  و  $K_P$  بایستی به گونه‌ای انتخاب شوند تا نامساوی (۱۸) برقرار شود. بنابراین  $H$ ،  $K_D$  و  $K_P$  را می‌توان به انتخاب قطری محدود نمود. پس داریم:

$$K_P^{12} = K_P^{21} = K_D^{12} = K_D^{21} = H^{12} = H^{21} = 0$$

<sup>1</sup> Integral Squared Error

این مساله را حل کنیم می‌توان جوابی که دارای کمترین مقدار تابع هزینه می‌باشد را انتخاب نمود. همچنین شرط توقف (برای مثال  $J_p(\beta) \leq \varepsilon$ ) را می‌توان برای بهینه‌سازی عددی (الگوریتم ژنتیک) تعریف نمود که مقدار  $\varepsilon$  عدد ثابتی است. در ادامه به منظور انتخاب مناسب پارامترهای PD-SMC، یک الگوریتم تنظیم پارامتر به قرار زیر پیشنهاد شده است:

#### الگوریتم تنظیم پارامترهای قانون کنترل PD-SMC

- ۱- انتخاب مقادیر اولیه بردار  $\beta$  با در نظر گرفتن محدودیت‌های عملگر و نامساوی (۱۸)
  - ۲- محاسبه بردار خطا  $E(kT)$  از رابطه (۳۴)
  - ۳- محاسبه بردار سیگنال ورودی  $\tau(kT)$  از رابطه (۳۳)
  - ۴- محاسبه تابع هزینه  $J_p(\beta)$  از رابطه (۳۱)
  - ۵- اگر تابع هزینه در شرط توقف  $J_p(\beta) \leq \varepsilon$  صدق نمود آن وقت فرآیند بهینه‌سازی خاتمه می‌یابد. در غیر این صورت با در نظر گرفتن نامساوی (۱۸)، با استفاده از الگوریتم ژنتیک بردار  $\beta$  بروز رسانی و به گام ۲ بر می‌گردد.
- مادامی که شرط توقف  $J_p(\beta) \leq \varepsilon$  برآورده نشود الگوریتم فوق استفاده می‌گردد. در نتیجه با اتمام فرآیند بهینه‌سازی، پارامترهای قانون کنترل PD-SMC تنظیم خواهد شد.

#### ۵- نتایج شبیه‌سازی

برای نشان دادن کارآمدی روش PD-SMC در مقایسه با سایر روش‌های کنترل، بازوی ربات دو درجه آزادی شبیه‌سازی می‌شود. برای شبیه‌سازی عددی، پارامترهای بازوی ربات دو درجه آزادی به صورت زیر انتخاب می‌شود [۳۰]:

$$\alpha = 2.087, \beta = 0.2294, \gamma = 0.256$$

$$b_1 = 3.47, b_2 = 0.565$$

مسیر مورد نظر با معادله‌های جبری زیر تولید می‌گردد [۳۱]:

$$\begin{cases} \theta_{1d}(t) = 0.3(1 - \cos \pi t) \\ \theta_{2d}(t) = 0.15 \sin \pi t \end{cases} \quad (36)$$

در شبیه‌سازی عددی، برای جلوگیری از اعمال فرامین بزرگ، محدودیت عملگرها را ۲۵ نیوتن متر در نظر گرفته شده است. برای تعقیب مسیر (۳۶)، پارامترهای PD-SMC

قید این مساله بهینه‌سازی با محدودیت‌های عملگر، معادله دیفرانسیل غیرخطی (۱۹) و نامساوی (۱۸) بیان می‌گردد. پایدار مجانبی بودن سیستم حلقه بسته با نامساوی (۱۸) تضمین می‌گردد. برای تنظیم پارامترهای قانون کنترل (بردار  $\beta$ ) با روش‌های عددی، لازم است سیگنال کنترل (۱۷) و معادله دیفرانسیل غیرخطی (۱۹) گسسته‌سازی گردد. برای گسسته‌سازی از روش اویلر گام به عقب به صورت زیر استفاده می‌گردد:

$$\begin{cases} \dot{E}(kT) \approx \frac{1}{T}(E(kT) - E((k-1)T)) \\ \ddot{E}(kT) \approx \frac{1}{T^2}(E(kT) - 2E((k-1)T) + E((k-2)T)) \end{cases}$$

پس ورودی کنترل (۱۷)، به صورت زیر گسسته‌سازی می‌گردد:

$$\begin{aligned} \tau(kT) = & \left( \frac{K_P T + K_D}{T} \right) E(kT) - \frac{K_D}{T} E((k-1)T) \\ & + H \operatorname{sgn} \left( \frac{(1+T\lambda)E(kT) - E((k-1)T)}{T} \right) \\ & + \frac{\gamma \cos(\theta_2(kT))}{T^2} \bar{f}(\theta(kT) - 2\theta((k-1)T)\theta((k-2)T)) \\ & + \Gamma \left( \theta(kT), \frac{\theta(kT) - \theta((k-1)T)}{T} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

همچنین معادله (۱۹)، به صورت زیر گسسته‌سازی می‌گردد:

$$\begin{aligned} & \left( K_P + \frac{J_0}{T^2} + \frac{B + K_D}{T} \right) E(kT) \\ & - \left( \frac{2J_0}{T^2} + \frac{B + K_D}{T} \right) E((k-1)T) + \frac{J_0}{T^2} E((k-2)T) \\ & + H \operatorname{sgn} \left( \frac{(1+T\lambda)E(kT) - E((k-1)T)}{T} \right) = P(kT) \end{aligned} \quad (34)$$

پس مقادیر  $E(kT)$  به صورت عددی از رابطه (۳۴) محاسبه می‌گردد. بنابراین با حل عددی مساله مینیمم‌یابی زیر می‌توان پارامترهای قانون PD-SMC را تنظیم نمود.

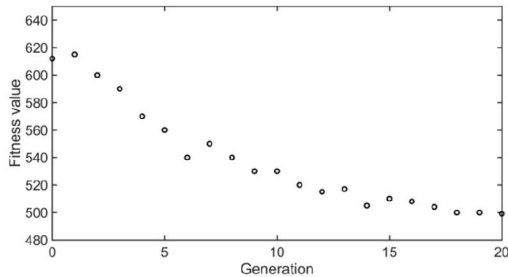
$$\min J_p(\beta) \quad (35)$$

subject to the equations (34) and (18)

به دلیل وجود عبارت غیرخطی (تابع علامت) در قید، مساله بهینه‌یابی (۳۵) از نوع غیرمحدب می‌باشد. پس همگرایی و حل عددی آن وابسته به شرایط اولیه انتخاب شده خواهد بود. در نتیجه چنین مساله بهینه‌یابی، جواب منحصر به فردی نخواهد داشت. در این شرایط اگر چندین بار



اولیه و اعمال بار، با قانون  $PD-SMC$  شبیه‌سازی و نتایج با روش‌های  $PD$  و  $SMC$  مقایسه شده است.



شکل ۳- بروزسانی پارامترهای کنترل  $PD-SMC$  با الگوریتم ژنتیک

#### ۵-۱- کنترل بازوی ربات با وجود عدم قطعیت

در شبیه‌سازی عددی بازوی ربات، عدم قطعیت و اصطکاک غیرخطی به صورت زیر انتخاب شده است:

$$D = \begin{bmatrix} 3\dot{\theta}_1 + 0.2\text{sgn}(\dot{\theta}_1) + d_1 \\ 3\dot{\theta}_2 + 0.2\text{sgn}(\dot{\theta}_2) + d_2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

در رابطه (۳۷)،  $d_1$  و  $d_2$  سیگنال‌های نویز تصادفی برای شبیه‌سازی عملکرد ربات با وجود عدم قطعیت و اغتشاش می‌باشد. شرایط اولیه بازوی ربات به صورت زیر می‌باشد:

$$\theta_1(0) = 0.5, \theta_2(0) = 1, \dot{\theta}_1(0) = 0, \dot{\theta}_2(0) = 0$$

روش کنترلی  $PD-SMC$  برای ردیابی مسیر مطلوب (۳۶) روش استفاده شده و نتیجه آن با قوانین کنترلی  $PD$  و  $SMC$  مقایسه شده است. روش  $PD-SMC$  یک کنترل مستقل از مدل بازوی ربات می‌باشد. وجود تابع علامت در قانون کنترل باعث ایجاد پدیده چترینگ می‌گردد. به همین دلیل تابع علامت با تابع اشباع تقریب زده شده است. در نتیجه با روش  $SMC$  پایداری بازوی ربات محدود به یک مجموعه کوچک حول مبدا خواهد شد. در شکل ۴، خطای ردیابی زاویه‌ای حول محور  $\theta_1$  و در شکل ۵ نیز خطای ردیابی بازوی ربات حول محور  $\theta_2$  برای ردیابی مسیر مورد انتظار نشان می‌دهد. مسیر حرکت بازوی ربات با استفاده از قوانین کنترل  $PD$ ،  $SMC$  و  $PD-SMC$  در شکل ۶ مقایسه شده است. سیگنال کنترل (گشتاور) اعمال شده به بازوهای ربات در شکل‌های ۷ و ۸ نشان داده شده است. همان گونه که انتظار داریم سیگنال کنترل با قانون  $PD$  دارای تغییرات ناگهانی است. سیگنال کنترل اعمالی به ربات با روش  $PD-SMC$

ابتدا بایستی تنظیم شود. برای تنظیم قانون  $PD-SMC$ ، در تابع هزینه (۳۱)، وزن‌های  $Q = I_4$  و  $R = 0_{2 \times 2}$  را قرار می‌دهیم. مقادیر اولیه پارامترهای  $PD-SMC$  به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$K_p^{11} = 60, K_p^{22} = 60, K_D^{11} = 30, K_D^{22} = 30$$

$$H^{11} = 10, H^{22} = 4, \lambda = 10$$

در نرم‌افزار *Matlab*، پارامترهای الگوریتم ژنتیک مانند جمعیت اولیه و جمعیت بعدی، نرخ جهش، نرخ ترکیب، شرط توقف و تعداد تکرار مطابق جدول ۱ با روش سعی و خطا، انتخاب می‌گردد. در این مساله بهینه‌سازی رابطه (۳۱) تابع هزینه و قیدهای آن محدودیت عملگر، روابط (۱۸) و (۳۴) می‌باشد.

جدول ۱- پارامترهای الگوریتم ژنتیک

پارامتر	مقدار
اندازه جمعیت اولیه	۲۴
اندازه جمعیت بعدی	۱۶
نرخ جهش	۰/۱
نرخ ترکیب	۰/۹
تعداد تکرار	۲۰

بنابراین با حل عددی روش بهینه‌سازی بخش قبل، پارامترهای قانون کنترل  $PD-SMC$  به صورت زیر بدست می‌آید:

$$K_p^{11} = 51.2531, K_p^{11} = 18.2563, H^{11} = 21.0215$$

$$K_p^{22} = 53.0124, K_p^{22} = 22.1021, H^{22} = 4.9563$$

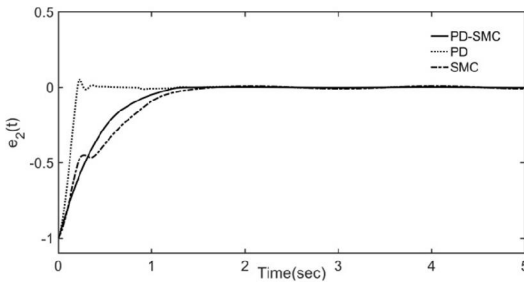
$$\lambda = 28.3258$$

شکل ۳ نشان می‌دهد پارامترهای  $PD-SMC$  بعد از ۲۰ بار تکرار، با الگوریتم ژنتیک بروزسانی شده و مقدار بهینه تابع هزینه  $J_p(\beta^*) = 499.8711$  بدست می‌آید. در شبیه‌سازی عددی از روش انتگرال‌گیری رانگ‌کوتا، زمان انتگرال‌گیری ۱ میلی‌ثانیه و زمان شبیه‌سازی ۵ ثانیه انتخاب می‌گردد.

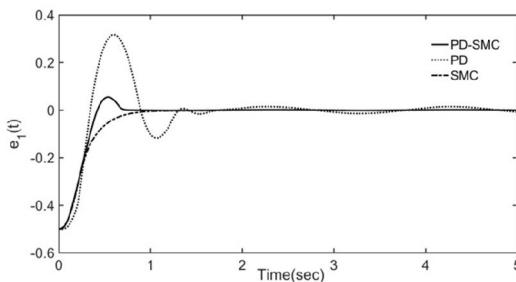
در ادامه بازوی ربات دو درجه آزادی دارای عدم قطعیت، در شرایط مختلف وجود عدم قطعیت و نویز، وجود خطای

نزدیک به کنترل مد لغزشی می‌باشد. متغیرهای سطح لغزش  $s_1$  و  $s_2$  در شرایط وجود عدم قطعیت و نویز در شکل ۹ آورده شده است. رفتار مجانبی متغیرهای لغزش

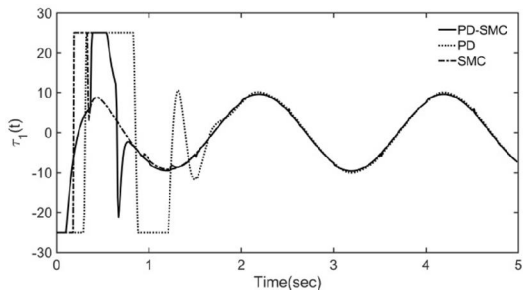
نزدیک به کنترل مد لغزشی می‌باشد. متغیرهای سطح لغزش  $s_1$  و  $s_2$  در شرایط وجود عدم قطعیت و نویز در شکل ۹ آورده شده است. رفتار مجانبی متغیرهای لغزش



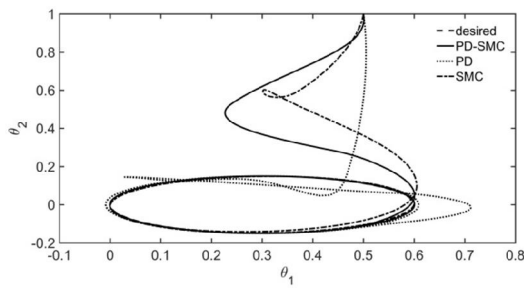
شکل ۵- خطای ردیابی حول محور  $\theta_2$  با وجود عدم قطعیت



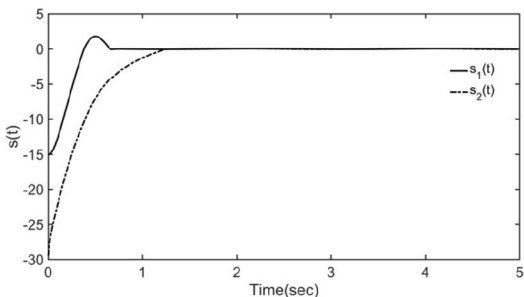
شکل ۴- خطای ردیابی حول محور  $\theta_1$  با وجود عدم قطعیت



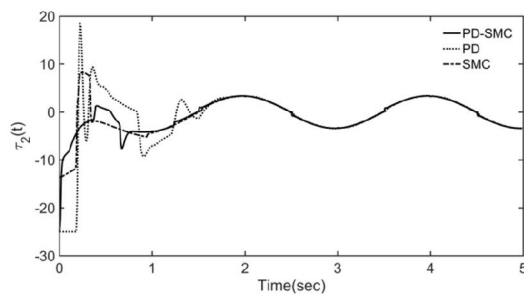
شکل ۷- سیگنال کنترل اعمال شده  $\tau_1$  با وجود عدم قطعیت



شکل ۶- مسیر طی شده توسط ربات با وجود عدم قطعیت



شکل ۹- سطوح لغزش  $s_1$  و  $s_2$  در شرایط وجود عدم قطعیت



شکل ۸- سیگنال کنترل اعمال شده  $\tau_2$  با وجود عدم قطعیت

محورهای  $\theta_1$  و  $\theta_2$  در نظر گرفته شده است. پس ماتریس عدم قطعیت  $D = 0$  و شرایط اولیه بازوی ربات  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$  و  $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = -0.1$  انتخاب می‌شود. با وجود خطای داخلی، تغییرات زاویه بازوی ربات برای دنبال نمودن سیگنال‌های مرجع (۳۶)، در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ نشان داده شده است.

### ۵-۲- کنترل بازوی ربات با وجود خطای اولیه

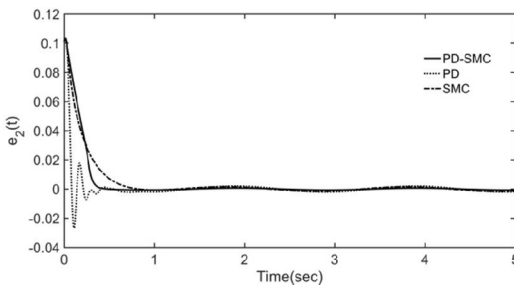
در کنترل بازوی ربات، خطا اولیه می‌تواند با یک شرط اولیه مدل گردد [۳۱]. پارامترهای دیگر برای شبیه‌سازی بازوی ربات دو درجه آزادی، شبیه قسمت پیشین انتخاب می‌گردد. برای بررسی رفتار بازوی ربات در ردیابی مسیر مطلوب با PD-SMC، خطای شرط اولیه یک دهم رادیان برای

به اندازه  $|\dot{\theta}|$  در زمان ۱ ثانیه اضافه شده و گشتاور بار اضافی ۱ نیوتن-متر در زمان ۲ ثانیه به محور ربات اعمال شده است. شرایط اولیه بازوی ربات  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$  و  $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$  در نظر گرفته می‌شود. شکل‌های ۱۴ و ۱۵، عملکرد ردیابی با اصطکاک و بارگذاری متفاوت حول محورهای  $\theta_1$  و  $\theta_2$  با سه روش مختلف کنترل را نشان می‌دهد. سیگنال کنترل اعمال شده به محورهای ربات در شکل‌های ۱۶ و ۱۷ آورده شده است. نتایج شبیه‌سازی، مقاوم بودن و کارآمد بودن روش  $PD-SMC$  برای جبران اصطکاک و بارگذاری را در مقایسه با روش دیگر نشان می‌دهد.

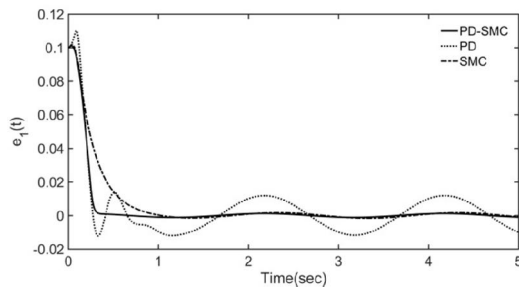
سیگنال کنترل اعمال شده به محورهای ربات در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ آورده شده است. از نتایج شبیه‌سازی‌ها، دیده می‌شود قانون  $PD-SMC$  پاسخ‌های مقاوم‌تر و سریع‌تری در صورت وجود خطاهای داخلی از خود نشان می‌دهد.

### ۵-۳- کنترل بازوی ربات در شرایط بارگذاری

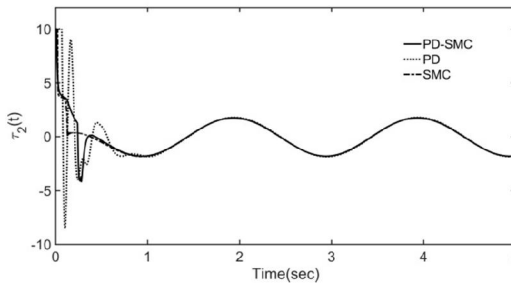
به منظور بررسی مقاوم بودن و اثر بخشی روش  $PD-SMC$ ، ربات دو درجه آزادی با وجود تغییر در اصطکاک و جرم (بارگذاری) در زمان‌های معین شبیه‌سازی و نتایج با سایر قوانین کنترلی مقایسه شده است. در شبیه‌سازی یک گشتاور



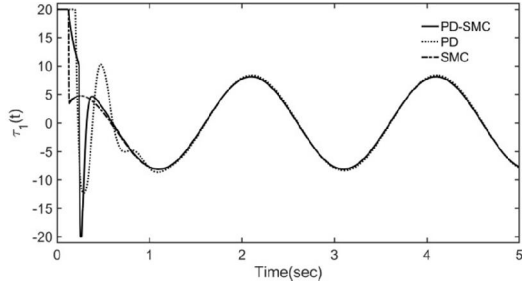
شکل ۱۱- خطای ردیابی حول محور  $\theta_2$  با وجود خطای اولیه



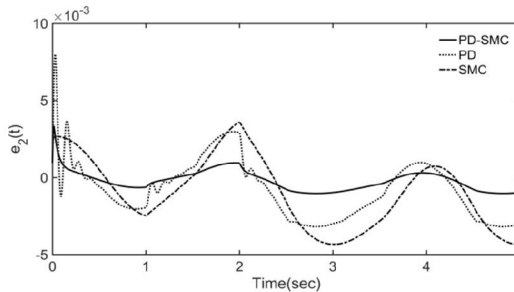
شکل ۱۰- خطای ردیابی حول محور  $\theta_1$  با وجود خطای اولیه



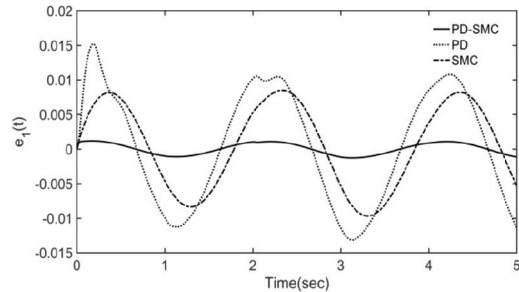
شکل ۱۳- سیگنال کنترل اعمال شده  $\tau_2$  با وجود خطای اولیه



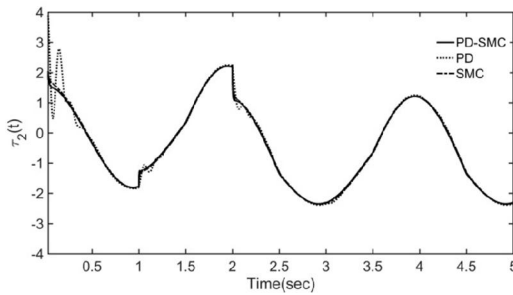
شکل ۱۲- سیگنال کنترل اعمال شده  $\tau_1$  با وجود خطای اولیه



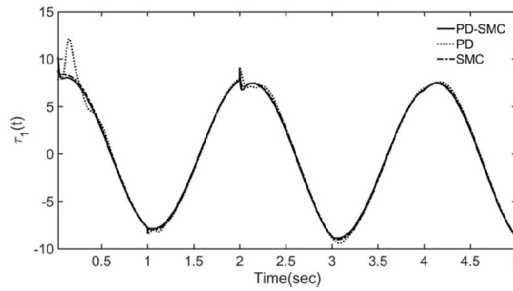
شکل ۱۵- خطای ردیابی  $e_2$  با وجود اصطکاک و بارگذاری



شکل ۱۴- خطای ردیابی  $e_1$  با وجود اصطکاک و بارگذاری اضافی



شکل ۱۷- سیگنال کنترل  $\tau_2$  با وجود اصطکاک و بارگذاری اضافی



شکل ۱۶- سیگنال کنترل  $\tau_1$  با وجود اصطکاک و بارگذاری اضافی

کلونی زنبورها، ازدحام ذرات، الگوریتم‌های گرگ خاکستری، سنجاقک، گرده افشانی گل‌ها، نهنگ و غیره برای یافتن نقاط بهینه تابع هدف استفاده شود.

#### پیوست ۱: پیش نیاز مورد نیاز از ریاضیات

نرم بردار  $x \in \mathbb{R}^n$  به صورت  $\|x\| = \sqrt{x^T x}$  و نرم ماتریس  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  با عبارت  $\|M\| = \sqrt{\lambda_M(M^T M)}$  نشان داده می‌شود.  $\lambda_M(M)$  بزرگترین مقادیر ویژه ماتریس  $M$  می‌باشد.

**لم شور:** ماتریس متقارن  $Q$  را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$Q = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \quad (38)$$

متمم شور<sup>۱</sup> ماتریس  $A$  صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S = C - B^T A^{-1} B \quad (39)$$

ماتریس  $Q$  مثبت موکد است اگر و تنها اگر ماتریس‌های  $A$  و  $S$  هر دو مثبت موکد باشند [۳۲].

#### پیوست ۲: تحلیل پایداری سیستم حلقه بسته با

##### استفاده از کنترل مد لغزشی

سیستم مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad (40)$$

با تعریف متغیر سطح لغزش  $s = x_2 + ax_1$  و  $a > 0$

سیستم (۴۰) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + s \\ \dot{s} = u + ax_2 \end{cases} \quad (41)$$

#### ۶- نتیجه گیری

مساله ردیابی برای ربات دو درجه آزادی عدم قطعیت با روش PD-SMC مورد بررسی قرار گرفت. با افزودن عبارت‌های مشتقی و تناسبی به SMC، می‌توان عملکرد سیستم حلقه بسته را بهبود داد. کنترل مد لغزشی مبتنی بر مدل نامی سیستم می‌باشد. با استفاده از تئوری پایداری لیاپانف، شرایطی پیشنهاد گردید تا پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته را تضمین نماید. به منظور طراحی SMC و PD-SMC، عدم قطعیت بازوی ربات به صورت غیرساختاری در نظر گرفته شد. روش PD-SMC مانند کنترل PID وابسته و حساسیت زیادی به مدل نامی ربات ندارد. در نتیجه PD-SMC در مقایسه با روش SMC مستقل از مدل نامی بازوی ربات می‌باشد. سادگی و طراحی آسان PD-SMC از مزایای آن در مقایسه با روش SMC می‌باشد. نتایج شبیه سازی نشان داد که PD-SMC در مقایسه با PD و SMC در صورت وجود عدم قطعیت، اغتشاشات و تغییر بار مقاوم بوده و عملکرد قابل قبولی دارد.

برای بهبود عملکرد سیستم کنترل، پیشنهاد می‌گردد شتاب زاویه‌ای بازوی ربات، با روش کنترل تاخیر زمانی تقریب زده شود و شرایط جدیدی برای پایداری سیستم حلقه بسته با فیدبک خروجی تعیین گردد. در این مطالعه با الگوریتم ژنتیک به تنظیم پارامترهای قانون PD-SMC پرداخته شد. یکی از مشکلات روش تنظیم ضرایب کنترل، وجود فراوان نقاط مینیمم محلی در مساله بهینه‌سازی غیر محدب بود. پیشنهاد می‌گردد برای انتخاب مناسب مقادیر اولیه و تنظیم پارامترهای PD-SMC از روش‌های فراابتکاری نظیر الگوریتم‌های تکاملی، بهینه‌سازی کلونی مورچگان،

<sup>1</sup> Schur's Complement Lemma

- [2] Naghibi SR, Pirmohamadi AA (2018) Control of manipulator in task space using modified transpose effective Jacobian and model based friction compensator. *Modares Mechanical Engineering* 18: 335-344.
- [3] Spong MW, Hutchinson S, Vidyasagar M (2006) *Robot modeling and control*. Wiley, New York.
- [4] Edwards C, Spurgeon S (1998) *Sliding mode control: Theory and applications*. CRC Press.
- [5] Lee H, Kim E, Kang HJ, Park M (2001) A new sliding-mode control with fuzzy boundary layer. *Fuzzy Set Syst* 120: 135-143.
- [6] Chen MS, Hwang YR, Tomizuka M (2002) A state-dependent boundary layer design for sliding mode control. *IEEE T Automat Contr* 47: 1677-1681.
- [7] Khalil HK (2001) *Nonlinear Systems*: Prentice Hall.
- [8] Laghrouche S, Plestan F, Glumineau A (2007) Higher order sliding mode control based on integral sliding mode. *Automatica* 43: 531-537.
- [9] Romdhane NMB, Damak T (2015) Higher order sliding mode control of uncertain robot manipulators. *Advances and Applications in Sliding Mode Control Systems*, Springer.
- [10] de Wit CC, Siciliano B, Bastin G (2012) *Theory of robot control*. Springer Science & Business Media.
- [11] Ghasemi I, Ranjbar Noei A, Sadati Rostami SJ (2015) Optimal Fractional order iterative learning control for single-link robot control. *Modares Mechanical Engineering* 15: 259-268.
- [12] Pervozvanski AA, Freidovich LB (1999) Robust stabilization of robotic manipulators by PID controllers. *Dynam Contr* 9: 203-222.
- [13] Cervantes I, Alvarez-Ramirez J (2001) On the PID tracking control of robot manipulators. *Syst Control Lett* 42: 37-46.
- [14] Åström KJ, Hägglund T (1995) *PID controllers: Theory, design, and tuning*. Instrument society of America Research Triangle Park, NC.
- [15] Nahapetian N, Motlagh MJ, Analoui M (2009) PID gain tuning using genetic algorithms and fuzzy logic for robot manipulator control. In *International Conference on Advanced Computer Control* 346-350.
- [16] Abdalla TY (2018) Fuzzy Fine tuning of an Optimized PID Control Scheme for Mobile Robot Trajectory Tracking. *Int J Comput Appl T* 181.
- [17] Bingul Z, Karahan O (2011) Tuning of fractional PID controllers using PSO algorithm for robot trajectory control. In *IEEE International Conference on Mechatronics* 955-960.
- [18] Kelly R (1995) A tuning procedure for stable PID control of robot manipulators. *Robotica* 13: 141-148.

با ایده مد لغزشی، قانون کنترل  $u = -k\text{sgn}(s) - ax_2$  انتخاب می‌گردد. به دلیل وجود تابع علامت در قانون کنترل، حالت های سیستم در زمان محدود به سطح لغزش  $s = 0$  رسیده و تا رسیدن به نقطه تعادل در سطح لغزش می‌مانند.

از معایب این روش، وجود پدیده چترینگ در سیگنال کنترل می‌باشد. برای رفع چترینگ، تقریب هموار شده تابع علامت مانند تابع اشباع می‌تواند استفاده شود. چنین تقریبی، همگرایی زمان محدود متغیر لغزش به نقطه تعادل  $s = 0$  را تضمین نمی‌کند و سطح لغزشی پایدار مجانبی می‌گردد. در چنین شرایطی اطراف سطح لغزش می‌تواند یک لایه مرزی با ضخامت معلوم، تعریف شود. بنابراین فاز دستیابی متغیر لغزشی به آن لایه مرزی در زمان محدود اتفاق می‌افتد.

اگر تابع علامت، با تابع هموار شده  $\rho(\cdot)$  جایگزین شود آن وقت قانون کنترل نیز به صورت  $u = -\rho(s) - ax_2$  نوشته می‌شود. پس سیستم کنترل حلقه بسته به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + s \\ \dot{s} = -\rho(s) \end{cases} \quad (42)$$

تابع هموار  $\rho(\cdot)$  بایستی به گونه ای انتخاب شود که در صفر مشتق پذیر و همواره در ربع اول و سوم باشد. تنها نقطه تعادل سیستم حلقه بسته،  $x_1 = 0$  و  $s = 0$  می‌باشد. برای تحلیل پایداری با روش خطی‌سازی، ماتریس ژاکوبین  $Y$  حول نقطه تعادل، به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$Y = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ 0 & -b \end{bmatrix}, \quad b = \left. \frac{d\rho(s)}{ds} \right|_{s=0}$$

بدیهی است ماتریس ژاکوبین دارای مقادیر ویژه منفی و سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی می‌باشد. در تحلیل پایداری با استفاده از کنترل مد لغزشی، به دلیل انتخاب مناسب شیب لغزش، فقط کافی است پایداری در فاز دستیابی بررسی گردد. در نتیجه تحلیل پایداری سیستم در فاز لغزش ضروری نیست.

## ۷- مراجع

- [1] Soltanpour MR (2011) Variable structure tracking control of robot manipulator in task space in the presences of structure and unstructured uncertainties in dynamics and kinematics. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 1: 81-88.

- [26] Utkin V (1977) Variable structure systems with sliding modes. *IEEE T Automat Contr* 22: 212-222.
- [27] Piltan F, Nabae A, Ebrahimi M, Bazregar M (2013) Design robust fuzzy sliding mode control technique for robot manipulator systems with modeling uncertainties. *Int J Inform Tech Comput Sci* 5: 123-135.
- [28] Soltanpour MR, Khooban MH, Soltani M (2014) Robust fuzzy sliding mode control for tracking the robot manipulator in joint space and in presence of uncertainties. *Robotica* 32: 433-446.
- [29] Castillo O, Neyoy H, Soria J, Melin P, Valdez F (2015) A new approach for dynamic fuzzy logic parameter tuning in ant colony optimization and its application in fuzzy control of a mobile robot. *Appl Soft Comput* 28: 150-159.
- [30] Lee K, Choi J, Kim J (2004) A proportional-derivative-sliding mode hybrid control scheme for a robot manipulator. *P I Mech Eng I-J Sys* 218: 667-674.
- [31] Ouyang P, Acob J, Pano V (2014) PD with sliding mode control for trajectory tracking of robotic system. *Robot Cim-Int Manuf* 30: 189-200.
- [32] Boyd S, El-Ghaoui L, Feron E, Balakrishnan V (1994) *Linear matrix inequalities in systems and control theory*. Philadelphia: SIAM.
- [19] Nunes EV, Hsu L (2010) Global tracking for robot manipulators using a simple causal PD controller plus feedforward. *Robotica* 28: 23-34.
- [20] Wang H (2017) Adaptive control of robot manipulators with uncertain kinematics and dynamics. *IEEE T Automat Contr* 62: 948-954.
- [21] Kali Y, Saad M, Benjelloun K, Fatemi A (2017) Discrete-time second order sliding mode with time delay control for uncertain robot manipulators. *Robot Auton Syst* 94: 53-60.
- [22] He W, Chen Y, Yin Z (2016) Adaptive neural network control of an uncertain robot with full-state constraints. *IEEE T Cybernetics* 46: 620-629.
- [23] Fateh MM (2014) Robust control of robotic manipulators using an adaptive neural network estimator of uncertainty. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 4: 1-12.
- [24] Mazdarani H, Farrokhi M (2014) Adaptive neuro-predictive position/velocity control of robot manipulators in work space. *Computational Intelligence in Electrical Engineering* 4: 33-50.
- [25] Chen Y, Mei G, Ma G, Lin S, Gao J (2014) Robust adaptive inverse dynamics control for uncertain robot manipulator. *Int J Innov Comput I* 10: 575-587.