



## برآورد شار حرارتی با استفاده از روش دنباله‌ابی دیجیتال فیلتر تیخونو و هموارسازی دماهای اندازه‌گیری شده

سمیه داودآبادی فراهانی<sup>\*۱</sup>

<sup>۱</sup> استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اراک، اراک، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۴/۱۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۰۸/۲۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۱/۰۱

### چکیده

در این نوشتار به ارائه روش دیجیتال فیلتر تیخونو برای برآورد برخط شار حرارتی در دیواره‌های یک بعدی پرداخته شده است. برای بررسی روش پیشنهادی، دو مسئله معکوس طراحی شده است: در مسئله اول شرایط مرزی در دو طرف صفحه مجهول است و در مسئله دوم، دیواره از دولایه تشکیل شده است و شار حرارتی در دوطرف دیواره مجهول است. در هر دو مسئله از دو سنسور دما برای اندازه‌گیری تاریخچه دمای داخل جسم استفاده شده است. در الگوریتم پیشنهادی، از یکی از سنسورها به عنوان شرط مرزی استفاده شده است. برای ارزیابی دقت و توانایی روش دیجیتال فیلتر تیخونو چندین آزمایش طراحی شده است. ضرایب فیلتر در روش پیشنهادی، فقط یکبار محاسبه و در همه آزمایش‌ها استفاده می‌شود. اثر شدت نویز موجود در دماهای اندازه‌گیری و اثر موقعیت ترموکوپل داخل دیواره بر دقت تخمین شارحرارتی بررسی شده است و نتایج نشان می‌دهد که الگوریتم پیشنهادی با دقت خیلی خوبی شار حرارتی را برآورد نموده است و الگوریتم دیجیتال فیلتر تیخونو در مقایسه با روش دنباله‌ابی بک دارای دقت بیشتری است؛ همچنین هموارسازی داده‌های اندازه‌گیری شده در الگوریتم پیشنهادی، سبب افزایش دقت و کارایی روش شده است.

**کلمات کلیدی:** دیجیتال فیلتر؛ دوسنسور؛ روش هموارسازی؛ دو شرط مرزی مجهول؛ شار حرارتی.

## Online Estimation of Heat Flux using Tikhonov Digital Filter Method and Mollified Measured Temperatures

S.D.Farahani<sup>۱,\*</sup>

<sup>۱</sup> Assis. Prof., Mech. Eng., Arak Univ. of Technology, Arak, Iran.

### Abstract

In this paper presents a digital filter method for online estimation of heat flux on a one - dimensional plate. Two inverse problems are designed to investigate this method. In the first problem, the unknown heat flux and the boundary condition on the other side of the plate are not known and in the second problem, the heat flux on the sides of a two-layers plate is unknown. in both cases, two sensors have been used to measure the temperature history of the plate. In the proposed algorithm, one of the two sensors is used as a boundary condition. To evaluate the accuracy and capability of digital filter, several experiments were designed. The filter coefficients are calculated only once in the proposed method and used in all experiments. The results show that this algorithm is very successful in estimating different forms of heat flux with different noise intensity at measured temperatures and different thermocouple positions in the plate and the Tikhonov digital filter method has more precision compared to Beck's method. Also, using the mollified data in the proposed algorithm increases the accuracy and efficiency of the proposed algorithm.

**Keywords:** Digital Filter; Two Sensors; Mollification Method; Heat Flux; Two Unknown Boundary Conditions.

\* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۸۶-۳۳۴۰۰۶۸۱؛ فکس: ۰۸۶-۳۳۶۷۰۰۲۱

آدرس پست الکترونیک: [sdfarahani@arakut.ac.ir](mailto:sdfarahani@arakut.ac.ir)

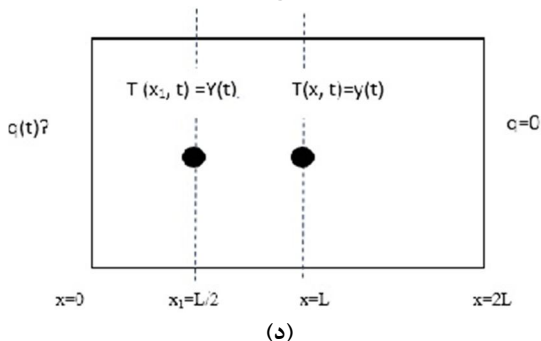
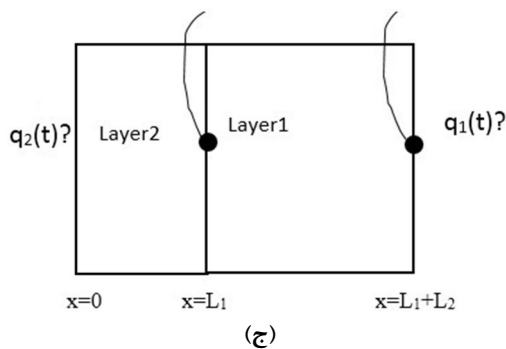
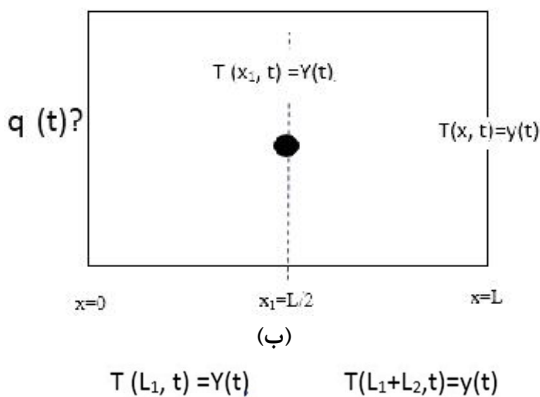
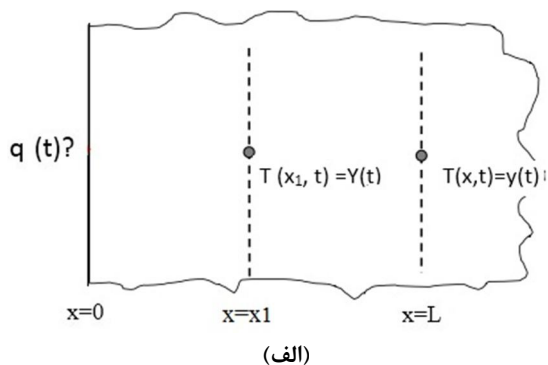
## ۱- مقدمه

توزیع دمای درون هر جسم را می‌توان با معلوم بودن مقادیر شار حرارتی و یا دمای مرزهای آن جسم و حل معادلات مشتق جزئی مربوط به آن بدست آورد که به این مسئله در انتقال حرارت، مساله هدایت حرارتی مستقیم گفته می‌شود؛ اما در بسیاری از مسایل واقعی و صنعتی با توجه به مشکلات مختلف از جمله، شرایط دمایی فوق‌العاده بد مرزها مانند، موتورهای احتراق داخلی و سفینه‌های فضایی، شرایط سخت فیزیکی مانند محیط‌های اسیدی و خورنده، ایجاد اغتشاش در جریان سیال مانند جت‌های برخوردی و غیره نمی‌توان دما را در سطح جسم اندازه‌گیری کرد؛ بنابراین نیاز است تا دماها را درون جسم یا در تماس با سطح عایق اندازه‌گیری نمود و سپس شار حرارتی یا دما در مرزها محاسبه گردد که این مسئله یک مسئله معکوس نامیده می‌شود [۱]. البته مسایل هدایت حرارتی معکوس را می‌توان برای محاسبه خواص ترموفیزیکی جسم، هندسه آن و یا پارامترهای نامعلوم دیگر به کار برد. یکی دیگر از تفاوت‌های مهم روش هدایت حرارتی مستقیم با هدایت حرارتی معکوس در بدوین موضع بودن<sup>۱</sup> مسایل معکوس است. اثبات می‌شود که مسایل هدایت حرارتی معکوس به خطاهای اندازه‌گیری به شدت حساس بوده و کوچکترین تغییری در مقادیر ثبت شده، باعث اختلافات زیادی در نتایج محاسبه شده می‌شود. راه حل‌های مختلفی برای این مشکل ارائه شده که یکی از آن‌ها توسط تیخونو و آرسنین به نام روش مرتب سازی، حساسیت مسایل بدوین موضع به خطاهای اندازه‌گیری را کاهش می‌دهد [۲]. روش‌های حل هدایت حرارتی معکوس به طور معمول به دو بخش روش‌های تمام دامنه و روش‌های دنباله‌ای تقسیم می‌شوند. در روش تمام دامنه به کل اطلاعات تاریخچه حرارتی برای حل مساله نیاز است و جواب آن از دقت قابل قبولی برخوردار است. روش حل دنباله‌ای که اولین بار توسط بک پیشنهاد شد، این قابلیت را دارد که به صورت همزمان با انجام آزمایش مورد استفاده قرار گیرد [۳]. این امر سبب می‌شود که این روش نیاز کمتری به حافظه و زمان محاسباتی داشته باشد، ولی در عین حال از دقت کمتری نسبت به روش تمام دامنه برخوردار

باشد و به خطاهای اندازه‌گیری حساس‌تر باشد. در حال حاضر نیز مقالات متعددی با استفاده از روش‌های هدایت حرارتی معکوس در دو بعد به رشته تحریر در آمده است. کوثری و فراهانی [۴] برای افزایش دقت و پایداری روش‌های استاندارد معکوس، از نوعی فیلتر برای نویز زدایی دماهای شبیه سازی شده استفاده کردند. در تحقیقی دیگر فراهانی و همکارانش [۵] به مقایسه دو روش نویز زدایی در تخمین پارامترهای وابسته در مواد مرکب در طی فرایند درمان با استفاده از روش معکوس پرداختند. آیجز و همکاران [۶]، به برآورد شار حرارتی با استفاده از روش فیلتر کالمن در یک مسئله انتقال حرارت معکوس پرداختند. لیبروکس و همکاران [۷]، با ترکیب روش کالمن فیلتر و روش حداقل مربعات خطا به برآورد شار حرارتی در یک کاربرد صنعتی پرداختند. کابازا و همکاران [۸]، به بررسی فرم دیجیتال فیلتر روش بک در مسائل معکوس پرداختند. روش‌های تمام دامنه‌ای بر اساس روش شبکه بولتزمن [۹] و روش‌های بهینه سازی [۱۰] توسط محققان توسعه داده شده است. دنگ وهانگ [۱۱] با استفاده از شبکه عصبی به صورت روش دیجیتال فیلتر به برآورد شار حرارتی با استفاده از تاریخچه زمانی دما پرداختند. مطالعاتی توسط محققان [۱۵-۱۲] برای کاربردهای مهندسی انتقال حرارت معکوس انجام شده است.

در جاهایی که نیاز است همزمان با اندازه‌گیری دما، شار حرارتی برآورد شود، روش‌های انتقال حرارت معکوس دنباله‌ای اهمیت می‌یابند. روش دنباله‌ای نیاز به حافظه و زمان محاسباتی کمتری دارد. در برآورد شار حرارتی در بسیاری از کاربردهای صنعتی نظیر، مانتیورینگ فرایند ساخت نیاز به استفاده از روش‌های دنباله‌ای است؛ بنابراین روش‌های دنباله‌ای می‌توانند در توسعه تجهیزات اندازه‌گیری شار حرارتی به صورت برخط با استفاده از مجموعه‌ای از دماهای اندازه‌گیری بسیار با اهمیت باشد؛ همچنین در واقعیت ممکن است، مسائل معکوسی باشند که علاوه بر شار حرارتی، شرط مرزی دیگر نیز مجهول باشد که تخمین را دشوار می‌کند. با در نظر گرفتن این دو موضوع و اهمیت آن، در این مقاله با استفاده از روش دنباله‌ای دیجیتال فیلتر تیخونو به برآورد شار حرارتی در یک مسئله انتقال حرارت معکوس با استفاده از دو سنسور پرداخته شده است. در این پژوهش پیشنهاد شده است، از دماهای اندازه‌گیری شده

<sup>۱</sup> Ill-posed



شکل ۱- الف) شماتیکی از مسئله اول، ب) مسئله معکوس اول، ج) شماتیکی از مسئله معکوس دوم و د) مسئله انتقال حرارت برای تولید داده‌ها در مسئله اول

توسط یکی از سنسورها به عنوان شرط مرزی استفاده شده است. برای حل مستقیم مسئله و حل مسئله معکوس از نرم افزار متلب استفاده شده است. داده‌های اندازه گیری مورد نیاز برای روش معکوس با استفاده از شبیه سازی عددی تولید شده‌اند. با طراحی آزمایش‌های مختلف دقت روش پیشنهادی ارزیابی شده است و اثر مقدار نویز موجود در داده‌ها، اثر موقعیت سنسور، استفاده از داده‌های هموارسازی شده بر دقت تخمین نیز بررسی شده است.

## ۲- مدل سازی ریاضی

یک صفحه تخت با انتقال حرارت یک بعدی مطابق با شکل (الف) در نظر گرفته شده است که معادله انتقال گرما با خواص حرارتی ثابت برای این صفحه مطابق با رابطه (۱) است:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(t)?$$

$$T(x, 0) = 0$$

$$T(x_1, t) = Y(t) \quad 0 \leq x_1 \leq L$$

$$T(L, t) = y(t) \quad (۱)$$

که  $\rho \left(\frac{kg}{m^3}\right)$ ,  $K(Wm^{-1}K^{-1})$ ,  $\alpha \left(\frac{m^2}{s}\right) = K/\rho C_p$  به ترتیب ضریب پخش حرارتی، ضریب رسانایی حرارتی، چگالی و ظرفیت گرمایی است. همان طور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، شرایط مرزی در دو طرف صفحه مجهول است و در دو نقطه داخل جسم تاریخچه زمانی دماهای اندازه گیری شده، داده شده است. می‌توان این مسئله را بگونه‌ای دیگر در نظر گرفت و تاریخچه زمانی دماهای اندازه‌گیری شده  $(Y(t))$  را به عنوان یک شرط مرزی در نظر گرفت. در این مسئله معکوس (شکل ۱)، شار حرارتی  $q$  مجهول است که با استفاده از دماهای اندازه گیری شده  $(Y(t))$  و یک روش معکوس، می‌توان آن را تخمین زد. در مسئله در نظر گرفته شده، دمای  $Y(t)$  تابعی از شار حرارتی  $q$  و دماهای اندازه‌گیری شده  $y(t)$  است.

در این رابطه  $\varphi$  و  $\eta$  به ترتیب دماهای به دست آمده به ازاء  $q_0 = 1$  و  $T_0 = 1$  هستند. با استفاده از رابطه (۶) می توان دما را در زمان  $M$  از رابطه (۷) به دست آورد:

$$T_M = \sum_{i=1}^M q_i \Delta \varphi_{M-i} + \sum_{i=1}^M y_i \Delta \eta_{M-i} \quad (7)$$

### ۲-۱- روش دیجیتال فیلتر تیخونو

در این مقاله با استفاده از روش فیلتر دیجیتال به برآورد شار حرارتی در مسئله انتقال حرارت معکوس پرداخته شده است. روش تنظیم تیخونو مرتبه صفر، روشی است که در آن با اضافه کردن فاکتوری به تابع مربعات خطا باعث کاهش نوسانات در تابع مجهول نظیر شار حرارتی می شود. این نوسانات در ذات یک مسئله بد وضع وجود دارد. در این روش، هدف مینیمم کردن تابع مربعات خطای دماها نسبت به  $\vec{q}$  است.

$$f = \sum_{i=1}^n (Y_i - T_i)^2 + \alpha_{ti} \sum_{i=1}^n q_i^2 \quad (8)$$

مقادیر تخمینی برای مولفه های شار حرارتی [۱] از رابطه (۹) محاسبه می شود:

$$q = [X^T X + \alpha_{ti} I]^{-1} X^T (Y - Zy) = FY + Gy \quad (9)$$

اگر  $\alpha_{ti} \rightarrow 0$  آن گاه جواب کاملا نوسانی می شود. با افزایش مقدار پارامتر تنظیم  $\alpha_{ti}$ ، از حالت نوسانی جواب کاسته می شود. در مقادیر کوچک پارامتر تنظیم مقدار نوسانات در تابع مجهول زیاد و خطای بایاس کم است و در مقادیر بزرگ پارامتر تنظیم مقدار نوسانات کم و خطای بایاس افزایش می یابد، بنا براین مقدار بهینه پارامتر تنظیم از روی منحنی  $L$ -curve انتخاب می شود. در این رابطه ضرایب  $F$  و  $G$  را می توان یکبار محاسبه کرد.

$$q_M = \sum_{i=1}^{m_p+m_f} (f_i Y_{M+m_f-1} + g_i Y_{M+m_f-1}) \quad (10)$$

$$m_p = m_f = \frac{M}{2}$$

در معادله (۱۰)، برای محاسبه ضریب  $f$  فرض آن است که همه مولفه های دماهای  $Y$  و  $y$  به جز  $Y_{m_f} = 1$  صفر هستند. روند محاسبه ضریب  $g$  مشابه ضریب  $f$  است ولی فقط مولفه  $Y_{m_f}$  برابر ۱ است. این ضرایب در هر مسئله فقط یکبار

برای یافتن حل دقیق این مسئله می توان مسئله را به دو مسئله انتقال حرارت (شکل ا ب) تبدیل کرد: در مسئله اول در یک مرز شار حرارتی و در سمت دیگر عایق در نظر گرفته شود.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} |_{x=0} = q_0$$

$$T(x, 0) = 0$$

$$T(L, t) = 0 \quad (2)$$

که حل دقیق آن [۱] به صورت رابطه (۱) است:

$$\frac{T(x, t)}{\frac{q_0 L}{k}} = 1 - \frac{x}{L}$$

$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} e^{-\frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \alpha t}{L}} \cos\left(\frac{\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi x}{L}\right) \quad (3)$$

در مسئله دوم فقط در  $x=L$  شرط مرزی دما است که معادله حاکم بر آن به صورت رابطه (۴) است:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} |_{x=0} = 0$$

$$T(x, 0) = 0$$

$$T(L, t) = T_0 \quad (4)$$

که حل دقیق آن [۱] به صورت رابطه (۵) است:

$$\frac{T(x, t)}{T_0} = 1$$

$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} e^{-\frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \alpha t}{L}} \sin\left(\frac{\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi (1-x)}{L}\right) \quad (5)$$

با استفاده از انتگرال دوهمال [۱]، دما در  $x_1$  را می توان به صورت زیر نوشت:

$$T(x, t) = \int_0^t q(\lambda) \frac{\partial \varphi(x, t - \lambda)}{\partial \lambda} d\lambda$$

$$+ \int_0^t y(\lambda) \frac{\partial \eta(x, t - \lambda)}{\partial \lambda} d\lambda \quad (6)$$

حرارتی مجهول با استفاده از دو تاریخچه زمانی دماهای اندازه گیری شده و روش دیجیتال فیلتر تیخونو است.

### ۲-۱-۲- مسئله دوم

در این مسئله به دنبال برآورد دو شار حرارتی مجهول در دو طرف یک جسم که از دولایه تشکیل شده است (شکل ۱-ج). فرض شده است، دو لایه تماس کامل دارند و مقاومت تماسی بین دولایه وجود ندارد. چگالی، ظرفیت گرمایی و ضریب رسانایی برای لایه اول (مطابق شکل ۲) به ترتیب  $32(kg/m^3)$ ،  $835(J/kgK)$  و  $0.035(W/mK)$  و برای لایه دوم (مطابق شکل ۲) به ترتیب  $7900(kg/m^3)$ ،  $477(J/kgK)$  و  $14.9(W/mK)$  در نظر گرفته شده است. استفاده از دو ترموکوپل دوسری دما داخل صفحه اندازه گیری می‌شود. این مسئله می‌تواند در ساخت سنسور برای اندازه گیری شار حرارتی در کوره‌ها به کار برده شود. معادله گرمای حاکم بر این مسئله با فرض خواص حرارتی ثابت به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$-k_2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_1+L_2} = q_2(t)?$$

$$-k_1 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_1(t)?$$

$$T(x, 0) = 0$$

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_1, & L_1 \leq x \leq L_1 + L_2 \\ \alpha_2, & 0 \leq x < L_1 \end{cases} \quad (11)$$

در این مسئله، هدف برآورد دو شار حرارتی  $q_1$  و  $q_2$  با استفاده از دو تاریخچه زمانی دماهای اندازه گیری شده و روش دیجیتال فیلتر تیخونو است. برای حل مسئله معکوس، این مسئله به دو زیر مسئله انتقال حرارت معکوس برای دولایه (شکل ۲) تبدیل می‌شود. ابتدا با استفاده از روش پیشنهادی شار حرارتی در لایه اول برآورد می‌شود و با استفاده از مقادیر تخمین زده شده شار حرارتی  $q_2$  در لایه دوم برآورد می‌شود که به ترتیب مقادیر شارهای حرارتی با توجه به شکل ۲ از روابط (۱۲) زیر محاسبه می‌شود:

$$q_1 = F_{L_1+L_2} \gamma + G_{L_1} Y$$

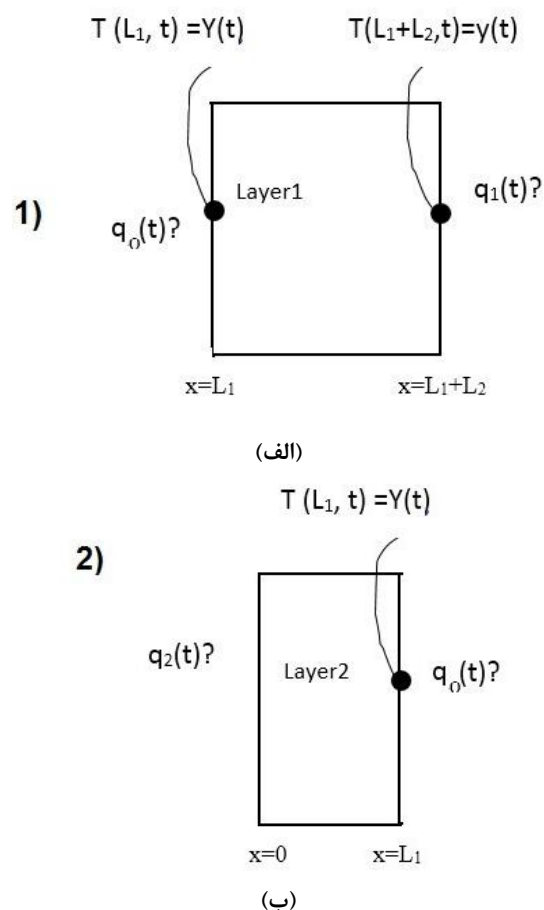
$$q_0 = F_{L_1} Y + G_{L_1+L_2} \gamma$$

$$q_2 = F_{L_1} (Y - X_{L_1} q_0) \quad (12)$$

محاسبه می‌شوند. برای بررسی دقت روش مذکور، دو مسئله طراحی شده است تا شار حرارتی برآورد گردد:

### ۲-۱-۱- مسئله اول

یک صفحه تخت مطابق شکل ۱ (الف) در نظر گرفته که از یک طرف شار حرارتی بر آن اعمال می‌شود و شرط مرزی در سطح دیگر نیز نامشخص است و با استفاده از دو ترموکوپل دوسری تاریخچه زمانی دما داخل صفحه اندازه‌گیری می‌شود. معادله حاکم بر مسئله همان معادله (۱) است. جنس صفحه از فولاد ضد زنگ AISI304 با خواص ثابت در نظر گرفته شده است. مقادیر چگالی، ظرفیت گرمایی و ضریب رسانایی به ترتیب  $7833(kg/m^3)$ ،  $465(J/kgK)$  و  $54(W/mK)$  در نظر گرفته شده است. در این مسئله، هدف برآورد شار



شکل ۲- زیرمسئله‌های معکوس مسئله مورد نظر

که  $q_0$  شار حرارتی بین دولایه است که در شکل ۲ نشان داده شده است.

### ۲-۲- داده‌های اندازه گیری شده

در مسئله مورد مطالعه هدف تخمین تاریخچه زمانی شارحرارتی مجهول است. در هر دو مسئله با استفاده از دو ترموکوپل، دماها داخل صفحه اندازه گیری می‌شود. برای تولید داده‌های اندازه گیری شده به دماهای واقعی به دست آمده از حل مستقیم مدل در محل سنسورها، نویز با توزیع گاوسی به آن اضافه می‌شود. برای حل مستقیم از گام زمانی ۰/۰۱ ثانیه و برای حل معکوس از گام زمانی ۰/۱ ثانیه استفاده شده است. دماهای اندازه گیری شده  $y(t)$  می‌تواند به عنوان شرط مرزی استفاده شود. در مسئله معکوس، شار حرارتی  $q$  مجهول است که با استفاده از دماهای اندازه گیری شده  $Y(t)$  برآورد خواهد شد. جنس صفحه از فولاد ضد زنگ AISI304 با خواص حرارتی ثابت به طول  $2L$  در نظر گرفته شده است (شکل ۱-د). در مسئله اول برای تولید داده‌ها، مسئله انتقال حرارت یک‌بعدی که در آن یک سطح ( $x=0$ ) شار حرارتی  $q$  و در سطح دیگر ( $x=2L$ ) عایق در نظر گرفته شده است (شکل ۱د) و دماهای  $Y$  و  $y$  به ترتیب در  $L/2$  و  $L$  محاسبه شده است. در مسئله دوم دماهای  $Y$  و  $y$  در موقعیت‌های نشان داده شده در شکل ۱ (ج) محاسبه شده‌اند. دماهای آزمایشی شبیه سازی شده با در نظر گرفتن شار حرارتی تولید و به عنوان ورودی روش معکوس استفاده شده است.

### ۳- روش هموارسازی

روش هموارسازی یک روش تنظیم است که در آن از خاصیت میانگین‌گیری کرنل گوسین برای یکنواخت کردن<sup>۱</sup> داده‌های تجربی استفاده شده است.

در این مقاله از روش ارائه داده شده توسط مورینو [۱۶] که به صورت اتوماتیک و بدون نیاز به دانستن مقدار نویز در داده‌ها برای فیلترینگ داده‌های اندازه‌گیری شده استفاده شده است.

<sup>۱</sup> Smoothing

### ۳-۱- بیان ریاضی

بافرض  $\delta > 0$ ،  $\rho > 0$  و

$$A_\rho = \left( \int_{-\rho}^{\rho} \exp(-s^2) ds \right)^{-1} \quad (۱۳)$$

که در آن  $\delta$  یک تابع انتگرال پذیر با کرنل

$$\rho_\delta(t) = \begin{cases} A_\rho \delta^{-1} \exp\left(-\frac{t^2}{\delta^2}\right) & |t| < \rho\delta \\ 0 & |t| > \rho\delta \end{cases} \quad (۱۴)$$

است که در آن شعاع هموارکننده  $\rho_\delta$  یک مقدار غیرمنفی در بازه  $C^\infty(-\rho\delta, \rho\delta)$  که خارج از بازه  $(-\rho\delta, \rho\delta)$  به سمت صفر می‌رود و شرط زیر را تامین می‌کند.

$$\int_{-\rho\delta}^{\rho\delta} \rho_\delta(t) dt = 1 \quad (۱۵)$$

و با قرار دادن  $I = [0, 1]$  و  $I_\delta = [-\rho\delta, \rho\delta]$  اگر  $f$  روی  $I$  انتگرال پذیر باشد. روش هموارسازی روی بازه  $I$  به وسیله کانولوشن به صورت رابطه (۱۶) تعریف می‌شود.

$$J_\delta f(t) = \int_0^1 \rho_\delta(t-s) f(s) ds \quad (۱۶)$$

### ۳-۲- فرم گسسته شده $J_\delta f$

به منظور تعریف شعاع هموارسازی برای یک تابع گسسته شده، ما  $n$  عدد متفاوت را روی بازه  $I$  در نظر می‌گیریم  $t_1, t_2, \dots, t_n$  که  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1$  و تعریف می‌کنیم  $t = \max\{t_{j+1} - t_j\}$ ،  $1 \leq j \leq n-1$  در ادامه  $s_0 = 0, s_n = 1$  برای

$$s_j = \frac{1}{2}(t_j + t_{j-1}) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

و با قرار دادن  $G = \{g_j\}_{j=1}^n$  به صورت یک تابع مجزا شده روی بازه  $k = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  استفاده شده است.

For  $t \in I_\delta$

$$g_s(t) = \sum_{j=1}^n \left( \int_{s_{j-1}}^{s_j} \rho_\delta(t-s) ds \right) g_j \quad (۱۷)$$

### ۳-۳- انتخاب پارامتر تنظیم $\delta$

برای محاسبه  $g_{\delta k}^\epsilon$  می‌توان از رابطه (۱۸) استفاده کرد:

$$\sum_{i=1}^n [A_\delta]_{k_i} g_i^\epsilon = (g_\delta^\epsilon)_k \quad (۱۸)$$

که  $[A_\delta]_{k_i} = \int_{s_{j-1}}^{s_j} \rho_\delta(t_k - s) ds$

در حالی که  $G = \{g_i^\epsilon\}_{i=0}^N$  که  $g$  تابع داده‌های نویزی است. مقدار نویز موجود در داده‌ها معلوم نیست و پارامتر هموار

تخمین زده شده با مقادیر واقعی از رابطه (۲۳) محاسبه می‌شود:

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (q_{estimated,i} - q_{exact,i})^2}{n}} \quad (23)$$

خطای بایاس در حقیقت میزان خطای روش معکوس در برآورد شار حرارتی را نشان می‌دهد، برای حالتی که دماهای اندازه‌گیری شده فاقد نویز باشند که مانند رابطه (۲۳) محاسبه می‌گردد. در حقیقت خطای  $RMS$  مجموع خطای بایاس و خطای ناشی از نویز موجود در داده‌ها [۱]، خطای واریانس است. خطای واریانس تخمین را می‌توان از رابطه (۲۴) محاسبه کرد:

$$Variance = RMS^2 - Bias^2 \quad (24)$$

توجه شود که برای مقایسه آسانتر خطاها از مجذور خطای واریانس استفاده شده است. چند سری آزمایش عددی به منظور ارزیابی روش پیشنهادی طراحی شده است. دماهای اندازه‌گیری شبیه‌سازی شده به نویز با  $(\sigma = 0.01^\circ C)$  آغشته شده‌اند. با در نظر گرفتن مسئله انتقال حرارت یک بعدی معکوس (مسئله اول) برای صفحه‌ای به طول  $L$  که در یک سطح شار حرارتی مجهول  $q$  و در سطح دیگر  $(x=L)$  دمای  $y(t)$ ، با استفاده از روش دنباله‌ای دیجیتال فیلتر تیخونو شار حرارتی برآورد شده است. در بررسی دقت روش ذکر شده، موقعیت سنسور برای اندازه‌گیری دمای  $Y(t)$  و شکل شار حرارتی اعمالی، مقدار نویز موجود در داده‌های اندازه‌گیری و پارامتر تنظیم بررسی شده است. مقدار پارامتر تنظیم  $(\alpha_{ti})$  از روی منحنی  $L$ -curve برای حالتی که شار حرارتی  $q$  دارای مقدار ثابتی است، براساس مینیمم خطای  $RMS$  انتخاب شده است (شکل ۳). اگر  $\alpha_{ti} \rightarrow 0$  آن گاه حالت تطابق دقیق اتفاق می‌افتد و جواب کاملاً نوسانی می‌شود. در مقادیر کوچک پارامتر تنظیم مقدار نوسانات در تابع مجهول زیاد و خطای بایاس کم است و در مقادیر بزرگ پارامتر تنظیم مقدار نوسانات کم و خطای بایاس افزایش می‌یابد. مقدار بهینه پارامتر تنظیم در این بررسی برابر با  $2.81 \times 10^{-6}$  است.

با استفاده از مقدار بهینه پارامتر تنظیم، شار حرارتی تخمینی در حالتی که تاریخچه دمای ورودی بدون نویز و آغشته به نویز با  $(\sigma = 0.01^\circ C)$  در شکل ۴-الف نشان داده شده است. شکل ۴-ب شار حرارتی تخمینی را نشان می‌دهد، در حالتی که تغییرات شار حرارتی به صورت پله ایی است.

سازی با توجه به درجه یکنواخت کردن باید انتخاب شود که این پارامتر با استفاده از اصل اعتبارسنجی تقاطعی تولیدی<sup>۱</sup> به دست می‌آید که در آن مقداری تابع زیر را مینیمم می‌کند.

$$\frac{(G^\varepsilon)^T (I^T - A_\delta^T) (I - A_\delta) G^\varepsilon}{Trace((I^T - A_\delta^T) (I - A_\delta))} \quad (19)$$

که بعد از محاسبه  $g_\delta^\varepsilon$ ،  $\delta$  مینیمم کننده مطلوب با استفاده از روش جستجوی طلایی به دست می‌آید.

### ۳-۴- توسعه داده‌ها

محاسبه  $J_\delta g$  و  $g_\delta$  روی دامنه زمانی  $I = [0,1]$  که نیازمند توسعه از  $g$  در بازه بزرگ‌تر از  $I_\delta = [-\rho\delta, \rho\delta]$  یا در نظر گرفتن  $g$  در بازه  $I_\delta = [\rho\delta, 1 - \rho\delta]$  است که در این جا از تقریب اول استفاده شده است. ما برای توسعه داده‌های  $g^*$  از  $g$  در بازه  $[-\rho\delta, 0]$ ،  $[1, 1 + \rho\delta]$  به طوریکه شرایط زیر را تامین کنند، از رابطه (۲۱) استفاده شده است.

$$\|J_\delta(g^*) - g\|_{(L^2(0,\rho\delta))} \text{ is minimum} \quad (20)$$

$$\|J_\delta(g^*) - g\|_{(L^2(1-\rho\delta,0))} \text{ is minimum} \quad (21)$$

در مرز  $x = 1$  رابطه‌ای به صورت زیر داده شده است.

$$g^* = \frac{\int_{1-\rho\delta}^1 (g(t) - \int_0^t \rho_\delta(t-s)g(s)ds)u_1 dt}{\int_{1-\rho\delta}^1 ((\int_1^{1+\rho\delta} \rho_\delta(t-s)ds)^2) dt} \quad (22)$$

$$u_1 = \left( \int_1^{1+\rho\delta} \rho_\delta(t-s)ds \right)$$

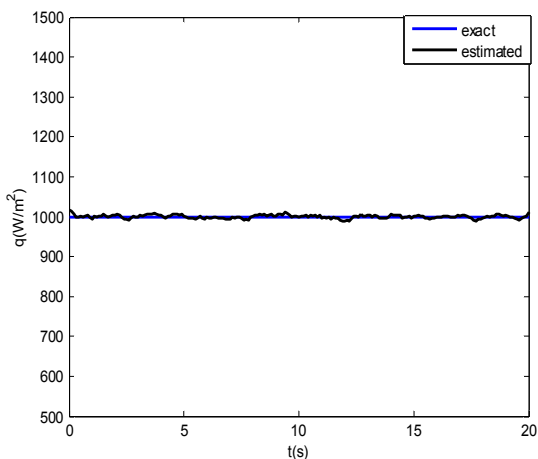
یک چنین رابطه مشابهی برای یافتن تابع در  $x = 0$  نیز وجود دارد.

### ۴- بحث پیرامون نتایج

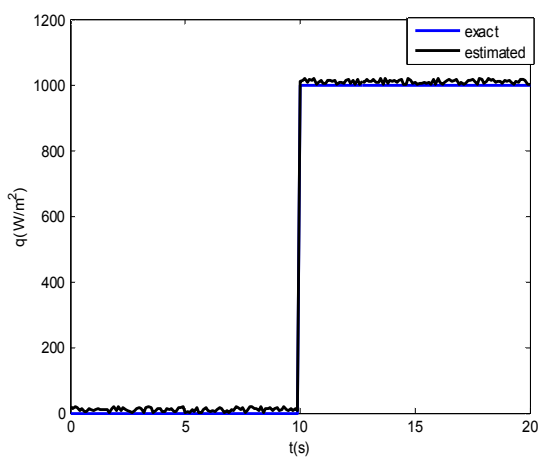
روش پیشنهادی با استفاده از چندین آزمایش عددی در برآورد شار حرارتی در یک مسئله انتقال حرارت معکوس یک‌بعدی ارزیابی شده است و با روش‌های کلاسیک انتقال حرارت معکوس، روش دنباله‌ای بک و روش گرادیان مزدوج، مقایسه شده است. برای ارزیابی و توانایی روش پیشنهادی، از ریشه دوم میانگین مربع خطا<sup>[۱]</sup> برای مقایسه مقادیر

<sup>۱</sup> Generalized Cross Validation

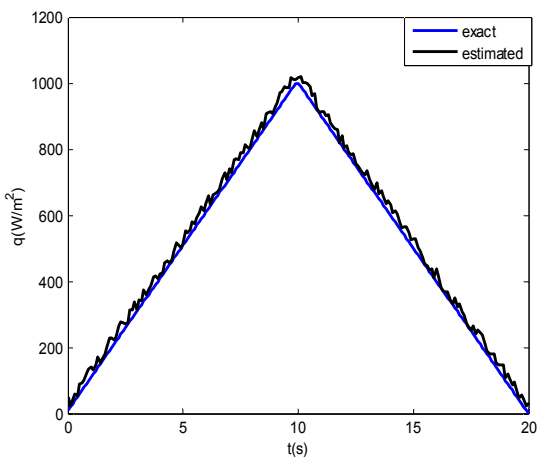
<sup>۲</sup> Root Mean Square Error



(الف)



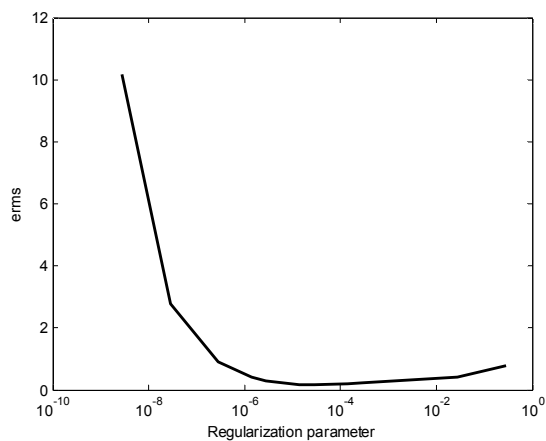
(ب)



(ج)

شکل ۴- برآورد شکل‌های مختلف شار حرارتی با استفاده از روش پیشنهادی الف) ثابت، ب) پله‌ای و ج) مثلثی

همانطور که مشاهده می‌شود، روش پیشنهادی توانسته است شار حرارتی ورودی را حتی در حالتی که مقدار شار بصورت ناگهانی (به شکل پله‌ای) تغییر می‌کند، به خوبی تخمین بزند (جدول ۱). ضرایب در روش دیجیتال فیلتر تیخونو برخلاف روش‌های کلاسیک انتقال حرارت معکوس برای یک بار تنظیم شده و قادر خواهد بود، محدوده وسیعی از شارهای حرارتی ورودی را تقریب بزند. در آزمایشی دیگر تغییرات



شکل ۳- منحنی L\_curve

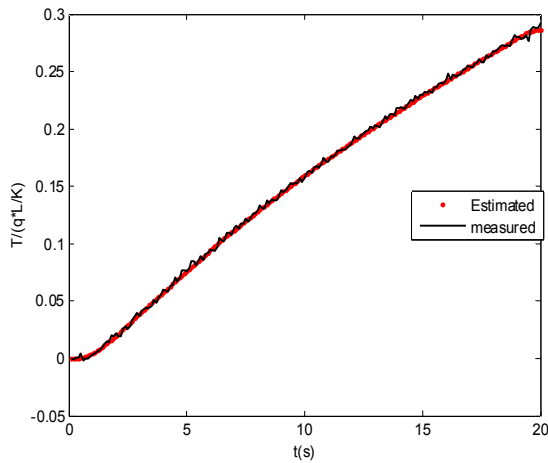
جدول ۱- آنالیز خطا برای حالت‌های مختلف شار حرارتی

Q	$\sigma$	Bias	RMS	variance
step shape	0.01	0.06	0.1	0.08
triangular	0.01	0.07	0.114	0.09
constant	0.01	0.01	0.08	0.062

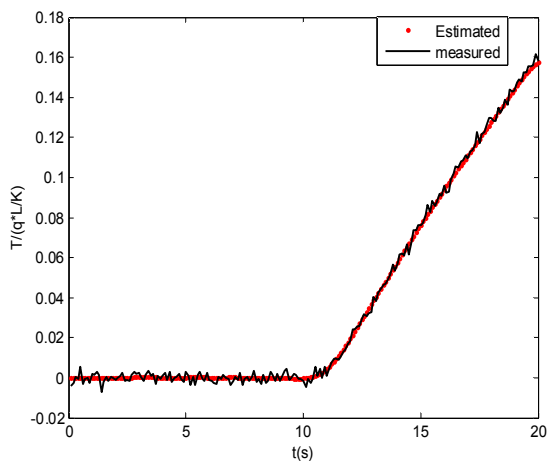
جدول ۲- آنالیز خطا برای مقادیر متفاوت نویز موجود در داده‌ها

q	$\sigma$	Bias	RMS	variance
	0.01	0.01	0.08	0.062
constant	0.05	0.01	0.1	0.099
	0.1	0.01	0.11	0.1

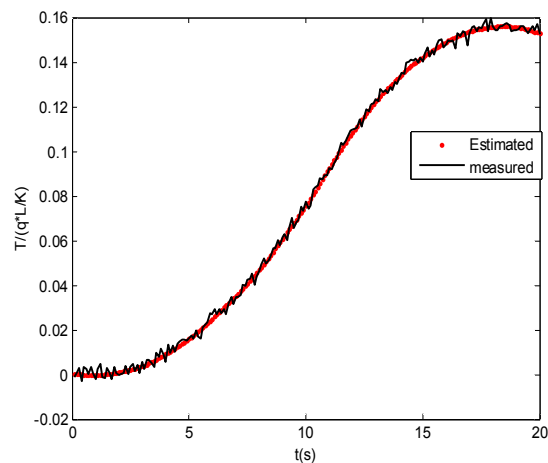




(الف)



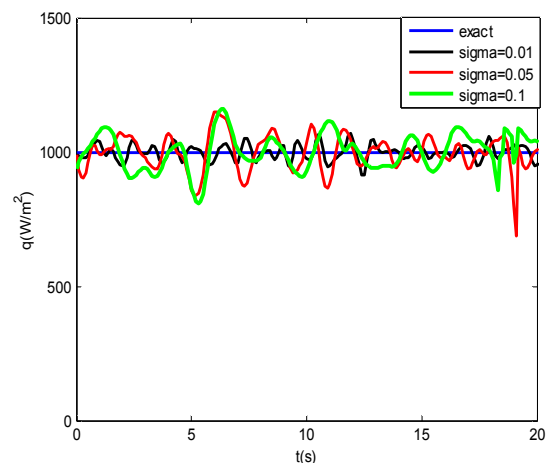
(ب)



(ج)

شکل ۶- دماهای اندازه گیری شده و برآورد شده در حالتی که شار حرارتی (الف) ثابت، (ب) پله ایی و (ج) مثلثی

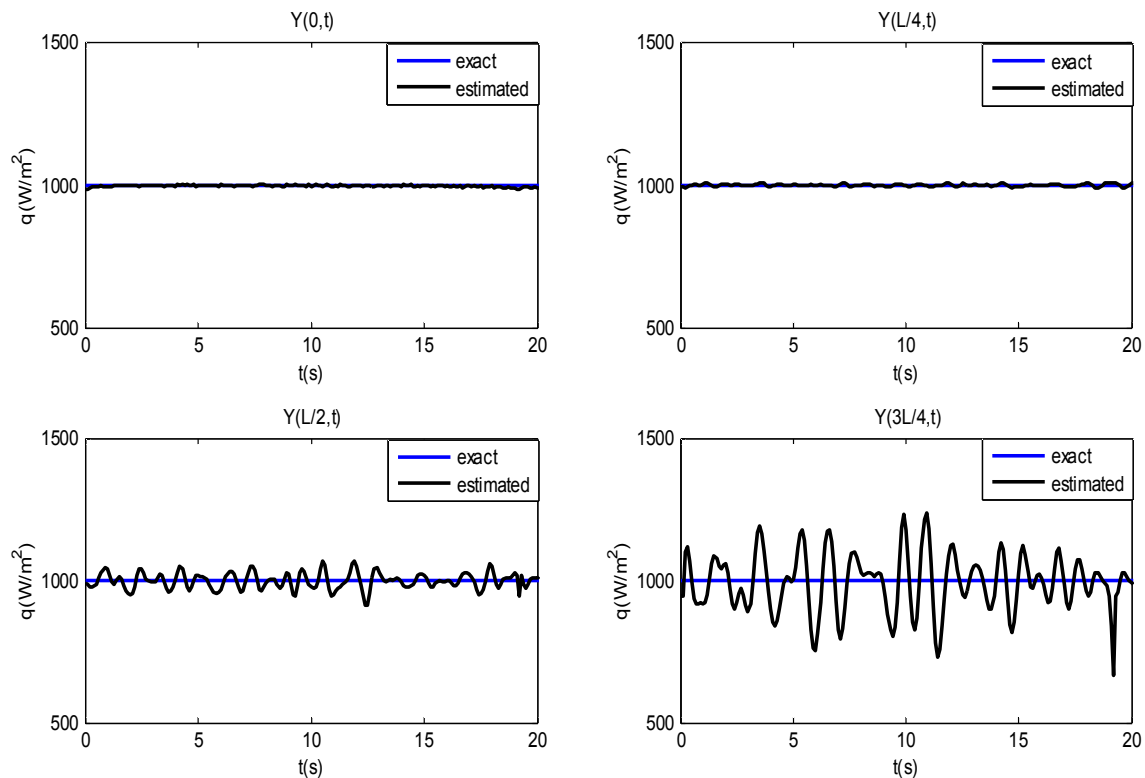
زمانی شار حرارتی با زمان به صورت مثلثی در نظر گرفته شده است. شکل ۴-ج شار حرارتی تخمینی را در این حالت نشان می‌دهد. اثر نویز موجود در داده‌ها در دقت روش پیشنهادی با در نظر گرفتن نویز با مقادیر حرارتی اعمالی با زمان ثابت است، بررسی شده است. شار حرارتی برآورد شده با استفاده از روش پیشنهادی در شکل ۵ نشان داده شده است. آنالیز خطا در هر آزمایش انجام شده است و مقادیر خطاها در جدول ۲ آورده شده است.



شکل ۵- بررسی اثر مقدار نویز موجود در دماها بر تخمین شار حرارتی

در شکل ۶ مقایسه‌ای بین دماهای اندازه گیری شده و دماهای تخمین زده شده با استفاده از شار حرارتی تخمینی برای سه حالتی که شار ورودی ثابت، پله‌ای و مثلثی انجام شده است. دماها با خطایی کمتر از ۵٪ کاملاً برهم منطبق هستند.

همانطور که در اینجا مشاهده می‌شود، روش پیشنهادی توانسته است، دماهای اندازه گیری ورودی را بخوبی با استفاده از مقادیر تخمینی شار حرارتی برآورد کند. اثر موقعیت ترموکوپل که دمای  $Y(t)$  را اندازه گیری می‌کند، نیز بر دقت تخمین شار حرارتی بررسی شده است. چهارموقعیت برای  $x_1$  در نظر گرفته شده است و شار حرارتی تخمین زده شده است (شکل ۷). با دور شدن از سطح فعال، به دلیل اثرات تاخیر و میرایی در انتقال حرارت رسانشی، تغییرات دمایی به ازاء شار حرارتی کمتر شده است که باعث ایجاد



شکل ۷- بررسی اثر موقعیت سنسور  $x_1$  بر دقت تخمین شار حرارتی

جدول ۴- اثر مقدار نویز و هموارسازی داده‌ها بر تخمین شار حرارتی

$\sigma(^{\circ}\text{C})$	0.01	0.5	1	1.2
No mollified data	0.151	0.351	0.547	1.729
Mollified data	0.077	0.073	0.077	0.087

[۴] انجام شده است. در روش یک، فرض شده است، هر یک از توابع ترکیبی از  $M$  جزء گسسته شده بر زمان است که در هر مرحله فرض می‌شود تا جزء  $M-1$  ام تخمین زده شده است و توزیع دما داخل جسم را در زمان  $t_{m-1}$  مشخص است. در روش یک به طور موقت فرض می‌شود که  $q_M = q_{M+i-1} = cte \ i = 1, 2, \dots, r$  در این روش  $r$  پارامتر تنظیم است و با استفاده از رابطه (۲۵) می‌توان شار حرارتی [۱] را برآورد کرد:

خطا در تخمین می‌گردد. نتایج نشان می‌دهد، هنگامی که سنسورها در سطح فعال قرار دارند، تخمین دقیق‌تر خواهد بود (جدول ۳).

جدول ۳- آنالیز خطا برای موقعیت‌های مختلف سنسور  $x_1$

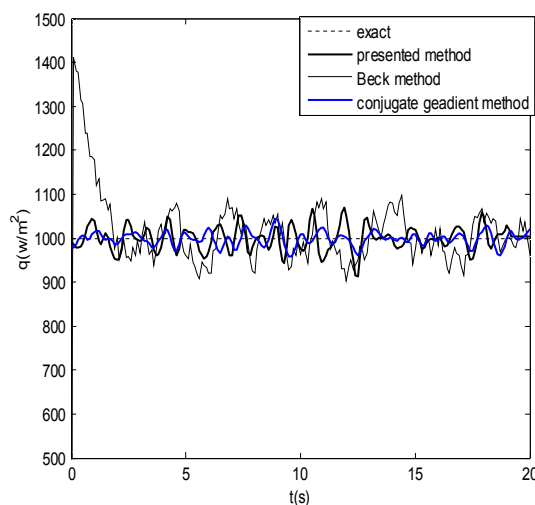
variance	RMS	Bias	$\sigma(^{\circ}\text{C})$	$X_1$
0.024	0.109	0.106	0.01	L/4
0.018	0.151	0.15	0.01	L/2
0.228	0.297	0.191	0.01	3L/4
0.016	0.020	0.013	0.01	0

برای بررسی دقت روش دیجیتال فیلتر تیخونو، مقایسه‌ای با روش دنباله‌ابی یک [۱] و روش گرادیان مزدوج

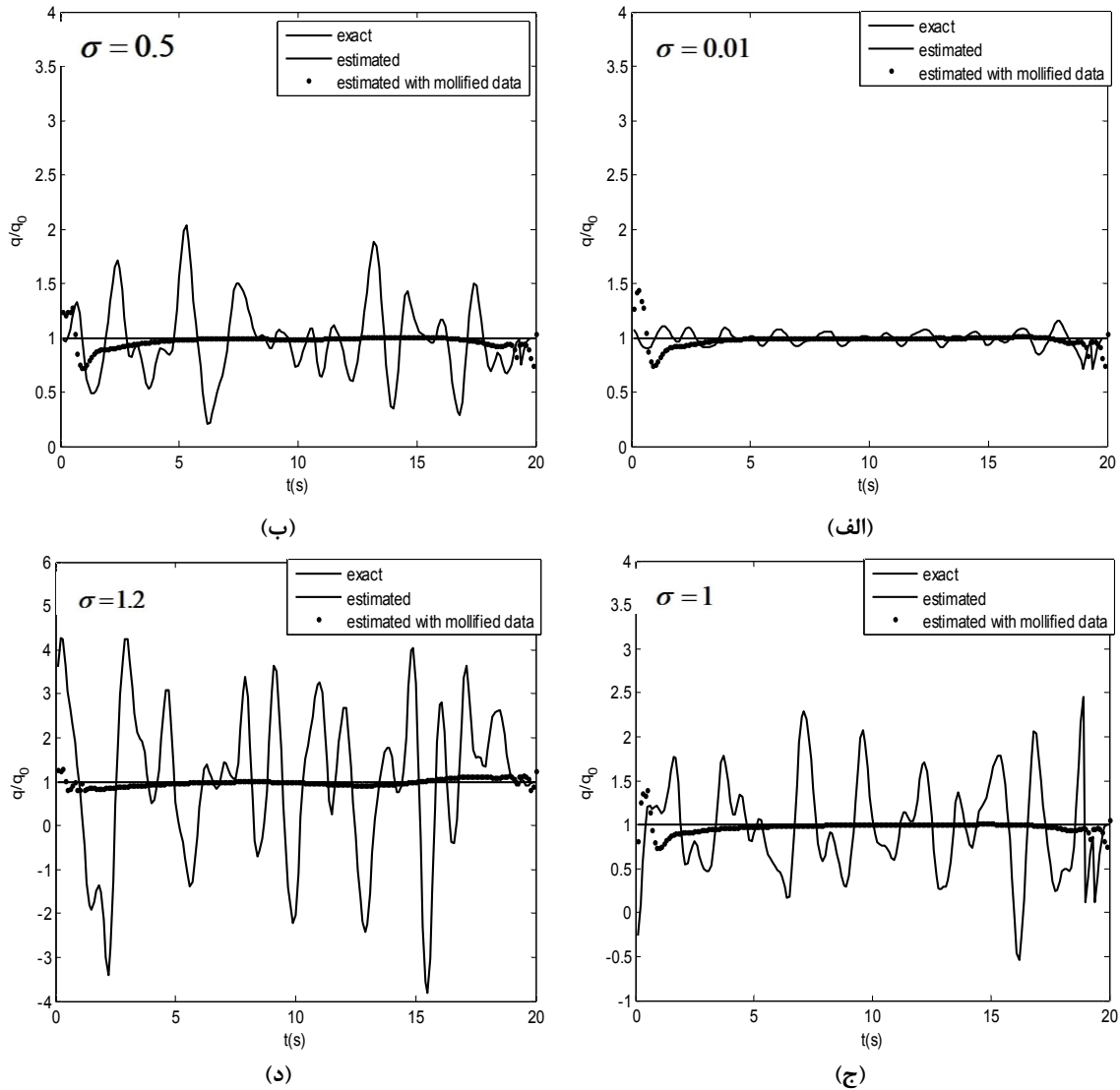
در روش دیجیتال فیلتر تیخونو، یکبار مقدار پارامتر تنظیم تعیین می شود و ضرایب فیلترها تولید می شود. در صورتی که از داده های دمایی با نویز زیاد استفاده شود، به بررسی اثر استفاده از روش هموارسازی پیش از تخمین شار حرارتی بر دقت روش پرداخته شده است. چهار سری دما که آلوده به نویز با مقادیر  $\sigma = 0.01, 0.5, 1, 1.2^\circ\text{C}$  در نظر گرفته شده است و شار حرارتی برآورد شده است (شکل ۹) هنگامی که نویز موجود در ورودی روش معکوس زیاد می شود، نوسانات در تخمین بیشتر می شود و خطای واریانس نیز افزایش می یابد. هنگامی از روش هموارسازی برای نویز زدایی داده های اندازه گیری استفاده شده است، نوسانات تخمین کمتر و دقت آن بیشتر (جدول ۴) است؛ بخصوص هنگامی که مقادیر نویز زیاد است، در شکل ۹-الف دیده می شود. تقریباً با و بدون داده های هموارسازی شده، در مقادیر نویزهای پایین، تخمین دارای دقت یکسانی است و در مقادیر نویزهای بالاتر، اثر استفاده از داده های هموار سازی شده کاملاً مشخص است. تخمین ها در چند آزمایش در نظر گرفته شده با شار حرارتی اعمالی در این مسئله در هر آزمایش تطابق خوبی دارد که نشان دهنده دقت روش دنباله ای پیشنهادی است. یادآوری می شود، مقادیر خطاها در جداول (۴-۱) بی بعد هستند. توصیه می شود، در صورتی که از این روش در ساخت سنسور برای برآورد شار حرارتی استفاده شود، همراه آن از روش هموارسازی نیز استفاده شود تا دقت تجهیز افزایش یابد. در مسئله دوم با توجه به شکل ۱-ج، هدف برآورد دو شار حرارتی  $q_1$  و  $q_2$  با استفاده از اندازه گیری دو تاریخچه دمایی در یک جسم که از دو ماده متفاوت تشکیل شده است. ابتدا با استفاده از روش پیشنهادی شار حرارتی در لایه اول برآورد می شود و با استفاده از مقادیر تخمین زده شده شار حرارتی  $q_2$  در لایه دوم برآورد می شود که به ترتیب مقادیر شارهای حرارتی با توجه به شکل ۲ از روابط (۱۲) محاسبه می شود. شکل ۱۰ شارهای حرارتی برآورد شده را با استفاده از روش پیشنهادی نشان می دهد نتایج حاکی از دقت روش پیشنهادی در برآورد هر دو شار حرارتی  $q_1$  و  $q_2$  است. حالت های مختلفی برای شار حرارتی  $q_2$  در نظر گرفته شده است که نتایج تخمین در شکل های ۱۱ و ۱۲ برای حالتی

$$q_M = \frac{\sum_{i=1}^r \varphi_i (Y_{m+i-1} - T_{m+i-1} [q = 0])}{\sum_{i=1}^r \varphi_i^2} \quad (25)$$

در این رابطه  $\varphi$  و  $T$  به ترتیب از رابطه (۷) با فرض  $q = 1\text{W/m}^2$  و  $q = 0\text{W/m}^2$  محاسبه می شوند. برای دریافت جزئیات بیشتر درباره روش بک می توان به [۱] مراجعه نمود. روش گرادیان مزدوج یکی از روش تکراری مبتنی بر گرادیان تابع هدف است که در دسته بندی روش های تمام دامنه انتقال حرارت معکوس است که برای مقایسه با روش دنباله ای دیجیتال فیلتر تیخونو استفاده شده است و برای دریافت جزئیات بیشتر درباره این روش، می توان به [۴] مراجعه کرد. در شکل ۸ مقایسه ای بین روش دیجیتال فیلتر تیخونو و روش دنباله ای بک و گرادیان مزدوج انجام شده است. با در نظر گرفتن مقدار  $r = 5$  در روش بک، شار حرارتی برآورد شده است. هر سه روش بخوبی توانسته اند، شار حرارتی را برآورد کنند. مقدار خطای بی بعد RMS برای روش دیجیتال فیلتر  $0.15$ ، روش بک  $0.203$  و روش گرادیان مزدوج  $0.14$  است که دقت تخمین با استفاده از روش دیجیتال فیلتر تیخونو بیشتر از روش دنباله ای بک و کمی کمتر از روش گرادیان مزدوج است. در حقیقت روش دیجیتال فیلتر تیخونو علاوه بر خاصیت دنباله آن دارای دقت یک روش تمام دامنه نیز هست.



شکل ۸- مقایسه شار حرارتی تخمینی با استفاده از روش پیشنهادی مقاله و روش بک و گرادیان مزدوج

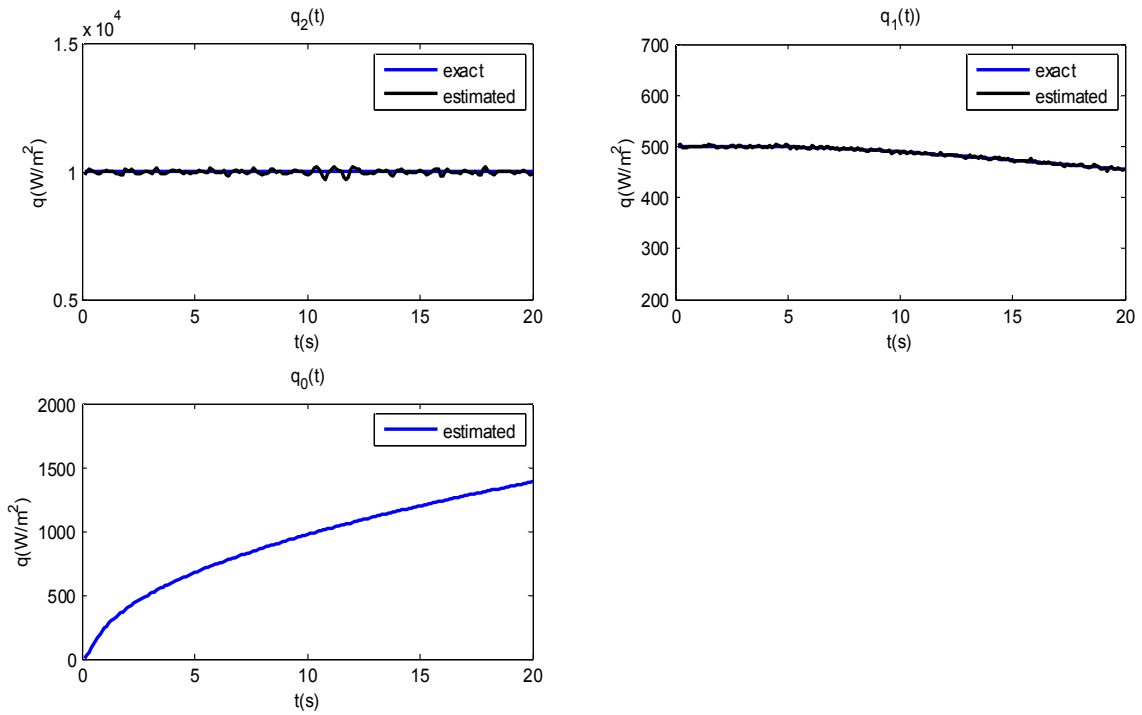


شکل ۹- بررسی اثر هموارسازی داده‌ها بر نتایج در چند حالت با مقدار نویزهای متفاوت

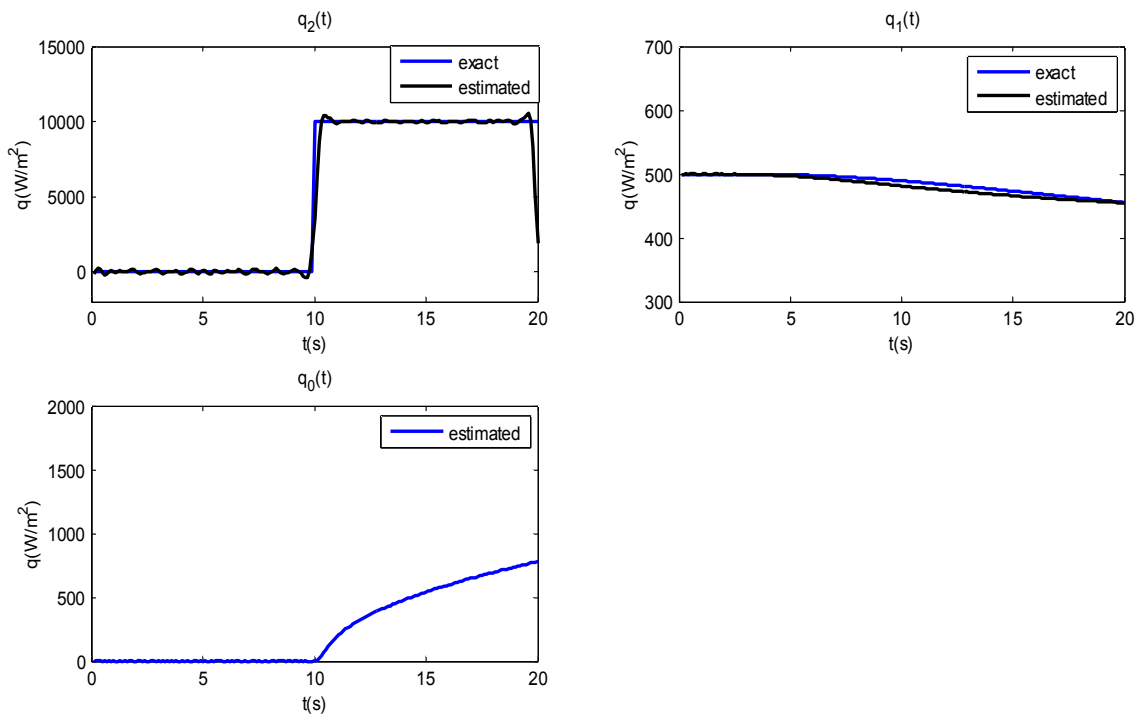
جدول ۵- آنالیز خطا در مسئله دوم

Shape of $q_1$		Bias	RMS	variance
triangular	$q_1$	0.0092	0.0112	0.0063
	$q_2$	0.0091	0.0101	0.0043
step shape	$q_1$	0.0158	0.0166	0.0051
	$q_2$	0.0730	0.0780	0.0275
constant	$q_1$	0.0142	0.0153	0.0057
	$q_2$	0.0614	0.0691	0.0316

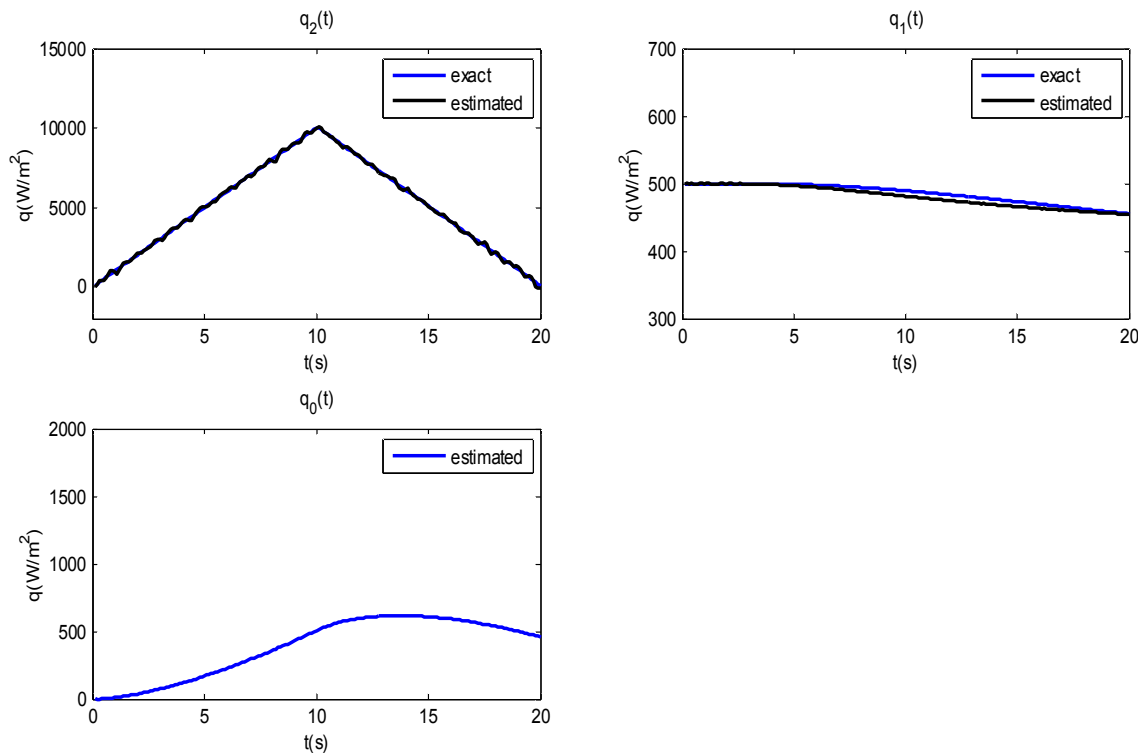
که  $q_2$  به صورت پله‌ای و مثلثی در نظر گرفته شده است، نشان داده شده است. نتایج حاکی از دقت خوب الگوریتم پیشنهادی دارد. آنالیز خطا نیز در جدول ۵ آورده شده است. خطاها در تخمین  $q_1$  نسبت به  $q_2$  کمتر است. علت آن به موقعیت سنسورها برمی‌گردد و برای محاسبه  $q_1$  (رابطه (۱۲)) از دماهای  $\gamma(t)$  استفاده شده است که دقیقاً در سطح فعال قرار دارند.



شکل ۱۰- تخمین شار حرارتی در حالت اول از مسئله دوم



شکل ۱۱- تخمین شار حرارتی در حالت دوم از مسئله دوم



شکل ۱۲- تخمین شار حرارتی در حالت سوم از مسئله دوم

### ۵- نتیجه گیری

در این مقاله روش دیجیتال فیلتر تیخونو برای برآورد تاریخچه زمانی شار حرارتی با استفاده از تاریخچه زمانی دماهای اندازه گیری شده در مسائل انتقال حرارت معکوس پرداخته شده است. دو مسئله معکوس در نظر گرفته شده است: در مسئله اول شرایط مرزی در دو طرف دیواره مجهول است و در مسئله دوم، دیواره از دولایه تشکیل شده است و شار حرارتی در دوطرف دیواره مجهول است. در هر دو مسئله از دو ترموکوپل برای اندازه گیری تاریخچه دمای داخل جسم استفاده شده است و از یکی از ترموکوپل‌ها به عنوان شرط مرزی استفاده شده است. براساس خطای RMS کمتر، بهترین مقدار برای پارامتر تنظیم انتخاب شد و در تمامی آزمایشات از همین مقادیر استفاده شد و ضرایب فیلترها تولید شد. این ضرایب فقط یکبار تولید و در تمامی آزمایشات استفاده گردید. اثر میزان نویز موجود در دماهای اندازه گیری شده، موقعیت ترموکوپل و شکل شار حرارتی بر دقت تخمین با استفاده از

روش دیجیتال فیلتر تیخونو بررسی شد و آنالیز خطا نیز انجام گردید. آنالیز خطا و مقایسه با روش دنباله ای بک و روش گرادیان مزدوج نشان دهنده دقت خوب روش پیشنهادی در برآورد شار حرارتی است و می تواند به عنوان یک روش دنباله ای معکوس در برآورد شار حرارتی استفاده شود. استفاده از داده های هموارسازی شده پیش از تخمین شار حرارتی می تواند باعث افزایش دقت و کارایی روش دنباله ای ارائه شده شود. در مسئله دوم با تبدیل مسئله انتقال حرارت معکوس به دو مسئله انتقال حرارت معکوس، ابتدا شار حرارتی در لایه اول برآورد شد و سپس با استفاده از مقادیر تخمینی شار حرارتی در لایه دوم برآورد شد. روش پیشنهادی این قابلیت را دارد که به صورت همزمان با انجام آزمایش با یک بار برآورد ضرایب فیلترها مورد استفاده قرار گیرد. این امر سبب می شود که این روش در عین سادگی، نیاز کمتری به حافظه و زمان محاسباتی داشته باشد و در ساخت سنسورهای برای برآورد شار حرارتی به کار گرفته شود. توصیه می گردد در صورتی که از این روش در ساخت سنسور برای برآورد شار حرارتی

## ۷- مراجع

- [1] Beck JV, Blackwell B, Clair SR (1988) Inverse heat conduction: Ill-Posed Problems. 3th edn. Wiley, New York.
- [2] Tikhonov AN, Arsenin VY (1977) Solution of Ill-Posed Problems. Winston and Sons, Washington. DC.
- [3] Beck JV (1968) Surface heat flux determination using an integral method. Nucl Eng Des 7:170-178.
- [4] Kowsary F, Farahani SD (2010) The smoothing of temperature data using the mollification method in heat flux estimating. Numer Heat Transf A 58: 227-246.
- [5] Farahani SD, Sefidgar M, Kowsary F (2011) Estimation of kinetic parameters of composite materials during the cure process by using wavelet transform and mollification method. Int Commun Heat Mass 38: 1305-1311.
- [6] Ijaz U, Khambampati A, Kim MC, Kim S, Kim KY (2007) Estimation of time-dependent heat flux and measurement bias in two-dimensional inverse heat conduction problems. Int Commun Heat Mass 50: 4117-4130.
- [7] LeBreux M, Delilets M, Lacroix M (2010) Fast inverse prediction of phase change banks in high temperature furnaces with a Kalman filter coupled with a recursive least-square estimator. Int Commun Heat Mass 53: 5250-5260.
- [8] Cabeza JMG, Garcia JAM, Rodriguez AC (2010) Filter digital form of two future temperature methods for the inverse heat conduction: A spectral comparison. Int J Numer Methods Biomed Eng 26: 554-573.
- [9] Kameli H, Kowsary F (2014) A new inverse method based on Lattice Boltzmann method for 1D heat flux estimation. Int Commun Heat Mass 50: 1-7.
- [10] Brittes R, França HR (2013) A hybrid inverse method for the thermal design of radiative heating systems. Int J Heat Mass Tran 57(1): 48-57.
- [11] Deng S, Hwang Y (2006) Applying neural networks to the solution of forward and inverse heat conduction problems. Int J Heat Mass Tran 49: 4732-4750.
- [12] Oskar NP, Haidn J (2019) Inverse heat transfer method applied to capacitively cooled rocket thrust chambers. Int J Heat Mass Tran 131: 150-166.
- [13] Wang S, Deng Y, Sun X (2018) Solving of two-dimensional unsteady inverse heat conduction problems based on boundary element method and

استفاده شود، همراه آن از روش هموارسازی نیز استفاده شود تا دقت تجهیز افزایش یابد.

## ۶- فهرست نمادها

ظرفیت گرمایی ویژه، J/KgK	$C_p$
فرم گسسته هموارشده تابع f	$J_{\delta f}$
ضریب رسانایی حرارتی، W/mK	k
طول صفحه، m	L
شارحرارتی، W/m <sup>2</sup>	q
مجدور مربعات خطای میانگین، W/m <sup>2</sup>	RMS
پارامترتنظیم در روش بک	r
دما، K	T
زمان، s	t
ماتریس ضریب حساسیت نسبت به q، Km <sup>2</sup> /W	X
دستگاه مختصات، m	x
دماهای اندازه گیری شده ترموکوپل، K	Y
دماهای اندازه گیری شده ترموکوپل، K	y
ماتریس ضریب حساسیت نسبت به T <sub>0</sub>	Z
ضریب پخش حرارتی، m <sup>2</sup> /s	$\alpha$
پارامتر تنظیم روش تیخونو	$\alpha_{ti}$
شعاع هموارسازی	$\delta$
چگالی، kg/m <sup>3</sup>	$\rho$
انحراف معیار	$\sigma$

- [15] Wang GJ, Zhang LH, Wang XD, Tai BL (2016) An inverse method to reconstruct the heat flux produced by bone grinding tools. *Int J Therm Sci* 101: 85-92.
- [16] Murio DA (1987) Automatic numerical differentiation by discrete mollification. *Comput Math Appl* 13(4):381-386.
- sequential function specification method. *Hindawi Complexity* 5: 1155-1166.
- [14] Chen H, Frankel JI, Keyhani M (2018) Nonlinear inverse heat conduction problem of surface temperature estimation by calibration integral equation method. *Numer Heat Transf B* 73(5): 263-291.