



## اصلاح روش تبدیل دیفرانسیلی دو بعدی برای حل مسائل دیریکله همگن؛ مسأله نمونه: انتقال حرارت در میله‌ها

ساره موحدزاده<sup>۱</sup> و احمد آفتابی ثانی<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری، مهندسی عمران، دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد

<sup>۲</sup> استادیار، مهندسی عمران، دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد

مقاله مستقل؛ تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۶/۱۲؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۰۹/۱۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۱/۰۱

### چکیده

در این مقاله، راهکاری برای بهبود روش تبدیل دیفرانسیلی دو بعدی در حل مسائل مقدار مرزی - اولیه ی شامل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی و شرایط مرزی دیریکله همگن، با الهام از روش تغییراتی ریتز پیشنهاد شده است. برای این منظور، با ضرب کردن رابطه اساسی روش تبدیل دیفرانسیلی در توابعی معلوم که سبب ارضاء شرایط مرزی مسأله می شوند، مشکل عدم ارضاء دقیق شرایط مرزی بطور کامل مرتفع می‌گردد که روش تبدیل دیفرانسیلی دو بعدی مرسوم از آن رنج می برد. البته بدیهی است با این کار، روابط و قوانین حاکم بر روش مرسوم و از جمله، رابطه بازگشتی متناظر با معادله دیفرانسیل مسأله تغییر می کنند که این تغییرات، به شکل مبسوط در مقاله تشریح شده‌اند. در ادامه، برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی، دو مسأله انتقال حرارت در میله ها، یکی با ضریب پخش گرمایی ثابت و دیگری با ضریب پخش متغیر و وابسته به مختصه مکانی میله، هم بطور دقیق و هم با استفاده از دو راهکار تبدیل دیفرانسیلی مرسوم و بهبود یافته حل شده و نتایج حاصل، در قالب جداول و نمودارهایی، با یکدیگر مقایسه شده‌اند. خوشبختانه، مجموعه نتایج عددی به دست آمده، نشان دهنده مؤثر بودن روش پیشنهادی و برطرف شدن مشکل عدم ارضاء دقیق شرط مرزی دیریکله همگن در مسائل مقدار مرزی است.

**کلمات کلیدی:** روش تبدیل دیفرانسیلی دو بعدی ؛ شرط مرزی دیریکله همگن ؛ مسأله انتقال حرارت ؛ ضریب پخش گرمایی وابسته به مختصه مکانی.

## Enhanced Two-Dimensional Differential Transform Method for Solving Homogenous Dirichlet Problems; Application: Heat Transfer in Bars

S. Movahedzadeh<sup>1</sup>, A. Aftabi Sani<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup> Ph.D. Candidate, Faculty of Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Iran.

<sup>2</sup> Assistant Professor, Faculty of Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Iran.

### Abstract

In this article, a new method has been proposed to enhance two-dimensional differential transform method (2D-DTM) for solving initial boundary value problems (IBVPs) including partial differential equations (PDEs) with homogeneous Dirichlet boundary conditions. The method is inspired by the Ritz method which is utilized in variational calculus. To this end, multiplying the basic relation of DTM by specific functions which satisfy the boundary conditions, would resolve the weakness of the classical version of 2D-DTM in precisely satisfying the boundary conditions. Obviously, implementing this will change the governing relations of the classical DTM, such as recursive formula related to differential equation of the problem. It should be mentioned that, these changes are comprehensively described in the article. Moreover, to show the robustness of the proposed method, two heat transfer problems in the bars are thoroughly solved by classical and enhanced DTM and the results are compared with the exact solutions. The thermal diffusivity of the bar is considered constant and spatially varied in mentioned problems. The numerical results show the accuracy of the proposed method, especially in satisfying the homogeneous Dirichlet boundary conditions of the problem.

**Keywords:** Two-Dimensional Differential Transform Method; Homogeneous Dirichlet Boundary Conditions; Heat Transfer Problem; Spatially Varied Thermal Diffusivity.

\* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۵۱۳۸۸۰۵۰۶۸؛ فکس: ۰۵۱۳۸۸۰۷۱۸۴

آدرس پست الکترونیک: [aftabi@um.ac.ir](mailto:aftabi@um.ac.ir)

## ۱- مقدمه

از دیرباز تاکنون، برای حل انواع معادلات ديفرانسیل حاکم بر پدیده‌های طبیعی، از روش‌های تحلیلی و عددی گوناگونی استفاده شده است. در این میان، یکی از روش‌هایی که در سال‌های اخیر، برای حل معادلات ديفرانسیل معمولی و جزئی حاکم بر مسائل مهندسی، فراوان مورد استفاده قرار گرفته است، روش تبدیل ديفرانسیلی (DTM) است که نخستین بار توسط ژو (۱۹۸۶)، برای حل مسائل مقدار اولیه خطی و غیرخطی مربوط به مدارهای الکتریکی پیشنهاد شد [۱]. در ادامه، روش تبدیل ديفرانسیلی که پایه و اساس آن، یافتن بسط تیلور تابع مجهول معادله ديفرانسیل، به جای دستیابی به مقدار دقیق یا عددی و گسسته آن است، به مسائل دوبعدی نیز گسترش یافت و 2D-DTM نام گرفت؛ همچنین، در روند گسترش قلمروهای نظری و عملی روش تبدیل ديفرانسیلی، شماری از کارهای تحقیقاتی به ارائه پیشنهاداتی برای اصلاح و بهبود روش مزبور پرداختند که مقاله پیش رو نیز از این دسته است.

در ادامه، شماری از کارهای پژوهشی متأخر پیرامون انتقال حرارت در میله‌ها و سایر جامدات را به شکلی گذرا مرور کرده و پس از آن، به پیشینه استفاده از روش تبدیل ديفرانسیلی در حل انواع مسائل فیزیکی و به‌ویژه مسأله انتقال حرارت خواهیم پرداخت.

غضنفری هلق و طلعتی (۱۳۹۴) حل تحلیلی و دقیق معادلات انتقال حرارت رسانشی را در حالت پایدار برای یک صفحه مثلثی قائم الزاویه با شرایط مرزی مختلف بررسی نموده‌اند [۲]. این محققان در روند حل معادله ديفرانسیل مزبور، از تبدیلات مختلط، به‌ویژه تبدیل شوارتز - کریستوفل، استفاده نموده و برای صحت‌سنجی پاسخ حاصل، از نتایج روش اجزاء محدود در نرم‌افزار COMSOL Multiphysics 5.0 بهره جستند.

زکوا و تریاک (۲۰۱۵) علاوه بر مرور مطالعات انجام شده در زمینه مسأله انتقال حرارت و شیوه‌های مختلف حل آن، به شرح مدل ریاضی مسأله انتقال حرارت یک‌بعدی با مشتقات مرتبه صحیح و کسری پرداخته‌اند [۳]؛ همچنین، روش‌های عددی و تحلیلی موجود برای حل مسائل انتقال حرارت، توسط این محققان مرور شده و روش تفاضل محدود،

با به‌کارگیری مفهوم گرونوالد - لتنیف برای مشتق‌گیری کسری زمانی به کار رفته است.

در ادامه، جواشیمیاک و همکاران (۲۰۱۹) نتایج آزمایشگاهی مربوط به واکنش گرمایی - شیمیایی یک سیلندر داخل کوره را ارائه کرده‌اند [۴]. آن‌ها همچنین از یک مدل محاسباتی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های چیشف برای تخمین توزیع دما استفاده کردند. توزیع دمای به دست آمده با اندازه‌گیری‌های کنترلی صحت‌سنجی شده و حداکثر خطای نتایج به دست آمده بیش از ۰/۵ درصد برآورد نشد. لازم به ذکر است، داده‌های موجود در تحقیق مذکور شامل اطلاعاتی کاربردی می‌باشند که بررسی توزیع دما در المان‌های استوانه‌ای را ممکن می‌سازند.

در همان سال، عبدی‌کریم و همکاران (۲۰۱۹) به حل مسأله انتقال حرارت در مواد متخلخل برای زمان‌های طولانی پرداخته‌اند [۵]. از آن‌جا که در حالت کلی، آزمایش‌های مرتبط با این موضوع، دارای هزینه‌های گزاف بوده و از طرفی برنامه‌های کامپیوتری شبیه‌سازی موجود در این زمینه نیز هزینه محاسباتی بالا و دقتی نه‌چندان مناسب دارند، این محققان، یک روش عددی خلاقانه به نام روش STS ارائه کرده‌اند. این روش، مدل‌سازی با دقت مناسب و گام‌های زمانی بزرگ را ممکن می‌سازد که این امر، هزینه محاسبات را کاهش می‌دهد. کارایی این مدل برای ابعاد بزرگ‌تر و پارامترهای غیرخطی نیز آزموده شده است؛ همچنین داده‌های آزمایشگاهی مربوط به یک مطالعه موردی، به مدل پیشنهادی اعمال شده که دقت و کارایی مدل را اثبات می‌کند.

خان‌محمدی و مظاهری (۲۰۱۹)، مدل‌سازی عددی انتقال حرارت در یک لوله، با دو نوع نوار تابیده داخل آن را بررسی کرده و اثر عوامل مختلف بر افت فشار، ضریب انتقال حرارت و آنتروپی را ارزیابی کرده‌اند [۶]. برای این منظور، یک الگوریتم ژنتیک بر اساس بهینه‌سازی چندهدفه، به کار رفته و مقادیر بهینه نسبت تابیدگی، عدد رینولدز و شار حرارتی برای دستیابی به بهترین بازدهی نوار داخل لوله ارائه شدند.

یو و جیانگ (۲۰۱۹) یک مدل جدید انتقال حرارت با مشتق زمانی مرتبه کسری برای الیاف دو لایه‌ای در یک آزمایش فزون‌گرمایی ارائه نموده‌اند [۷]. آن‌ها نخست برای

نوری فر و همکاران (۲۰۱۷)، یک روش اصلاحی را بر اساس روش شناخته شده تبدیل دیفرانسیل چندگامی جهت کاهش عملیات ریاضی و از طرفی، افزایش دقت آن پیشنهاد کردند [۱۰]. آن‌ها معادلات دافینگ، واندرپول و رایلی را به عنوان چند مثال عددی، به وسیله روش پیشنهادی حل کرده و روش تفاضل محدود (FDM) را برای ارزیابی دقت پاسخ‌ها به کار گرفتند. نتایج این مطالعات نشان می‌دهند که روش آن‌ها تطابق بسیار خوبی با روش FDM داشته و نسبت به روش شناخته شده MsDTM، دارای کارایی بهتری است. این محققان در سال ۲۰۱۸ نیز تحلیل ارتعاش آزاد یک تیر اولر - برنولی با مقطع غیریکنواخت را به کمک DTM انجام داده و از طریق مقایسه پاسخ به دست آمده از این شیوه با روش اجزاء محدود (FEM)، بر دقت روش پیشنهادی خود تأکید کرده‌اند [۱۱].

رضایی پزند و همکاران (۲۰۱۷)، از روش DTM برای حل مسأله ارتعاش آزاد قاب‌ها استفاده نموده‌اند [۱۲]. ارزیابی روش به کار رفته نیز با مقایسه نتایج با داده‌های موجود در تحقیقات قبلی و جواب حاصل از روش اجزاء محدود، صورت گرفت. این محققان همچنین در سال ۲۰۱۸ مطالعاتی در زمینه کاربرد DTM در تحلیل ارتعاش آزاد یک قاب با چهار عضو مورب دلخواه انجام داده‌اند [۱۳]. در تحقیق مذکور، برای بررسی درستی جواب حاصل از روش پیشنهادی توسط آن‌ها، مجدداً روش FEM به کار گرفته شد.

در ادامه، رضایی پزند و همکاران (۲۰۱۸) برای حل مسأله اندرکنش سازه - سیال از روش DTM بهره جسته‌اند [۱۴]. به این منظور، آن‌ها رفتار دینامیکی یک تیر اولر - برنولی در مجاورت یک سیال تراکم‌ناپذیر و غیرلزج را توسط یک مسأله مقدارمرزی مدل‌سازی و به کمک DTM حل کرده‌اند. صحت‌سنجی نتایج حاصل نیز توسط شیوه اجزاء محدود صورت گرفته است.

لازم به ذکر است، در سال‌های اخیر، مطالعاتی پیرامون کاربرد روش DTM در مسائل انتقال حرارت انجام شده‌اند. به عنوان نمونه، برت (۲۰۰۲) این روش را برای تحلیل انتقال حرارت حالت پایدار در یک پره مثلثی شکل با مشخصات ثابت به کار برد [۱۵]. کوو (۲۰۰۵) نیز روش مذکور را برای یافتن توزیع دما در لایه مرزی فولکتر - اسکان استفاده کرد [۱۶]. در ادامه، چو و شن (۲۰۰۸) یک روش ترکیبی از DTM و

تحلیل مدل پیشنهادی، از روش تغییر متغیرها و تفاضل محدود ضمنی استفاده کرده و سپس بر اساس داده‌های آزمایشگاهی، یک روش عددی کارآمد برای تخمین مرتبه کسری مشتق زمانی به دست داده‌اند؛ همچنین این محققان کارایی مدل پیشنهادی خود را به وسیله داده‌های آزمایشگاهی اثبات نموده‌اند.

پس از مرور مختصر و گذرای پارامترهای از تحقیقات اخیر پیرامون مسأله انتقال حرارت در جامدات عمدتاً دارای یک بعد مکانی، به سراغ مرور پیشینه پژوهشی در زمینه دومین رکن تحقیق حاضر، یعنی روش تبدیل دیفرانسیلی رفته و شماری از پژوهش‌های مهم و جدید مرتبط با DTM و مخصوصاً کاربرد آن در حل مسأله انتقال حرارت را مرور می‌کنیم.

در مقاله‌ای ارزشمند، برویلیر (۲۰۱۲) به بررسی تاریخچه و بنیان روش DTM پرداخته و تفاوت‌های آن را با روش کلاسیک سری تیلور بیان کرده است [۸]. او ضمن مرور مطالعات انجام شده در این زمینه، شکل‌های مختلف و کاربرد این دو روش را معرفی کرده است. او همچنین اشاراتی به اقدامات انجام شده جهت اصلاح این روش، مانند روش پاده و روش گام به گام نموده است. در نهایت، تأکید او بر این است که روش DTM در مواردی همان روش کلاسیک سری تیلور بوده و گاهاً برای ساده‌سازی فرآیند حل مسئله، به این روش اعمال شده است.

پاتل و تودیا (۲۰۱۶) روش تبدیل دیفرانسیلی را برای حل معادلات خطی همرفت - پخش و معادلات غیرخطی همرفت - اندرکنش مورد استفاده قرار داده‌اند [۹]. این معادلات برای حل مسائل مربوط به انتقال ذرات، انرژی یا سایر کمیت‌ها در یک سیستم فیزیکی در اثر دو فرآیند همرفت و پخش به کار می‌روند. این محققان به حل تعدادی مثال، برای نشان دادن قابلیت و کارایی روش DTM پرداخته‌اند تا همگرایی سریع و حجم اندک محاسبات این روش نسبت به بسیاری از روش‌های حل معادلات مشخص شود. در مطالعات انجام شده توسط آن‌ها، پس از حل هر مثال و به دست آمدن جواب معادلات به صورت سری، تابع دو متغیره معادل با سری مربوطه به عنوان جواب نسبتاً دقیق ارائه شده است.

است. این روش، یک چندجمله‌ای مشتق‌پذیر مبتنی بر بسط تیلور یا مک‌لورن را به عنوان تقریبی برای پاسخ معادله ديفرانسیل در نظر گرفته و معادله ديفرانسیل را با استفاده از قواعدی مشخص و اثبات‌پذیر، به یک رابطه بازگشتی تبدیل می‌کند. این رابطه بازگشتی، در واقع، رابطه بین ضرایب جملات پیاپی چندجمله‌ای پاسخ یا همان تبدیل ديفرانسیلی پاسخ است که می‌تواند در فرآیندی تکراری، تمامی جملات را به یک یا چندجمله مشخص (تعداد این جملات مشخص را مرتبه معادله ديفرانسیل تعیین می‌نماید) وابسته سازد. در پایان، آن چند جمله مشخص و مجهول، با اعمال شرایط مرزی و در صورت وجود، شرایط اولیه به دست می‌آیند و مسأله عملاً حل می‌شود. در بخش بعد، نخست با روابط اساسی روش تبدیل ديفرانسیلی یا همان DTM یک‌بعدی و سپس DTM دو‌بعدی آشنا شده و برخی از قوانین اثبات‌پذیر مرتبط با DTM دو‌بعدی که در اینجا به خاطر رعایت اختصار، از اثبات آن‌ها پرهیخته‌ایم را ارائه می‌کنیم.

#### ۲-۱- تبدیل ديفرانسیل یک بعدی

شابه سایر تبدیلات خطی در عالم ریاضیات، تبدیل ديفرانسیلی، هم متغیر مستقل و هم متغیر وابسته مرتبط با یک تابع یک متغیره مانند  $u(x)$  را به متغیرهای دیگری تبدیل می‌کند:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k u(x)}{dx^k} \right|_{x=x_0} (x-x_0)^k \quad (1)$$

بر اساس رابطه (۱)، متغیر مستقل و حقیقی  $x$  به متغیر مستقل و صحیح و مثبت  $k$  و متغیر وابسته و حقیقی  $u$ ، به متغیر وابسته و حقیقی  $U$  تبدیل می‌شود:

$$DT[u(x)] = U(k) \quad (2)$$

جالب است بدانیم که در حالت کلی،  $U(k)$  ضریب پشت جمله  $(x-x_0)^k$  در سری تیلور تابع  $u(x)$  است و به کمک رابطه (۳) به دست می‌آید:

$$U(k) = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k u(x)}{dx^k} \right|_{x=x_0} \quad (3)$$

#### ۲-۲- تبدیل ديفرانسیل دو بعدی

در صورتی که تابع حقیقی  $u$  دو متغیره بوده و دو متغیر مستقل آن، به ترتیب با  $x$  و  $t$  نشان داده شوند، تبدیل

تفاضل محدود را برای حل مسائل غیردائمی انتقال حرارت با عبارات پیچیده و غیرخطی به کار بردند [۱۷]؛ همچنین مطالعات مشابهی توسط چو و لو (۲۰۰۸) در همین زمینه صورت گرفته است [۱۸]. لو و شن (۲۰۰۹) یک روش عددی جایگزین برای حل مسائل انتقال حرارت با استفاده از ترکیب DTM و حجم کنترل پیشنهاد نمودند [۱۹]؛ همچنین، جنگ و همکاران (۲۰۱۰)، مسائل مقدار مرزی دو بعدی انتقال حرارت را با شرایط اولیه و مرزی گسسته مورد مطالعه قرار دادند [۲۰]. رشیدی و همکاران (۲۰۱۰) روش DTM را برای حل مسائل انتقال حرارت در یک صفحه مایل قرار گرفته در محیط متخلخل اعمال نمودند [۲۱]. در همین راستا، رشیدی و موهیمانیان‌پور (۲۰۱۰) DTM را برای تحلیل جریان دائمی روی یک دیسک چرخنده همراه با انتقال حرارت مورد استفاده قرار دادند [۲۲]. البته نکته جالب ماجرا اینجاست که تقریباً تمامی تحقیقات فوق که به استفاده از روش تبدیل ديفرانسیلی برای حل مسائل انتقال حرارت پرداخته‌اند، از همان روش DTM کلاسیک بهره جسته‌اند و عملاً روش مزبور را بدون اصلاح یا تغییری به کار بسته‌اند. این در حالی است که در مقاله پیش رو، قصد داریم با اعمال تغییراتی، DTM را برای حل مسأله انتقال حرارت کارآمدتر و توانمندتر سازیم. در این مقاله، نخست به معرفی روش تبدیل ديفرانسیلی کلاسیک در دو حالت یک‌بعدی و دو‌بعدی پرداخته می‌شود. سپس، شیوه استخراج رابطه بازگشتی تبدیل ديفرانسیلی کلاسیک برای معادله نمونه انتقال حرارت و شیوه اعمال شرایط مرزی و اولیه بر آن تشریح شده و با استفاده از معادلات حاصل، پاسخ‌های مسأله به دست می‌آیند. آن‌گاه، با توجه به دقت نه‌چندان مناسب نتایج به دست آمده از این روش، به اصلاح روش مربوطه پرداخته و شیوه پیشنهادی معرفی می‌شود که آن را EDTM نامیده‌ایم. همان‌طور که در بخش نتایج عددی مشهود خواهد بود، روش پیشنهادی، مشکل عدم ارضاء دقیق یکی از شروط مرزی را به طور کامل مرتفع خواهد ساخت. این مقاله، با ارزیابی نتایج عددی و ارائه چند نتیجه‌گیری کلی پایان می‌پذیرد.

#### ۲- روش تبدیل ديفرانسیلی کلاسیک (CDTM)

روش تبدیل ديفرانسیلی، یک روش نیمه‌عددی - نیمه-تحلیلی برای حل انواع معادلات ديفرانسیل معمولی و جزئی

قوانین DTM (مشابه آن چه در جدول ۱ به بعضی از آن‌ها اشاره شد) برای یافتن تبدیل ديفرانسیلی یکایک جملات معادله ديفرانسیل است، رابطه‌ای به نام رابطه بازگشتی به دست می‌آید. در ادامه، برای آشنایی بیشتر با رابطه بازگشتی، نخست معادله ديفرانسیل جزئی مربوط به اولین مسأله نمونه مورد بحث در این مقاله و سپس رابطه بازگشتی مرتبط با آن را درج می‌کنیم که با استفاده از جدول ۱ استخراج شده است.

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (۶)$$

در این معادله ديفرانسیل با مشتقات جزئی،  $u$  تابع دو متغیره حرارت،  $x$  متغیر مستقل مکانی،  $t$  متغیر مستقل زمانی و  $\alpha$  ضریب پخش گرمایی است. با اعمال تبدیل ديفرانسیلی بر طرفین رابطه (۶) و به کار بستن قاعده مندرج در سطرهای چهارم و پنجم جدول ۱، رابطه بازگشتی حاکم بر تبدیل ديفرانسیلی  $u(x, t)$  یا همان  $U(k, h)$  به صورت رابطه (۷) در می‌آید:

$$(k+2)(k+1)U(k+2, h) = \frac{1}{\alpha}(h+1)U(k, h+1) \quad (۷)$$

باید افزود، از این پس مجهول مسأله، به جای تابع  $u(x, t)$  تابع  $U(k, h)$  است که رابطه (۷)، یکی از مهم‌ترین روابط حاکم بر آن است. البته ناگفته پیداست که رابطه (۷) نمی‌تواند به تنهایی تمامی  $U(k, h)$ های لازم را به دست دهد و ناگزیریم، از شرایط مرزی و اولیه مسأله نیز برای یافتن  $U(k, h)$ ها استفاده کنیم. شیوه اعمال شرایط مرزی و اولیه در روش تبدیل ديفرانسیلی مرسوم (CDTM)، در ادامه، تشریح می‌شود.

#### ۲-۴- اعمال شرایط مرزی و اولیه

در روش تبدیل ديفرانسیلی، همان‌طور که تبدیل ديفرانسیلی بر طرفین معادله ديفرانسیل اعمال می‌شود، می‌بایست بر طرفین شرایط مرزی و اولیه مسأله نیز اعمال گردد. با این کار، این معادله نیز بر حسب  $U(k, h)$  بر پا شده و عملاً امکان دستیابی به تبدیل ديفرانسیلی تابع مجهول یا همان  $U(k, h)$ ها فراهم می‌شود. در ادامه، مشابه بخش قبل، برای تشریح بیشتر و بهتر شیوه اعمال شرایط مرزی و اولیه، این کار را برای نخستین مسأله مورد بحث در مقاله که دارای دو

ديفرانسیلی دو بعدی آن نیز دو متغیر مستقل خواهد داشت که به ترتیب، با  $h$  و  $k$  نمایان می‌شوند:

$$U(k, h) = \frac{1}{k! h!} \frac{\partial^{k+h} u(x, t)}{\partial x^k \partial t^h} \Big|_{x=x_0, t=t_0} \quad (۴)$$

در نتیجه سری تیلور  $u(x, t)$  را می‌توان به صورت رابطه (۵) بازنویسی کرد:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k, h) (x - x_0)^k (t - t_0)^h \quad (۵)$$

از آن‌جا که در عمل، امکان محاسبه بیشمار جمله سری تیلور وجود ندارد، رابطه (۵) با تعداد محدودی جمله مورد استفاده قرار می‌گیرد.

برخی از خواص اثبات‌پذیر 2D-DTM در جدول ۱ قابل مشاهده است. از این پس، روش ديفرانسیلی مرسوم یا کلاسیک را CDTM می‌نامیم.

#### جدول ۱- برخی از عملیات ریاضی روش تبدیل ديفرانسیلی دوبعدی کلاسیک (CDTM) [۲۳]

تابع اصلی	
تابع تبدیل	
$u(x, t) = w(x, t) \mp v(x, t)$	$U(k, h) = W(k, h) \mp V(k, h)$
$u(x, t) = \alpha w(x, t)$	$U(k, h) = \alpha W(k, h)$
$u(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}$	$U(k, h) = (k+1)W(k+1, h)$
$u(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial t}$	$U(k, h) = (h+1)W(k, h+1)$
$u(x, t) = \frac{\partial^{r+s} w(x, t)}{\partial x^r \partial t^s}$	$U(k, h) = [(k+1)(k+2) \dots (k+r)(h+1)(h+2) \dots (h+s)] W(k+r, h+s)$
$u(x, t) = w(x, t)v(x, t)$	$U(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h W(r, h-s)V(k-r, s)$

#### ۲-۳- رابطه بازگشتی در CDTM

همان‌طور که پیش از این نیز بیان شد، با اعمال تبدیل ديفرانسیلی بر معادله ديفرانسیل که به معنای استفاده از

در ادامه به سراغ تنها شرط اولیه مسأله می‌رویم. اگر تابع معلوم دما در لحظه  $t = 0$  یا همان شرط اولیه مسأله را با  $g(x)$  نمایش دهیم، داریم:

$$u(x, 0) = g(x) \quad (۱۸)$$

در حالت کلی، دو راهکار برای اعمال معادله فوق وجود دارد که یکی استفاده از بسط تیلور  $g(x)$  است و دیگری برابر ساختن انتگرال‌های وزن دار طرفین معادله فوق است که در این جا، از راهکار دوم استفاده می‌شود [۱۴]. اساس این روش، رابطه (۱۹) است:

$$\int_0^L x^n u(x, 0) dx = \int_0^L x^n g(x) dx \quad (۱۹)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

با قرار دادن  $t = 0$  در رابطه (۵)، عملاً  $u(x, 0)$  به دست می‌آید. لذا:

$$\int_0^L x^n (U(1,0)x + U(3,0)x^3 + U(5,0)x^5 + \dots) dx = \int_0^L x^n g(x) dx \quad (۲۰)$$

انتگرال سمت چپ رابطه فوق را می‌توان به فرم بسته محاسبه کرد:

$$U(1,0) \frac{L^{n+2}}{n+2} + U(3,0) \frac{L^{n+4}}{n+4} + U(5,0) \frac{L^{n+6}}{n+6} + \dots = \int_0^L x^n g(x) dx \quad (۲۱)$$

بدین ترتیب، شروط اولیه و مرزی نیز توانستند روابط دیگر حاکم بر  $U(k, h)$  را تأمین کنند. در بخش بعد، با شیوه حل مجموعه معادلات و دست‌یابی به پاسخ آشنا می‌شویم.

#### ۲-۵- تشکیل ماتریس و حل مسأله

پس از برپایی تمام معادلات حاکم بر  $U(k, h)$  با اعمال تبدیل دیفرانسیلی دوبعدی بر معادله دیفرانسیل حاکم و شرایط مرزی و اولیه مرتبط با آن، کافی است تمامی آن‌ها را در قالب یک ماتریس گنجانده و با حل دستگاه خطی حاصل،  $U(k, h)$ ‌ها را به دست آوریم. در این شیوه، تمامی  $U(k, h)$ ‌ها به صورت یک‌جا و در گام پایانی حل به دست می‌آیند. در واقع، هر یک از شرایط مرزی یا اولیه یا رابطه بازگشتی مستخرج از معادله دیفرانسیل، به صورت یک معادله خطی،

شرط مرزی دیریگله همگن، مطابق دو رابطه زیر است، انجام می‌دهیم:

$$u(0, t) = 0 \quad (۸)$$

$$u(L, t) = 0 \quad (۹)$$

در رابطه (۹)،  $L$  طول میله مورد نظر است. با قرار دادن دو رابطه فوق در رابطه (۵) داریم:

$$u(0, t) = 0 \rightarrow U(0,0) + U(0,1)t + U(0,2)t^2 + \dots = 0 \quad (۱۰)$$

عبارت فوق باید در همه زمان‌ها و به ازای همه  $t$ ‌ها صفر باشد؛ بنابراین باید تک‌تک جملاتش صفر گردد:

$$U(0,0) = U(0,1) = U(0,2) = \dots = U(0, h) = 0 \quad (۱۱)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، شماری از  $U(k, h)$ ‌ها برابر صفر می‌شوند. در ادامه، می‌توان با استفاده از رابطه بازگشتی (۷)، شماری دیگر از  $U(k, h)$ ‌ها که به مقادیر به دست آمده در رابطه (۱۱) مربوطاند را نیز یافت:

$$k = 0: U(k, h + 1) = 0 \rightarrow U(k + 2, h) = 0 \rightarrow U(2, h) = 0 \quad (۱۲)$$

$$k = 2: 12U(4, h) = \frac{1}{\alpha}(h + 1)U(2, h + 1) = 0 \rightarrow U(4, h) = 0 \quad (۱۳)$$

$$k = 4: \rightarrow 30U(6, h) = \frac{1}{\alpha}(h + 1)U(4, h + 1) = 0 \rightarrow U(6, h) = 0 \quad (۱۴)$$

بنابراین:

$$U(2k, h) = 0 \quad (۱۵)$$

همچنین با اعمال شرط مرزی دوم و استفاده از معادله (۵) داریم:

$$[U(1,0)L + U(3,0)L^3 + U(5,0)L^5 + \dots] + [U(1,1)L + U(3,1)L^3 + U(5,1)L^5 + \dots]t + [U(1,2)L + U(3,2)L^3 + U(5,2)L^5 + \dots]t^2 + \dots = 0 \quad (۱۶)$$

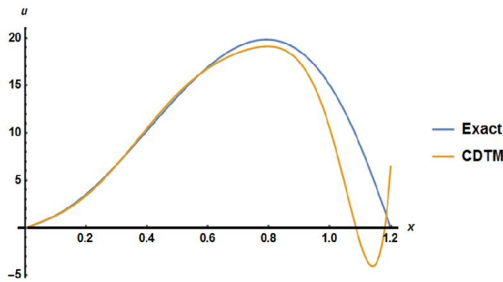
بنابراین برای ارضاء شرط مرزی دوم در همه زمان‌ها، می‌بایست کلیه جملات داخل براکت برابر صفر باشند. یعنی:

$$[U(1,0)L + U(3,0)L^3 + U(5,0)L^5 + \dots] = 0$$

$$[U(1,1)L + U(3,1)L^3 + U(5,1)L^5 + \dots] = 0$$

$$[U(1,2)L + U(3,2)L^3 + U(5,2)L^5 + \dots] = \dots = 0 \quad (۱۷)$$

مزبور کاملاً دقیق و درست برآورده می‌شود. البته با اندکی تأمل در روابط (۱۵) و (۱۷) که به ترتیب به شروط مرزی چپ و راست مربوطند، می‌توان دلیل این تفاوت را درک کرد. رابطه (۱۵)، به‌طور صریح، شماری از  $U(k, h)$  را صفر می‌سازد و این در حالی است که رابطه (۱۷)، رابطه‌ای بین  $U(k, h)$  برقرار می‌سازد که دقت آن تابع تعداد جملات انتخابی است. نکته جالب ماجرا اینجاست که حتی با افزایش تعداد جملات انتخابی (شکل ۲)، هر چند مشکل عدم ارضاء شرط مرزی راست، تا حدودی کم‌رنگ می‌گردد، اما به‌طور کامل مرتفع نخواهد شد و چه بسا پررنگ‌تر شود.



شکل ۲- توزیع دما در طول میله در زمان  $t = 2s$  به دو روش دقیق و CDTM (حداکثر توان  $t$  در سری پاسخ  $N = 11$ )

بنابراین، چنین به نظر می‌رسد که جدّ و جهد پژوهشی برای برطرف‌ساختن مشکل اعمال شرط مرزی در روش تبدیل دیفرانسیلی دوبعدی، با هدف پر کردن این حفره تحقیقاتی، امری در خور توجه و مطالعه باشد. در بخش بعد، با روش پیشنهادی نویسندگان مقاله آشنا می‌شویم که توان اعمال دقیق هر دو شرط مرزی مسأله را داراست. همان‌طور که در بخش آتی خواهیم دید، روش پیشنهادی که ملهم از روش ریتز در حل مسائل حساب تغییرات است [۲۵]، روش تبدیل دیفرانسیلی و ارکان آن، به‌ویژه رابطه بازگشتی را به‌گونه‌ای تغییر داده و در واقع اصلاح می‌کند که شرایط مرزی و دیریکله همگن مسأله، به‌طور کاملاً دقیق ارضاء شوند.

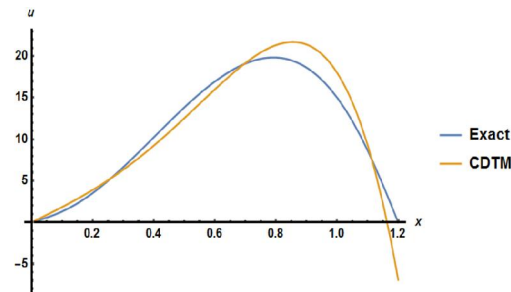
۳- روش تبدیل دیفرانسیلی اصلاح شده (EDTM)  
همان‌طور که در بخش پیش نیز بدان اشاره شد، راهکاری که برای اصلاح ناتوانی روش تبدیل دیفرانسیلی کلاسیک

در یک دستگاه می‌نشینند و در پایان، با حل آن دستگاه، مجهولات مسأله یا همان  $U(k, h)$  به دست می‌آیند:

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (22)$$

در رابطه فوق،  $[A]$  ماتریس ضرایب، بردار  $\{X\}$  دربرگیرنده مجهولات یا همان  $U(k, h)$  ها و بردار معلوم طرف راست هستند.

بدیهی است، با حل دستگاه (۲۲) تمامی  $U(k, h)$  ها به دست می‌آیند. در ادامه با جای‌گذاری آن‌ها در رابطه (۵) عملاً تابع  $u(x, t)$  در دسترس قرار می‌گیرد. نمودار ۱ نتیجه حاصل از روش تبدیل دیفرانسیلی مرسوم (CDTM) را در کنار پاسخ دقیق مسأله نمایش می‌دهد که با استفاده از روش معرفی شده و در مرجع [۲۴] به دست آمده است. لازم به ذکر است، برای دستیابی به این پاسخ  $\alpha = 1/7 \times 10^{-5} \frac{m^2}{sk}$ ،  $L = 1/2 m$  و تابع دمای اولیه  $g(x) = 80x^2(L - x)$  نظر گرفته شده است.



شکل ۱- توزیع دما در طول میله در زمان  $t = 2s$  به دو روش دقیق و CDTM (حداکثر توان  $t$  در سری پاسخ  $N = 5$ )

همان‌طور که در شکل ۱ مشهود است، هرچند پاسخ حاصل از CDTM، در لحظه مورد نظر، در بخش‌هایی از طول منحنی تطابق مناسبی با پاسخ دقیق دارد، اما با افزایش  $x$  و رفتن از سمت چپ میله ( $x = 0$ ) به سمت راست آن ( $x = L$ ) خطای روش CDTM افزایش می‌یابد و این افزایش خطا، در منتهی‌الیه سمت راست میله و دقیقاً در محل اعمال شرط مرزی دوم (رابطه ۹) به بیشترین مقدار خود می‌رسد. به بیان دیگر، از ظواهر امر چنین برمی‌آید که روش تبدیل دیفرانسیلی مرسوم، توان ارضاء شرط مرزی سمت راست در  $x = L$  را به خوبی دارا نیست. جالب است که این امر، در مورد شرط مرزی سمت چپ در  $x = 0$  صادق نبوده و شرط

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} x(L-x)U(k, h)(x-x_0)^k (t-t_0)^h \quad (25)$$

همان‌طور که پیش از این نیز بدان اشاره شد، تغییر اعمال شده در رابطه اساسی روش تبدیل دیفرانسیلی، سبب تغییر در قوانین و روابط شناخته شده مرتبط با آن می‌شود. در بخش بعد، شماری از قوانین جدید EDTM ارائه و اثبات می‌شوند.

### ۳-۱- پاره‌ای از قوانین جدید EDTM

در این بخش، به معرفی و اثبات برخی خواص و عملیات ریاضی روش اصلاحی پیشنهادی خواهیم پرداخت. برای این منظور، با توجه به معادله (۲۵) و قراردادن  $x_0 = 0$  و  $t_0 = 0$  در آن، تابع  $u(x, t)$  به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & U(0,0)(x^2 - Lx) + U(1,0)(x^3 - Lx^2) \\ & + U(2,0)(x^4 - Lx^3) + U(3,0)(x^5 - Lx^4) + \dots \\ & + U(0,1)(x^2 - Lx)t + U(1,1)(x^3 - Lx^2)t + \dots \\ & + (U(k-2, h) - LU(k-1, h))x^k t^h + \dots \end{aligned} \quad (26)$$

همان‌طور که در بخش ۲-۲ نیز بیان شد، تبدیل دیفرانسیلی چیزی نیست جز ضرب  $x^k t^h$  لذا:

$$EDT[u(x, t)] = U(k-2, h) - LU(k-1, h) \quad (27)$$

همچنین، برای استخراج تبدیل دیفرانسیلی اصلاح شده مشتق مکانی اول تابع  $u(x, t)$  به طریق زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = & U(0,0)(2x - L) \\ & + U(1,0)(3x^2 - 2Lx) \\ & + U(2,0)(4x^3 - 3Lx^2) + U(3,0)(5x^4 - 4Lx^3) \\ & + \dots + U(0,1)(2x - L)t + U(1,1)(3x^2 - 2Lx)t \\ & + \dots + (k+1)(U(k-1, h) - LU(k, h))x^k t^h \\ & + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

بنابراین:

$$EDT\left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right] = (k+1)[U(k-1, h) - LU(k, h)] \quad (29)$$

دو بعدی، در ارضاء شرط مرزی در نقاطی با  $x$  مخالف صفر پیشنهاد خواهد شد، با الهام از روش تغییراتی ریتز و بر اساس روایتی از روش مزبور در مرجع [۲۵] رابطه‌سازی شده است. در آن‌جا، ریتز با انتخاب توابعی که توانایی ارضاء شرایط مرزی دیریگله همگن را دارند و معمولاً به سادگی و با ضرب کردن معادلات هندسی مرزها در یکدیگر، قابل استخراج هستند، مشکل ارضاء شرایط مرزی را در همان آغاز حل کرده و سپس، مابقی توان خود را صرف ارضاء معادله دیفرانسیل جزئی حاکم بر مسأله، البته با رویکردی تغییراتی می‌نماید. در این‌جا نیز برآنیم تا با ضرب کردن تابعی معلوم که قابلیت ارضاء شرایط مرزی دیریگله همگن را دارد، در رابطه کلاسیک روش تبدیل دیفرانسیلی، یعنی رابطه (۵) کاری کنیم که  $u(x, t)$  از همان آغاز و به‌طور خودکار شرایط مرزی را ارضاء کند. البته ناگفته نپیداست که این کار، سبب تغییر روابط اساسی DTM، قوانین مرتبط با آن (که نمونه‌هایی از آن در جدول ۱ درج شد) و در نتیجه، رابطه بازگشتی مسأله می‌گردد؛ اما خوشبختانه، تمامی تغییرات فوق‌الذکر قابل رصد کردن و تشریح و تنقیح‌اند که بخش بعدی مقاله، معطوف به همین امر است.

در حالت کلی، اگر تابع معلوم  $f(x)$  تابع ارضاء‌کننده شرایط مرزی باشد، رابطه اساسی پیشنهادی برای اصلاح روش تبدیل دیفرانسیلی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^N \sum_{h=0}^M f(x)U(k, h)(x-x_0)^k (t-t_0)^h \quad (23)$$

به عنوان نمونه، شرایط مرزی مندرج در دو رابطه (۸) و (۹) که هر دو، شرایط مرزی دیریگله همگن‌اند، به کمک تابع (۲۴) ارضاء می‌شوند:

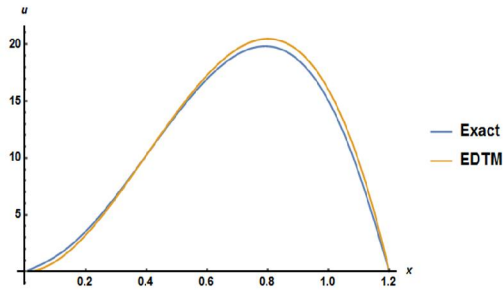
$$f(x) = x(L-x) \quad (24)$$

تابع فوق، با ضرب کردن تابع  $x$  که در  $x=0$  (مرز سمت چپ) برابر صفر است، در  $(L-x)$  که در  $x=L$  (مرز سمت راست) برابر صفر است، ساخته شده است؛ بنابراین تابع مندرج در رابطه (۲۴) هم در  $x=0$  و هم در  $x=L$  برابر صفر خواهد بود. با جایگذاری رابطه (۲۴) در (۲۳)، نخستین رابطه پیشنهادی برای روش تبدیل دیفرانسیلی اصلاح شده که از این پس EDTM نامیده می‌شود، به صورت رابطه (۵) معرفی می‌شود:



مرزی در این روش خود به خود ارضاء می‌شوند؛ بنابراین، این روش نسبت به CDTM، دارای محاسبات ساده‌تر و کوتاه‌تری است.

شکل ۳ نتایج حاصل از اعمال روش اصلاحی را در مقایسه با پاسخ دقیق مسأله نشان می‌دهد.



شکل ۳- توزیع دما در طول میله در زمان  $t = 2$  s به دو روش دقیق و EDTM ( $f(x) = x(L-x)$  و حداکثر توان  $t$  در سری پاسخ  $N = 5$ )

همان‌طور که در نمودار ۳ مشهود است، با به کار بردن روش اصلاحی، شرایط مرزی ارضاء شده و جواب‌های EDTM تطابق بیشتری نسبت به CDTM با پاسخ دقیق دارند؛ بنابراین روش پیشنهادی در این تحقیق تا حد زیادی به بهبود پاسخ‌ها کمک می‌کند.

### ۳-۲- گزینه‌های دیگر اصلاحی

بدیهی است، تابع معرفی شده در رابطه (۲۴)، تنها تابع ارضاء‌کننده شرایط مرزی دیریگله همگن در میله‌ای به طول  $L$  نیست. در این بخش، گزینه دیگری برای اصلاح رابطه اساسی روش تبدیل دیفرانسیلی پیشنهاد شده و قوانین مرتبط با آن استخراج می‌شود.

به جای تابع  $f(x)$  در معادله (۲۳)، می‌توان از تابع  $\sin(\frac{\pi x}{L})$  نیز استفاده کرد که صفربودن آن در  $x = 0$  و  $x = L$  بدیهی است. بدین ترتیب، تابع زیر قادر به ارضاء هر دو شرط مرزی مسأله خواهد بود:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) U(k, h) (x - x_0)^k (t - t_0)^h \quad (35)$$

و به‌طور مشابه، برای مشتق دوم داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = & 2U(0,0) + U(1,0)(6x - 2L) \\ & + U(1,0)(3x^2 - 2Lx) + U(2,0)(12x^2 - 6Lx) \\ & + U(3,0)(20x^3 - 12Lx^2) + \dots \\ & + U(0,1)2t + U(1,1)(6x - 2L)t + \dots \\ & + (k+2)(k+1)[U(k, h) - LU(k+1, h)]x^k t^h \\ & + \dots \end{aligned} \quad (30)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} EDT\left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right] = & (k+2)(k+1)[U(k, h) \\ & - LU(k+1, h)] \end{aligned} \quad (31)$$

به‌طور مشابه، می‌توان تبدیل دیفرانسیلی اصلاح شده مشتق زمانی  $u(x, t)$  را نیز محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = & U(0,1)(x^2 - Lx) + U(1,1)(x^3 - Lx^2) \\ & + \dots + 2U(0,2)(x^2 - Lx)t \\ & + 2U(1,2)(x^3 - Lx^2)t + \dots \\ & + (h+1)[U(k-2, h+1) \\ & - LU(k-1, h+1)]x^k t^h + \dots \end{aligned} \quad (32)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} EDT\left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right] = & (h+1)[U(k-2, h+1) \\ & - LU(k-1, h+1)] \end{aligned} \quad (33)$$

در صورت اعمال قوانین استخراج شده برای EDTM به معادله (۶)، رابطه بازگشتی، در این حالت، به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} (k+2)(k+1)[U(k, h) - LU(k+1, h)] \\ = \frac{1}{\alpha} (h+1)[U(k-2, h+1) \\ - LU(k-1, h+1)] \end{aligned} \quad (34)$$

واضح است که برای حل مسأله در این حالت، به کاربردن رابطه (۳۴) همراه با شرایط اولیه، بدون نیاز به اعمال شرایط مرزی، کافی است، چرا که با توجه به رابطه (۲۵)، شرایط

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (37)$$

مجدداً معادلات (۸) و (۹) به عنوان شرایط مرزی و معادله (۱۸) به عنوان شرط اولیه این مسأله لحاظ می‌شود.

حل دقیق این مسأله، با توجه به شرایط مرزی و اولیه آن، با استفاده از روش جداسازی متغیرها به دست می‌آید [۲۴]. برای این منظور، پاسخ معادله (۳۷) بر اساس شیوه تفکیک متغیرها به صورت رابطه (۳۸) در نظر گرفته می‌شود:

$$u(x, t) = F(x)G(t) \quad (38)$$

با قرار دادن تابع فوق در معادله (۳۷) و اندکی ساده‌سازی ریاضی، خواهیم داشت:

$$\frac{\alpha F'' + \alpha' F'}{F} = \frac{G'}{G} = -\beta^2 \quad (39)$$

در رابطه اخیر،  $\beta$  پارامتر جداسازی و عددی ثابت است که در ادامه به دست خواهد آمد.

با توجه به رابطه (۳۹)، دو معادله زیر برای یافتن توابع  $F(x)$  و  $G(t)$  باید حل شوند:

$$G' + \beta^2 G = 0 \quad (40)$$

$$\alpha F'' + \alpha' F' + \beta^2 F = 0 \quad (41)$$

پاسخ تحلیلی معادله (۴۰) عبارت است از:

$$G = e^{-\beta^2 t} \quad (42)$$

همچنین حل تحلیلی معادله (۴۱) مطابق رابطه (۴۳) به دست می‌آید:

$$F(x) = \sqrt{2} I_0 \left[ 2 \sqrt{\frac{L(L+x)\beta^2}{\alpha_0}} \right] C_1 + \sqrt{2} K_0 \left[ 2 \sqrt{\frac{L(L+x)\beta^2}{\alpha_0}} \right] C_2 \quad (43)$$

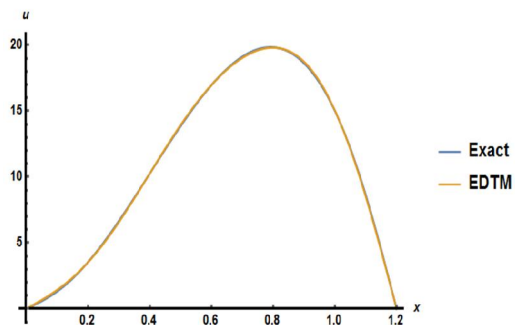
در رابطه فوق،  $I_0$  تابع بسل اصلاح شده نوع اول و  $K_0$  تابع بسل اصلاح شده نوع دوم هستند و ضرایب ثابت  $C_1$ ،  $C_2$  و  $\beta$  با استفاده از شرایط مرزی و اولیه، در ادامه استخراج می‌شوند.

در صورت اعمال شرایط مرزی (۸) و (۹)، به معادله (۴۳) معادلات همگن زیر به دست می‌آیند:

همانند بخش ۳-۱، می‌توان قواعد حاکم بر این روش اصلاحی را نیز از طریق بسط سری (۳۵) حول  $x_0 = 0$  و  $t_0 = 0$ ، به دست آورد و از طریق آن، رابطه بازگشتی را به صورت رابطه (۳۶) استخراج کرد:

$$\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 U(k, h) = -\frac{1}{\alpha} (h+1) U(k, h+1) \quad (36)$$

در این‌جا نیز برای نشان دادن اثر این تابع اصلاحی بر نتایج حاصل از EDTM، شکل ۴ ترسیم شده است:



شکل ۴- توزیع دما در طول میله در زمان  $t = 2s$  به دو روش دقیق و EDTM ( $f(x) = \sin(\frac{\pi x}{L})$ ) و حداکثر توان  $t$  در سری (پاسخ  $N = 5$ )

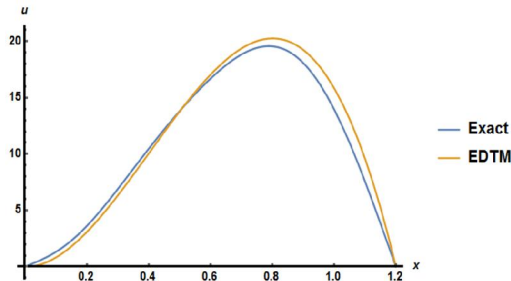
همان‌طور که مشاهده می‌شود، اعمال گزینه اصلاحی دوم نیز به ارضاء دقیق شرایط مرزی منجر شده و نمودار حاصل، تطابق بسیار خوبی با پاسخ دقیق دارد.

### ۳-۳- مسأله دوم

پس از تحلیل نخستین مسأله که در آن  $\alpha$  یا همان ضریب پخش گرمایی در میله ثابت بود، به سراغ دومین مسأله مورد بحث در مقاله می‌رویم که دارای  $\alpha$  وابسته  $x$  به یا همان بعد مکانی در میله است. ضریب  $\alpha$  در مسأله دوم به صورت متغیر در طول میله و به صورت تابع  $\alpha(x) = \alpha_0(1 + \frac{x}{L})$  در نظر گرفته می‌شود که مقدار  $\alpha_0$  همان مقدار یکنواخت در مسأله قبلی و برابر  $1/7 \times 10^{-5}$  است.

در این حالت، معادله دیرانسلی (۶) به شکل رابطه (۳۷) بازنویسی می‌شود:

نتایج حاصل از EDMT برای حل معادله (۳۷) در مقایسه با جواب دقیق آن، در شکل ۵ قابل مشاهده است.

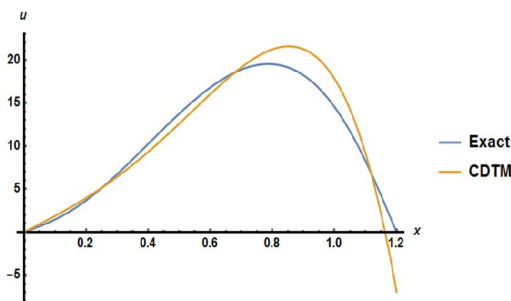


شکل ۵- توزیع دما در طول میله در زمان  $t=2s$  به دور روش دقیق و EDMT ( $f(x) = x(L-x)$  و حداکثر توان  $t$  در سری پاسخ  $N=5$ )

از نمودار ۵ می‌توان نتیجه‌گیری کرد که در مسئله دوم نیز، روش اصلاحی EDMT تطابق بسیار خوبی با پاسخ دقیق دارد. در بخش بعد، به‌طور مفصل‌تر و جامع‌تری به نتایج عددی خواهیم پرداخت.

#### ۴- نتایج عددی

در این بخش، نتایج حاصل از اعمال روش‌های کلاسیک و اصلاح شده بر مسئله انتقال حرارت، بررسی می‌شود. برای این منظور، شکل‌های ۶ و ۷، توزیع درجه حرارت را در طول میله مسئله اول ( $\alpha$  ثابت)، در زمان‌های مختلف نمایش می‌دهند.



شکل ۶- توزیع دما در میله با  $\alpha$  ثابت در زمان  $t=3s$  به دور روش دقیق و CDTM (حداکثر توان  $t$  در سری پاسخ  $N=5$ )

$$\sqrt{2} I_0 \left[ 2 \sqrt{-\frac{L^2 \beta^2}{\alpha_0}} \right] C_1 + \sqrt{2} K_0 \left[ 2 \sqrt{-\frac{L^2 \beta^2}{\alpha_0}} \right] C_2 = 0 \quad (44)$$

$$\sqrt{2} I_0 \left[ 2 \sqrt{-\frac{2L^2 \beta^2}{\alpha_0}} \right] C_1 + \sqrt{2} K_0 \left[ 2 \sqrt{-\frac{2L^2 \beta^2}{\alpha_0}} \right] C_2 = 0 \quad (45)$$

از برابر صفر قراردادن دترمینان ماتریس ضرایب معادلات (۴۴) و (۴۵)، مقادیر  $\beta$  به دست آمده و متناظر با آن  $F(x)$  به دست می‌آید که مجموع آن‌ها جواب معادله (۴۱) است. ضرایب  $C_1$  و  $C_2$  نیز با اعمال شرط اولیه مسئله به معادله (۳۸) و استفاده از خاصیت تعامدی توابع بسل، به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$C_1 = \frac{\int_0^L F_i(x) g(x) dx}{\int_0^L F_i(x) F_i(x) dx} \quad (46)$$

$$C_2 = \frac{I_0 \left[ 2 \sqrt{-\frac{L^2 \beta^2}{\alpha_0}} \right]}{K_0 \left[ 2 \sqrt{-\frac{L^2 \beta^2}{\alpha_0}} \right]} C_1 \quad (47)$$

در نهایت، جواب دقیق معادله (۳۷) با فرض  $\alpha(x) = \alpha_0(1 + \frac{x}{L})$  به شکل رابطه (۴۸) به دست می‌آید:

$$T(x, t) = \sum_{i=1}^n F_i(x) e^{-\beta_i^2 t} \quad (48)$$

که در آن،  $F_i(x)$  مقدار تابع  $F(x)$  برای هر مقدار  $\beta_i$  است.  $n$  نیز برابر تعداد جملات انتخابی سری پاسخ دقیق است. در این تحقیق، مقدار  $n$  برابر ۴ در نظر گرفته شده است.

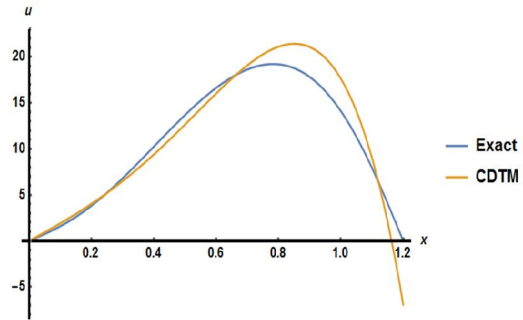
در ادامه، به اعمال روش اصلاحی EDMT به معادله (۳۷) پرداخته و جواب حاصل از آن را در این حالت نیز می‌یابیم.

در صورت استفاده از رابطه اصلاحی (۲۵) و اعمال قوانین EDMT به معادله (۳۷)، رابطه بازگشتی جدید، به صورت زیر استخراج می‌شود:

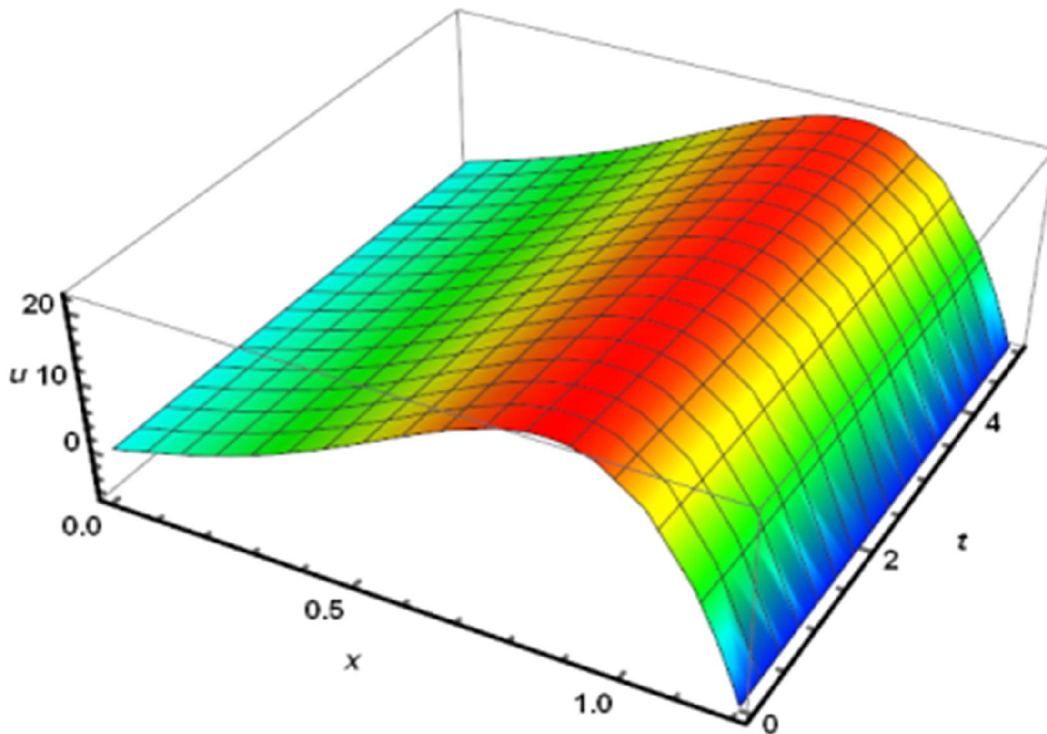
$$\begin{aligned} & \alpha_0 [(k+2)(k+1)LU(k+1, h) \\ & - 3(k+1)U(k, h) - \frac{1}{L}(k+1)(k-1)U(k-1, h)] \\ & = (h+1)[U(k-2, h+1) - LU(k-1, h+1)] \end{aligned} \quad (49)$$

شکل ۸، تابع دو متغیره دما را به صورت سه‌بعدی نمایش می‌دهد. همان‌طور که شکل‌های ۶ تا ۸ نشان می‌دهند و قبلاً نیز بدان اشاره شد، CDTM توانایی لازم در ارضاء شرط مرزی سمت راست میله را ندارد و دقیقاً به همین علت است که روش اصلاحی EDTM در این تحقیق پیشنهاد شده است. در ادامه نتایج حاصل از EDTM ارائه می‌شوند.

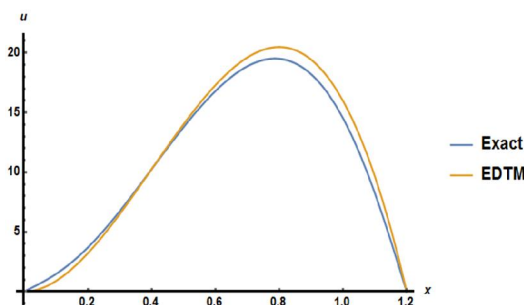
شکل‌های ۹ تا ۱۲، نتایج مورد نظر را برای گزینه اصلاحی نخست ( $f(x) = x(L-x)$ ) به دست می‌دهند. در ادامه، به گزینه دیگر اصلاحی ( $f(x) = \sin(\frac{\pi x}{L})$ ) در EDTM می‌پردازیم و پاسخ‌های حاصل را در شکل‌های ۱۳ تا ۱۶ ارائه می‌کنیم.



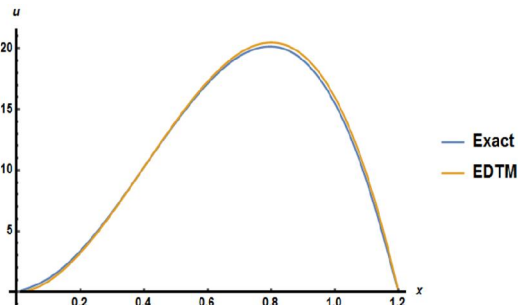
شکل ۷- توزیع دما در میله با  $\alpha$  ثابت در زمان  $t=4s$  به دو روش دقیق و CDTM (حداکثر توان  $t$  در سری پاسخ  $N=5$ )



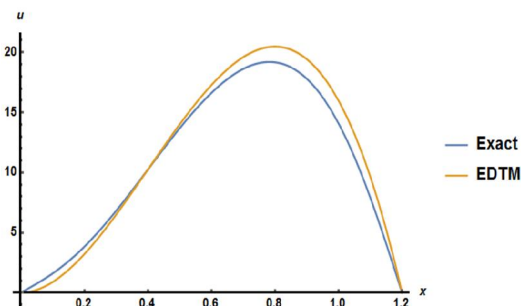
شکل ۸- نمایش سه‌بعدی توزیع دما در میله با  $\alpha$  ثابت در زمان‌های مختلف به CDTM (حداکثر توان  $t$  در سری پاسخ  $N=5$ )



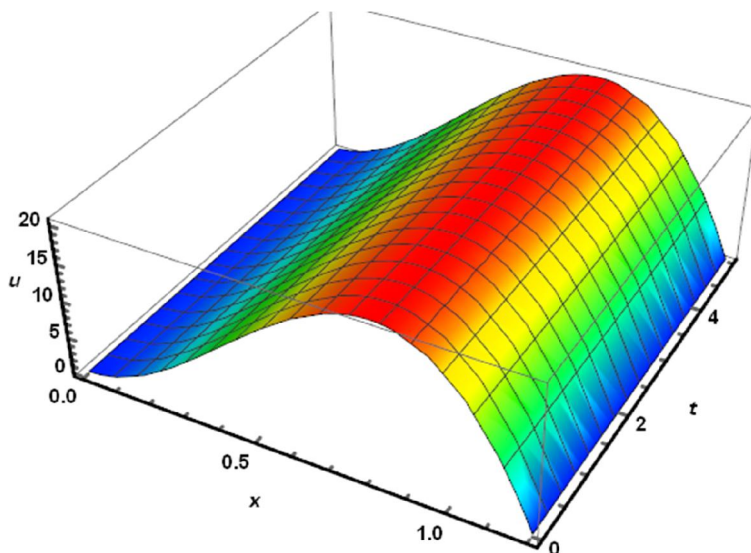
شکل ۱۰- توزیع دما در میله با  $\alpha$  ثابت در زمان  $t=3s$  به دو روش دقیق و EDTM  $f(x) = x(L-x)$  و حداکثر توان  $t$  در سری پاسخ  $(N=5)$



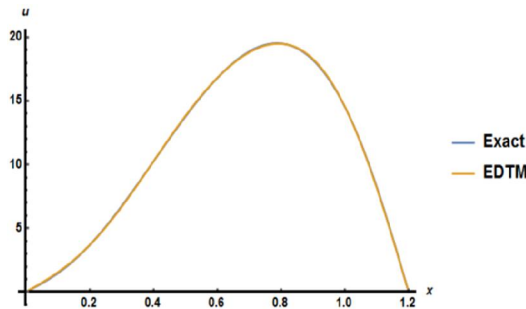
شکل ۹- توزیع دما در میله با  $\alpha$  ثابت در زمان  $t=1s$  به دو روش دقیق و EDTM  $f(x) = x(L-x)$  و حداکثر توان  $t$  در سری پاسخ  $(N=5)$



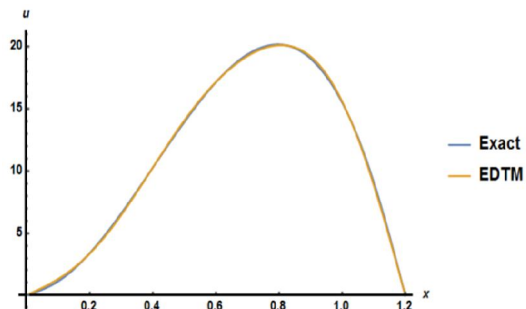
شکل ۱۱- توزیع دما در میله با  $\alpha$  ثابت در زمان  $t=4s$  به دو روش دقیق و EDTM  $f(x) = x(L-x)$  و حداکثر توان  $t$  در سری پاسخ  $(N=5)$



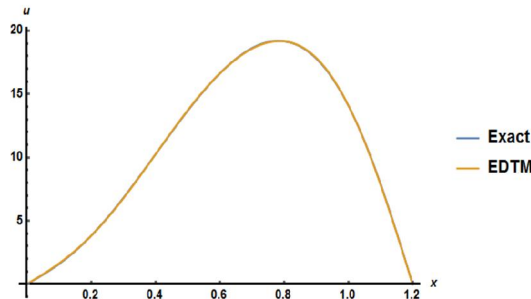
شکل ۱۲- نمایش سه بعدی توزیع دما در میله با  $\alpha$  ثابت در زمان‌های مختلف با EDTM  $f(x) = x(L-x)$  و حداکثر توان  $t$  در سری پاسخ  $(N=5)$



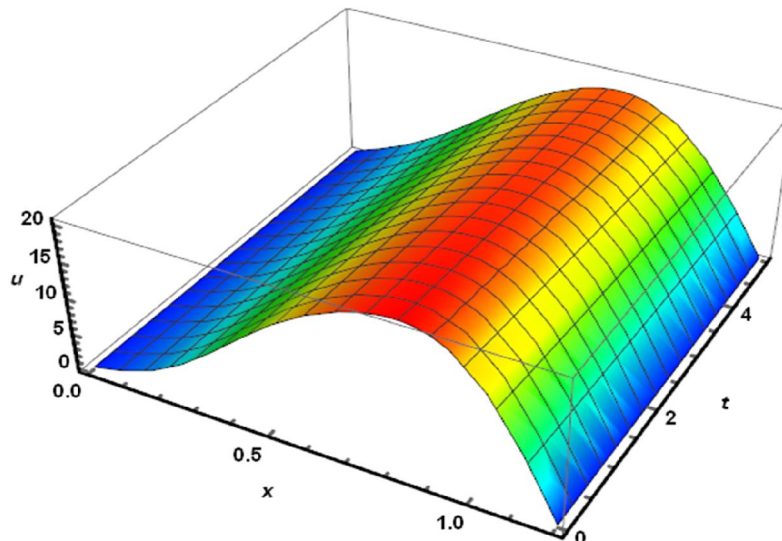
شکل ۱۴- توزیع دما در میله با  $\alpha$  ثابت در زمان  $t=3s$  به دو روش دقیق و EDMT  $f(x) = \text{Sin}(\frac{\pi x}{L})$  و حداکثر توان  $t$  در سری پاسخ  $(N=5)$



شکل ۱۳- توزیع دما در میله با  $\alpha$  ثابت در زمان  $t=1s$  به دو روش دقیق و EDMT  $f(x) = \text{Sin}(\frac{\pi x}{L})$  و تعداد جملات سری پاسخ  $(N=5)$



شکل ۱۵- توزیع دما در میله با  $\alpha$  ثابت در زمان  $t=4s$  به دو روش دقیق و EDMT  $f(x) = \text{Sin}(\frac{\pi x}{L})$  و حداکثر توان  $t$  در سری پاسخ  $(N=5)$



شکل ۱۶- نمایش سه بعدی توزیع دما در میله با  $\alpha$  ثابت در زمان‌های مختلف با EDMT  $f(x) = \text{Sin}(\frac{\pi x}{L})$  و حداکثر توان  $t$  در سری پاسخ  $(N=5)$

۵- نتیجه گیری

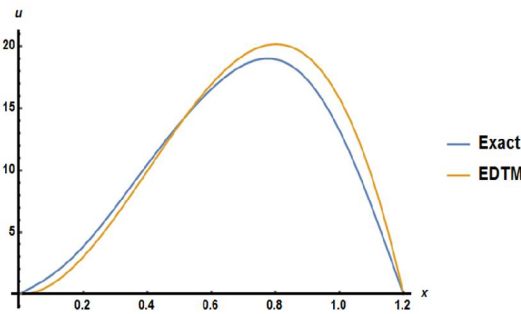
این مقاله، پس از مرور گذرای پیشینه پژوهش‌های مرتبط با روش تبدیل دیفرانسیلی و مسئله انتقال حرارت در جامدات دارای یک بعد مکانی، به اعمال روش تبدیل دیفرانسیلی مرسوم یا کلاسیک بر یک مسئله معروف انتقال حرارت پرداخته و نشان داد که روش مزبور، در بخش‌هایی از طول میله و به‌ویژه در محل اعمال یکی از شرایط مرزی، دقت چندان مناسبی نداشته و نیازمند اصلاح است؛ بنابراین در ادامه، با الهام گرفتن از روش تغییراتی ریتز و اعمال اصلاحاتی بر رابطه اساسی DTM، روابطی پیشنهاد شد که توان برطرف‌ساختن ایراد مزبور را داشته و به افزایش دقت پاسخ‌های حاصل از روش تبدیل دیفرانسیلی منجر می‌شود.

در ادامه، نتایج حاصل از اعمال EDTM برای مسئله دوم که در آن ضریب  $\alpha$  در طول میله، متغیر در نظر گرفته شده  $(\alpha(x) = \alpha_0(1 + \frac{x}{L}))$  آورده می‌شوند.

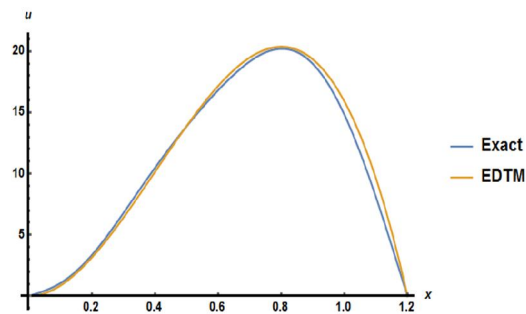
ناگفته نماند با افزایش زمان، خطای روش تبدیل دیفرانسیلی در دو حالت مرسوم و اصلاح شده افزایش می‌یابد که امری قابل پیش‌بینی و کنترل است. در حالت کلی، یکی از بهترین راه‌حل‌های غلبه بر این مشکل، استفاده از روش گام‌به‌گام است [۱۰].

شکل ۲۰، نحوه تغییرات دما در وسط میله با  $\alpha$  متغیر را بر حسب زمان، به دو روش EDTM و دقیق نشان می‌دهد.

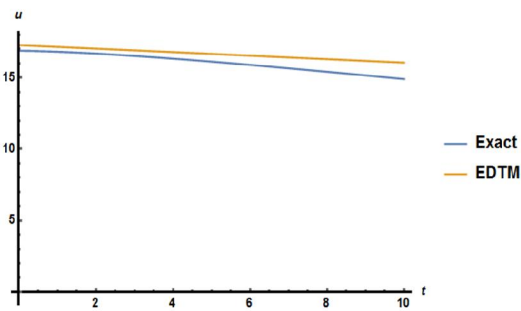
خوشبختانه، در مسئله دوم، تابع زمانی توزیع دما نیز با دقت بسیار خوبی ارزیابی شد.



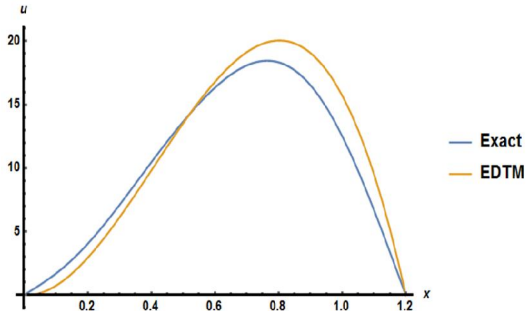
شکل ۱۸- توزیع دما در میله با  $\alpha$  متغیر در زمان  $t=3s$  به دو روش دقیق و EDTM  $(f(x) = x(L-x))$  و حداکثر توان  $t$  در سری پاسخ  $(N=5)$



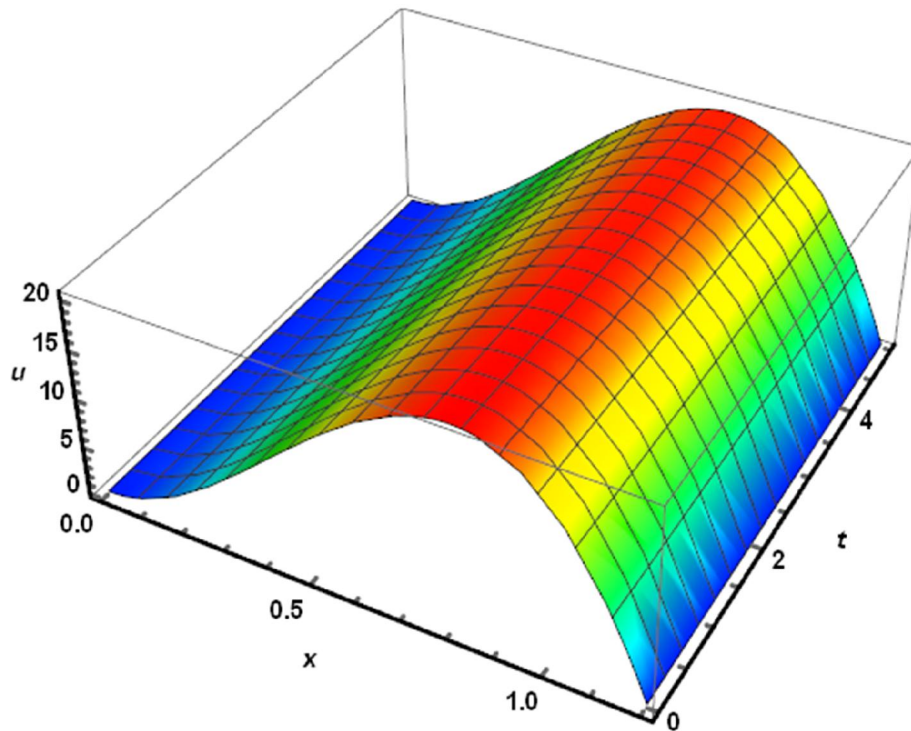
شکل ۱۷- توزیع دما در میله با  $\alpha$  متغیر در زمان  $t=1s$  به دو روش دقیق و EDTM  $(f(x) = x(L-x))$  و حداکثر توان  $t$  در سری پاسخ  $(N=5)$



شکل ۲۰- توزیع دما بر حسب زمان در وسط میله با  $\alpha$  متغیر به دو روش دقیق و EDTM  $(f(x) = x(L-x))$  و حداکثر توان  $t$  در سری پاسخ  $(N=5)$



شکل ۱۹- توزیع دما در طول میله با  $\alpha$  متغیر در زمان  $t=4s$  به دو روش دقیق و EDTM  $(f(x) = x(L-x))$  و حداکثر توان  $t$  در سری پاسخ  $(N=5)$



شکل ۲۱- نمایش سه‌بعدی توزیع دما در میله با  $\alpha$  متغیر در زمان‌های مختلف با EDTM  $f(x) = x(L-x)$  و حداکثر توان  $t$  در سری پاسخ  $(N=5)$

در ادامه و پس از تشریح روش اصلاح شده و معادلات اساسی آن، دو مسأله انتقال حرارت در میله‌ها، یکی با ضریب پخش گرمایی ثابت و دیگری با ضریب پخش وابسته به بعد مکانی میله، هم به‌طور دقیق و هم با استفاده از روش پیشنهادی، حل شده و نتایج حاصل از آن‌ها، در قالب نمودارهایی ارائه گردید. خوشبختانه، مجموعه نتایج به‌دست‌آمده، به‌خوبی حکایت از کارایی و دقت روش پیشنهادی، به‌ویژه، در حل مشکل عدم ارضاء یکی از شرایط مرزی مسأله دارد.

جدول ۲- مقادیر درجه حرارت در نقاط مختلف میله با  $\alpha$  ثابت در زمان  $t=1s$  به روش‌های دقیق، CDTM و EDTM  $f(x) = x(L-x)$  و حداکثر توان  $t$  در سری پاسخ  $(N=5)$  و خطاهای مربوطه

خطای EDTM %	خطای CDTM %	روش دقیق	EDTM	CDTM	$\frac{x}{L}$
۰	۰	۰	۰	۰	۰
-۱/۲۲	-۴/۵۷	۶/۵۶	۶/۴۸	۶/۲۶	۰/۲۵
۰/۹۳	-۶/۵۴	۱۷/۱۲	۱۷/۲۸	۱۶	۰/۵
۲/۱۵	۱۳/۴	۱۹/۰۳	۱۹/۴۴	۲۱/۵۸	۰/۷۵
۰	--	۰	۰	-۶/۹۱	۱

#### ۶- فهرست علائم

طول میله (m)	$L$
زمان (s)	$t$
تابع دما (k)	$u$
تبدیل دیرانسیلی تابع $u$	$U$



[8] Bervillier C (2012) Status of the differential transformation method. *Appl Math Comput* 218: 10158-10170.

[9] Patel Y, Dhodiya JM (2016) Application of differential transform method to solve linear, non-linear reaction convection diffusion and convection diffusion problem. *Int J Pure Appl Math* 190(3): 529-538.

[10] Nourifar M, Aftabi Sani A, Keyhani A (2017) Efficient multi-step differential transform method: Theory and its application to nonlinear oscillators. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 53: 154-183.

[11] Nourifar M, Aftabi Sani A, Keyhani A (2018) Free vibration analysis of rotating euler-bernoulli beam with exponentially varying cross section by differential transform method. *Int J Struct Stab Dy* 180(2): 1850024.

[12] Rezaiee-Pajand M, Aftabi Sani A, Hozhabrossadati SM (2017) Application of differential transform method to free vibration of gabled frames with rotational springs. *Int J Struct Stab Dy* 17(1): 1750012.

[13] Rezaiee-Pajand M, Aftabi Sani A, Hozhabrossadati SM (2018) Free vibration of a generalized plane frame. *Int J Eng* 31(4): 538-547.

[14] Rezaiee-Pajand M, Kazemiyan MS, Aftabi Sani A (2018) Solving coupled beam-fluid interaction by DTM. *Ocean Eng* 167: 380-396.

[15] Bert CW (2002) Application of differential transform method to heat conduction in tapered fins. *J Heat Trans-T ASME* 124: 208-209.

[16] Kuo BL (2005) Heat transfer analysis for the Falkner-Skan wedge flow by the differential transformation. *Int J Heat Mass Tran* 48: 5036-5046.

[17] Chu HP, Chen CL (2008) Hybrid differential transform and finite difference method to solve the nonlinear heat conduction problem. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 13: 1605-1614.

[18] Chu HP, Lo CY (2008) Application of the hybrid differential transform-finite difference method to nonlinear transient heat conduction problems. *Numer Heat Transfer* 53: 295-307.

[19] Lo CY, Chen BY (2009) Application of hybrid differential transform/control-volume method to hyperbolic heat conduction problems. *Numer Heat Transfer* 55: 219-231.

[20] Jang MJ, Yeh YL, Chen CL, Yeh WC (2010) Differential transformation approach to thermal conductive problems with discontinuous boundary condition. *Appl Math Comput* 216: 2339-2350.

[21] Rashidi MM, Laraqi N, Sadri SM (2010) A novel analytical solution of mixed convection about an inclined flat plate embedded in a porous medium

$x$	مکان (m)
علائم یونانی	
$\alpha$	ضریب پخش گرمایی ( $m^2s^{-1}k^{-1}$ )
$\alpha_0$	ضریب پخش گرمایی در ابتدای میله ( $m^2s^{-1}k^{-1}$ )
$\beta$	پارامتر جداسازی
بالانویس‌ها	
$k$	مرتبه مشتق مکانی
$h$	مرتبه مشتق زمانی
زیرنویس‌ها	
0	اولیه

#### ۷- مراجع

[1] Zhou JK (1986) *Differential Transformation and its applications for electrical circuits*. Huazhong Univ. Press, Wuhan, China, (In Chinese).

[۲] غضنفری هلق ش، طلعتی ف (۱۳۹۴) حل تحلیلی و عددی معادله دیفرانسیل رسانش حالت پایا در صفحه مثلثی قائم-الزاویه با شرایط مرزی ثابت. *مجله مکانیک سازه‌ها و سازه‌ها* ۳۰۲-۲۹۸: ۵(۳).

[3] Z'ecová M, Terpák J (2015) Heat conduction modeling by using fractional-order derivatives. *Appl Math Comput* 257: 365-373.

[4] Joachimiak M, Joachimiak D, Ciałkowski M, Maldziński L, Okoniewicz P, Ostrowska K (2019) Analysis of the heat transfer for processes of the cylinder heating in the heattreating furnace on the basis of solving the inverse problem. *Int J Therm Sci* 145: 105985.

[5] Abdykarim M, Berger J, Dutykh D, Soudani L, Agbossou A (2019) Critical assessment of efficient numerical methods for a long-term simulation of heat and moisture transfer in porous materials. *Int J Therm Sci* 145: 105982.

[6] Khanmohammadi S, Mazaheri N (2019) Second law analysis and multi-criteria optimization of turbulent heat transfer in a tube with inserted single and double twisted tape. *Int J Therm Sci* 145: 105998.

[7] Yu B, Jiang X (2019) Temperature prediction by a fractional heat conduction model for the bilayered spherical tissue in the hyperthermia experiment. *Int J Therm Sci* 145: 105990.

- [23] Ayaz F (2003) On the two-dimensional differential transform method. *Appl Math Comput* 143: 361-374.
- [24] Ozicik MN (1993) *Heat Conduction*. John Wiley & Sons, New York.
- [25] Farlow SJ (1993) *Partial differential equations for scientists and engineers*. John Wiley & Sons, New York.
- using the DTM-Padé. *Int J Therm Sci* 49: 2405-2412.
- [22] Rashidi MM, Mohimani Pour SA (2010) A novel analytical solution of steady flow over a rotating disk in porous medium with heat transfer by DTM-Padé. *Afr J Math Comput Sci Res* 3: 93-100.