



بررسی فلاتر مافوق صوت تیر ساندویچی لانه زنبوری حاوی لایه پوششی سرمتی تحت بار در حال حرکت

محمد نظامی*

استادیار، گروه مهندسی مکانیک و هوافضا، دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه، فیروزکوه، ایران
یادداشت تحقیقاتی، تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۸/۱۱؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۰۶/۱۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۰/۰۸

چکیده

در این مقاله به صورت همزمان اثرات فلاتر مافوق صوت و جریان نیرویی متحرک روی تیر ساندویچی لانه زنبوری حاوی لایه پوششی از جنس سرمت مورد بررسی قرار می‌گیرد. لایه لانه زنبوری که دارای نسبت استحکام به وزن بالایی است، از جنس نومکس و از نوع منظم و لایه سرمت که تحمل دمایی بالایی دارد، از جنس ذرات اکسید آلومینیوم در ماتریس فلزی فولاد نرم با درصد کسری بهینه سرامیک در نظر گرفته می‌شود. از تئوری تیر کلاسیک اویلر-برنولی برای مدل‌سازی سازه و از روش پیستون تئوری مرتبه اول به منظور مدل‌سازی جریان آیرودینامیک مافوق صوت بهره‌برده می‌شود. از اصل همپلتون به‌مراه بسط فوریه و روش گالرکین به منظور رسیدن به مدل دینامیکی سازه در حوزه فضا-حالت استفاده می‌شود؛ همچنین فشار دینامیکی بحرانی از روش p محاسبه می‌شود. در بخش نتایج نقش مؤثرتر سازه ساندویچی با لایه سرمتی در به تعویق انداختن فلاتر نسبت به سازه ساندویچی با لایه پوششی آلومینیوم نشان داده می‌شود. اثر ضخامت لایه پوششی سرمت نیز در به تعویق انداختن فلاتر، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نهایت به منظور رسیدن به نتایج عملیاتی بهتر، پاسخ زمانی تیر ساندویچی در جریان مافوق صوت و تحت بار متحرک با سرعت‌های متفاوت ارائه خواهد شد.

کلمات کلیدی: آیرودالاستیسیت؛ بار متحرک؛ فشار دینامیکی بحرانی؛ تیر ساندویچی لانه زنبوری؛ سرمت.

Supersonic Flutter of a Honeycomb Sandwich Beam with Cermet Covered Layer under Moving Load Configuration

M. Nezami

Assistant Professor, Aerospace and Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Firoozkooh Branch, Firoozkooh, Iran.

Abstract

In this paper, the effects of supersonic flutter and moving load are studied simultaneously on a honeycomb sandwich beam with a cermet covered layer. The core layer ratio is considered as a regular nomex honeycomb which has the high stiffness to weight ratio. Also cermet layer which has a high thermal strength is considered as aluminum oxide in mild steel matrix, for optimized fractional ceramic concentration. The structural formulation is based on the classical Euler-Bernoulli beam theory and the quasi-steady first order supersonic piston theory is employed to describe the aerodynamic loading. Hamilton's principle in conjunction with the generalized Fourier expansions and Galerkin method are used to develop the dynamical model of the structural systems in the state-space domain. The critical dynamic pressures are obtained by p method for a honeycomb sandwich beam. Simulation results shows that using cermet layer as a constrained layer has an important role in postponing the flutter to higher dynamic pressures compared to the same sandwich layer with aluminum constrained layer. The thickness effect of cermet layer on flutter phenomena is also considered. Finally, in order to obtain efficient operational results, the aeroelastic responses of honeycomb sandwich beam in supersonic regime under moving loads with different velocities are calculated.

Keywords: Aeroelasticity; Moving Load; Critical Dynamic Pressure; Honeycomb sandwich beam; Cermet.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۲۱۷۶۴۴۸۰۵۱

آدرس پست الکترونیک: nezami.mo@gmail.com

۱- مقدمه

فلاتر صفحه، پدیده آیرودینامیکی است که حاصل ادغام مودهای مشخص سازه‌ای تحت اثر نیروی فشار آیرودینامیکی عمل‌کننده روی صفحه است. بالاتر از سرعت فلاتر، سیستم آیرودینامیک از جریان هوای آزاد انرژی دریافت کرده و پاسخی با میرایی منفی ایجاد می‌شود. اگر سرعت جریان به موقع کاهش پیدا نکند، نوسانات افزایش پیدا کرده و در نهایت منجر به ناپایداری آیرودینامیکی و خرابی فاجعه بار سازه خواهد شد. جردن [۱] اولین کسی بود که از پدیده فلاتر صفحه در سازه‌های هوایی آگاه شد و پیش‌بینی کرد که خرابی بسیاری از راکت‌های اولیه V-2 از پدیده فلاتر بوده است. در بسیاری از دیدگاه‌ها، تحلیل جریان مافوق صوت ساده‌تر از تحلیل جریان مادون صوت است و ساده‌ترین روش برای تحلیل جریان مافوق صوت، استفاده از روش تئوری پیستون است که مشابه با مدل کردن جریان مادون صوت با استفاده از تئوری نواری است. تئوری پیستون روش مدل-سازی ساده شده‌ای است که در صنعت برای سطوح برای استفاده می‌شود که به صفحاتی تقسیم‌بندی شده‌اند و اثرات برهم‌کنش آیرودینامیکی مابین صفحات محاسبه شده است. بر همین اساس در این بخش به تعدادی از تحقیقات در زمینه فلاتر مافوق صوت و کنترل آن اشاره می‌گردد. سانگ و لی [۲] ابتدا با کمک پیژوالکتریک توانستند، فلاتر مافوق-صوت تیر ساندویچی را به تعویق ببندازند و مزیت کنترلر فعال را نشان دهند. صمدپور و همکاران [۳] با کمک آلیاژهای حافظه‌دار و ارائه مدل غیرخطی بارگذاری حرارتی-آیرودینامیک نشان دادند که استفاده از آلیاژهای حافظه‌دار در به تعویق انداختن فلاتر و اثرات حرارتی بسیار موثر بوده، حتی با نسبت حجمی مناسب از آلیاژهای حافظه‌دار می‌توان فلاتر را نیز کنترل نمود. سوشیما و سو [۴] با در نظر گرفتن تیر منعطف و رابطه غیرخطی بارگذاری آیرودینامیکی، و با مقایسه کنترلر غیر فعال و فعال، به کمک روش کنترلی تنظیم‌کننده مرتبه دوم خطی نشان دادند که چگونه مقداری فشار دینامیکی بحرانی به تعویق می‌افتد. بهاء‌الدینی و سعیدی [۵] با در نظر گرفتن نانو تیوب‌های کربنی طبقه-بندی شده تابعی^۴ و استفاده در تیغه‌های جداره نازک، استنتاج نمودند که اعمال حرارت و استفاده از نانو تیوب‌های با درجات مختلف به شدت روی فرکانس فلاتر اثر می‌گذارد.

عبدالطیف و همکاران [۶] نیز با در نظر گرفتن بار گشتاوری در انتهای تیر یک سر گیردار، بیان نمودند که پایداری دینامیکی و فلاتر تیر، با بارگذاری و ارتباط آن با خیز شیب مربوط بوده، بگونه‌ای که می‌تواند مد فلاتر را تغییر دهد و آن را به تعویق بیندازد.

اما در شرایط پرواز مافوق صوت شرایط آیرودینامیک در طراحی وسایل فضایی مثل، ماهواره‌برها و راکت‌ها و نیز هواپیماهای پرسرعت مؤثر است [۷]. این اثرات ممکن است، سبب ایجاد تغییر شکل‌ها، تنش‌های ترمودینامیکی و تغییراتی در خصوصیات مواد شود که در نهایت، روی رفتار آیرودینامیک آنها تأثیرگذار خواهد بود. اثر حرارت روی صفحه به دو قسمت تقسیم می‌شود: اول اینکه کاهش در سختی سازه به علت نرم شدن مواد صفحه رخ می‌دهد و دوم اینکه تنش حرارتی، به علت یکسان نبودن ضرایب انبساط گرمایی صفحه و تکیه‌گاه ایجاد می‌شود. این اثرات روی رفتار دینامیکی و استاتیکی صفحه اثر می‌گذارد [۸]. از این رو از پوشش سرمتی مانند آلومینا^۵ روی پنل‌ها به منظور افزایش پایداری حرارتی در کاربردهای دما بالا استفاده می‌شود [۹] و [۱۰].

مشخصات منحصر به فردی از قبیل، نسبت استحکام به وزن بالا، رسانایی حرارتی پایین و ظرفیت عایق بودن صوتی خوب باعث شده است که سازه‌های ساندویچی لانه زنبوری انتخاب اول در صنایع هوافضا باشد. محققان بسیاری رفتار دینامیکی پنل‌های ساندویچی لانه زنبوری را مورد بررسی قرار داده‌اند. در میان آنها لی و همکاران [۱۱] با استفاده از آرایش لایس هرمی شکل لانه زنبوری، رفتار تیر ساندویچی مربوطه را تحت اثر فلاتر سوپرسونیک مورد مطالعه قرار داده و نشان دادند که نسبت به تیر تک لایه، فشار دینامیکی بحرانی تیر ساندویچی به طرز چشمگیری در مقادیر بالاتر رخ می‌دهد. ژانگ و همکاران [۱۲] با ساخت یک تیر لانه زنبوری با آرایش هیبریدی (متناوب) به بررسی اثر ارتعاشی تیر ساندویچی پرداختند. نتایج مطالعات و آزمایشات آن‌ها منجر به استخراج مدول الاستیسیته تجربی برای آرایش‌های مختلف از لانه زنبوری هیبریدی شده است. سانگ و همکاران [۱۳] نیز طی مطالعه‌ای به کنترل فعال فلاتر سوپرسونیک صفحه ساندویچی لانه زنبوری با آرایش مثلثی پرداختند. آن‌ها با در نظر گرفتن پیژوالکتریک روی پنل ساندویچی،

نیروهای اعمالی مرسوم در صنعت هواپیمایی است، از دیگر دلایل اهمیت انجام این تحقیق است. در انتها تغییرات شکل موده‌های اول و دوم تیرهای ساندویچی آلومینیومی و سرمتی از حالت بدون جریان تا رسیدن به فشار دینامیکی بحرانی و کوپل شدن آنها رسم شده است که می‌توان از آن برای جای‌یابی مواد هوشمند از جمله پیزوالکتریک‌ها و آلیاژهای حافظه‌دار در تیر ساندویچی به منظور کنترل غیرفعال و فعال فلاتر و ارتعاشات در تحقیقات آینده بهره برد.

۲- معادلات حاکم بر سیستم

شکل ۱ تیر ساندویچی (با طول L و عرض b) با شرایط مرزی ساده که شامل لایه رویه الاستیک بالا به ضخامت h_1 و جنس سرمت و لایه رویه پایین از جنس آلومینیوم به ضخامت h_3 و لایه هسته، شامل لانه زنبوری شش ضلعی منتظم به ضخامت h_2 است را تحت جریان مافوق صوت نشان داده شده است؛ همچنین بر اساس تئوری مید و مارکوس [۲۰] که دارای دقت مناسبی در محاسبات ارتعاشی تیرهای ساندویچی است، فرض می‌شود که هیچ نوع لغزشی بین لایه‌های الاستیک و لایه هسته حاوی لانه زنبوری وجود ندارد؛ همچنین جابجایی عرضی، w ، در هر نقطه از سطح مقطع تیر ساندویچی یکسان فرض می‌شود. رویه‌ها الاستیک هستند و تنش‌های عمودی در لایه حاوی لانه زنبوری و نیز کرنش‌های برشی عرضی در لایه‌های ۱ و ۳ در نظر گرفته نمی‌شوند. [۲۰، ۱۹].

بر اساس فرض‌های سینماتیکی اشاره شده، مؤلفه‌های جابجایی در هر نقطه در لایه‌های الاستیک بالا و پایین به شکل رابطه (۱) ارائه می‌شود [۲۱]:

$$\begin{aligned} u^{(i)}(x, z, t) &= u_i(x, t) - z_i \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \\ w^{(i)}(x, z, t) &= w(x, t), \end{aligned} \quad (1)$$

که در این روابط پارامتر i مشخص کننده شماره لایه‌های اول و سوم و نیز z_1 و z_3 به ترتیب مؤلفه‌های عرضی در سیستم مختصات محلی قرار گرفته در صفحه میانی هر یک از لایه-های بالا و پایین و $u_3(x), u_1(x)$ تغییر شکل صفحات میانی لایه‌های اول و سوم در جهت x می‌باشد.

محاسبه نمودند که فشار دینامیکی بحرانی به طرز چشمگیری به تعویق می‌افتد. هرچند نشان دادند، در حالتی که طول جانبی لانه زنبوری افزایش یابد، فشار دینامیکی بحرانی کاهش خواهد یافت. الوی و همکاران [۱۴] با ساخت تیر لانه زنبوری پر شده از سیال مگنتورئولوژیکال و اعمال میدان مغناطیسی، به صورت آزمایشگاهی تاثیر همزمان ساختار لانه زنبوری و سیال مگنتورئولوژیکال را بر ارتعاشات تیر یک سرگیردار مورد بررسی قرار دادند. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که ارتعاشات تیر به‌خوبی میرا و کنترل می‌شود.

بوچر و همکاران [۱۵] موقعیت‌های بهینه ربات‌های ساخته شده از جنس موادی با میرایی بالا را که در میان سلول‌های لانه زنبوری جایابی می‌شوند را در ابعاد سلولی متفاوت و تحت نیروهای صفحه‌ای گوناگون به منظور بررسی تغییر شکل‌های سلول‌های هسته لانه زنبوری مورد بررسی قرار دادند. ساکار و بولات [۱۶] به صورت آزمایشگاهی و عددی ارتعاشات تیر ساندویچی با لایه هسته لانه زنبوری را مورد بررسی قرار دادند. ایشان در این مقاله اثر ضخامت لایه‌ها و نیز زاویه و ضخامت لانه زنبوری‌ها در ارتعاشات تیر مورد آنالیز قرار دادند. در کاری مشابه موخوپاده‌های و ادھیکاری [۱۷]، ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی حاوی هسته لانه زنبوری با الگوی ساختاری تصادفی نامنظم را مورد تحلیل قرار دادند.

بر اساس مراجع مطالعه شده، استفاده از سرمته‌ها در تیرهای مافوق صوت ساندویچی سابقه زیادی در تحقیقات اخیر نداشته است. بدین منظور در مطالعه حاضر هدف بر آن است که فلاتر تیر ساندویچی با پوشش سرمتی تحت بارگذاری متحرک با سرعت‌های مختلف و اثرات تغییرات ضخامت لایه سرمتی مورد بررسی قرار گیرد. به بیان دیگر، نوآوری و اصالت اثر در این مطالعه، متشکل از بررسی رخداد فلاتر تیر ساندویچی با در نظر گرفتن لایه پوششی سرمت از جنس آلومینا در ماتریس فلزی فولاد نرم با درصد کسری بهینه سرامیک به عنوان لایه الاستیک و همچنین لایه مغزی لانه زنبوری است. در تیر ساندویچی ارائه شده از لایه لانه زنبوری در هسته برای سبکی سازه و تعویق فلاتر بهره برده شده است؛ همچنین آنالیز همزمان فلاتر و نیروهای اعمالی به تیر ساندویچی بخصوص جریان نیروهای متحرک که از

جابجایی طولی u_2 برای لایه مغزی بر اساس جابجایی-های w, u_1, u_3 به گونه ۵ تعریف می‌شود [۱۹]:

$$u_2 = \frac{1}{2} \left[u_1 + u_3 + \left(\frac{h_1 - h_3}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right], \quad (5)$$

از اصل هامیلتون به منظور استخراج معادلات حاکم حرکتی مربوط به تیر ساندویچی با فرض شرایط مرزی در حالت کلی، بر اساس تئوری تیر کلاسیک استفاده می‌شود. بر طبق مدل استاندارد، انتگرال زمانی لاگرانژی مربوط به کل سیستم در بازه زمانی دلخواه، می‌بایست کمینه شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0, \quad (6)$$

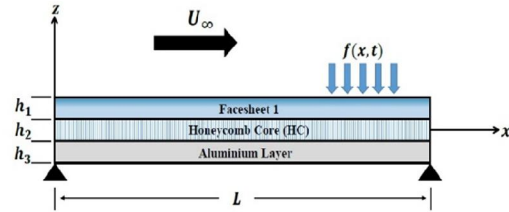
δ عملگر تغییرات اول، W_{nc} بیان کننده کار انجام شده توسط نیروهای ناپایستار، $L = T - U$ تابع لاگرانژین، T انرژی جنبشی و U انرژی کرنشی کل می‌باشند. بر این اساس، تغییرات کار انجام شده توسط نیروی گسترده عرضی $f(x,t)$ ، نیروی فشاری آیرودینامیکی Δp بهمراه انرژی سینماتیکی و کرنشی سیستم تیر ساندویچی به شکل ۷ قابل بیان می‌باشد [۱۹، ۲۰ و ۲۲]:

$$\delta W_{nc} = \int_{\Omega} f \delta w d\Omega - \int_{\Omega} \Delta p \delta w d\Omega, \quad (7)$$

که Ω نشان دهنده سطح دو بعدی $(L \times b)$ مربوط به هر لایه در صفحه $x-y$ ($d\Omega = b dx$) و $(i=1,3)V_i$ به ترتیب حجم لایه‌های بالا و پایین ($dV_i = b h_i dx$) و نیز $\rho_i (i=1,3)$ دانسیته‌های جرمی مربوط به لایه‌های بالا و پایین می‌باشند. علاوه بر این، براساس تئوری پیستون مرتبه اول شبه پایه، نیروی فشاری آیرودینامیکی Δp ، به شکل رابطه (۸) تعریف می‌شود [۲۲]:

$$\Delta p = \frac{2q}{\beta} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{V} \left(\frac{M^2 - 2}{M^2 - 1} \right) \dot{w} \right], \quad (8)$$

ρ_a چگالی هوا و V سرعت جریان هوا است. تئوری پیستون مافوق صوت شبه پایه ارائه شده، در محدوده جریان پروازی $2 < M < 5$ قابل استناد است. برای استفاده از روش مدهای فرضی و گسسته‌سازی معادلات، از فرمول و روش ریلی-ریتر استفاده می‌کنیم. جابجایی‌های w, u_1, u_3 را در دستگاه مختصات فیزیکی به صورت دنباله‌هایی از جمع مد های تعامدی شامل، یک ترم مکانی و یک ترم زمانی روی دستگاه مختصات کلی تعریف می‌کنیم [۲۲]:



شکل ۱- هندسه تیر ساندویچی لانه زنبوری.

با فرض خطی بودن روابط کرنش-جابجایی، مؤلفه‌های کرنش در لایه‌های الاستیک (ϵ_x) اول و سوم بهمراه مؤلفه کرنش برشی عرضی در لایه میانی (γ_{xz}) به ترتیب و بر اساس شکل ۲ به صورت رابطه (۲) قابل بیان است [۲۰ و ۲۲]:

$$\epsilon_x^{(i)} = \frac{\partial u_i}{\partial x} - z_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (2)$$

$$\gamma_{xz}^{(2)} = \frac{l_x}{h_2} = \frac{d}{h_2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{(u_1 - u_3)}{h_2},$$

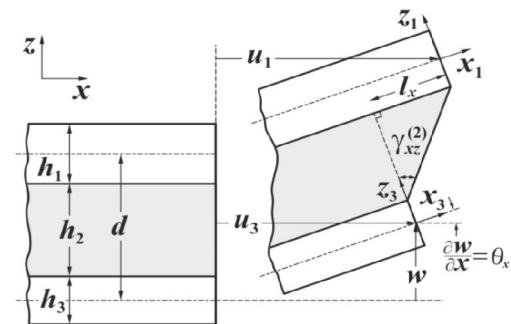
بعلاوه، $d = h_2 + \frac{h_1 + h_3}{2}$ و $l_x = \theta_x d + (u_1 - u_3)$ تنش مربوط به لایه‌های بالا و پایین (لایه‌های ۱ و ۳)، بر اساس قانون هوک و به شکل (۳) حاصل می‌آید:

$$\sigma_x^{(i)} = E_i \epsilon_x^{(i)}, \quad (3)$$

E_i مدول یانگ است. معادله ساختاری مغزی حاوی لانه زنبوری در محدوده زمان، به شکل رابطه (۴) مدل شده است [۱۹ و ۲۲]:

$$\sigma_{xz}^{(2)} = G_2 \gamma_{xz}^{(2)}, \quad (4)$$

G_2 اشاره به مدول برشی عرضی لانه زنبوری دارد که این کمیت نقش مهمی در سازه‌های ساندویچی ایفا می‌کند.



شکل ۲- وضعیت تغییر شکل در صفحه $x-z$ تیر ساندویچی [۲۰ و ۲۲]

با استفاده از معادله (۱۳)، به منظور مدل‌سازی و حل معادلات فلاتر تیر ساندویچی، کدهای کامپیوتری مربوطه در نرم‌افزار Wolfram Mathematica 11 پیاده‌سازی و محاسبه شده‌اند. پس از محاسبه فشار دینامیکی بحرانی تیر ساندویچی، بر اساس مقادیر و نیروهای خارجی در نظر گرفته شده، پاسخ جابجایی عرضی تیر نیز نشان داده شده است. مقادیر مکانیکی و ابعاد هندسی استفاده شده در این مطالعه در جدول ۱ نشان داده شده است. برای محاسبه مدول یانگ سرمت مورد نظر، E_1 ، از روش ارائه شده توسط مک‌آدام [۱۸] استفاده شده است. بر اساس این مرجع، برای سرمت آلومینا در درصد وزنی $C_p = 0.2$ ، مدول یانگ دارای مقدار بهینه و بیشینه خود است. با در نظر گرفتن درصد وزنی و چگالی آلومینا، به ترتیب $C_p = 0.2$ و $\rho_{Alumina} = 3990 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ و همچنین چگالی فلز پایه فولاد $\rho_{Steel} = 7970 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ ، چگالی سرمت، ρ_1 ، محاسبه شده است. رویه‌ی زیرین (h_3) و مغزی (h_2) تیر ساندویچی به ترتیب از جنس آلومینیوم و لانه زنبوری است (شکل ۱). خواص مکانیکی لایه لانه زنبوری شامل چگالی، $\rho_{HC} = 48 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ و مدول برشی عرضی $G_{HC} = 1.79 \times 10^7 \text{ (Pa)}$ است [۱۹]. رویه‌ی بالایی (h_1) تیر ساندویچی یک بار از جنس آلومینیوم و یک بار از جنس سرمت در نظر گرفته شده و بدنبال آن فلاتر تیر ساندویچی آنها محاسبه و مقایسه می‌شوند. نیروهای خارجی وارده به سازه شامل جریان نیرویی متحرک، دیراک و مقدار بزرگی نیرو معادل $f_0 = 10 \text{ (kN)}$ و سرعت-های منتخب برابر $v = 1 \text{ (m/s)}$ ، $v = 10 \text{ (m/s)}$ در نظر گرفته شده‌اند.

۳- نتایج و محاسبات

بطوری که در معادلات بالا $\boldsymbol{\varphi}(t) = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]^T$ ، $\boldsymbol{\eta}(t) = [\eta_1, \dots, \eta_n]^T$ و $\boldsymbol{\psi}(t) = [\psi_1, \dots, \psi_n]^T$ ضرایب جابجایی نامعین وابسته به زمان و $(n = 1, 2, \dots, N)$ و $\mathbf{U}_3(x) = [U_{3,1}, \dots, U_{3,n}]^T$ ، $\mathbf{U}_1(x) = [U_{1,1}, \dots, U_{1,n}]^T$ و $\mathbf{W}(x) = [W_1, \dots, W_n]^T$ ضرایب جابجایی وابسته به مکان می‌باشند که باید شرایط مرزی هندسی را ارضا کنند. در این مسئله، کافی است که ترم‌های مکانی، شرایط مرزی تکیه گاه ساده را ارضا نمایند که متعاقباً خواهیم داشت [۱۹] و [۲۲]:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}(x) \varphi_m(t) = \mathbf{U}_1^T(x) \boldsymbol{\varphi}(t), \\ u_3(x, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{3m}(x) \psi_m(t) = \mathbf{U}_3^T(x) \boldsymbol{\psi}(t), \\ w(x, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_m(x) \eta_m(t) = \mathbf{W}^T(x) \boldsymbol{\eta}(t), \end{aligned} \quad (9)$$

به گونه‌ای که در معادله (۱۰) داریم $i = 1, 2, \dots, N$ سپس با جایگذاری معادلات (۱) الی (۵) و معادلات (۸)، (۹) و (۱۰) داخل معادلات (۷)، معادلات انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و کار مجازی بر اساس ترم‌های بسط‌های مختصات کلی معادلات (۹) بیان می‌شوند. سپس با جایگذاری در معادله (۶) و استفاده از مزایای اصل حساب تغییرات، بعد از انجام یک سری از محاسبات [۲۲] معادله حرکت کل سیستم به صورت رابطه (۱۱) استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} U_{1,i}(x) &= \cos(i\pi x/L), \\ U_{3,i}(x) &= \cos(i\pi x/L), \\ W_i(x) &= \sin(i\pi x/L), \end{aligned} \quad (10)$$

معادله (۱۱) $m\ddot{\boldsymbol{\delta}} + c\dot{\boldsymbol{\delta}} + k\boldsymbol{\delta} = \mathbf{f}_d(t)$ ، که $\boldsymbol{\delta}(t) = [\boldsymbol{\varphi}(t); \boldsymbol{\psi}(t); \boldsymbol{\eta}(t)]^T$ است. حال برای حل معادله و یافتن سرعت و فرکانس بحرانی با تغییر متغیر مناسب، معادله (۱۱) به شکل فضا-حالت زیر در می‌آید:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{KX} = \mathbf{f}_d(t), \quad (12)$$

که $\mathbf{X}(t) = [\boldsymbol{\varphi}(t); \boldsymbol{\psi}(t); \boldsymbol{\eta}(t); \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t); \dot{\boldsymbol{\psi}}(t); \dot{\boldsymbol{\eta}}(t)]^T$ و ماتریس‌های \mathbf{M} ، \mathbf{K} نیز در پیوست آورده شده‌اند. حال معادله (۱۲) را به فرم استاندارد زیر در می‌آوریم:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{B}\mathbf{f}_d(t) + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{f}_d(t), \quad (13)$$

به منظور اعتبارسنجی مسئله، تیر ساندویچی آلومینیومی با مغزی لانه زنبوری بر اساس خواص مکانیکی و هندسه ذکر شده در جدول ۱، در نرم افزار MSC.NASTRAN مدل سازی شده است. در تحلیل مدل استفاده شده در نستر از SOL 145 (تحلیل آیرودینامیکی فلتر) استفاده شده است. برای مدل سازی هر بخش از سازه مانند هندسه سازه، خواص سازه، شرایط مرزی و کوپل سازه با جریان سیال از دستوره های .MAT8 .MAT1 .CQUADR .PSHELL .MAT8 .MAT1 .CQUADR .PSHELL .FLFACT .SPLINE2 .CAERO5 .MKAERO1 .SPC1 FLUTTER استفاده شده است. از آنجایی که تمامی دستورات در محیط Notepad نوشته شده، هیچگونه تصویر گرافیکی در PATRAN وجود نداشته و صرفاً با اجرای کد نوشته شده در NASTRAN و مشاهده نتایج در فایل F06 نتایج استخراج شده اند. سپس فرکانس های طبیعی چهار مود ارتعاشی اول سازه ساندویچی بدست آمد. با توجه به جدول ۲، می توان مشاهده نمود که فرکانس های طبیعی محاسبه شده از روابط استخراج شده با فرکانس های طبیعی بدست آمده از نرم افزار المان محدود از تطابق مناسبی برخوردار هستند.

جدول ۲- مقایسه فرکانس های طبیعی تیر ساندویچی آلومینیومی (بر حسب هرتز) حاصل از نرم افزار المان محدود و نتایج حاصل از معادلات

n	Present	NASTRAN
۱	۲۰/۴۴۵	۲۰/۴۶۸
۲	۷۴/۱۳۵	۷۲/۵۲۶
۳	۱۴۶/۶۰۱	۱۴۱/۶۳۱
۴	۲۲۷/۳۰۶	۲۲۱/۸۷۳

پس از استخراج فرکانس های طبیعی سیستم، فرکانس و سرعت رخداد فلتر نیز در نرم افزار MSC.NSTRAN محاسبه شده و نتایج آن در جدول ۳ ارائه شده است. در این حالت نیز نتایج فلتر بدست آمده از هر دو روش همخوانی مناسبی را از خود نشان می دهند. علل اختلاف ناچیز بین دو روش، در این است که روش استفاده شده در نستر المان

جدول ۱- خواص مکانیکی و ابعاد مواد بکاررفته [۴]

	آلومینیوم	سرمت (آلومینا)
E (GPa)	۷۲	۲۰۶/۱۲
ρ (Kg m ⁻³)	۲۷۰۰	۷۱۴۴
C_p	—	۰/۲
L (m)		۱
b (m)		۰/۰۲
h (m)		$h_1 = h_3 = ۰/۰۰۱$ $h_2 = ۰/۰۰۴$

در تیرهای ساندویچی، همگرایی جوابها بصورت سیستماتیکی با رفتار سعی و خطا، از طریق افزایش ثابت N و مشاهده ثبات مقادیر عددی مربوط به حل ارزیابی می شود. با استفاده از حداکثر تعداد مود شش ($N_{max} = 6$)، با توجه به پارامترهای ابعادی مسئله و وضعیت نیروها، نتایج قابل قبولی حاصل می یابد (با دقت خطای ۰/۰۰۱ نسبت به نتایج حاصله از تعداد مود بعدی). باید توجه داشت که در بررسی های عملی، فشار دینامیکی، سرعت، چگالی و بقیه کمیت ها در سطوح مختلف پروازی دستخوش تغییر می شوند؛ در نتیجه برای سهولت در استفاده از معادلات، معمولاً آنها را بی بعد کرده و نتایج سرعت را بر حسب پارامتر بی بعد فشار دینامیکی ($\lambda = \frac{2qL^3}{\beta D}$) ارائه می دهند. در این مطالعه نتایج برای دو حالت مختلف از تیر ساندویچی محاسبه و مقایسه شده اند. در یک حالت فرض شده است که رویه های بالایی و زیرین از جنس آلومینیوم بوده که در این حالت برای ساده سازی در متن، تیر ساندویچی تحت عنوان تیر ساندویچی آلومینیومی نام گذاری شده است. در حالت دیگر رویه بالایی (h_1) از جنس سرمت و رویه زیرین (h_3) از جنس آلومینیوم در نظر گرفته شده است که در طول متن تحت عنوان تیر ساندویچی سرمتی خوانده می شود. توجه شود که در هر دو حالت ذکر شده، لایه مغزی (h_2) همواره از جنس لانه زنبوری است.

خطوط پر) به همراه مقادیر موهومی فرکانس طبیعی مختلط تیر (یعنی، پارامتر میرایی ξ ؛ خطوط منقطع) بر حسب فشار دینامیکی بی بعد، برای چهار مود آیروالاستیک مشخص شده است. مهمترین مشاهدات از قرار زیر می‌باشند: در مقدار بحرانی فشار دینامیکی، λ_{cr} ، بخش حقیقی مقادیر ویژه مربوط به دو مود آیروالاستیک متقارن و نامتقارن مجاور (یعنی مودهای اول و دوم) برای همه موارد ارائه شده، به هم نزدیک می‌شوند و به هم می‌آمیزند. بطور همزمان میرایی مودال مربوط به مود اول، یک پرش سریع ناگهانی را

محدود بوده که در آن روش حل متفاوت از روش حل عددی از معادله حرکت است. ضمن آنکه مدل ساخته شده در نسترن صفحه‌ای نازک و مقید با مشخصات ذکر شده در مقاله است. علت استفاده از المان PSHELL به جای PBEAML آن است که در تحلیل فلاتر در نسترن، شکل هندسی حتماً بایستی دو بعدی مدل شود تا کوپل بین سازه و سیال برقرار گردد.

جدول ۳- مقایسه نتایج نرم افزار المان محدود با نتایج حاصل از معادلات در محاسبه مشخصات فلاتر

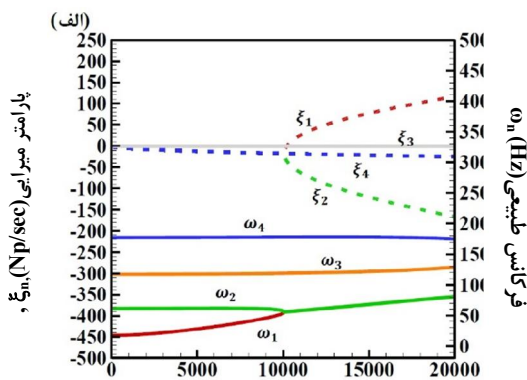
Flutter Velocity (m/s)	۶۴۱/۲۳۹	۶۲۸/۲۶۰
Flutter Frequency (Hz)	۶۶/۱۱۴	۶۵/۸۱۵

به منظور اطمینان بیشتر از صحت نتایج حاصله، تیرساندویچی به سمت تیر تک لایه آلومینیومی سوق داده شده و به دنبال آن با نتایج فرکانس‌های طبیعی مقاله آقای اسن [۲۴] مقایسه شده و در جدول ۴ نشان داده شده است. مقایسه نتایج صحت محاسبات انجام شده را تایید می‌کند.

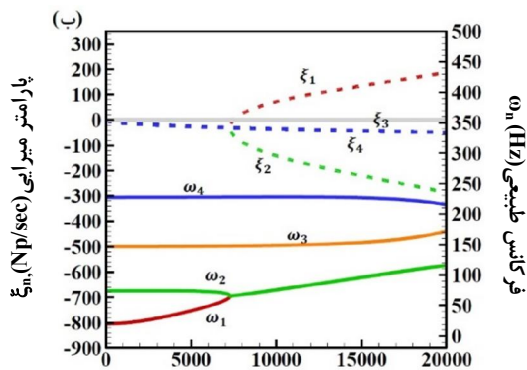
جدول ۴- مقایسه فرکانس‌های طبیعی تیر ساندویچی آلومینیومی سوق داده شده به سمت تیر تک لایه آلومینیومی با نتایج حاصل از مقاله اسن [۲۴]

n	Present (Hz)	Esen [24] (Hz)
۱	۰/۹۳۳۰	۰/۹۳۳۰
۲	۳/۷۳۲۲	۳/۷۳۱۹
۳	۸/۳۹۷۴	۸/۳۹۵۹

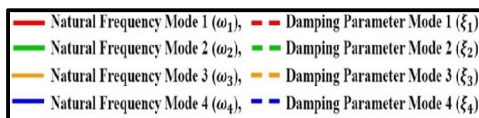
حال به بررسی نتایج عددی فلاتر تیر ساندویچی با مغزی لانه زنبوری با مشخصات بیان شده در شکل ۱ و جدول ۱ پرداخته می‌شود. در شکل ۳ از روش p [۱۶ و ۱۷] با در نظر گرفتن پارامتر جریان بی‌بعد $M = 2$ ، جهت تخمین شروع فلاتر تیر بر حسب مقدار بحرانی فشار دینامیکی بی بعد استفاده شده است. در این شکل، تغییرات مقدار حقیقی فرکانس طبیعی مختلط تیر (یعنی، فرکانس طبیعی ω ؛



فشار دینامیکی بی بعد λ

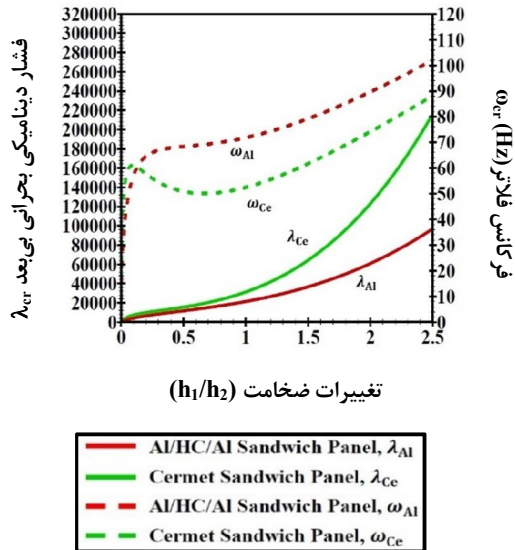


فشار دینامیکی بی بعد λ



شکل ۳- تغییرات مؤلفه‌های حقیقی و مجازی فرکانس‌های طبیعی تیر ساندویچی (الف) سرمتی (ب) آلومینیومی با فشار آیرودینامیکی بی‌بعد، برای چهار مود آیروالاستیک اولیه

بیشتری به سازه منتقل گردد. به همین دلیل سرمت از طریق اثر در ماتریس جرم، می تواند فلاتر را به تعویق بیندازد.



شکل ۴- تغییرات ضخامت رویه بالایی با فشار دینامیکی بحرانی و فرکانس فلاتر

در شکل ۵ تغییرات شکل مودهای اول و دوم تیرهای ساندویچی آلومینیومی و سرمتی از حالت بدون جریان ($\lambda = 0$) تا رسیدن به فشار دینامیکی بحرانی ($\lambda = \lambda_{cr}$) و کوپل شدن آنها رسم شده است. برای هر دو حالت از تیر، شکل مود فلاتر آنها کاملاً یکسان و مشابه بوده و بیشترین کرنش در ناحیه یک چهارم ابتدایی تیر صورت می گیرد. از این شکل می توان برای جای یابی مواد هوشمند از قبیل، سنسورها و عملگرهای پیزوالکتریک، آلیاژهای حافظه-دار و غیره در تیر ساندویچی به منظور کنترل فعال و غیر فعال فلاتر و ارتعاشات بهره برد. پس از بررسی رخداد فلاتر بحرانی، به مطالعه رفتار سازه تحت بارگذاری های نیروی متحرک پرداخته می شود.

شکل های ۶ و ۷ تغییر پاسخ دینامیکی جابجایی نقطه وسط تیر ساندویچی سرمتی و آلومینیومی با مغزی لانه زنبوری، $w(x=1/2,t)$ ، را برحسب زمان تحت نیروی متحرک با سرعت های به ترتیب ۱ و ۱۰ متر بر ثانیه نشان می دهند. در هر شکل شرایط وجود (فشارهای دینامیکی

در حالی که خط صفر را رد می کند (خط خاکستری) از خود نشان می دهد و میرایی مربوط به مود دوم در یک حرکت آینه وار از خط صفر افق دور می شود، به این مفهوم که فلاتر در حال اتفاق افتادن است؛ در نتیجه، تیر ناپایدار شده و فرکانس های مختلط، خود را با یک نوسان واگرا آشکار می سازند.

به بیان دیگر، در این حالت سازه قادر به میرا کردن انرژی وارده از سمت سیال هوا به سیستم نبوده و بلافاصله دچار شکست می شود. در این حالت برای سازه تیر، عموماً مودهای اول و دوم سازه که به راحتی قابل تحریک هستند، به سمت مود فلاتر شکل گیری می کنند تا در نهایت به ناپایداری می رسند. مقادیر فشار دینامیکی بحرانی بی بعد برای تیر ساندویچی سرمت و آلومینیومی، به ترتیب $\lambda_{cr,Ce} = 10196.60$ و $\lambda_{cr,Al} = 7476.36$ است. قابل مشاهده است که با استفاده از تیر ساندویچی با لایه سرمتی، مقدار فشار دینامیکی بحرانی به طرز چشمگیری به تعویق افتاده است.

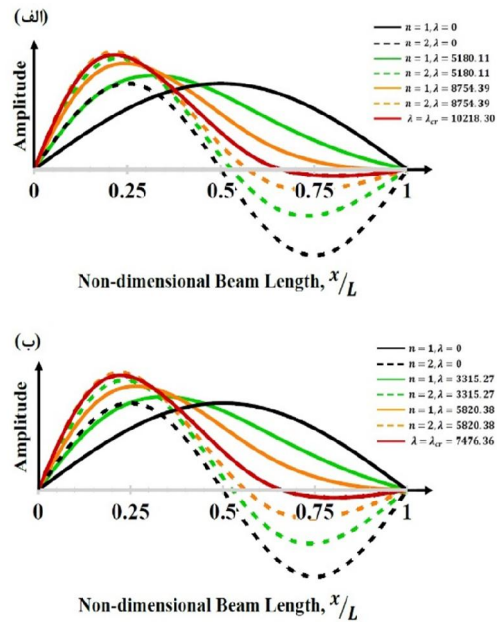
مقادیر فشار دینامیکی بحرانی بی بعد و همچنین فرکانس فلاتر، برای ضخامت های مختلف رویه ی بالایی (h_1) برای دو حالت مختلف تیر ساندویچی سرمتی و تیر ساندویچی آلومینیومی، در شکل ۴ بیان شده است. با افزایش ضخامت، تیر ساندویچی سرمتی بسیار بهتر از تیر ساندویچی آلومینیومی فلاتر را به تعویق می اندازد. برای مقادیر ضخامت رویه ی بالایی (h_1) کمتر از ضخامت لایه مغزی (h_2)، فشار دینامیکی بحرانی (خطوط پر) هر دو حالت تیر ساندویچی تقریباً نزدیک بهم هستند، اما مقادیر فرکانس فلاتر (خطوط منقطع) برای تیر آلومینیومی بسیار بیشتر از تیر ساندویچی سرمتی است؛ اما برای مقادیر بزرگتر از ضخامت لایه مغزی، با غالب شدن خواص مکانیکی رویه بالایی سرمت در تیر ساندویچی سرمتی، رفتار آیرودلاستیسسته آن نسبت به تیر ساندویچی آلومینیومی بهبود پیدا کرده و به مراتب فلاتر را بیشتر به تعویق می اندازد. در حقیقت با افزایش ضخامت لایه، اثر جرم لایه سرمت بیشتر شده و در نتیجه، برای تحریک مود فلاتر سازه، به انرژی بیشتری نیاز است که این بدین منظور است که سرعت سیال عبورکننده از روی سازه باید بیشتر شود تا انرژی

حرکت جریان نیرویی متحرک می توان دریافت که در حالت عدم حضور جریان آیرودینامیکی ($\lambda = 0$)، بار متحرک طول تیر را در ۱ ثانیه طی کرده و پس از آن تیر با دامنه‌ای ثابت به نوسانات خود ادامه می‌دهد؛ اما در شرایط حضور جریان ($\lambda > 0$)، علاوه بر افزایش دامنه نوسانات، رفتار نوسانی تیر نیز تغییر کرده که در نهایت نوسانات تیر ساندویچی میرا می‌شوند. قابل مشاهده است که دامنه نوسانات تیر ساندویچی سرمتی نسبت به تیر ساندویچی آلومینیومی به مراتب کمتر است. با افزایش سرعت بار متحرک، مدت زمانی که نیرو تیر ساندویچی را طی می‌کند، کمتر شده و متعاقباً زمان کمتری روی سازه نیرو اعمال می‌کند؛ در نتیجه نیروی متحرک به مانند یک نیروی ضربه رفتار خواهد کرد (شکل ۷). در تمامی حالات دامنه نوسانات تیر سرمتی همچنان کمتر از دامنه نوسانات تیر آلومینیومی است.

۴- نتیجه‌گیری

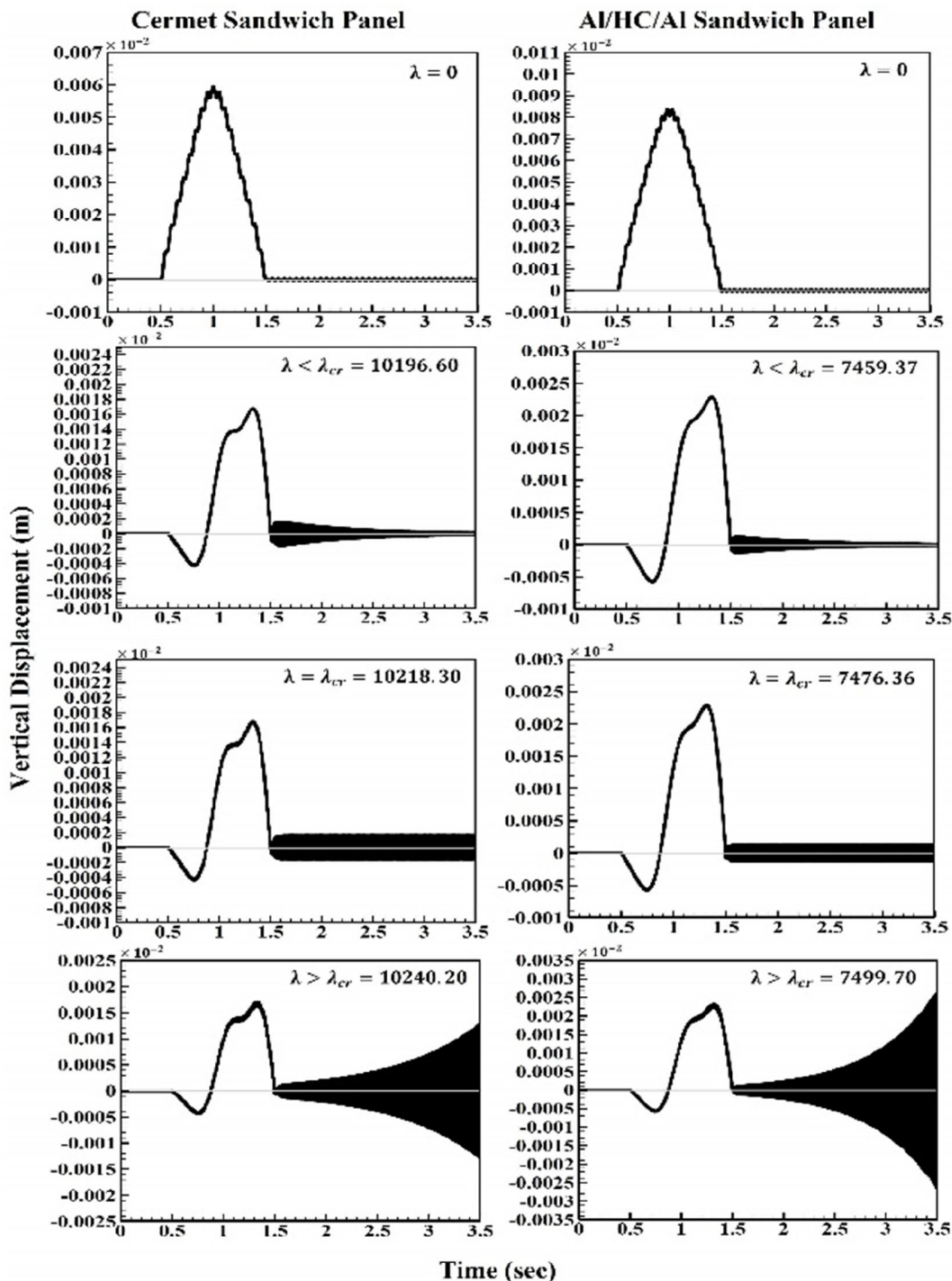
در این مقاله، فلاتر تیر ساندویچی سه لایه با مغزی لانه زنبوری برای دو حالت مختلف رویه‌های آلومینیومی و رویه سرمتی مورد بررسی قرار گرفته است. بصورت همزمان پاسخ دینامیکی سازه به بارگذاری نیروی متحرک (در سرعت‌های متفاوت) و عبور جریان (در فشارهای دینامیکی متفاوت) رسم شده است. مشاهدات و نتایج مهم بدست آمده به شرح زیر است:

- تیر ساندویچی با رویه‌ی بالایی (h_1) از جنس سرمت نسبت به جنس آلومینیوم قادر است، به طرز چشمگیری فشار دینامیکی بحرانی را به تعویق اندازد.
- تیر بدون در نظر گرفتن اعمال نیروی فشاری آیرودینامیکی، Δp ، دارای هیچ گونه پارامتر میرایی نیست. به همین علت در شرایط عدم وجود نیروی فشاری آیرودینامیکی، رفتار سازه تحت نیروی متحرک هارمونیک بوده و میرا نخواهد شد؛ اما با وارد شدن نیروی فشاری آیرودینامیکی سازه از خود میرایی نشان خواهد داد و با نزدیک شدن به فشار دینامیکی بحرانی رفتار واگرایی نمایان می‌شود.

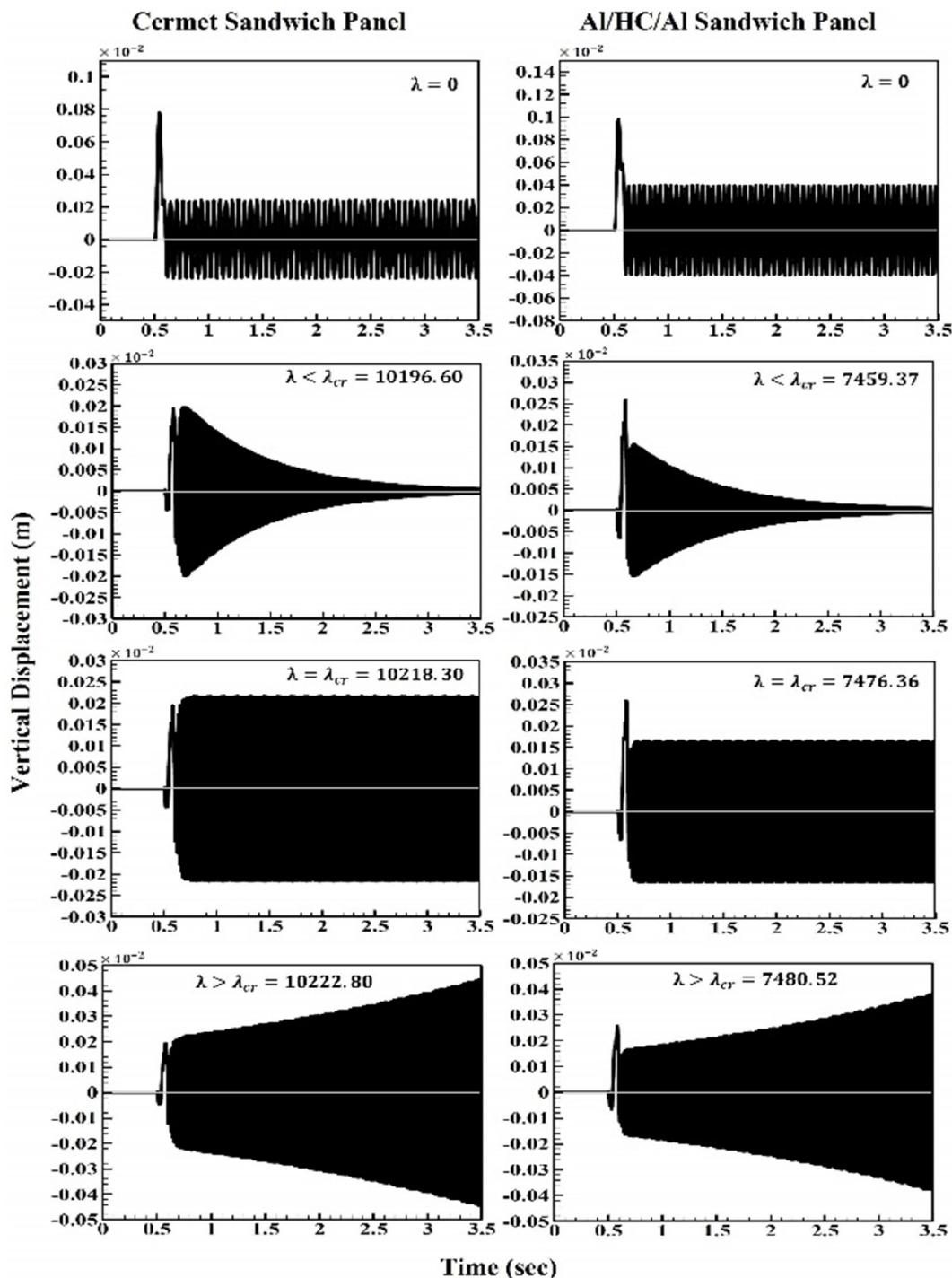


شکل ۵- تکامل تدریجی شکل مودهای اول و دوم تیر ساندویچی الف) سرمتی و ب) آلومینیومی با تغییرات فشار دینامیکی منتخب

منتخب) و عدم وجود جریان آیرودینامیکی با تاخیر نیم ثانیه بررسی شده است. قابل مشاهده است که افزایش فشار دینامیکی که همزمان با افزایش فرکانس‌های طبیعی سیستم صورت می‌گیرد (یا سفتی کلی سازه) منجر به افزایش (کاهش) قابل توجه نوسانات (دامنه) پاسخ سیستم می‌شود. با توجه به بیشتر بودن جرم و سفتی سازه ساندویچی سرمتی نسبت به آلومینیوم، دامنه نوسانات آن نیز کمتر است. در حالتی که هیچ جریانی روی سازه قرار ندارد ($\lambda = \lambda_{cr} = 0$)، رفتار دینامیکی دو سازه مشابه بوده و دامنه نوسانات سازه سرمتی کمتر از سازه آلومینیومی است. در حضور جریان آیرودینامیکی ($\lambda > 0$)، منحنی پاسخ آیروالاستیک قبل از رخداد فلاتر ($\lambda < \lambda_{cr}$)، میرا می‌شود؛ درحالی‌که، در فشار دینامیکی بحرانی ($\lambda = \lambda_{cr}$)، دامنه نوسانات در آستانه افزایش در طول زمان قرار می‌گیرند؛ به این مفهوم که سیستم، آماده ناپایداری حاصل از فلاتر می‌گردد. بالاتر از فشار دینامیکی بحرانی ($\lambda > \lambda_{cr}$)، منحنی‌های پاسخ واگرا شده و سیستم بدون توجه به نوع نیرو و یا هندسه سازه، ناپایدار می‌گردد. با بررسی مجدد شکل ۶ و در نظر گرفتن



شکل ۶- پاسخ دینامیکی آبروالاستیک تیر ساندویچی سرمتی و آلومینیومی تحت نیروی متحرک $v = 1$ (m/s) در فشارهای بی بعد منتخب



شکل ۷- پاسخ دینامیکی آبروالاستیک تیر ساندویچی سرمتی و آلومینیومی تحت نیروی متحرک $v = 10$ (m/s) در فشارهای بی بعد منتخب

- [5] Bahaadini R, Saidi A (2019) Aerothermoelastic flutter analysis of pre-twisted thin-walled rotating blades reinforced with functionally graded carbon nanotubes. *Eur J Mech A-Solid* 75(0): 285-306.
- [6] Abdullatif M, Mukherjee R (2019) Divergence and flutter instabilities of a cantilever beam subjected to a terminal dynamic moment. *J Sound Vib* 1(1): 1-18.
- [7] Chai YY, Song ZG, Li FM (2017) Active aerothermoelastic flutter suppression of composite laminated panels with time-dependent boundaries. *Compos Struct* 179: 61-76.
- [8] Gee DJ, Sipcic SR (1999) Coupled thermal model for non-linear panel flutter. *AIAA J* 37(5): 624-649.
- [9] Li H, Motamedi P, Hogan J (2019) Characterization and mechanical testing on novel $(\gamma + \alpha_2)$ - TiAl/Ti3Al/Al2O3 cermet. *Mat Sci Eng A-Struct* 750: 152-163.
- [10] Wang X, Gao J, Hua H, Zhang H, Liang L, Javaid K, Wang L (2017) High-temperature tolerance in WTi-Al2O3 cermet-based solar selective absorbing coatings with low thermal emissivity. *Nano Energy* 37: 232-241.
- [11] Li F, Song Z, Sun C (2015) Aeroelastic properties of sandwich beam with pyramidal lattice core considering geometric nonlinearity in the supersonic airflow. *Acta Mech Solida Sin* 28(6): 639-646.
- [12] Zhang ZJ., Han B, Zhang QC, Jin F (2017) Free vibration analysis of sandwich beams with honeycomb-corrugation hybrid cores. *Compos Struct* 171: 335-344.
- [13] Song ZG, Li FM (2016) Flutter and buckling characteristics and active control of sandwich panels with triangular lattice core in supersonic airflow. *Compos Part B-Eng* 108: 334-344.
- [14] Eloy F, Gomes G, Ancelotti JR A, Cunha JR, Bombard A, Junqueira D (2018) Experimental dynamic analysis of composite sandwich beams with magnetorheological honeycomb core. *Eng Struct* 176: 231-242.
- [15] Boucher MA, Smith CW, Scarpa F, Rajasekaran R, Evans KE (2013) Effective topologies for vibration damping inserts in honeycomb structures. *Compos Struct* 106: 1-14.
- [16] Sakar G, Bolat FC (2015) The free vibration analysis of honeycomb sandwich beam using 3D and continuum model. *Int J Mech Mechatronics Eng* 9(6): 1077-1081.
- [17] Mukhopadhyay T, Adhikari SS (2016) Free-vibration analysis of sandwich panels with randomly irregular honeycomb core. *J Eng Mech* 06016008: 1-5.
- افزایش ضخامت رویه بالایی (h_1)، برای هر دو حالت تیر ساندویچی به طور مؤثر فلاتر را به تاخیر می‌اندازد. هر چند مقدار به تاخیر انداختن فلاتر برای تیر ساندویچی سرمتی نسبت به آلومینیومی بسیار بیشتر است.
 - با افزایش ضخامت رویه بالایی (h_1)، فرکانس رخداد فلاتر برای تیر ساندویچی سرمتی نسبت به تیر ساندویچی آلومینیومی کمتر می‌شود که این امر در بحث کنترل فعال این پدیده می‌تواند کاربردی باشد.
 - دامنه ارتعاشات تیر ساندویچی سرمتی نسبت به آلومینیومی در معرض بارگذاری متحرک، کمتر بوده و دارای پیک کمتری است.
 - با افزایش سرعت بارگذاری نیروی متحرک، بیشینه پیک ارتعاشات کمتر شده، اما دامنه ارتعاشات تیر ساندویچی پس از نبود بار متحرک، افزایش یافته است. در این حالت نیز، دامنه ارتعاشات تیر ساندویچی سرمتی همچنان کمتر از تیر ساندویچی آلومینیومی است.
 - از تیر ساندویچی ارائه شده می‌توان برای بررسی فلاتر غیرخطی مافوق صوت با کمک تئوری پیستون مراتب بالاتر و نیز برای محاسبه ارتعاشات تیرهای سازه‌ای ساندویچی با شکل‌های متفاوتی از لانه زنبوری‌ها و نیز رویه‌هایی از گونه‌های متفاوت سرمت‌ها استفاده کرد.

۵- مراجع

- [1] Jordan PF (1956) The physical nature of panel flutter. *Aero Digest* 3: 34-38.
- [2] Song ZG, Li FM (2008), Active aeroelastic flutter analysis and vibration control of supersonic beams using the piezoelectric actuator/sensor pairs. *Smart Mater Struc* 20(55013).
- [3] Samadpour M, Asadi H, Wang Q (2016) Nonlinear aero-thermal flutter postponement of supersonic laminated composite beams with shape memory alloys. *Eur J Mech A-Solid* 57(0): 18-28.
- [4] Tsushima N, Su W (2017) Flutter suppression for highly flexible wings using passive and active piezoelectric effects. *Aerosp Sci Technol* 65(0): 78-89.

- [22] Hasheminejad SM, Nezami M, Aryaee Panah ME (2012) Supersonic flutter suppression of electrorheological fluid-based adaptive panels resting on elastic foundations using sliding mode control. *Smart Mater Struct* 21(045005).
- [23] Dorsey JT (2002) Metallic thermal protection system technology development: Concepts, requirements and assessment overview. 40th Aerospace Science Meeting, AIAA 2002-0502.
- [24] Esen I (2011) Dynamic response of a beam due to an accelerating moving mass using moving finite element approximation. *Math Comput Appl* 16(1): 171-182.
- [18] McAdam GD (1967) The mechanical properties of cermets with a metallic matrix. *Powder Metall* 10(20).
- [19] Ruzzene M, Scarpa F (2003) Control of wave propagation in sandwich beams with auxetic core. *J Intel Mater Sys Struct* 14: 443-453.
- [20] Mead DJ, Markus SS (1969) The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions. *J Sound Vib* 10(2): 163-175.
- [21] Rao SS (2007) *Vibration of continuous systems*. 5th edn. John Wiley & Sons, Inc, New Jersey.

۶- پیوست

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{11}^{AA} + m_{11}^{BB} + m_{11}^{CC} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & 0 & 0 & m_{21} & m_{22}^{AA} + m_{22}^{BB} + m_{22}^{CC} & m_{23} \\ 0 & 0 & 0 & m_{31} & m_{32} & m_{33}^{AA} + m_{33}^{BB} + m_{33}^{CC} \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \\ k_{11}^{AA} + k_{11}^{BB} + k_{11}^{CC} & k_{12} & k_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22}^{AA} + k_{22}^{BB} + k_{22}^{CC} & k_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33}^{AA} + k_{33}^{BB} + k_{33}^{CC} + F_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_2 \end{bmatrix},$$

$$k_{11}^{BB} = -\frac{G_2 A_2}{h_2^2} \int_0^L \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^T dx,$$

$$k_{13} = -\frac{G_2 A_2 d}{h_2^2} \int_0^L \frac{d\mathbf{W}}{dx} \mathbf{U}_1^T dx,$$

$$m_{11}^{AA} = -\rho_1 A_1 \int_0^L \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^T dx,$$

$$m_{12} = -\frac{1}{4} \rho_2 A_2 \int_0^L \mathbf{U}_3 \mathbf{U}_1^T dx,$$

$$m_{11}^{CC} = -\rho_a A_a \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^T dx,$$

$$k_{21} = \frac{G_2 A_2}{h_2^2} \int_0^L \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_3^T dx,$$

$$k_{23} = \frac{G_2 A_2 d}{h_2^2} \int_0^L \frac{d\mathbf{W}}{dx} \mathbf{U}_3^T dx,$$

$$k_{11}^{AA} = -E_1 A_1 \int_0^L \frac{d\mathbf{U}_1}{dx} \frac{d\mathbf{U}_1^T}{dx} dx,$$

$$k_{12} = \frac{G_2 A_2}{h_2^2} \int_0^L \mathbf{U}_3 \mathbf{U}_1^T dx,$$

$$k_{11}^{CC} = -c_{11} A_a \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\mathbf{U}_1}{dx} \frac{d\mathbf{U}_1^T}{dx} dx,$$

$$m_{11}^{BB} = -\frac{1}{4} \rho_2 A_2 \int_0^L \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^T dx,$$

$$m_{13} = -\frac{1}{8} \rho_2 A_2 (h_1 - h_3) \int_0^L \frac{d\mathbf{W}}{dx} \mathbf{U}_1^T dx,$$

$$k_{22}^{AA} = -E_3 A_3 \int_0^L \frac{d\mathbf{U}_3}{dx} \frac{d\mathbf{U}_3^T}{dx} dx,$$

$$k_{22}^{BB} = -\frac{G_2 A_2}{h_2^2} \int_0^L \mathbf{U}_3 \mathbf{U}_3^T dx,$$

$$\mathbf{m}_{21} = -\frac{1}{4}\rho_2 A_2 \int_0^L \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_3^T dx,$$

$$\mathbf{m}_{23} = -\frac{1}{8}\rho_2 A_2 (h_1 - h_3) \int_0^L \frac{d\mathbf{W}}{dx} \mathbf{U}_3^T dx,$$

$$\mathbf{m}_{22}^{CC} = -\rho_s A_s \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{U}_3 \mathbf{U}_3^T dx,$$

$$\mathbf{k}_{31} = \frac{G_2 A_2 d}{h_2^2} \int_0^L \mathbf{U}_1 \frac{d\mathbf{W}^T}{dx} dx,$$

$$\mathbf{k}_{33}^{BB} = \frac{G_2 A_2 d^2}{h_2^2} \int_0^L \frac{d^2 \mathbf{W}}{dx^2} \frac{d^2 \mathbf{W}^T}{dx^2} dx,$$

$$\mathbf{m}_{31} = \frac{1}{8}\rho_2 A_2 (h_1 - h_3) \int_0^L \frac{d\mathbf{U}_1}{dx} \mathbf{W}^T dx,$$

$$\mathbf{m}_{33}^{AA} = \frac{1}{16}\rho_2 A_2 (h_1 - h_3)^2 \int_0^L \frac{d^2 \mathbf{W}}{dx^2} \mathbf{W}^T dx,$$

$$\mathbf{m}_{33}^{CC} = \rho_p \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{W} \mathbf{W}^T dx,$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{2q}{\beta} \frac{1}{V} \left(\frac{M^2 - 2}{M^2 - 1} \right) b \int_0^L \mathbf{W} \mathbf{W}^T dx,$$

$$\mathbf{k}_{22}^{CC} = -c_{11} A_s \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\mathbf{U}_3}{dx} \frac{d\mathbf{U}_3^T}{dx} dx,$$

$$\mathbf{m}_{22}^{AA} = -\frac{1}{4}\rho_2 A_2 \int_0^L \mathbf{U}_3 \mathbf{U}_3^T dx,$$

$$\mathbf{m}_{22}^{BB} = -\rho_3 A_3 \int_0^L \mathbf{U}_3 \mathbf{U}_3^T dx,$$

$$\mathbf{k}_{33}^{AA} = D_t \int_0^L \frac{d^2 \mathbf{W}}{dx^2} \frac{d^2 \mathbf{W}^T}{dx^2} dx,$$

$$\mathbf{k}_{32} = -\frac{G_2 A_2 d}{h_2^2} \int_0^L \mathbf{U}_3 \frac{d\mathbf{W}^T}{dx} dx,$$

$$\mathbf{k}_{33}^{CC} = D_p \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 \mathbf{W}}{dx^2} \frac{d^2 \mathbf{W}^T}{dx^2} dx,$$

$$\mathbf{m}_{32} = \frac{1}{8}\rho_2 A_2 (h_1 - h_3) \int_0^L \frac{d\mathbf{U}_3}{dx} \mathbf{W}^T dx,$$

$$\mathbf{m}_{33}^{BB} = \rho_T \int_0^L \mathbf{W} \mathbf{W}^T dx,$$

$$\mathbf{F}_1 = \frac{2q}{\beta} b \int_0^L \frac{d\mathbf{W}}{dx} \mathbf{W}^T dx,$$

در جایی که:

$$h_T = h_1 + h_2 + h_3,$$

$$D_t = \frac{E_1 h_1^3}{12} + \frac{E_3 h_3^3}{12},$$

$$\rho_T = \rho_1 A_1 + \rho_2 A_2 + \rho_3 A_3.$$