



تحلیل ارتعاش آزاد غیرخطی ورق‌های مستطیلی از جنس ماده مدرج تابعی دو جهته

سهیل هاشمی^{۱*} و علی اصغر جعفری^۲

^۱ کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

^۲ استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۷/۱۶؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۱۲/۲۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۳/۰۷

چکیده

در تحقیق حاضر، ارتعاش آزاد غیرخطی ورق مستطیلی دور مفصل از جنس مواد مدرج تابعی دو جهته برای اولین بار به صورت کاملاً تحلیلی بررسی شده است. برای این منظور به کمک اصل هامیلتون و روابط کرنش جابجایی غیرخطی ون کارمن، معادلات دیفرانسیل جزئی حرکت ورق استخراج شده‌اند. پس از آن با اعمال روش گالرکین، معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی ورق به معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی وابسته به زمان تبدیل گشته‌اند. سپس به منظور محاسبه فرکانس‌های غیرخطی ورق، معادله غیرخطی ورق به صورت تحلیلی با استفاده از روش لیندشتد پوانکاره بهبودیافته حل شده است. خواص مواد ورق براساس مدل توزیع توانی در دو راستای طولی و عرضی ورق به صورت پیوسته متغیر فرض شده‌اند. در نهایت اثر برخی پارامترهای کلیدی سیستم همچون، دامنه ارتعاش، اندیس ماده مدرج تابعی و نسبت هندسی ورق روی فرکانس غیرخطی ورق به صورت جزئی مورد تحلیل قرار گرفته‌اند. برای صحت‌گذاری مساله، نتایج این پژوهش با نتایج ادبیات گذشته و همچنین حل عددی مقایسه شده است و تطابق بسیار خوبی مشاهده گشته است.

کلمات کلیدی: ارتعاش غیرخطی؛ ورق مستطیلی؛ مواد مدرج تابعی دو جهته؛ تئوری کلاسیک ورق‌ها؛ روش لیندشتد پوانکاره بهبود یافته.

Nonlinear Free Vibration Analysis of Bi-directional Functionally Graded Rectangular Plates

S. Hashemi¹, A.A. Jafari^{2,*}

¹ MSc, Department of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

² Professor, Department of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

Abstract

In the present study, nonlinear free vibration analysis of bi-directional functionally graded simply supported rectangular plates is investigated analytically for the first time. For this purpose, with the aid of Hamilton's principle and von Karman nonlinear strain-displacement relations, the partial differential equations of motion are developed. Afterward, the nonlinear partial differential equations are transformed into the time-dependent nonlinear ordinary differential equations by applying the Galerkin method. The nonlinear equation of motion is then solved analytically by the Modified Lindstedt-Poincare method to determine the the plate nonlinear frequencies. The volume fraction distribution is assumed to be continuously graded in both the length and width directions of the plate. Finally, the effects of some system parameters such as the vibration amplitude, FG indexes and aspect ratio on the nonlinear frequency are discussed in detail. To validate the analysis, the results of this paper are compared with both the published data and numerical method, and good agreements are found.

Keywords: Nonlinear Vibrations; Rectangular Plate; Bi-Directional Functionally Graded Materials; Classical Plates Theory; Modified Lindstedt-Poincare Method.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۳۷۷۶۲۹۸۲۷

آدرس پست الکترونیک: S.Hashemi@Kntu.ac.ir

۱- مقدمه

مواد مدرج تابعی (FGM) نوعی کامپوزیت هستند که خواص مکانیکی یا حرارتی آنها از یک سطح تا سطح دیگر به صورت تابعی و پیوسته تغییر می‌کند. استفاده از مواد مدرج تابعی در دهه‌های اخیر افزایش چشم‌گیری داشته است. این مواد به دلیل مقاومت حرارتی بالا و دیگر خواصی که دارند، کاربردهای مهندسی زیادی در صنایع مختلفی همچون، صنایع دفاعی و صنایع هوافضایی دارند؛ همچنین از این مواد در ساخت تجهیزاتاتی همچون، مخازن تحت فشار، پره‌های توربین، میدل‌های حرارتی، مواد بیوپزشکی مثل ایمپلنت دندان استفاده می‌شود. با توجه به اهمیت و کاربرد مواد مدرج تابعی برخی محققان مطالعاتی در این زمینه انجام دادند.

یکی از سازه‌های رایج ساخته شده از مواد مدرج تابعی ورق‌ها می‌باشند که کاربردهای زیادی در سازه‌های مهندسی همچون وسایل نقلیه فضایی و غیره دارد. بسیاری از کاربردهای ورق‌های ساخته شده از مواد مختلف در مهندسی یافت می‌شود به عنوان مثال: صفحات دایره‌ای بسیار نازک در هارد دیسک‌های رایانه‌ای استفاده می‌شود. صفحات مستطیلی و دوزنقه‌ای را می‌توان در پوست بال، سطوح دم افقی، فلپ^۱ و باله‌های عمودی هواپیما یافت. صفحات مستطیلی یکسرگردار در تشدیدکننده‌های نانو برای تشخیص مواد مخدر استفاده می‌شوند؛ همچنین پانل‌های مستطیل مسطح تا حد زیادی در ساختمان‌های عمرانی استفاده می‌شود؛ لذا بدلیل اهمیت بالایی که دارند، مطالعات زیادی روی دینامیک ورق‌های مدرج تابعی انجام شده است. برخی محققان روی ارتعاش ورق‌های ساخته شده از جنس مواد مدرج تابعی براساس تئوری کلاسیک کار کردند. ژانگ و ژوو^۲ [۱]، ارتعاش آزاد، کمانش و خیز ورق نازک از مواد مدرج تابعی را براساس تئوری کلاسیک ورق و سطح خنثی فیزیکی تحلیل کردند. ابریت^۳ [۲] فرکانس‌های طبیعی ورق‌های نازک با تکیه‌گاه ساده و گیردار را با استفاده از تئوری کلاسیک ورق‌ها استخراج کرد.

با توجه به این که در تئوری کلاسیک از تغییر شکل‌های برشی در ضخامت ورق صرف نظر می‌گردد، فرکانس‌های طبیعی با کمی تقریب به دست می‌آیند. به منظور حل این مشکل، برخی پژوهشگران با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و یا مرتبه بالاتر به مطالعه ارتعاش خطی ورق‌ها پرداختند. برای نمونه نجفی زاده و عیالوار [۳]، با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به بررسی ارتعاش آزاد ورق مستطیلی شکل ساخته شده از مواد تابعی پرداختند. خورشیدی و عنصری‌نژاد [۴]، به تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های قطاعی کوپل شده با لایه پیزوالکتریک با بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پرداختند. خورشیدی و همکاران [۵]، به بررسی تاثیر محیط حرارتی بر ارتعاش آزاد ورق مستطیلی از مواد مدرج تابعی دو بعدی مستقر بر بستر پسترناک براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم پرداختند. حسینی هاشمی و همکاران [۶]، با ارائه یک حل دقیق پاسخ بسته خطی به تحلیل ارتعاش آزاد ورق مستطیلی نسبتاً ضخیم مدرج تابعی با لایه‌های هوشمند براساس تئوری میندلین^۴ پرداختند. ژائو و همکاران^۵ [۷]، با استفاده از روش المان آزاد کی-بی-ریتز^۶ به مطالعه ارتعاش آزاد ورق مستطیلی از مواد مدرج تابعی براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پرداختند. آنها در این تحقیق چهار نوع ماده مدرج تابعی را مورد بررسی قرار دادند. فرزام و حسنی [۸]، به تحلیل کمانش و خمش میکرو ورق‌های مدرج تابعی پرداختند که تحت بارهای مکانیکی و در محیط حرارتی قرار دارند. آنها از تئوری گرادیان کرنش بهبودیافته استفاده کردند. گوپتا و همکاران^۷ [۹]، با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر به استخراج فرکانس‌های طبیعی ورق از مواد مدرج تابعی با شرایط مرزی مختلف پرداختند. خورشیدی و همکاران [۱۰]، ارتعاش آزاد الکترومکانیکی نانو ورق مستطیلی کامپوزیتی با لایه پیزوالکتریک را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول بهبود یافته مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. خورشیدی و همکاران [۱۱]، ارتعاش نانو ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی

⁴ Mindlin⁵ Zhao et al.⁶ Element kp-ritz Method⁷ Gupta et al.¹ Flap² Zhang and Zhou³ Abrate

غیرخطی ورق از مواد مدرج تابعی تحت نیروی در حال حرکت پرداختند. داک و کونگ^۴ [۱۹]، با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تابع تنش به بررسی ارتعاش غیرخطی ورق مستطیلی از مواد مدرج تابعی پرداختند. آنها فرض کردند، ورق روی بستر الاستیک و تحت بارهای مکانیکی، حرارتی و میرایی باشد، سپس پاسخ دینامیکی ورق را با استفاده از روش عددی رانج کوتاه استخراج کردند. فانگ و چن^۵ [۲۰]، براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، ارتعاش غیرخطی ورق مستطیلی از مواد مدرج تابعی را مورد بررسی قرار دادند. آنها نقص ورق و همچنین وجود تنش اولیه در ورق را لحاظ نموده و با استفاده از روش گالرکین و روش عددی رانج کوتاه به حل معادلات پرداختند.

برای طراحی برخی سازه‌ها همچون سیستم‌های پیشران، مواد مدرج تابعی یک‌جهته نمی‌تواند آنچنان تاثیرگذار باشد و اجزاء سیستم به مواد پیشرفته‌تری نیاز پیدا می‌کنند که خواص آنها در دو یا چندجهت به صورت پیوسته متغیر باشند؛ بنابراین، مواد مدرج تابعی دوجهته معرفی گشتند تا این خلاء مهندسی را پرکنند؛ در نتیجه، تحقیقات و مطالعات زیادی روی تحلیل استاتیک و دینامیک سازه‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی دوجهته انجام شده است که در ادامه به برخی از آنها پرداخته شده است.

برخی مطالعات روی تحلیل ارتعاش آزاد و اجباری تیرهای مدرج تابعی دوجهته انجام شده است [۲۶-۲۱]. بعضی محققان تحلیل ارتعاش پوسته‌های مدرج تابعی دوجهته را مورد بررسی قرار دادند [۲۷، ۲۸].

تعداد مقالات منتشر شده در زمینه تحلیل ارتعاشات ورق های مدرج تابعی دوجهته همچنان محدود است. لیو و همکاران^۶ [۲۹]، از توابع نورس برای مدلسازی و تحلیل ارتعاش آزاد و کماتش ورق‌های مدرج تابعی دوجهته استفاده کردند. لیو و همکاران [۳۰]، با استفاده از تحلیل اینوزونومتريک، تحلیل ارتعاش آزاد و همچنین خمش ورق مدرج تابعی دوجهته با ضخامت متغیر را مورد مطالعه قرار دادند. فرزام و حسنی [۳۱]، ارتعاش آزاد، کماتش و خمش میکرو ورق‌های مدرج تابعی دوجهته را با استفاده از

را براساس تئوری تغییر شکل برشی نمایی غیرمحلّی مورد تحلیل قرار دارند. خورشیدی و بخششی [۱۲]، ارتعاش آزاد ورق مستطیلی مدرج تابعی در تماس با سیال را مطالعه کردند.

با توجه به این‌که برای طراحی و تحلیل دقیق و قابل اطمینان یک سازه نیاز است تا ارتعاش با دامنه بزرگ مورد بررسی واقع شود؛ چراکه در واقعیت همه پدیده‌ها غیرخطی هستند؛ لذا تحلیل غیرخطی به واقعیت نزدیکتر از تحلیل خطی می‌باشد؛ لذا برخی دیگر از محققان به بررسی ارتعاش غیرخطی ورق‌ها پرداختند. نثیر و قاهری [۱۳]، به مطالعه ارتعاش اجباری غیرخطی ورق‌های نازک دایروی از مواد مدرج تابعی پرداختند. آنها شرایط مرزی را دورگیردار در نظر گرفته و از روش اغتشاشات برای حل معادلات غیرخطی استفاده کردند. وانگ و زو^۱ [۱۴]، بر اساس تئوری کلاسیک، به بررسی ارتعاش غیرخطی ورق مستطیلی از مواد مدرج تابعی متخلخل پرداختند. آنها با استفاده از اصل دالامبر معادله غیرخطی جزئی حاکم بر ورق را استخراج و در نهایت پس از تبدیل به معادله دیفرانسیل معمولی به روش گالرکین آن را با روش هارمونیک بالانس حل نمودند. علی امین یزدی [۱۵] با استفاده از تئوری کلاسیک و روابط کرنش جابجایی ون کارمن^۲ به بررسی ارتعاش آزاد غیرخطی ورق مستطیلی از مواد مدرج تابعی پرداخت. او از روش اغتشاشی هوموتوبی برای استخراج نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به خطی استفاده کرد. لطف آور و همکاران [۱۶]، با استفاده از تئوری کلاسیک و روابط کرنش جابجایی ون کارمن به بررسی ارتعاش آزاد غیرخطی ورق مستطیلی کامپوزیتی پرداخت. آنها از دو روش تحلیلی تقریبی برای استخراج نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به خطی استفاده کردند. جی. وو و همکاران^۳ [۱۷]، به بررسی ارتعاش آزاد غیرخطی ورق ساخته شده از مواد مدرج تابعی پرداختند. آنها براساس تئوری کلاسیک ورق‌ها و با استفاده از یک بسط فوریه، اثر خواص مواد، شرایط مرزی و بارهای حرارتی را روی رفتار دینامیکی ورق مورد مطالعه قرار دادند. ملک‌زاده و منجم‌زاده [۱۸]، با به کارگیری تئوری کلاسیک ورق‌ها، به تحلیل پاسخ

⁴ Duc and Cong

⁵ Fung and Chen

⁶ Lieu et al.

¹ Wang and Zu

² Von Karman

³ Woo et al.

تابعی دو جهته فقط مربوط به تحلیل خطی آن می‌شود و تاکنون تحقیقی روی ارتعاش آزاد غیرخطی ورق مستطیلی مدرج تابعی دو جهته انجام نشده است. در این تحقیق، ارتعاش آزاد غیرخطی ورق مستطیلی مدرج تابعی دو جهته برای اولین بار مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. برای این منظور ابتدا معادلات حرکت ورق با استفاده از روابط کرنش جابجایی غیرخطی ون کارمن و همچنین اصل هامیلتون استخراج شده‌اند. سپس با اعمال روش گالرکین به معادلات جزئی حرکت معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی به دست می‌آیند. در نهایت، با استفاده از روش لیندشتد^۴ پوانکاره^۵ بهبود یافته معادله غیرخطی حرکت عرضی ورق به صورت کاملا تحلیلی حل می‌گردد. خواص مواد ورق براساس مدل توزیع توانی در دو راستای طولی و عرضی ورق متغیر فرض گردیده‌اند. در نهایت اثر برخی پارامترهای کلیدی سیستم روی فرکانس غیرخطی ورق مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرند. برای صحت‌گذاری نتایج مساله، نتایج این پژوهش با نتایج ادبیات گذشته و همچنین حل عددی مقایسه می‌شود.

۲- جنس و هندسه

شکل ۱ یک ورق مستطیلی ساخته شده از آلومینا و آلومینیوم با طول a ، عرض b و ضخامت h را نشان می‌دهد که از چهار طرف دارای تکیه‌گاه مفصلی است. مبدا دستگاه مختصات کارترین روی صفحه میانی ورق واقع شده است. خواص مواد (P) ورق مدرج تابعی دو جهته در دو راستای محورهای x و y به صورت پیوسته و براساس قانون توزیع توانی متغیر فرض گردیده است. این خواص به صورت زیر بیان می‌گردند [۲۹]:

$$P(x, y) = P_c V_c(x, y) + P_m V_m(x, y) \quad (1)$$

اگر کسر حجمی بخش سرامیک V_c و بخش فلزی V_m باشد، آنگاه جمع هردوی آنها بایستی برابر با یک باشد:

$$V_c + V_m = 1 \quad (2)$$

تحلیل ایزومتریک^۱ بررسی کردند. کومار و لال^۲ [۳۲]، فرکانس‌های طبیعی ورق‌های حلقوی مدرج تابعی دو جهته قرار گرفته روی بسترالاستیک را با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل محاسبه نمودند. شرعیات و علیپور [۳۳]، با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل، یک راه‌حل نیمه تحلیلی به منظور بررسی ارتعاش آزاد ورق‌های دایروی مدرج تابعی دو جهته قرار گرفته بر بسترالاستیک ارائه دادند. علیپور و شرعیات [۳۴]، با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل، به بررسی ارتعاش آزاد ورق‌های دایروی مدرج تابعی دو جهته قرار گرفته بر بسترالاستیک با ضخامت متغیر پرداختند. عراق و همکاران [۳۵]، ارتعاش آزاد سه بعدی پانل های خمیده مدرج تابعی دو جهته تقویت شده با فایبر با شرایط مرزی مختلف را مورد بررسی قرار دادند. کومار [۳۶] ارتعاش آزاد ورق‌های حلقوی مدرج تابعی دو جهته را با استفاده از روش های چیبیشو و تبدیل دیفرانسیل مورد تحلیل قرار داد. لال و اهلوات^۳ [۳۷، ۳۸]، با استفاده از دو تئوری کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، کمانش و ارتعاش آزاد ورق‌های دایروی مدرج تابعی دو جهته را مورد بررسی قرار دادند که تحت نیروی صفحه‌ای هیدرواستاتیک قرار دارند. شرعیات و علیپور [۳۹]، با ارائه روش تبدیل دیفرانسیل، ارتعاش آزاد و دمپینگ ورق‌های مدرج تابعی دو جهته قرار گرفته بر بسترالاستیک با ضخامت متغیر را مورد تحلیل قرار دادند. طاحونه و نائی [۴۰]، دینامیک سه بعدی ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی دو جهته قرار گرفته بر بسترالاستیک را براساس تئوری الاستیسیته مرتبه سوم مورد مطالعه قرار دادند. طاحونه و یاس [۴۱]، با ارائه یک حل نیمه تحلیلی، ارتعاش سه بعدی بخشی از ورق حلقوی مدرج تابعی چند جهته با شرایط مرزی مختلف را مورد تحقیق و تحلیل قرار دادند. یاس و مولودی [۴۲]، با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل ارتعاش سه بعدی ورق حلقوی مدرج تابعی چند جهته با پیزوالکتریک و خوبیده بر بسترالاستیک را مورد تحلیل قرار دادند.

با توجه به مطالعه مروری که بر ادبیات گذشته انجام شد، تعداد مقالات مربوط به ارتعاش ورق‌های مستطیلی مدرج

¹ Isogeometric Analysis (IGA)

² Kumar and Lal

³ Lal and Ahlawat

⁴ Lindstedt

⁵ Poincare

جدول ۱- خواص مواد برای ورق ساخته شده از مواد مدرج تابعی

خواص	سرامیک (Al_2O_3)	فلز (Al)
مدول یانگ	380 GPa	70 GPa
چگالی	$3800 \frac{Kg}{m^3}$	$2702 \frac{Kg}{m^3}$

با فرض تغییر شکل‌های نسبتاً بزرگ، روابط کرنش جابجایی غیرخطی ون کارمن به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (9)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (10)$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (11)$$

معادلات حاکم بر ورق براساس تئوری کلاسیک با استفاده از اصل هامیلتون از رابطه (۱۲) استخراج می‌شوند:

$$\int_{\Omega_0}^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (12)$$

U و V و K به ترتیب معرف انرژی کرنشی، کار نیروهای خارجی و انرژی جنبشی می‌باشند که به صورت زیر بیان می‌گردند:

$$\delta U = \int_{\Omega_0} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dz dx dy \quad (13)$$

$$\delta V = - \int_{\Omega_0} [q \delta w_0] dx dy \quad (14)$$

$$\delta K = \int_{\Omega_0} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho(x, y) (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dz dx dy \quad (15)$$

Ω_0 دامنه کلی طولی و عرضی ورق و q نیروی تحریک خارجی بوده که در بررسی ارتعاش آزاد ورق برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود. لازم به ذکر است که رابطه ۱۳ درحالتی صحیح است که تنش و کرنش رابطه خطی با هم داشته باشند. با جایگذاری روابط ۱۳ تا ۱۵ در رابطه ۱۲ و

براساس قانون توزیع توانی، کسر حجمی ورق مدرج تابعی دوجته به صورت پیوسته در دو جهت x و y به شکل زیر تغییر می‌کند [۲۹]:

$$V_c(x, y) = \left(\frac{x}{a} \right)^{k_x} \left(\frac{y}{b} \right)^{k_y}, k_x, k_y \geq 0 \quad (3)$$

که در رابطه ۳ k_x و k_y به ترتیب اندیس توانی در راستای محور x و y را نشان می‌دهد.

خواص مواد ورق شکل زیر را دارند:

$$E(x, y) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{x}{a} \right)^{k_x} \left(\frac{y}{b} \right)^{k_y} \quad (4)$$

$$\rho(x, y) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{x}{a} \right)^{k_x} \left(\frac{y}{b} \right)^{k_y} \quad (5)$$

که E و ρ به ترتیب مدول یانگ و چگالی جرمی ورق هستند. خواص مواد استفاده شده در این ورق، در جدول ۱ درج شده است.

۳- معادلات حرکت

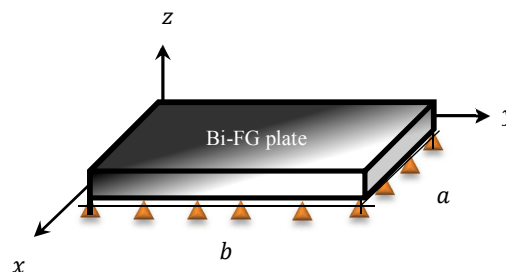
براساس تئوری کلاسیک ورق‌ها، جابجایی هر نقطه از ورق در راستای محورهای x, y و z از روابط زیر تعیین می‌شوند [۴۳]:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (6)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (7)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (8)$$

که در معادلات ۸-۶ w_0 و v_0, u_0 جابجایی‌های نقطه دلخواه روی صفحه میانی ورق در راستای محورهای x, y و z است.



شکل ۱- هندسه یک ورق مستطیلی ساخته شده از مواد مدرج تابعی

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (17)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (18)$$

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} \rho(x, y) dz = \begin{Bmatrix} \rho(x, y)h \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

براساس تئوری کلاسیک ورق، روابط تنش-کرنش به صورت زیر نوشته می‌شوند [۲۹]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11}(x, y) & Q_{12}(x, y) & 0 \\ Q_{12}(x, y) & Q_{22}(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}(x, y) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

که ضرایب سفتی Q_{ij} به صورت زیر تعریف می‌گردند [۲۹]:

$$Q_{11}(x, y) = Q_{22}(x, y) = \frac{E(x, y)}{1 - \nu^2} \quad (21)$$

$$Q_{12}(x, y) = \frac{\nu E(x, y)}{1 - \nu^2} \quad (22)$$

$$Q_{66}(x, y) = \frac{E(x, y)}{2(1 + \nu)} \quad (23)$$

ضریب پواسان ν در روابط ۲۱-۲۳ ثابت و برابر با ۰/۳ فرض می‌گردد.

با حذف $(\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0)$ از معادله ۱۶ و سپس با برابر قرار دادن ضرایب $(\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0)$ با صفر به صورت جداگانه (با استفاده از قانون حساب تغییرات)، شکل کلی معادلات حرکت ورق مدرج تابعی دو جهته در شکل تئوری کلاسیک به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \quad (24)$$

$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ & + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ & + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (26)$$

با توجه به نازک بودن ورق، می‌توان از تاثیر اینرسی‌های داخل صفحه صرف‌نظر نمود [۴۴].

انتگرال‌گیری در راستای ضخامت ورق رابطه (۱۶) استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\{ \int_{\Omega_0} [N_{xx} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right) \right. \\ & - M_{xx} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + N_{yy} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) \\ & - M_{yy} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} - 2 M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \\ & + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} + \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) \\ & - I_0 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) \\ & + I_1 \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \frac{\partial w_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 + \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \dot{u}_0 + \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \dot{v}_0 \right) \\ & \left. - I_2 \left(\frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right] dx dy \} dt = 0 \end{aligned} \quad (16-الف)$$

پس از انتگرال‌گیری جزء به جزء از معادله ۱۶ الف:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\{ \int_{\Omega_0} \left[- \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \delta u_0 - \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \delta w_0 \right. \right. \\ & - \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} \delta w_0 - \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} \delta v_0 \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \delta w_0 - \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} \delta w_0 \\ & - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \delta w_0 - \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u_0 - \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v_0 \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \delta w_0 - \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \delta w_0 \\ & + I_0 (\ddot{u}_0 \delta u_0 + \ddot{v}_0 \delta v_0 + \ddot{w}_0 \delta w_0) \\ & + I_1 \left(\frac{\partial \dot{u}_0}{\partial x} \delta w_0 - \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta u_0 + \frac{\partial \dot{v}_0}{\partial y} \delta w_0 \right. \\ & \left. - \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta v_0 \right) \left. \right] dx dy \} dt = 0 \end{aligned} \quad (16-ب)$$

که M, N و I به ترتیب نیروهای منته‌داخل صفحه، مان‌های منته‌داخل و جمله‌های مربوط به اینرسی می‌باشند. این روابط برحسب مولفه‌های تنش در راستای ضخامت ورق به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^3 S^4 - \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial \bar{y}^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} S^4 - \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{y}^3} S^4 \\ & \frac{3 \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \bar{E} S^4}{2r^4(1-\nu^2)} - \frac{\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{y}^4} \bar{E} S^4}{12r^4(1-\nu^2)} + \frac{\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} S^3}{r^3(1-\nu^2)}}{2r^4(1-\nu^2)} \\ & + \frac{\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \bar{E} S^3}{r^3(1-\nu^2)} + \frac{\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \bar{E} S^3}{r^3(1-\nu^2)} + \frac{\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^2 S^2}{2r^4(\nu+1)}}{2r^4(1-\nu^2)} \\ & + \frac{\nu \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^2 S^2}{2r^4(1-\nu^2)} + \frac{\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} S^2}{2r^3(\nu+1)}}{2r^3(\nu+1)} + \frac{\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} S^2}{2r^4(\nu+1)}}{2r^4(\nu+1)} \\ & + \frac{\nu \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} S^2}{2r^4(1-\nu^2)} + \frac{\nu \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} S^2}{r^3(1-\nu^2)} + \frac{\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} S^2}{2r^3(\nu+1)}}{r^3(1-\nu^2)} \\ & - \frac{\nu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial \bar{y}^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} S^2}{12r^4(1-\nu^2)} - \frac{\nu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} S^2}{12r^4(1-\nu^2)} - \frac{\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} S^2}{6r^4(\nu+1)}}{6r^4(\nu+1)} \\ & - \frac{\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} S^2}{6r^4(\nu+1)} - \frac{\nu \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} S^2}{6r^4(1-\nu^2)} - \frac{\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} S^2}{6r^4(\nu+1)}}{6r^4(1-\nu^2)} \\ & - \frac{\nu \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} S^2}{6r^4(1-\nu^2)} + \frac{\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \bar{E} S^2}{2r^3(\nu+1)} + \frac{\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \bar{E} S^2}{2r^4(\nu+1)}}{2r^3(\nu+1)} \\ & + \frac{\nu \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \bar{E} S^2}{2r^4(1-\nu^2)} + \frac{\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \bar{E} S^2}{2r^4(\nu+1)}}{2r^4(1-\nu^2)} \\ & + \frac{\nu \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \bar{E} S^2}{2r^4(1-\nu^2)} + \frac{\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \bar{E} S^2}{r^3(1-\nu^2)} + \frac{\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}} \bar{E} S^2}{2r^3(\nu+1)}}{r^3(1-\nu^2)} \\ & + \frac{\nu \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}} \bar{E} S^2}{r^3(1-\nu^2)} + \frac{2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \bar{E} S^2}{r^4(\nu+1)}}{r^3(1-\nu^2)} \\ & + \frac{\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}} \bar{E} S^2}{r^3(\nu+1)} + \frac{2\nu \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \bar{E} S^2}{r^4(1-\nu^2)}}{r^3(\nu+1)} \\ & - \frac{\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} \bar{E} S^2}{6r^4(\nu+1)} - \frac{\nu \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} \bar{E} S^2}{6r^4(1-\nu^2)} + \frac{\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} S}{2r^3(\nu+1)}}{2r^3(\nu+1)} \\ & + \frac{\nu \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} S}{r^3(1-\nu^2)} + \frac{\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} S}{2r^3(\nu+1)}}{2r^3(\nu+1)} + \frac{\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \bar{E} S}{2r^3(\nu+1)}}{2r^3(\nu+1)} \\ & + \frac{\nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \bar{E} S}{r^3(1-\nu^2)} + \frac{\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}} \bar{E} S}{2r^3(\nu+1)}}{2r^3(\nu+1)} + \frac{\nu \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}} \bar{E} S}{r^3(1-\nu^2)}}{r^3(1-\nu^2)} \end{aligned}$$

به منظور ساده‌سازی روابط، پارامترهای بدون بعد زیر تعریف می‌گردند:

$$\begin{aligned} (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) &= \frac{(u_0, v_0, w_0)}{h}, \quad (\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}) = \frac{(U, V, W)}{h} \\ (\bar{x}, \bar{y}) &= \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b} \right), \quad (r, s) = \left(\frac{a}{h}, \frac{a}{b} \right), \quad \bar{E} = \frac{E}{E_m} \\ \bar{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_m} \quad \tau = \frac{t}{h} \sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}} \end{aligned} \quad (27)$$

باجایگذاری رابطه ۲۰ در روابط ۱۷ تا ۱۹ و جایگذاری نتایج در معادلات ۲۴ تا ۲۶، معادلات حرکت بدون بعد ورق برحسب مولفه‌های جابجایی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} & s^2 \nu \bar{E} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \frac{s^2 \bar{E} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}}}{2r^3(\nu+1)} + \frac{s \nu \bar{E} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}}}{r^2(1-\nu^2)} \\ & + \frac{s \bar{E} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}}}{2r^2(\nu+1)} + \frac{s^2 \nu \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^2}{2r^3(1-\nu^2)} + \frac{s^2 \bar{E} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2}}{2r^3(\nu+1)} \\ & + \frac{s^2 \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}}}{2r^3(\nu+1)} + \frac{\bar{E} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}}{r^3(1-\nu^2)} + \frac{\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2}{2r^3(1-\nu^2)} \\ & + \frac{s^2 \bar{E} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}}{2r^2(\nu+1)} + \frac{s^2 \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}}{2r^2(\nu+1)} + \frac{s \nu \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}}{r^2(1-\nu^2)} \\ & + \frac{s \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}}{2r^2(\nu+1)} + \frac{\bar{E} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}}{r^2(1-\nu^2)} + \frac{\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}}{r^2(1-\nu^2)} = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & s \nu \bar{E} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \frac{s \bar{E} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}}}{2r^3(\nu+1)} + \frac{s \nu \bar{E} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}}}{r^2(1-\nu^2)} \\ & + \frac{s \bar{E} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}}}{2r^2(\nu+1)} + \frac{s^3 \bar{E} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2}}{r^3(1-\nu^2)} + \frac{s^3 \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^2}{2r^3(1-\nu^2)} \\ & + \frac{s \nu \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2}{2r^3(1-\nu^2)} + \frac{s \bar{E} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}}{2r^3(\nu+1)} + \frac{s \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}}}{2r^3(\nu+1)} \\ & + \frac{s^2 \bar{E} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}}{r^2(1-\nu^2)} + \frac{s^2 \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}}{r^2(1-\nu^2)} + \frac{s \nu \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}}{r^2(1-\nu^2)} \\ & + \frac{s \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}}{2r^2(\nu+1)} + \frac{\bar{E} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2}}{2r^2(\nu+1)} + \frac{\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}}{2r^2(\nu+1)} = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$C_{11}\bar{W}^2 + C_{12}\bar{U} + C_{13}\bar{V} = 0 \quad (۳۶)$$

$$C_{21}\bar{W}^2 + C_{22}\bar{U} + C_{23}\bar{V} = 0 \quad (۳۷)$$

$$C_{31} \frac{d^2\bar{W}}{d\tau^2} + C_{32}\bar{W} + C_{33}\bar{U}\bar{W} + C_{34}\bar{V}\bar{W} + C_{35}\bar{W}^3 = 0 \quad (۳۸)$$

ضرایب C_{ij} در معادلات ۳۶-۳۸ وابسته به هندسه و خواص ورق می‌باشند که در پیوست (الف) آورده شده‌اند. از دو معادله ۳۶ و ۳۷ دو مجهول \bar{U} و \bar{V} را برحسب \bar{W} به دست آورده و با جایگذاری در معادله ۳۸ معادله دیفرانسیل غیر خطی مربوط به حرکت عرضی ورق به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$\frac{d^2\bar{W}}{d\tau^2} + \alpha\bar{W} + \gamma\bar{W}^3 = 0 \quad (۳۹)$$

ضرایب α و γ در پیوست (ب) آورده شده‌اند.

۴- روش تحلیلی

در این پژوهش، از روش لیندشتد پوانکاره بهبود یافته برای حل معادله ۳۹ استفاده می‌شود. وسط ورق تحت شرایط اولیه زیر است:

$$\bar{W}(0) = \frac{W_{max}}{h} = A \quad \frac{d\bar{W}(0)}{d\tau} = 0 \quad (۴۰)$$

که W_{max} و A به ترتیب بیشترین خیز وسط ورق و شکل بدون بعد شرایط اولیه می‌باشند. با توجه به ملزومات روش حل، بایستی یک پارامتر کوچک، مثبت و بدون بعد معرفی گردد؛ بنابراین، معادله ۳۹ به صورت ۴۱ بازنویسی می‌شود:

$$\frac{d^2\bar{W}}{d\tau^2} + \alpha\bar{W} + \epsilon\gamma\bar{W}^3 = 0 \quad (۴۱)$$

ϵ پارامتر مذکور است که به صورت ۴۲ تعریف می‌شود:

$$\epsilon = \frac{1}{r} = \frac{h}{a} \quad (۴۲)$$

فرکانس خطی ورق مدرج تابعی دو جهته از رابطه زیر استخراج می‌گردد:

$$\alpha = \omega^2 = \omega_l^2 \quad (۴۳)$$

براساس [۴۶] و [۴۷]، $\bar{W}(\tau)$ و α می‌تواند به صورت یک سری توانی از ϵ نوشته شود:

$$\bar{W} = \bar{W}_0 + \epsilon\bar{W}_1 + \epsilon^2\bar{W}_2 + \dots \quad (۴۴)$$

$$\alpha = \omega_{NL}^2 + \epsilon C_1 + \epsilon^2 C_2 + \dots \quad (۴۵)$$

که فرکانس غیر خطی ω_{NL} و ضرایب مجهول C_i در ادامه محاسبه می‌گردند.

$$\begin{aligned} & + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \bar{E} S + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^3 + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \\ & + \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{x}^3} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \bar{E} \\ & + \frac{3 \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \bar{E}}{2r^4(1-\nu^2)} + \frac{\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \bar{E}}{r^3(1-\nu^2)} \\ & - \frac{\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} \bar{E}}{12r^4(1-\nu^2)} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \tau^2} \end{aligned} \quad (۳۰)$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی دور مفصل روابط زیر برقرار هستند [۴۵]:

$$at \ x = 0, a \quad v_0 = w_0 = M_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx} \ z dz = 0 \quad (۳۱)$$

$$at \ y = 0, b \quad u_0 = w_0 = M_{yy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy} \ z dz = 0 \quad (۳۲)$$

شرایط مرزی در روابط ۳۱ و ۳۲ با توابع مجاز زیر ارضاء می‌گردند [۴۵]:

$$\bar{u}_0(\bar{x}, \bar{y}, \tau) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \bar{U}_{pq}(\tau) \cos(qp\bar{x}) \sin(p\pi\bar{y}) \quad (۳۳)$$

$$\bar{v}_0(\bar{x}, \bar{y}, \tau) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \bar{V}_{pq}(\tau) \sin(qp\bar{x}) \cos(p\pi\bar{y}) \quad (۳۴)$$

$$\bar{w}_0(\bar{x}, \bar{y}, \tau) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \bar{W}_{pq}(\tau) \sin(qp\bar{x}) \sin(p\pi\bar{y}) \quad (۳۵)$$

که \bar{U} ، \bar{V} و \bar{W} به ترتیب توابع زمانی مجهول بی‌بعد و همچنین p و q شماره نیم موج می‌باشند.

با در نظر گرفتن فقط یک جمله در معادلات ۳۳ تا ۳۵ ارتعاش در مود اول مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور با قرار دادن $p = q = 1$ در معادلات ۳۳ تا ۳۵ و جایگذاری آنها در معادلات ۲۸ تا ۳۰ و سپس اعمال روش گالرکین، معادلات دیفرانسیل معمولی و غیر خطی حرکت به صورت زیر استخراج می‌گردند:

بعد از حل معادله ۴۸، \bar{W}_2 به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \bar{W}_2 = & \left(\frac{c_1 \beta A^2}{2\omega^4} \right) + \left(\frac{(r\gamma)^2 A^5}{1024\omega^2} \right) \cos(5\omega\tau) \\ & + \left(\frac{c_1 r\gamma A^3}{256\omega^2} + \frac{3(r\gamma)^2 A^5}{1024\omega^2} \right) \cos(3\omega\tau) \\ & + \left(-\frac{c_1 r\gamma A^3}{256\omega^4} - \frac{(r\gamma)^2 A^5}{256\omega^4} \right) \cos(\omega\tau) \quad (55) \end{aligned}$$

در نهایت، تقریب مرتبه دوم حل معادله غیرخطی ۳۹ به صورت زیر است:

$$\bar{W}_{2nd} = \bar{W}_0 + \epsilon \bar{W}_1 + \epsilon^2 \bar{W}_2 \quad (56)$$

۵- نتایج و بحث

۵-۱- اعتبارسنجی نتایج

به عنوان مطالعه مقایسه‌ای، ابتدا با صرف نظر از جمله‌های غیرخطی معادلات حرکت، پارامتر فرکانس نرمالایز شده $\bar{\omega} = \omega \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \frac{\rho_c h}{D_c}$ نیتريد و فولاد ضدزنگ ($Si_3N_4/SUS304$) به دست می آید. نتایج عددی برای مدول الاستیسیته فلز و سرامیک به ترتیب ۲۰۱/۰۴ و ۳۴۸/۴۳ گیگاپاسکال، چگالی فلز و سرامیک به ترتیب ۸۱۶۶ و ۲۳۷۰ کیلوگرم بر مترمکعب و ضریب پواسان فلز و سرامیک به ترتیب ۰/۳۲۶۲ و ۰/۲۴ استخراج شده‌اند [۲۹]. جدول ۲ گزارشی از مقایسه نتایج حاضر با نتایج مقاله مرجع [۲۹] را ارائه می‌دهد. در این جدول فقط فرکانس‌های خطی با یکدیگر مقایسه گشته‌اند. همان‌طور که از این جدول مشاهده می‌گردد، نتایج پژوهش حاضر با نتایج مرجع مذکور تطابق بسیار خوبی دارد. همان‌طور که در بخش قبلی ملاحظه گردید، معادله غیرخطی ورق مدرج تابعی دوجهته با روش تحلیلی لیندشتدپوانکاره بهبود یافته حل گردید. به منظور اطمینان از صحت و همگرایی روش حل پیشنهادی، پاسخ زمانی وسط ورق با استفاده از هر دو روش لیندشتدپوانکاره بهبود یافته و همچنین روش عددی رانج کوتا مرتبه چهارم حل و در نمودار ۲ با یکدیگر مقایسه شده‌اند. لازم به ذکر است که روش عددی رانج کوتا در نرم افزار متلب کدنویسی و گام زمانی ۰/۰۱ برای حل در نظر گرفته شده است. نتایج عددی برای $k_x = k_y = 1$ و $\frac{a}{h} = 10, A = 1$ به دست آمده است.

باجایگذاری معادله ۴۴ و ۴۵ در معادله ۴۱ و سپس با صفر برابر قراردادن ضرایب $\epsilon^0, \epsilon^1, \epsilon^2$ و معادلات زیر استخراج می‌شوند:

$$\begin{aligned} \epsilon^0 : \quad & \ddot{\bar{W}}_0 + \omega^2 \bar{W}_0 = 0 \\ & \bar{W}_0(0) = A \quad \frac{d\bar{W}_0}{d\tau}(0) = 0 \quad (46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon^1 : \quad & \ddot{\bar{W}}_1 + \omega^2 \bar{W}_1 = -c_1 \bar{W}_0 - r\gamma \bar{W}_0^3 \\ & \bar{W}_1(0) = 0 \quad \frac{d\bar{W}_1}{d\tau}(0) = 0 \quad (47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon^2 : \quad & \ddot{\bar{W}}_2 + \omega^2 \bar{W}_2 = -c_2 \bar{W}_0 - c_1 \bar{W}_1 - 3r\gamma \bar{W}_1 \bar{W}_0^2 \\ & \bar{W}_2(0) = 0 \quad \frac{d\bar{W}_2}{d\tau}(0) = 0 \quad (48) \end{aligned}$$

نتیجه حل معادله ۴۶ با شرایط اولیه مربوطه به صورت زیر است:

$$\bar{W}_0 = A \cos(\omega\tau) \quad (49)$$

باجایگذاری معادله ۴۹ در معادله ۴۷:

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{W}}_1 + \omega^2 \bar{W}_1 = & \left(-c_1 A - \frac{3}{4} r\gamma A^3 \right) \cos(\omega\tau) \\ & - \frac{\gamma A^3}{4} \cos(3\omega\tau) \quad (50) \end{aligned}$$

به منظور داشتن پاسخ پریودیک برای \bar{W}_1 بایستی جمله سکولار در معادله ۵۰ حذف گردد. بنابراین:

$$c_1 = -\frac{3}{4} r\gamma A^2 \quad (51)$$

حل معادله ۵۰ به صورت رابطه ۵۲ است:

$$\bar{W}_1 = \frac{\gamma A^3}{32\omega^2} (\cos(3\omega\tau) - \cos(\omega\tau)) \quad (52)$$

بطور مشابه، باجایگذاری معادلات ۴۹ و ۵۲ در معادله ۴۸ و صرف نظر از جمله سکولار، ضریب مجهول c_2 به دست می آید:

$$c_2 = \frac{3\gamma^2 A^4}{128\omega^2} \quad (53)$$

فرکانس طبیعی غیرخطی ورق با استفاده از روابط ۴۵، ۵۱ و ۵۳ استخراج می‌گردد:

$$\begin{aligned} \omega_{NL} = & \sqrt{\frac{A' + B'}{2}} \quad A' = \left(\alpha + \frac{3}{4} \epsilon r\gamma A^2 \right) \\ B' = & \sqrt{\left(\alpha + \frac{3}{4} \epsilon r\gamma A^2 \right)^2 - \frac{3(r\gamma)^2 A^4}{32} \epsilon^2} \quad (54) \end{aligned}$$

همان طور که از این نمودار ملاحظه می‌گردد، روش تحلیلی لیندشتدیوانکاره بهبود یافته و همچنین راه حل عددی رانج کوتا مرتبه چهارم با یکدیگر تطابق بسیار خوبی دارد و این بدین معناست که راه حل تحلیلی پیشنهادی علاوه بر این که یک ابزار حل ساده برای معادلات غیر خطی است، از دقت بسیار خوبی برخوردار است.

با توجه به اینکه در مسأله ارتعاشات غیرخطی سایر مودها می‌توانند برهم تأثیر گذار باشند و در مسأله حاضر که تغییرات ماده مدرج تابعی در راستای طول و عرض صفحه است، لذا تأثیر سایر مودها در پاسخ قابل صرف نظر به نظر نمی‌رسد؛ بنابراین با توجه به اینکه در مسأله حاضر نتایج فقط در مود اول بررسی شده‌اند، برای اطمینان از این که پاسخ زمانی چند مودی وسط ورق روی پاسخ زمانی تک مودی وسط ورق اثرگذار است یا خیر، پاسخ سه مود اول از روش

عددی رانج کوتا مرتبه چهارم بدست آمده و با پاسخ تک مودی در نمودار ۳ مقایسه می‌گردد. لازم به ذکر است که روش عددی رانج کوتا در نرم افزار متلب کدنویسی و گام زمانی ۰/۰۱ برای حل در نظر گرفته شده است. نتایج عددی برای $k_x = k_y = 1$ و $\frac{a}{h} = 10, A = 0/5$ به دست آمده است. همان طور که از این نمودار ملاحظه می‌گردد، اثر مودهای بالاتر (حدافل سه مود اول) بر پاسخ تک مودی سیستم تأثیر زیادی ندارد؛ لذا می‌توان با صرف نظر از اثر مودهای بالاتر روی پاسخ تک مودی نتایج را در مود اول بررسی کرد.

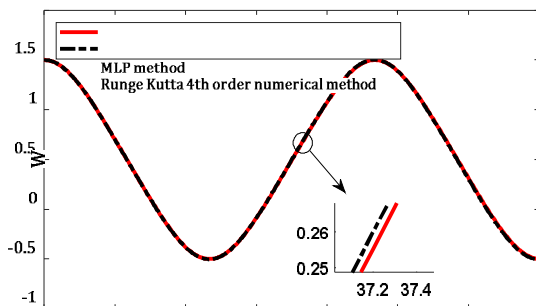
۵-۱- مطالعه پارامتری

در بخش حاضر، تأثیر برخی از پارامترهای کلیدی سیستم همچون دامنه ارتعاش بدون بعد (A)، نسبت ابعاد (a/b)،

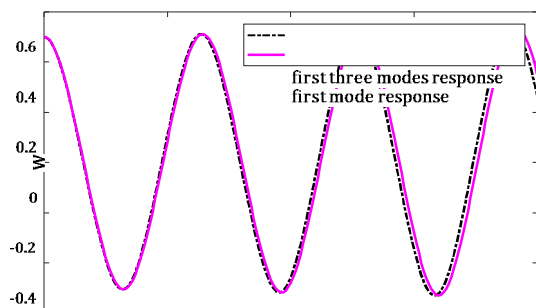
جدول ۲- مقایسه پارامتر فرکانس نرمالایز شده $\bar{\omega} = \omega \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \frac{\rho_c h}{D_c}$ ورق‌های مربعی ساخته شده از $Si_3N_4/SUS304$ برای اندیس‌های توانی مختلف (k_x, k_y) زمانی که نسبت طول به ضخامت ورق برابر $a/h = 10$ باشد.

k_y	منابع	k_x					
		۰	۰/۵	۱	۲	۵	۱۰
۰	نتایج حاضر	۲/۰۰۰۰	۱/۴۰۴۱	۱/۱۹۱۲	۱/۰۱۷۵	۰/۸۸۶۰	۰/۸۴۶۰
	[۲۹]	۱/۹۳۸۳	۱/۳۳۲۶	۱/۱۳۲۱	۰/۹۷۸۷	۰/۸۶۹۴	۰/۸۳۶۹
۰/۵	نتایج حاضر	۱/۴۰۴۱	۱/۱۶۴۷	۱/۰۵۲۶	۰/۹۴۹۱	۰/۸۶۳۵	۰/۸۳۶۶
	[۲۹]	۱/۳۳۲۸	۱/۱۱۱۲	۱/۰۱۰۸	۰/۹۲۱۳	۰/۸۵۰۳	۰/۸۲۸۳
۱	نتایج حاضر	۱/۱۹۱۲	۱/۰۵۲۶	۰/۹۸۱۶	۰/۹۱۲۲	۰/۸۵۱۹	۰/۸۳۲۳
	[۲۹]	۱/۱۳۲۲	۱/۰۱۰۸	۰/۹۴۹۵	۰/۸۹۰۷	۰/۸۴۰۷	۰/۸۲۴۵
۲	نتایج حاضر	۱/۰۱۷۵	۰/۹۴۹۱	۰/۹۱۲۲	۰/۸۷۴۷	۰/۸۴۰۲	۰/۸۲۸۱
	[۲۹]	۰/۹۷۸۶	۰/۹۲۱۲	۰/۸۹۰۶	۰/۸۵۹۴	۰/۸۳۰۷	۰/۸۲۰۷
۵	نتایج حاضر	۰/۸۸۶۰	۰/۸۶۳۵	۰/۸۵۱۹	۰/۸۴۰۲	۰/۸۲۸۷	۰/۸۲۳۹
	[۲۹]	۰/۸۶۹۳	۰/۸۵۰۲	۰/۸۴۰۶	۰/۸۳۰۷	۰/۸۲۰۸	۰/۸۱۶۷
۱۰	نتایج حاضر	۰/۸۴۶۰	۰/۸۳۶۶	۰/۸۳۲۳	۰/۸۲۸۱	۰/۸۲۳۹	۰/۸۲۱۶
	[۲۹]	۰/۸۳۶۸	۰/۸۲۸۳	۰/۸۲۴۴	۰/۸۲۰۶	۰/۸۱۶۷	۰/۸۱۴۸

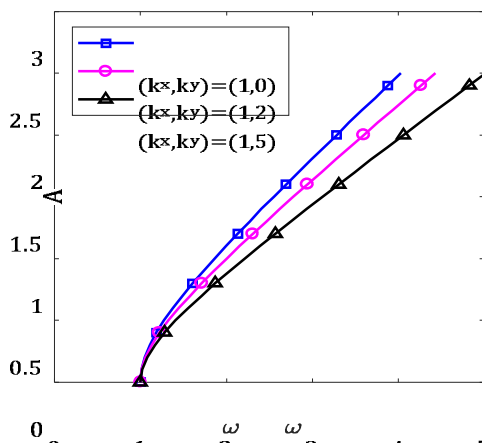
اندیس عرضی ماده مدرج (k_y) نمودارها از محور عمودی دورتر می‌شوند. به عبارت دیگر، با تغییر اندیس‌ها درجه رفتار غیرخطی ورق تغییر می‌کند.



شکل ۲- مقایسه پاسخ ارتعاشی (رابطه ۵۶) ورق مربعی از مواد مدرج تابعی با استفاده از دو روش تحلیلی و عددی



شکل ۳- مقایسه پاسخ زمانی ارتعاشی چندمودی و تک‌مودی ورق مربعی مدرج تابعی دو جهته



شکل ۴- تاثیر تغییرات نسبت فرکانسی روی دامنه ارتعاش برای مقادیر مختلف اندیس توانی عرضی

اندیس طولی ماده مدرج (k_x)، اندیس عرضی ماده مدرج (k_y) و نسبت طول به ضخامت ورق (a/h) روی فرکانس‌های غیرخطی (ω_{NL}) در قالب جداول و نمودار مورد بررسی واقع می‌گردد. نتایج این بخش برای ورق از جنس آلومینا و آلومینیوم انجام شده است که خواص آن در جدول ۱ آورده شده است. این نکته قابل ذکر است که در این بخش منظور از نسبت فرکانسی، نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی است.

جدول ۳ تاثیر نسبت طول به ضخامت ورق روی فرکانس طبیعی غیرخطی و همچنین فرکانس خطی ورق مربعی مدرج تابعی دو جهته را برای مقادیر مختلف اندیس‌های توانی k_x و k_y زمانی که دامنه ارتعاش بدون بعد ۱ نشان می‌دهد.

جدول ۴ تاثیر دامنه ارتعاش بدون بعد را روی نسبت فرکانسی ورق مربعی مدرج تابعی دو جهته برای مقادیر مختلف اندیس‌های توانی k_x و k_y نشان می‌دهد. نتایج عددی برای نسبت اندازه $a/b = 1$ و نسبت طول به ضخامت $a/h = 20$ استخراج شده است. این جدول نشان می‌دهد که افزایش دامنه ارتعاش بدون بعد منجر به افزایش نسبت فرکانس می‌شود. به عبارت دیگر، تفاوت میان فرکانس خطی و غیرخطی به شدت وابسته به دامنه ارتعاش است. توجه شود که فرکانس خطی ورق با صفر قرار دادن دامنه ارتعاش بدون بعد ورق در رابطه ۵۴ حاصل می‌شود.

برای بررسی بیشتر تاثیر اندیس‌های توانی k_x و k_y روی فرکانس‌های غیرخطی ورق، تغییرات نسبت فرکانسی برحسب اندیس‌های طولی و عرضی در نمودارهای ۳ و ۴ نمایش داده شده است.

نمودارهای ۴ و ۵ که به نمودارهای پشتواره^۱ معروف هستند، تاثیر دامنه ارتعاش بدون بعد روی نسبت فرکانس ورق مستطیلی مدرج تابعی دو جهته برای مقادیر مختلف اندیس‌های توانی k_x و k_y را نشان می‌دهد. نتایج عددی برای نسبت طول به عرض برابر ۲ و نسبت طول به ضخامت برابر ۱۰ استخراج شده است. همان‌طور که از این نمودارها واضح است، که اندیس‌های توانی تاثیر چشمگیری روی نسبت فرکانسی دارند. همان‌طور که مشاهده می‌گردد با کاهش اندیس طولی ماده مدرج (k_x) و همچنین افزایش

^۱ Backbone Curve

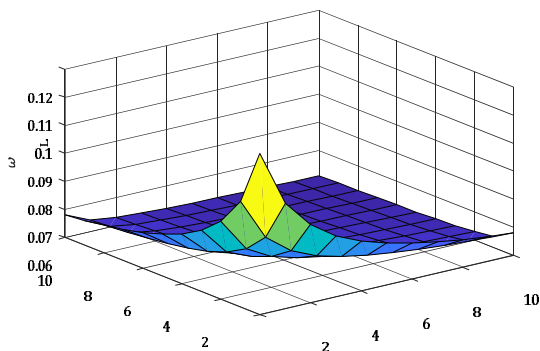
جدول ۳- پارامتر فرکانس غیرخطی (فرکانس خطی) ورق مدرج تابعی دوجته مربعی ($A = 1$)

$\frac{a}{h}$	k_y	k_x				
		0	1	2	5	10
۵	۰	۰/۷۶۳۵	۰/۶۳۵۲	۰/۵۸۱۷	۰/۵۱۶۲	۰/۴۷۷۶
		۰/۴۶۹۴	۰/۳۹۰۵	۰/۳۵۱۲	۰/۲۹۹۵	۰/۲۷۲۱
	۱	۰/۶۳۵۲	۰/۵۲۷۵	۰/۴۹۹۶	۰/۴۵۶۵	۰/۴۳۴۲
		۰/۳۹۰۵	۰/۳۳۰۵	۰/۳۰۳۳	۰/۲۷۱۴	۰/۲۵۶۱
	۲	۰/۵۸۱۷	۰/۴۹۹۶	۰/۴۶۶۴	۰/۴۳۱۰	۰/۴۱۵۵
		۰/۵۱۶۲	۰/۴۵۶۵	۰/۴۳۱۰	۰/۴۰۶۲	۰/۳۹۷۸
۱۰	۰/۴۷۷۶	۰/۴۳۴۲	۰/۴۱۵۵	۰/۳۹۷۸	۰/۳۹۲۵	
۱۰	۰	۰/۱۹۰۹	۰/۱۵۸۸	۰/۱۴۵۴	۰/۱۲۹۱	۰/۱۱۹۴
		۰/۱۱۷۴	۰/۰۹۷۶	۰/۰۸۷۸	۰/۰۷۴۹	۰/۰۶۸۰
	۱	۰/۱۵۸۸	۰/۱۳۴۴	۰/۱۲۴۹	۰/۱۱۴۱	۰/۱۰۸۶
		۰/۰۹۷۶	۰/۰۸۲۶	۰/۰۷۵۸	۰/۰۶۷۸	۰/۰۶۴۰
	۲	۰/۱۴۵۴	۰/۱۲۴۹	۰/۱۱۶۶	۰/۱۰۷۷	۰/۱۰۳۹۰
		۰/۱۲۹۱	۰/۱۱۴۱	۰/۱۰۷۷	۰/۱۰۱۶	۰/۰۹۹۴
۱۰	۰/۱۱۹۴	۰/۱۰۸۶	۰/۱۰۳۹	۰/۰۹۹۴	۰/۰۹۸۱	
۲۰	۰	۰/۰۴۷۷	۰/۰۳۹۷	۰/۰۳۶۴	۰/۰۳۲۳	۰/۰۲۹۸
	۱	۰/۰۳۹۷	۰/۰۳۳۶	۰/۰۳۱۲	۰/۰۲۸۵	۰/۰۲۷۱
	۲	۰/۰۳۶۴	۰/۰۳۱۲	۰/۰۲۹۱	۰/۰۲۶۹	۰/۰۲۶۰
	۵	۰/۰۳۲۳	۰/۰۲۸۵	۰/۰۲۶۹	۰/۰۲۵۴	۰/۰۲۴۹
	۱۰	۰/۰۲۹۸	۰/۰۲۷۱	۰/۰۲۶۰	۰/۰۲۴۹	۰/۰۲۴۵
۵۰	۰	۰/۰۰۷۶	۰/۰۰۶۳	۰/۰۰۵۸	۰/۰۰۵۲	۰/۰۰۴۸
	۱	۰/۰۰۶۳	۰/۰۰۵۴	۰/۰۰۵۰	۰/۰۰۴۶	۰/۰۰۴۳
	۲	۰/۰۰۵۸	۰/۰۰۵۰	۰/۰۰۴۷	۰/۰۰۴۳	۰/۰۰۴۱
	۵	۰/۰۰۵۲	۰/۰۰۴۶	۰/۰۰۴۳	۰/۰۰۴۱	۰/۰۰۴۰
	۱۰	۰/۰۰۴۸	۰/۰۰۴۳	۰/۰۰۴۱	۰/۰۰۴۰	۰/۰۰۳۹
۱۰۰	۰	۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۱۲
	۱	۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۱
	۲	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۰
	۵	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۱۰
	۱۰	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۱۰

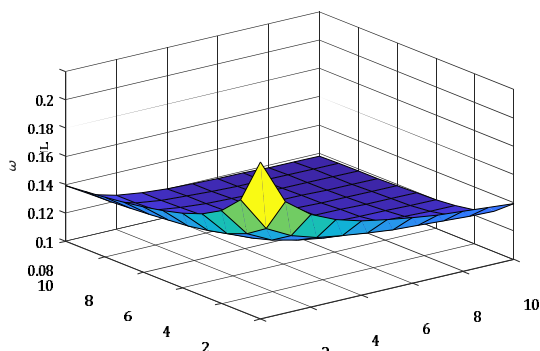
جدول ۴- نسبت فرکانسی (ω_{NL}/ω_L) ورق مدرج تابعی دوجته مربعی

A	k_y	k_x				
		۰	۱	۲	۵	۱۰
۰/۲۵	۰	۱/۰۵۱۳	۱/۰۵۱۳	۱/۰۵۴۳	۱/۰۶۱۳	۱/۰۶۴۵
	۱	۱/۰۵۱۳	۱/۰۵۱۳	۱/۰۵۳۴	۱/۰۵۶۹	۱/۰۵۸۳
	۲	۱/۰۵۴۳	۱/۰۵۳۴	۱/۰۵۲۹	۱/۰۵۳۰	۱/۰۵۳۷
	۵	۱/۰۶۱۳	۱/۰۵۶۹	۱/۰۵۳۰	۱/۰۴۹۶	۱/۰۴۹۸
	۱۰	۱/۰۶۴۵	۱/۰۵۸۳	۱/۰۵۳۷	۱/۰۴۹۸	۱/۰۴۹۶
۱/۷۵	۰	۱/۳۸۹۸	۱/۳۸۹۸	۱/۴۰۹۵	۱/۴۵۴۷	۱/۴۷۵۶
	۱	۱/۳۸۹۸	۱/۳۸۹۸	۱/۴۰۳۴	۱/۴۲۶۷	۱/۴۳۵۵
	۲	۱/۴۰۹۵	۱/۴۰۳۴	۱/۴۰۰۳	۱/۴۰۰۹	۱/۴۰۵۶
	۵	۱/۴۵۴۷	۱/۴۲۶۷	۱/۴۰۰۹	۱/۳۷۸۷	۱/۳۷۹۶
	۱۰	۱/۴۷۵۶	۱/۴۳۵۵	۱/۴۰۵۶	۱/۳۷۹۶	۱/۳۷۸۳
۱/۲۵	۰	۱/۸۸۶۸	۱/۸۸۶۸	۱/۹۲۶۷	۲/۰۱۷۰	۱/۰۵۸۵
	۱	۱/۸۸۶۸	۱/۸۸۶۸	۱/۹۱۴۳	۱/۹۶۱۲	۱/۹۷۸۹
	۲	۱/۹۲۶۷	۱/۹۱۴۳	۱/۹۰۸۱	۱/۹۰۹۳	۱/۹۱۸۸
	۵	۲/۰۱۷۰	۱/۹۶۱۲	۱/۹۰۹۳	۱/۸۶۴۲	۱/۸۶۶۱
	۱۰	۲/۰۵۸۵	۱/۹۷۸۹	۱/۹۱۸۸	۱/۸۶۶۱	۱/۸۶۳۶
۱/۷۵	۰	۲/۴۴۷۷	۲/۴۴۷۷	۲/۵۰۷۷	۲/۶۴۳۰	۲/۷۰۴۳
	۱	۲/۴۴۷۷	۲/۴۴۷۷	۲/۴۸۹۱	۲/۵۵۹۵	۲/۵۸۶۰
	۲	۲/۵۰۷۷	۲/۴۸۹۱	۲/۴۷۹۷	۲/۴۸۱۶	۲/۴۹۵۹
	۵	۲/۶۴۳۰	۲/۵۵۹۵	۲/۴۸۱۶	۲/۴۱۳۶	۲/۴۱۶۵
	۱۰	۲/۷۰۴۸	۲/۵۸۶۰	۲/۴۹۵۹	۲/۴۱۶۵	۲/۴۱۲۶
۲/۲۵	۰	۳/۰۳۷۷	۳/۰۳۷۷	۳/۱۱۷۷	۳/۲۹۷۰	۳/۳۷۸۸
	۱	۳/۰۳۷۷	۳/۰۳۷۷	۳/۰۹۲۹	۳/۱۸۶۴	۳/۲۲۱۵
	۲	۳/۱۱۷۷	۳/۰۹۲۹	۳/۰۸۰۴	۳/۰۸۲۹	۳/۱۰۱۹
	۵	۳/۲۹۷۰	۳/۱۸۶۴	۳/۰۸۲۹	۲/۹۹۲۴	۲/۹۹۶۳
	۱۰	۳/۳۷۸۸	۳/۲۲۱۵	۳/۱۰۱۹	۲/۹۹۶۳	۲/۹۹۱۱

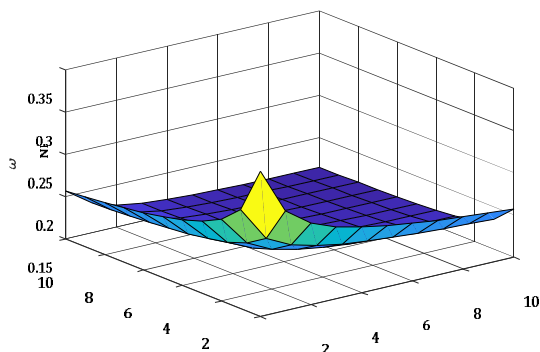
نتیجه را گرفت که مقادیر کوچک اندیس نقش مهم‌تری در فرکانس غیرخطی ورق داشته و برای مقادیر بزرگ اندیس‌های توانی، تغییرات فرکانس غیرخطی به سمت صفر میل می‌کند.



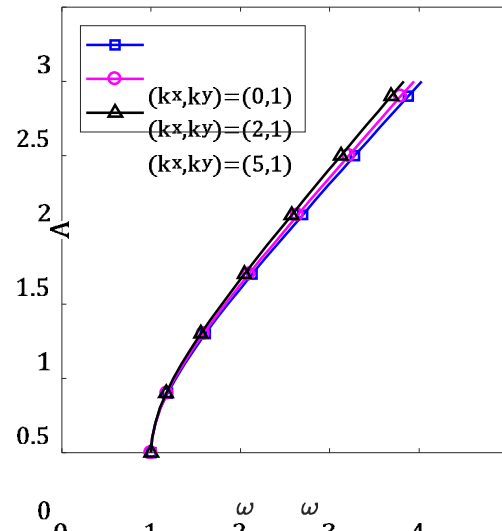
شکل ۶- تغییرات فرکانس غیرخطی بر حسب اندیس‌های توانی طولی و عرضی برای $A=0$



شکل ۷- تغییرات فرکانس غیرخطی بر حسب اندیس‌های توانی طولی و عرضی برای $A=1$



شکل ۸- تغییرات فرکانس غیرخطی بر حسب اندیس‌های توانی طولی و عرضی برای $A=2$



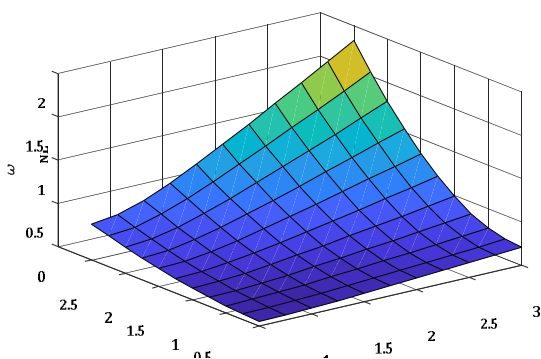
شکل ۵- تاثیر تغییرات نسبت فرکانسی روی دامنه ارتعاش برای مقادیر مختلف اندیس توانی طولی

علاوه بر این، در دامنه‌های بزرگ منحنی رفتار غیرخطی از نوع فنر سخت (رفتار سخت‌شوندگی) را از خود نشان می‌دهد.

نمودارهای ۶ تا ۸ تغییرات فرکانس غیرخطی بر حسب اندیس طولی ماده مدرج (k_x) و اندیس عرضی ماده مدرج (k_y) را برای مقادیر مختلف دامنه ارتعاش بدون بعد ورق زمانی که $\frac{a}{h} = 10$ نشان می‌دهد. همان‌طور که از این نمودارها مشخص است، با افزایش اندیس‌های توانی طولی و عرضی فرکانس غیرخطی کاهش می‌یابد. به عنوان مثال، برای مقادیر ۱۰ و ۰، زمانی که اندیس توانی طولی k_x از ۰ تا ۱۰ افزایش می‌یابد، فرکانس غیرخطی به ترتیب برای $A = 0$ ، ۴۲/۰۳ درصد و ۱۰/۳۸ درصد برای $A = 1$ ، ۳۷/۴۵ درصد و ۱۷/۸۳ درصد و برای $A = 2$ ، ۳۵/۷ درصد و ۲۰/۴۱ درصد نسبت به مقدار اولیه خود کاهش می‌یابد. بطور مشابه، برای مقادیر اندیس توانی طولی ۰ و ۱۰، زمانی که اندیس توانی عرضی k_y از ۰ تا ۱۰ افزایش می‌یابد، فرکانس غیرخطی به ترتیب برای $A = 0$ ، ۴۲/۰۳ درصد و ۱۰/۳۸ درصد برای $A = 1$ ، ۳۷/۴۵ درصد و ۱۷/۸۳ درصد و برای $A = 2$ ، ۳۵/۷ درصد و ۲۰/۴۱ درصد کاهش می‌یابد. درحقیقت، مقادیر بالای اندیس‌های توانی به معنی کاهش فاز سرامیکی ورق بوده که باعث کاهش سختی ورق و در نتیجه کاهش فرکانس غیرخطی آن می‌شود؛ همچنین از این نمودارها می‌توان این

می‌شود. به عنوان مثال برای مقادیر نسبت اندازه 3 و $a/b = 0/5$ زمانی که اندیس توانی عرضی k_y از 0 تا 10 افزایش می‌یابد، فرکانس غیرخطی به ترتیب به اندازه $37/65$ درصد و $20/21$ درصد کاهش می‌یابد.

نمودار ۱۱ تغییرات فرکانس غیرخطی برحسب دامنه ارتعاش بدون بعد (A) و نسبت اندازه (a/b) را برای ورق با شرایط $k_x = 1$ و $k_y = 1$ و $A = 1$ و $\frac{a}{h} = 10$ نشان می‌دهد. همان‌طور که از این نمودار مشاهده می‌گردد، افزایش نسبت اندازه ورق و همچنین افزایش دامنه ارتعاش بدون بعد منجر به افزایش فرکانس‌های غیرخطی می‌شود. به عنوان مثال برای مقادیر نسبت اندازه 3 و $a/b = 0/5$ زمانی که دامنه ارتعاش بدون بعد A از 0 تا $2/5$ افزایش می‌یابد، فرکانس غیرخطی به ترتیب به اندازه $302/96$ درصد و $342/72$ درصد افزایش می‌یابد. بطور مشابه، برای مقادیر دامنه ارتعاش بدون بعد A از 0 تا $2/5$ زمانی که نسبت اندازه از $0/5$ تا 3 افزایش می‌یابد، فرکانس غیرخطی به ترتیب به اندازه 700 درصد و $778/94$ درصد افزایش می‌یابد.



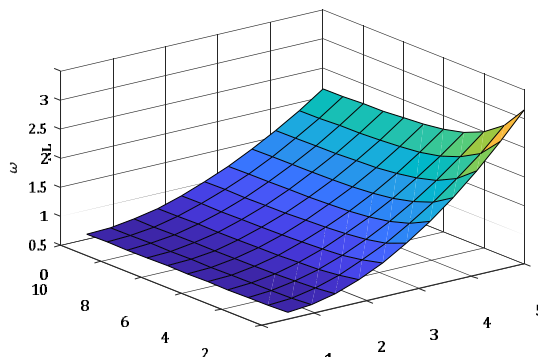
شکل ۱۱- تغییرات فرکانس غیرخطی برحسب دامنه ارتعاش بدون بعد و نسبت اندازه برای $(k_x, k_y) = (1, 1)$

شکل ۱۲ تغییرات نسبت فرکانس برحسب نسبت اندازه ورق برای مقادیر مختلف اندیس توانی طولی (k_x) را زمانی که $A = 1$ ، $k_y = 0$ و $\frac{a}{h} = 10$ ارائه می‌دهد. همان‌طور که از این نمودار ملاحظه می‌گردد، برای مقادیر مختلف اندیس توانی طولی ماده مدرج، کاهش سریع نسبت فرکانسی زمانی که $\frac{a}{b} < 1/5$ اتفاق می‌افتد؛ درحالی‌که برای مقادیر $1/5 < \frac{a}{b} < 5$ افزایش نسبت اندازه باعث افزایش نسبت فرکانس می‌شود.

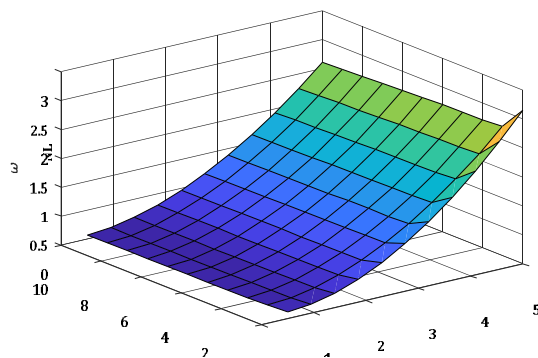
نمودار ۹ تغییرات فرکانس غیرخطی برحسب اندیس طولی ماده مدرج (k_x) و نسبت اندازه (a/b) را برای ورق با شرایط $k_y = 1$ و $A = 1$ و $\frac{a}{h} = 10$ نشان می‌دهد. همان‌طور که از این نمودار مشاهده می‌گردد، کاهش نسبت اندازه ورق منجر به کاهش فرکانس‌های غیرخطی می‌شود.

به عنوان مثال برای مقادیر نسبت اندازه 3 و $a/b = 0/5$ زمانی که اندیس توانی طولی k_x از 0 تا 10 افزایش می‌یابد، فرکانس غیرخطی به ترتیب به اندازه $21/83$ درصد و $38/11$ درصد کاهش می‌یابد.

نمودار ۱۰ تغییرات فرکانس غیرخطی برحسب اندیس عرضی ماده مدرج (k_y) و نسبت اندازه (a/b) را برای ورق با شرایط $k_x = 1$ و $A = 1$ و $\frac{a}{h} = 10$ نشان می‌دهد.



شکل ۹- تغییرات فرکانس غیرخطی برحسب اندیس‌های توانی طولی و نسبت اندازه برای $k_y = 1$ و $A = 1$



شکل ۱۰- تغییرات فرکانس غیرخطی برحسب اندیس‌های توانی عرضی و نسبت اندازه برای $k_x = 1$ و $A = 1$

همان‌طور که از این نمودار مشاهده می‌گردد، کاهش نسبت اندازه ورق منجر به کاهش فرکانس‌های غیرخطی

۶- نتیجه گیری

در این تحقیق به تحلیل ارتعاش آزاد غیرخطی ورق مستطیلی تشکیل شده از مواد مدرج دو جهته پرداخته شد. با در نظر گرفتن اثر غیرخطی کرنش و براساس تئوری کلاسیک ورق‌ها، معادلات غیرخطی حرکت استخراج شدند. سپس با اعمال روش گالرکین معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی به دست آمدند. در نهایت معادله غیرخطی ارتعاش عرضی ورق با روش تحلیلی لیندشتد پوانکاره بهبودیافته حل گردید و فرکانس غیرخطی محاسبه شد و اثر برخی پارامترهای کلیدی سیستم روی فرکانس غیرخطی بررسی شد. برای اعتبارسنجی تحقیق حاضر، نتایج این پژوهش با نتایج مقالات منتشر شده قبلی و همچنین حل عددی مقایسه گردید و مشاهده شد که نتایج از دقت بسیار خوبی برخوردار می‌باشند.

مهم ترین نتایج حاصل از این تحقیق به صورت مختصر و موردی عبارت اند از:

(۱) فرکانس‌های غیرخطی ورق با افزایش نسبت طول به

ضخامت ورق کاهش می‌یابند.

(۲) افزایش دامنه ارتعاش بدون بعد منجر به افزایش

نسبت فرکانس می‌شود. به عبارت دیگر، تفاوت

میان فرکانس خطی و غیرخطی به شدت وابسته

به دامنه ارتعاش است؛ همچنین فرکانس خطی

مستقل از دامنه ارتعاش ورق است و تاثیر آن فقط

روی فرکانس طبیعی غیرخطی است.

(۳) در بررسی نمودارهای پشتواره مشاهده شد که

اندیس‌های توانی تاثیر چشم‌گیری روی نسبت

فرکانسی دارند. با کاهش اندیس طولی ماده مدرج

و افزایش اندیس عرضی ماده مدرج، نمودارها از

محور عمودی دورتر می‌شوند. به عبارت دیگر، با

تغییر اندیس‌ها درجه رفتار غیرخطی ورق تغییر

می‌کند.

(۴) در بررسی نمودارهای پشتواره مشاهده شد که در

دامنه‌های بزرگ منحنی رفتار غیرخطی از نوع فنر

سخت را از خود نشان می‌دهد.

(۵) مقادیر بالای اندیس‌های توانی به معنی کاهش فاز

سرامیکی ورق بوده که باعث کاهش سختی ورق و

در نتیجه کاهش فرکانس غیرخطی آن می‌شود؛

همچنین مقادیر کوچک اندیس نقش مهم‌تری در

شکل ۱۳ تغییرات نسبت فرکانس برحسب نسبت اندازه

ورق برای مقادیر مختلف اندیس توانی عرضی (k_y) را زمانی

که $A = 1$ ، $\frac{a}{h} = 10$ و $k_x = 0$ ارائه می‌دهد. همان‌طور که از

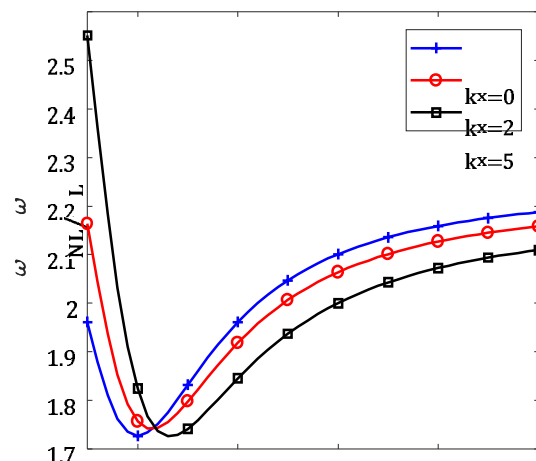
این نمودار ۱۲ ملاحظه می‌گردد، برای مقادیر مختلف اندیس

توانی طولی ماده مدرج، افزایش نسبت اندازه ورق برای

محدوده $\frac{a}{b} < 1$ منجر به کاهش نسبت فرکانس می‌شود؛

درحالی‌که برای مقادیر $\frac{a}{b} > 1$ افزایش نسبت اندازه باعث

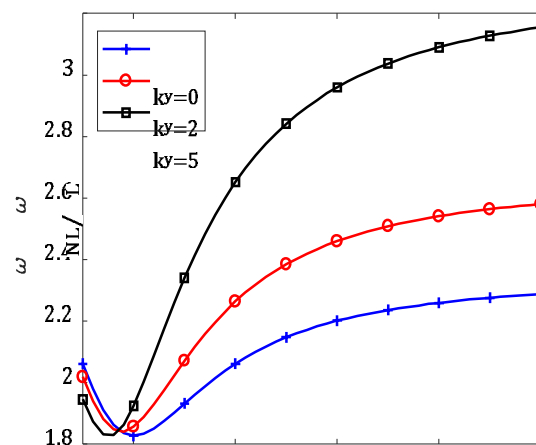
افزایش نسبت فرکانس می‌شود.



1.6

شکل ۱۲- تاثیر نسبت اندازه ورق روی نسبت فرکانس برای

مقادیر مختلف اندیس توانی طولی زمانی که $k_y = 0$



1.6

شکل ۱۳- تاثیر نسبت اندازه ورق بر روی نسبت فرکانس برای

مقادیر مختلف اندیس توانی عرضی زمانی که $k_x = 0$

- [10] Khorshidi K, Siahpush A, Fallah A (2017) Electro-Mechanical free vibrations analysis of composite rectangular piezoelectric nanoplate using modified shear deformation theories. *J Sci Tech Comp* 4(1): 151-160. (In Persian)
- [11] Khorshidi K, Asgari T, Fallah A (2015) Free vibrations analysis of functionally graded rectangular nano-plates based on nonlocal exponential shear deformation theory. *Mech Ad Comp Struct* 4(2): 79-93.
- [12] Khorshidi K, Bakhsheshy A (2015) Free vibration analysis of a functionally graded rectangular plate in contact with a bounded fluid. *Acta Mech* 266(10): 3401-3423.
- [13] Ghaheri A, Nosier A (2015) Nonlinear forced vibrations of thin circular functionally graded plates. *J Sci Tech Comp* 1(2): 1- 10. (In Persian)
- [14] Wang YQ, Zu JW (2017) Large-amplitude vibration of sigmoid functionally graded thin plates with porosities,” *Thin-Walled Struct* 119(1): 911-924.
- [15] Yazdi AA (2013) Homotopy perturbation method for nonlinear vibration analysis of functionally graded plate. *J Vib Acoust* 135(2): 12-21.
- [16] Lotfavar A, Rafiei Pour H, Hamze Shalamdari S, Mohammadi T (2015) Nonlinear vibration analysis of laminated composite plates using approximate and analytical methods. *Ir soc Mech Eng* 1(17): 16-39. (In Persian)
- [17] Woo J, Meguid SA, Ong LS (2006) Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates. *J Sound Vib* 289(3): 595-611.
- [18] Malekzadeh P, Monajjemzadeh SM (2015) Nonlinear response of functionally graded plates under moving load. *Thin-Walled Struct* 96(1): 120-129.
- [19] Duc ND, Cong PH (2015) Nonlinear vibration of thick FGM plates on elastic foundation subjected to thermal and mechanical loads using the first-order shear deformation plate theory. *Cogent Eng* 2(1): 1045222.
- [20] Fung CP, Chen CS (2006) Imperfection sensitivity in the nonlinear vibration of functionally graded plates. *Eur J Mech A/Solids* 25(3): 425-461.
- [21] Şimşek M (2015) Bi-directional functionally graded materials (BDFGMs) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions. *Comp Struct* 133: 968-978.
- [22] Tang Y, Ding Q (2019) Nonlinear vibration analysis of a bi-directional functionally graded beam under hygro-thermal loads. *Comp Struct* 111076.
- [23] Fariborz J, Batra RC (2019) Free vibration of bi-directional functionally graded material circular beams using shear deformation theory employing
- فرکانس غیرخطی ورق داشته و برای مقادیر بزرگ اندیس‌های توانی، تغییرات فرکانس غیرخطی به سمت صفر میل می‌کند.
- ۶) روش لیندشتدپوانکاره بهبود یافته ابزاری آسان برای حل معادلات غیرخطی است. نتایج حاصل از روش‌های تحلیلی و عددی نشان داد که این روش در تطابق بسیار خوبی با حل عددی است.

۷- مراجع

- [1] Zhang DG, Zhou YH (2008) A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface. *Comp Mat Sci* 44(2): 716-720.
- [2] Abrate S (2008) Functionally graded plates behave like homogeneous plates. *Comp Part B: Eng* 39(1): 151-158.
- [3] Najafizadeh MM, Ayalvar A (2006) Investigation of free vibrations of functionally graded rectangular plate using first-order shear deformation theory. *Ir Soci Mech Eng* 7(1): 52- 68. (In Persian)
- [4] Khorshidi K, Onsorinezhad S (2017) Exact free vibration analysis of sector plates coupled with piezoelectric layers using first-order shear deformation plate theory. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 6(4): 125-138. (In Persian)
- [5] Khorshidi K, Bakhsheshi A, Ghadirian H (2017) The study of the effects of thermal environment on free vibration analysis of two dimensional functionally graded rectangular plates on pasternak elastic foundation. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 6(3): 137-147. (In Persian)
- [6] Hosseini Hashemi SH, Akhavan H, Fadaee M (2012) Exact closed-form free vibration analysis of moderately thick rectangular functionally graded plates with two bonded piezoelectric layers. *Modares Mechanical Engineering* 11(3): 57-74. (In Persian)
- [7] Zhao X, Lee YY, Liew KM (2009) Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *J Sound Vib* 319(3-5): 918-939.
- [8] Farzam A, Hassani B (2019) Size-dependent analysis of FG microplates with temperature-dependent material properties using modified strain gradient theory and isogeometric approach. *Comp Part B: Eng*.
- [9] Gupta A, Talha M, Singh BN (2016) Vibration characteristics of functionally graded material plate with various boundary constraints using higher order shear deformation theory. *Comp Part B: Eng* 94(1): 64-74.

- [35] Aragh BS, Hedayati H, Farahani EB, Hedayati M (2011) A novel 2-D six-parameter power-law distribution for free vibration and vibrational displacements of two-dimensional functionally graded fiber-reinforced curved panels. *Eur J Mech A/Solids* 30(6): 865-883.
- [36] Kumar Y (2015) Free vibration of two-directional functionally graded annular plates using Chebyshev collocation technique and differential quadrature method. *Int J Struct Stab Dy* 15(06): 450086.
- [37] Lal R, Ahlawat N (2017) Buckling and vibrations of two-directional functionally graded circular plates subjected to hydrostatic in-plane force. *J Vib Con* 23(13): 2111-2127.
- [38] Lal R, Ahlawat N (2019) Buckling and vibrations of two-directional FGM Mindlin circular plates under hydrostatic peripheral loading. *Mech Ad Mat Struct* 26(3): 199-214.
- [39] Shariyat M, Alipour MM (2013) A power series solution for vibration and complex modal stress analyses of variable thickness viscoelastic two-directional FGM circular plates on elastic foundations. *App Math Modelling* 37(5): 3063-3076.
- [40] Tahounh V, Naei MH (2014) A novel 2-D six-parameter power-law distribution for three-dimensional dynamic analysis of thick multi-directional functionally graded rectangular plates resting on a two-parameter elastic foundation. *Mecca* 49(1): 91-109.
- [41] Tahounh V, Yas, MH (2013) Semianalytical solution for three-dimensional vibration analysis of thick multidirectional functionally graded annular sector plates under various boundary conditions. *J Eng Mech* 140(1): 31-46.
- [42] Yas MH, Moloudi N (2015) Three-dimensional free vibration analysis of multi-directional functionally graded piezoelectric annular plates on elastic foundations via state space based differential quadrature method. *App Math Mech* 36(4): 439-464.
- [43] Reddy JN (2006) Theory and analysis of elastic plates and shell. CRC press.
- [44] Chia CY (1980) Nonlinear analysis of plates. McGraw-Hill International Book Company.
- [45] Reddy JN (2004) Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis. CRC press.
- [46] Nayfeh AH, Mook DT (1995) Nonlinear oscillation. John Wiley & Sons, Inc.
- [47] He JH (2002) Modified Lindstedt-Poincare methods for some strongly non-linear oscillations: Part I: expansion of a constant. *Int J Non Mech* 37: 309-314.
- logarithmic function of radius. *Comp Struct* 210: 217-230.
- [24] Rajasekaran S, Khaniki HB (2019) Bi-directional functionally graded thin-walled non-prismatic Euler beams of generic open/closed cross section Part I: Theoretical formulations. *Thin-Walled Struct* 141: 627-645.
- [25] Tang Y, Lv X, Yang T (2019) Bi-directional functionally graded beams: asymmetric modes and nonlinear free vibration. *Comp Part B: Eng.* 156: 319-331.
- [26] Rajasekaran S, Khaniki HB (2019) Size-dependent forced vibration of non-uniform bi-directional functionally graded beams embedded in variable elastic environment carrying a moving harmonic mass. *App Math Modelling* 72: 129-154.
- [27] Chen M, Jin G, Ma X, Zhang Y, Ye T, Liu Z (2018) Vibration analysis for sector cylindrical shells with bi-directional functionally graded materials and elastically restrained edges. *Comp Part B: Eng* 153: 346-363.
- [28] Chen M, Jin G, Ma X, Zhang Y, Ye T, Liu Z (2018) Vibration analysis for sector cylindrical shells with bi-directional functionally graded materials and elastically restrained edges. *Comp Part B: Eng* 153: 346-363.
- [29] Lieu QX, Lee D, Kang J, Lee J (2019) NURBS-based modeling and analysis for free vibration and buckling problems of in-plane bi-directional functionally graded plates. *Mech Ad Mat Struct* 26(12): 1064-1080.
- [30] Lieu QX, Lee S, Kang J, Lee J (2018) Bending and free vibration analyses of in-plane bi-directional functionally graded plates with variable thickness using isogeometric analysis. *Comp Struct* 192: 434-451.
- [31] Farzam A, Hassani B (2019) Isogeometric analysis of in-plane functionally graded porous microplates using modified couple stress theory. *Aerosp Sci Technol* 91: 508-524.
- [32] Kumar Y, Lal R (2013) Prediction of frequencies of free axisymmetric vibration of two-directional functionally graded annular plates on Winkler foundation. *Eur J Mech A/Solids* 42: 219-228.
- [33] Shariyat M, Alipour MM (2011) Differential transform vibration and modal stress analyses of circular plates made of two-directional functionally graded materials resting on elastic foundations. *Arch App Mech* 81(9): 1289-1306.
- [34] Alipour MM, Shariyat M, Shaban M (2010) A semi-analytical solution for free vibration of variable thickness two-directional-functionally graded plates on elastic foundations. *Int J Mech Mat Design* 6(4): 293-304.

۸- پیوست

۸-۱- پیوست الف

$$C_{11} = -\frac{1}{8r^3(v^2-1)}\pi^2 \int_0^1 \int_0^1 \cos(\pi\bar{x})\sin(\pi\bar{y})(2\pi\sin(2\pi\bar{x})\bar{e}(\bar{x},\bar{y})((s^2+1)\cos(2\pi\bar{y})+s^2v-1)+s^2(-(v$$

$$-1)\sin(2\pi\bar{x})\sin(2\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}}+4\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}}(s^2v\sin^2(\pi\bar{x})\cos^2(\pi\bar{y})$$

$$+\cos^2(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y}))d\bar{y}d\bar{x}$$

$$C_{12} = \int_0^1 \int_0^1 \left(-\frac{\pi^2 s^2 \cos^2(\pi\bar{x}) \sin^2(\pi\bar{y}) \bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{2r^2(v+1)} + \frac{\pi s^2 \cos^2(\pi\bar{x}) \sin(\pi\bar{y}) \cos(\pi\bar{y}) \frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}}}{2r^2(v+1)} \right. \\ \left. - \frac{\pi^2 \cos^2(\pi\bar{x}) \sin^2(\pi\bar{y}) \bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{r^2(1-v^2)} - \frac{\pi \sin(\pi\bar{x}) \cos(\pi\bar{x}) \sin^2(\pi\bar{y}) \frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}}}{r^2(1-v^2)} \right) d\bar{y}d\bar{x}$$

$$C_{13} = \int_0^1 \int_0^1 \left(-\frac{\pi^2 s v \cos^2(\pi\bar{x}) \sin^2(\pi\bar{y}) \bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{r^2(1-v^2)} - \frac{\pi s v \sin(\pi\bar{x}) \cos(\pi\bar{x}) \sin^2(\pi\bar{y}) \frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}}}{r^2(1-v^2)} \right. \\ \left. - \frac{\pi^2 s \cos^2(\pi\bar{x}) \sin^2(\pi\bar{y}) \bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{2r^2(v+1)} + \frac{\pi s \cos^2(\pi\bar{x}) \sin(\pi\bar{y}) \cos(\pi\bar{y}) \frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}}}{2r^2(v+1)} \right) d\bar{y}d\bar{x}$$

$$C_{21} = \frac{1}{8r^3(v^2-1)}\pi^2 s \int_0^1 \int_0^1 \sin(\pi\bar{x})\cos(\pi\bar{y})(-2\pi\sin(2\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})((s^2+1)\cos(2\pi\bar{x})-s^2+v) \\ -4\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}}(s^2\sin^2(\pi\bar{x})\cos^2(\pi\bar{y})+v\cos^2(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y}))+(v \\ -1)\sin(2\pi\bar{x})\sin(2\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}})d\bar{y}d\bar{x}$$

$$C_{22} = \int_0^1 \int_0^1 \left(-\frac{\pi^2 s v \sin^2(\pi\bar{x}) \cos^2(\pi\bar{y}) \bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{r^2(1-v^2)} - \frac{\pi s v \sin^2(\pi\bar{x}) \sin(\pi\bar{y}) \cos(\pi\bar{y}) \frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}}}{r^2(1-v^2)} \right. \\ \left. - \frac{\pi^2 s \sin^2(\pi\bar{x}) \cos^2(\pi\bar{y}) \bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{2r^2(v+1)} + \frac{\pi s \sin(\pi\bar{x}) \cos(\pi\bar{x}) \cos^2(\pi\bar{y}) \frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}}}{2r^2(v+1)} \right) d\bar{y}d\bar{x}$$

$$C_{23} = \int_0^1 \int_0^1 \left(-\frac{\pi^2 s^2 \sin^2(\pi \bar{x}) \cos^2(\pi \bar{y}) \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{r^2(1-v^2)} - \frac{\pi s^2 \sin^2(\pi \bar{x}) \sin(\pi \bar{y}) \cos(\pi \bar{y})}{r^2(1-v^2)} \frac{\partial \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} \right. \\ \left. - \frac{\pi^2 \sin^2(\pi \bar{x}) \cos^2(\pi \bar{y}) \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{2r^2(v+1)} + \frac{\pi \sin(\pi \bar{x}) \cos(\pi \bar{x}) \cos^2(\pi \bar{y})}{2r^2(v+1)} \frac{\partial \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} \right) d\bar{y} d\bar{x}$$

$$C_{31} = - \int_0^1 \int_0^1 \sin^2(\pi \bar{x}) \sin^2(\pi \bar{y}) \bar{\rho}(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} d\bar{x}$$

$$C_{32} = \int_0^1 \int_0^1 \left(-\frac{\pi^2 s^2 \sin(\pi \bar{x}) \cos(\pi \bar{x}) \sin(\pi \bar{y}) \cos(\pi \bar{y})}{6r^4(v+1)} \frac{\partial^2 \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \frac{\pi^4 s^4 \sin^2(\pi \bar{x}) \sin^2(\pi \bar{y}) \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{12r^4(1-v^2)} \right. \\ + \frac{\pi^2 s^4 \sin^2(\pi \bar{x}) \sin^2(\pi \bar{y})}{12r^4(1-v^2)} \frac{\partial^2 \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\pi^3 s^4 \sin^2(\pi \bar{x}) \sin(\pi \bar{y}) \cos(\pi \bar{y})}{6r^4(1-v^2)} \frac{\partial \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} \\ - \frac{\pi^4 s^2 v \sin^2(\pi \bar{x}) \sin^2(\pi \bar{y}) \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{6r^4(1-v^2)} + \frac{\pi^2 s^2 v \sin^2(\pi \bar{x}) \sin^2(\pi \bar{y})}{12r^4(1-v^2)} \frac{\partial^2 \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}^2} \\ + \frac{\pi^2 s^2 v \sin^2(\pi \bar{x}) \sin^2(\pi \bar{y})}{12r^4(1-v^2)} \frac{\partial^2 \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\pi^3 s^2 v \sin(\pi \bar{x}) \cos(\pi \bar{x}) \sin^2(\pi \bar{y})}{6r^4(1-v^2)} \frac{\partial \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} \\ + \frac{\pi^3 s^2 v \sin^2(\pi \bar{x}) \sin(\pi \bar{y}) \cos(\pi \bar{y})}{6r^4(1-v^2)} \frac{\partial \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} - \frac{\pi^4 s^2 \sin^2(\pi \bar{x}) \sin^2(\pi \bar{y}) \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{6r^4(v+1)} \\ + \frac{\pi^3 s^2 \sin(\pi \bar{x}) \cos(\pi \bar{x}) \sin^2(\pi \bar{y})}{6r^4(v+1)} \frac{\partial \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} + \frac{\pi^3 s^2 \sin^2(\pi \bar{x}) \sin(\pi \bar{y}) \cos(\pi \bar{y})}{6r^4(v+1)} \frac{\partial \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} \\ - \frac{\pi^4 \sin^2(\pi \bar{x}) \sin^2(\pi \bar{y}) \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{12r^4(1-v^2)} + \frac{\pi^2 \sin^2(\pi \bar{x}) \sin^2(\pi \bar{y})}{12r^4(1-v^2)} \frac{\partial^2 \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}^2} \\ \left. + \frac{\pi^3 \sin(\pi \bar{x}) \cos(\pi \bar{x}) \sin^2(\pi \bar{y})}{6r^4(1-v^2)} \frac{\partial \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} \right) d\bar{y} d\bar{x}$$

$$\begin{aligned}
 C_{33} = & \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\pi^3 s^2 v \sin^3(\pi \bar{x}) \sin^3(\pi \bar{y}) \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{r^3(1-v^2)} - \frac{\pi^3 s^2 v \sin^3(\pi \bar{x}) \sin(\pi \bar{y}) \cos^2(\pi \bar{y}) \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{r^3(1-v^2)} \right. \\
 & - \frac{\pi^2 s^2 v \sin^3(\pi \bar{x}) \sin^2(\pi \bar{y}) \cos(\pi \bar{y}) \frac{\partial \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}}}{r^3(1-v^2)} - \frac{\pi^3 s^2 \sin^3(\pi \bar{x}) \sin(\pi \bar{y}) \cos^2(\pi \bar{y}) \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{2r^3(v+1)} \\
 & - \frac{\pi^3 s^2 \sin(\pi \bar{x}) \cos^2(\pi \bar{x}) \sin^3(\pi \bar{y}) \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{2r^3(v+1)} + \frac{\pi^3 s^2 \sin(\pi \bar{x}) \cos^2(\pi \bar{x}) \sin(\pi \bar{y}) \cos^2(\pi \bar{y}) \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{r^3(v+1)} \\
 & + \frac{\pi^2 s^2 \sin^2(\pi \bar{x}) \cos(\pi \bar{x}) \sin(\pi \bar{y}) \cos^2(\pi \bar{y}) \frac{\partial \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}}}{2r^3(v+1)} \\
 & + \frac{\pi^2 s^2 \sin(\pi \bar{x}) \cos^2(\pi \bar{x}) \sin^2(\pi \bar{y}) \cos(\pi \bar{y}) \frac{\partial \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}}}{2r^3(v+1)} + \frac{\pi^3 \sin^3(\pi \bar{x}) \sin^3(\pi \bar{y}) \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{r^3(1-v^2)} \\
 & \left. - \frac{\pi^3 \sin(\pi \bar{x}) \cos^2(\pi \bar{x}) \sin^3(\pi \bar{y}) \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{r^3(1-v^2)} - \frac{\pi^2 \sin^2(\pi \bar{x}) \cos(\pi \bar{x}) \sin^3(\pi \bar{y}) \frac{\partial \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}}}{r^3(1-v^2)} \right) d\bar{y} d\bar{x} \\
 C_{34} = & \frac{1}{8r^3(v^2-1)} \pi^2 s \int_0^1 \int_0^1 \sin(\pi \bar{x}) \sin(\pi \bar{y}) (-2\pi \bar{E}(\bar{x}, \bar{y}) (s^2 \cos(2\pi(\bar{x} + \bar{y})) + (s^2 + 1) \cos(2\pi(\bar{x} - \bar{y}))) \\
 & - 2s^2 \cos(2\pi \bar{y}) + (1 - 3v) \cos(2\pi \bar{x}) - v \cos(2\pi \bar{y}) + \cos(2\pi(\bar{x} + \bar{y})) + \cos(2\pi \bar{y})) \\
 & + \sin(2\pi \bar{y}) \frac{\partial \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} ((-2s^2 + v - 1) \cos(2\pi \bar{x}) + 2s^2 + v - 1) + \sin(2\pi \bar{x}) ((v \\
 & + 1) \cos(2\pi \bar{y}) - 3v + 1)) \frac{\partial \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}}) d\bar{y} d\bar{x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{35} = & \int_0^1 \int_0^1 \left(-\frac{3\pi^4 s^4 \sin^4(\pi\bar{x}) \sin^2(\pi\bar{y}) \cos^2(\pi\bar{y}) \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{2r^4(1-v^2)} + \frac{\pi^3 s^4 \sin^4(\pi\bar{x}) \sin(\pi\bar{y}) \cos^3(\pi\bar{y}) \frac{\partial \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}}}{2r^4(1-v^2)} \right. \\
 & + \frac{2\pi^4 s^2 v \sin^2(\pi\bar{x}) \cos^2(\pi\bar{x}) \sin^2(\pi\bar{y}) \cos^2(\pi\bar{y}) \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{r^4(1-v^2)} \\
 & - \frac{\pi^4 s^2 v \sin^4(\pi\bar{x}) \sin^2(\pi\bar{y}) \cos^2(\pi\bar{y}) \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{2r^4(1-v^2)} - \frac{\pi^4 s^2 v \sin^2(\pi\bar{x}) \cos^2(\pi\bar{x}) \sin^4(\pi\bar{y}) \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{2r^4(1-v^2)} \\
 & + \frac{\pi^3 s^2 v \sin^3(\pi\bar{x}) \cos(\pi\bar{x}) \sin^2(\pi\bar{y}) \cos^2(\pi\bar{y}) \frac{\partial \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}}}{2r^4(1-v^2)} \\
 & + \frac{\pi^3 s^2 v \sin^2(\pi\bar{x}) \cos^2(\pi\bar{x}) \sin^3(\pi\bar{y}) \cos(\pi\bar{y}) \frac{\partial \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}}}{2r^4(1-v^2)} \\
 & + \frac{2\pi^4 s^2 \sin^2(\pi\bar{x}) \cos^2(\pi\bar{x}) \sin^2(\pi\bar{y}) \cos^2(\pi\bar{y}) \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{r^4(v+1)} \\
 & - \frac{\pi^4 s^2 \sin^4(\pi\bar{x}) \sin^2(\pi\bar{y}) \cos^2(\pi\bar{y}) \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{2r^4(v+1)} - \frac{\pi^4 s^2 \sin^2(\pi\bar{x}) \cos^2(\pi\bar{x}) \sin^4(\pi\bar{y}) \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{2r^4(v+1)} \\
 & + \frac{\pi^3 s^2 \sin^3(\pi\bar{x}) \cos(\pi\bar{x}) \sin^2(\pi\bar{y}) \cos^2(\pi\bar{y}) \frac{\partial \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}}}{2r^4(v+1)} \\
 & + \frac{\pi^3 s^2 \sin^2(\pi\bar{x}) \cos^2(\pi\bar{x}) \sin^3(\pi\bar{y}) \cos(\pi\bar{y}) \frac{\partial \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}}}{2r^4(v+1)} - \frac{3\pi^4 \sin^2(\pi\bar{x}) \cos^2(\pi\bar{x}) \sin^4(\pi\bar{y}) \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{2r^4(1-v^2)} \\
 & \left. + \frac{\pi^3 \sin(\pi\bar{x}) \cos^3(\pi\bar{x}) \sin^4(\pi\bar{y}) \frac{\partial \bar{E}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}}}{2r^4(1-v^2)} \right) d\bar{y} d\bar{x}
 \end{aligned}$$

۸-۱- پیوست (ب)

$$\alpha = \frac{(-C_{37}C_{42}C_{51} + C_{36}C_{43}C_{51} + C_{37}C_{41}C_{52} - C_{32}C_{43}C_{52} - C_{36}C_{41}C_{53} + C_{32}C_{42}C_{53})}{C_{31}(-C_{43}C_{52} + C_{42}C_{53})}$$

$$\gamma = \frac{(C_{13}C_{21}C_{33} + C_{11}C_{23}C_{33} + C_{12}C_{21}C_{34} - C_{11}C_{22}C_{34} + C_{13}C_{22}C_{35} - C_{12}C_{23}C_{35})}{(C_{13}C_{22} - C_{12}C_{23})C_{31}}$$