

## جهت‌یابی در حضور نویز نایک‌نواخت با استفاده از روش‌های مبتنی بر زیرفضا

سیمین علی‌بانی<sup>۱</sup>، محمود کریمی<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، ۲- استاد، دانشگاه شیراز

(دریافت: ۹۷/۰۴/۲۵؛ پذیرش: ۹۸/۰۲/۱۴)

## چکیده

در اکثر روش‌های جهت‌یابی منابع، مدل نویز محیطی معمولاً به‌صورت نویز سفید فضایی یک‌نواخت در نظر گرفته می‌شود، اما در بسیاری از کاربردها ممکن است این نوع مدل‌سازی مناسب نبوده و موجب ایجاد خطای قابل‌توجه در جهت‌یابی گردد. یکسان نبودن توان نویز در خروجی حس‌گرهای آرایه که از آن با عنوان نویز نایک‌نواخت یاد می‌شود، از جمله حالت‌هایی است که در آن‌ها این مدل درست نیست. مهم‌ترین هدف این مقاله بررسی و مقایسه عملکرد روش‌های جهت‌یابی در حضور نویز نایک‌نواخت با استفاده از شبیه‌سازی و ارائه یک روش جدید و مؤثر برای این کار است. الگوریتمی جدید با پیچیدگی اندک به‌منظور جهت‌یابی در حضور نویز سفید فضایی نایک‌نواخت ارائه خواهد شد و با استفاده از شبیه‌سازی، عملکرد آن در شرایط مختلف با روش‌های مبتنی بر تکمیل ماتریس و روش‌های جهت‌یابی مبتنی بر تکرار مقایسه خواهد شد. این مقایسه‌ها نشان می‌دهند که روش پیشنهادی در عین سادگی و محاسبات کم، دارای عملکرد نسبی کاملاً خوب و مناسبی است.

## واژگان کلیدی

جهت‌یابی منابع، جهت‌یابی مبتنی بر زیرفضا، نویز نایک‌نواخت، تکمیل ماتریس کم‌رتبه

## ۱. مقدمه

این دسته از روش‌ها جهت‌یابی بر اساس جداسازی زیر فضای نویز و سیگنال صورت می‌گیرد. روش‌های جهت‌یابی میوزیک و اسپریت دو دسته مهم از روش‌های موجود در این خانواده هستند [۳]. دسته سوم روش‌های جهت‌یابی کلاسیک، مبتنی بر جست‌وجوی کامل و چندبعدی در فضا هستند. روش‌های تخمین حداکثر نسبت درست‌نمایی (ML) و حداقل مربعات تکرار شونده غیرخطی (NLS) در این دسته قرار می‌گیرند [۴]. از جمله روش‌های جدید پیشنهاد شده در جهت‌یابی منابع، روش‌های مبتنی بر مفهوم نمایش تنک<sup>۴</sup> است [۵]. در این نوع از روش‌ها، فضا به زاویه‌هایی با فاصله مناسب تقسیم‌بندی شده و در تمامی جهات ممکن، فرض وجود منبع بررسی می‌شود.

عمده روش‌های جهت‌یابی این کار را با فرض حضور نویز سفید فضایی یک‌نواخت انجام می‌دهند. در حالتی که از این الگوریتم‌ها در حضور سایر نویزها از جمله نویز سفید فضایی نایک‌نواخت<sup>۵</sup> و نویز تا حدی همبسته<sup>۶</sup> استفاده شود، عملکرد جهت‌یابی به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد. با توجه به

یکی از موضوعات مهم مورد توجه در حوزه پردازش سیگنال‌های آرایه‌ای، به‌دست‌آوردن اطلاعات مختلف درباره سیگنال‌های منابع موجود در محیط است. اطلاعاتی هم‌چون، تعداد منابع موجود در محیط، توان منابع و جهت ورود منابع از جمله مهم‌ترین پارامترهای مورد توجه است [۱-۱۲]. جهت‌یابی منابع از جمله مباحث مهم مورد بررسی در حوزه پردازش سیگنال‌های آرایه‌ای است [۲]. روش‌های جهت‌یابی منابع را در حالت کلی می‌توان به دو دسته روش‌های کلاسیک و روش‌های نو تقسیم‌بندی نمود. عمده این روش‌ها، جهت‌یابی را با فرض حضور نویز سفید فضایی یک‌نواخت<sup>۱</sup> انجام می‌دهند. روش‌های کلاسیک به سه دسته تقسیم می‌شوند. دسته اول روش‌های جهت‌یابی مبتنی بر پرتوسازی هستند. این نوع از روش‌ها که به دو دسته روش‌های مستقل از داده و وابسته به داده تقسیم می‌شوند بر مبنای توان خروجی پرتوساز کار می‌کنند و تفاوت روش‌های این دسته در نوع پرتوسازی است که در هر کدام به کار گرفته می‌شود. دسته دوم روش‌های کلاسیک، روش‌های مبتنی بر زیرفضا هستند. در

\*رایانامه نویسنده مسئول: karimi@shirazu.ac.ir

<sup>۱</sup> Uniform Spatial White Noise<sup>۲</sup> Maximum Likelihood<sup>۳</sup> Nonlinear Least Squares<sup>۴</sup> Sparse Representation<sup>۵</sup> Nonuniform Spatial White Noise<sup>۶</sup> Partially Correlated Noise

## ۲. مدل سازی سیگنال

فرض کنید  $L$  سیگنال باریک باند توسط آرایه‌ای متشکل از  $M$  حس گر در گیرنده دریافت می‌شود. سیگنال منابع را با فرض تصادفی بودن و برقرار بودن شرایط میدان دور در نظر خواهیم گرفت. آرایه حس گرها نیز به صورت خطی یکنواخت فرض می‌شود. با توجه به شرایط فوق بردار حاصل از خروجی آرایه به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{l=1}^L \mathbf{a}(\theta_l) s_l(t) + \mathbf{n}(t) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

در رابطه (۱)،  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T$  بردار خروجی المان‌های آرایه در لحظه  $t$  و با ابعاد  $M \times 1$  است. ماتریس  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1(\theta), \mathbf{a}_2(\theta), \dots, \mathbf{a}_L(\theta)]^T \in \mathbb{C}^{M \times L}$  حاوی  $L$  بردار هدایت منابع با ابعاد  $M \times L$  است. بردار  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_L(t)]^T$  بردار حاصل از  $L$  سیگنال منبع با ابعاد  $L \times 1$  است و ماتریس کواریانس سیگنال منابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{P} = E\{\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)\} \in \mathbb{C}^{L \times L} \quad (2)$$

در رابطه (۲)، عبارت  $E\{\cdot\}$  بیان گر امید ریاضی و عبارت  $\{\cdot\}^H$  بیان گر مزدوج ترانهاده است. بردار نویز در المان‌های آرایه است. با فرض ناهمبستگی سیگنال منابع و نویز، ماتریس کواریانس خروجی آرایه دارای مدلی به صورت زیر است:

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H + \mathbf{Q} \quad (3)$$

در رابطه (۳)، ماتریس  $\mathbf{R}$ ، ماتریس کواریانس خروجی آرایه با ابعاد  $M \times M$  است و ماتریس  $\mathbf{Q}$ ، ماتریس کواریانس نویز با ابعاد  $M \times M$  است. ساختار ماتریس کواریانس نویز در حالت‌های نویز سفید فضایی یکنواخت و نویز سفید فضایی نایکنواخت در بخش سوم مورد بحث و بررسی قرار خواهد گرفت.

## ۳. جهت‌یابی در حضور نویز نایکنواخت

در صورتی که نویز به صورت سفید فضایی یکنواخت در نظر گرفته شود، ماتریس کواریانس نویز  $\mathbf{Q}$ ، یک ماتریس قطری است که همه المان‌های روی قطر آن مقدار یکسانی دارند. در واقع در این حالت  $\mathbf{Q}$  یک ماتریس همانی است که در یک ضریب مشخص

تحقیقات انجام شده اخیر، رویکردهای مختلفی برای حل این مشکل پیشنهاد شده است. هدف اصلی روش‌های پیشنهاد شده، تخمین ماتریس کواریانس نویز و زیرفضای نویز و سیگنال است به گونه‌ای که بتوان بعد از انجام این کار از الگوریتم‌های جهت‌یابی ذکر شده برای تخمین جهت ورود منابع استفاده نمود. در این مقاله، مروری بر تعدادی از مهم‌ترین روش‌های جهت‌یابی مبتنی بر زیرفضا در حضور نویز سفید فضایی نایکنواخت خواهیم داشت. در تمامی شبیه‌سازی‌ها، در مرحله نهایی از الگوریتم میوزیک برای جهت‌یابی استفاده خواهد شد. در واقع در حالت نویز نایکنواخت نمی‌توان به صورت مستقیم از میوزیک استفاده کرد و عملکرد خوبی نخواهد داشت، زیرا در این حالت زیرفضاهای سیگنال و نویز به راحتی از یکدیگر قابل تفکیک نبوده و نیاز است قبل از به کارگیری مستقیم الگوریتم جهت‌یابی میوزیک، ابتدا با تخمین ماتریس کواریانس نویز و یا زیرفضاهای سیگنال و نویز به نوعی این زیرفضاها را از یکدیگر تفکیک کرد. در این مقاله جهت حل مشکلات ناشی از حضور نویز نایکنواخت و تفکیک صحیح زیرفضاها، الگوریتم‌های موجود و یک الگوریتم پیشنهادی را بررسی می‌کنیم. روش تخمین زیرفضا بر اساس حداکثر نسبت درست‌نمایی تکرارشونده (IMLSE)<sup>۱</sup>، تخمین زیرفضا بر اساس حداقل مربعات تکرارشونده (ILSSE)<sup>۲</sup>، [۱]، تکمیل ماتریس<sup>۳</sup> [۷]، روش حداکثر نسبت درست‌نمایی معین<sup>۴</sup> [۲] و روش حداکثر نسبت درست‌نمایی تصادفی<sup>۵</sup> [۸] و نیز روش پیشنهادی جایگذاری حداقل توان در قطر اصلی از جمله روش‌هایی هستند که به منظور تصحیح روش‌های جهت‌یابی در حضور نویز نایکنواخت به کار می‌روند. در این مقاله تئوری برخی از این روش‌ها مرور می‌شود و با استفاده از شبیه‌سازی عملکرد آن‌ها بررسی و مقایسه خواهد شد.

بخش‌های مختلف این مقاله به این شرح است: در بخش دوم روابط مربوط به مدل سازی سیگنال‌های دریافتی در آرایه گیرنده در حضور نویز بررسی می‌شود. در بخش سوم به بیان مدل نویز نایکنواخت پرداخته می‌شود و سپس الگوریتم‌های جهت‌یابی مبتنی بر زیرفضا در حضور نویز نایکنواخت بیان می‌گردد. در بخش چهارم شبیه‌سازی و ارزیابی عملکرد روش‌های بیان شده در بخش سوم، انجام می‌شود. در بخش پنجم هم نتایج مقاله آورده می‌شود.

<sup>1</sup> Iterative ML Subspace Estimation

<sup>2</sup> Iterative LS Subspace Estimation

<sup>3</sup> Matrix Completion

<sup>4</sup> Deterministic ML

<sup>5</sup> Stochastic ML

را اسپن می‌کند. بنابراین، می‌توان به‌صورت مستقیم از ماتریس  $B$  در روش‌های جهت‌یابی کلاسیک مانند میوزیک استفاده کرد. بر اساس معرفی این ماتریس، در مرجع [۱] دو روش مبتنی بر تخمین ML و LS پیشنهاد شده است که توسط این دو روش می‌توان در یک فرایند تکراری، زیرفضای سیگنال-نویز و ماتریس کواریانس نویز را تخمین زد و سپس از الگوریتم‌های مبتنی بر زیرفضا یا جست‌وجوی کامل در جهت‌یابی استفاده نمود. در ادامه به تشریح هر یک از این دو روش که در مرجع [۱] به‌طور کامل معرفی شده است، می‌پردازیم.

### ۳-۱-۱. تخمین زیرفضا بر اساس حداکثر نسبت درست‌نمایی تکرارشونده (IMLSE)

در صورتی که سیگنال منابع دارای ماهیت تصادفی باشد، تابع نسبت درست‌نمایی به‌صورت رابطه (۱۰)، طبق مرجع [۸] تعریف می‌شود:

$$f(\bar{\Psi}) = \frac{1}{\det\{\pi R\}^N} \exp\{-\sum_{t=1}^N \mathbf{x}^H(t) R^{-1} \mathbf{x}(t)\} \quad (10)$$

که در این رابطه، پارامتر  $\bar{\Psi} = \{\theta, P, Q\}$  شامل تمامی پارامترهای مجهول زوایای منابع، ماتریس کواریانس سیگنال و ماتریس کواریانس نویز است.

همان‌طور که گفته شد، در جهت‌یابی به روش IMLSE، جهت‌یابی بر اساس ماتریس  $B$  صورت می‌گیرد. در این روش بر اساس تابع چگالی احتمال ML تصادفی رابطه (۱۰)، در ابتدا یک تابع نسبت درست‌نمایی منفی لگاریتمی (NLL) نسبت به دو ماتریس  $B$  و  $Q$  به‌صورت رابطه (۱۱)، طبق مرجع [۱] معرفی می‌شود:

$$\ell(B, Q) = \log \det R + \text{trace}\{R^{-1} \hat{R}\} \quad (11)$$

با حداقل‌سازی رابطه (۱۱)، نسبت به ماتریس‌های  $B$  و  $Q$ ، فرم بسته‌ای برای هر یک از ماتریس‌های  $B$  و  $Q$  حاصل می‌شود و در نتیجه این ماتریس‌ها به‌صورت تکراری در هر مرحله تخمین زده می‌شود. این فرایند تا همگرا شدن الگوریتم ادامه می‌یابد. به‌منظور بررسی همگرایی الگوریتم در هر مرحله اندازه تفاضل تابع نسبت درست‌نمایی مرحله فعلی و مرحله قبل با خطای آستانه مقایسه شده و تا همگرا شدن الگوریتم این روند ادامه می‌یابد. در نهایت، از ماتریس‌های  $B$  و  $Q$  به‌دست‌آمده در جهت‌یابی به روش IMLSE استفاده می‌شود. مراحل مختلف الگوریتم IMLSE به‌صورت خلاصه در ادامه آورده شده است:

که نشان‌دهنده توان نویز در المان‌های آرایه است ضرب شده است. در این حالت توان نویز در حس‌گرهای آرایه یکسان است و ماتریس  $Q$  به‌صورت رابطه (۴) تعریف می‌شود:

$$Q = E\{\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t)\} = \sigma^2 I \quad (4)$$

در رابطه فوق،  $\mathbf{n}(t)$  نویز سفید گوسی با مشخصات آماری زیر است:

$$\mathbf{n}(t) \sim \mathcal{CN}(0, Q) \quad (5)$$

در صورتی که نویز به‌صورت سفید فضایی نایکنواخت در نظر گرفته شود، ماتریس کواریانس نویز  $Q$ ، یک ماتریس قطری است که المان‌های روی قطر آن مقادیر متفاوتی دارند و مقدار درایه واقع در سطر و ستون  $i$ ام بیان‌گر توان نویز در المان  $i$ ام در آرایه حس‌گری است. در این حالت توان نویز در حس‌گرهای آرایه مقادیر متفاوتی داشته و ماتریس  $Q$  به‌صورت زیر خواهد بود:

$$Q = E\{\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t)\} = \text{diag}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_M^2\} \quad (6)$$

### ۳-۱-۲. تخمین زیرفضا در روش‌های مبتنی بر تکرار

در این بخش که از مرجع [۱] آمده است، ما با استفاده از [۱] به تشریح روش‌های IMLSE و ILSSE می‌پردازیم. در روش‌های تکراری معرفی‌شده در مرجع [۱] به‌منظور جهت‌یابی منابع در حضور نویز سفید فضایی نایکنواخت، با فرض ناهمبسته بودن سیگنال منابع، در مرحله اول ماتریس کواریانس سیگنال منابع به‌صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$P = LL^H \quad (7)$$

در رابطه (۷)، ماتریس  $P$  یک ماتریس با رتبه کامل و ماتریس  $L$  حاصل از تجزیه آن یک ماتریس معکوس‌پذیر با ابعاد  $L \times L$  است. بنابراین، می‌توان ماتریس کواریانس خروجی آرایه را به فرم جدید رابطه (۸) نوشت:

$$R = ALL^H A^H + Q = BB^H + Q \quad (8)$$

در رابطه (۸)، ماتریس  $B$  یک ماتریس  $M \times L$  به‌صورت رابطه زیر است:

$$B = AL \quad (9)$$

از آن جایی که ماتریس  $L$  یک ماتریس معکوس‌پذیر است، می‌توان نتیجه گرفت که ماتریس  $B$  نیز که طبق رابطه (۹) به دست می‌آید، همانند فضای ستونی ماتریس  $A$ ، زیرفضای سیگنال

<sup>1</sup> Negative Log Likelihood

$$+trace\{BB^H BB^H\} + trace\{Q^2\} \quad (۱۳)$$

در به دست آوردن رابطه (۱۳)، از تساوی‌ها و روابط  $trace\{XY\} = trace\{YX\}$ ،  $\|X\|_F^2 = trace\{XX^H\}$ ،  $\hat{R} = \hat{R}^H$  و  $Q = Q^H$  استفاده می‌شود. جهت به دست آوردن یک فرم بسته برای ماتریس‌های  $B$  و  $Q$  و نیز حداقل مقدار تابع هدف، از این تابع نسبت به دو ماتریس  $B^*$  و  $Q$  مشتق گرفته شده و مساوی صفر قرار داده می‌شود. مراحل مختلف الگوریتم ILSSE به صورت خلاصه در ادامه آورده شده است:

#### الگوریتم ILSSE

- محاسبه تخمینی از ماتریس کواریانس آرایه به صورت،  $\hat{R} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x(t)x^H(t)$
- مقداردهی اولیه ماتریس کواریانس نویز  $Q_0$ ، تنظیم پارامتر خطای آستانه  $\epsilon$  و  $k = 0$
- حلقه تکرار
- تجزیه ویژه ماتریس  $\hat{R} - Q(k)$  و به دست آوردن بردارهای  $\Sigma_{P(k)}$  و  $U_{P(k)}$
- محاسبه ماتریس تخمین زیرفضا به صورت،  $B(k) = U_{P(k)} \Sigma_{P(k)}^{1/2}$
- تخمین ماتریس کواریانس نویز مرحله جدید،  $Q_{(k+1)} = D\{\hat{R} - B(k)B^H(k)\}$
- تنظیم مقدار جدید پارامتر  $k = k + 1$
- تکرار حلقه تا برقراری شرط همگرایی

$$|f_{(k+1)} - f_{(k)}| \leq \epsilon$$

- خروجی‌های نهایی، تخمینی از ماتریس زیرفضای سیگنال  $\hat{B}$  و ماتریس کواریانس نویز  $\hat{Q}$

با تخمین ماتریس‌های  $B$  و  $Q$ ، امکان جداسازی نویز نایکنواخت از ماتریس کواریانس آرایه و در نتیجه جداسازی زیرفضای نویز از سیگنال فراهم می‌شود و می‌توان در ادامه از روش‌های جهت‌یابی مبتنی بر زیرفضا همانند میوزیک در یافتن تخمینی از زوایای منابع استفاده نمود. رابطه (۱۴) طیف فضایی مربوط به زوایای منابع را نشان می‌دهد. این طیف بر اساس ماتریس  $B$  محاسبه می‌شود. با فرض وجود  $L$  منبع سیگنال در محیط،  $L$  قله بزرگ‌تر در این طیف نشان‌دهنده زوایای منابع خواهد بود.

$$S(\theta) = \frac{1}{a^H(\theta)(I - B(B^H B)^{-1} B^H) a(\theta)} \quad (۱۴)$$

در روش IMLSE، ماتریس  $\hat{R} = Q^{-1/2} \hat{R} Q^{-1/2}$  را می‌توان به‌عنوان ماتریس کواریانس سفید شده آرایه در نظر گرفت. بنابراین، ماتریس‌های  $\hat{Q}$ ،  $\hat{U}_P$  و  $\hat{U}_N$  به ترتیب تخمین ماتریس

#### الگوریتم IMLSE

- محاسبه تخمینی از ماتریس کواریانس آرایه به صورت،  $\hat{R} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x(t)x^H(t)$
- مقداردهی اولیه ماتریس کواریانس نویز  $Q_0$ ، تنظیم پارامتر خطای آستانه  $\epsilon$  و  $k = 0$
- حلقه تکرار
- تجزیه ویژه ماتریس  $\hat{R} = Q_{(k)}^{-1/2} \hat{R} Q_{(k)}^{-1/2}$  و به دست آوردن بردارهای  $\tilde{\Sigma}_{P(k)}$  و  $\tilde{U}_{P(k)}$
- محاسبه ماتریس تخمین زیرفضا به صورت،  $B(k) = Q_{(k)}^{1/2} \tilde{U}_{P(k)} (\tilde{\Sigma}_{P(k)} - I)^{1/2}$
- تخمین ماتریس کواریانس نویز مرحله جدید،  $Q_{(k+1)} = D\{\hat{R} - B(k)B^H(k)\}$
- تنظیم مقدار جدید پارامتر  $k = k + 1$
- تکرار حلقه تا برقراری شرط همگرایی
- خروجی‌های نهایی، تخمینی از ماتریس زیرفضای سیگنال  $\hat{B}$  و ماتریس کواریانس نویز  $\hat{Q}$

$$|\ell_{(k+1)} - \ell_{(k)}| \leq \epsilon$$

#### ۳-۱-۲. تخمین زیر فضا بر اساس حداقل مربعات تکرارشونده (ILSSE)

در این قسمت به بررسی و تحلیل دومین روش، جهت تخمین ماتریس‌های  $B$  و  $Q$  پرداخته می‌شود. در روش ILSSE به‌جای استفاده از معیار ML در تخمین از معیار LS استفاده می‌شود. بر اساس معیار LS و رابطه (۸)، برای تخمین ماتریس‌های  $B$  و  $Q$ ، مساله حداقل‌سازی LS به صورت رابطه (۲۰)، طبق مرجع [۱] نوشته می‌شود:

$$\min_{B,Q} \|\hat{R} - BB^H - Q\|_F^2 \quad (۱۲)$$

در رابطه (۱۲)،  $\|\cdot\|_F$  بیان‌گر نرم فروبینیوس است. این مساله دارای جوابی یکتا برای ماتریس‌های  $B$  و  $Q$  نیست. بنابراین، مشابه روش IMLSE، شرط اضافه قطری بودن ماتریس  $B^H B$  برای دستیابی به یک جواب یکتا به مساله فوق افزوده می‌شود. در نتیجه در این روش حل مساله حداقل‌سازی LS با شرط قطری بودن ماتریس‌های  $B^H B$  و  $Q$  مد نظر است. اولین گام در این روش تعریف تابع هدف به فرم زیر جهت استفاده در مراحل بعدی است:

$$\begin{aligned} f(B, Q) &\triangleq \|\hat{R} - BB^H - Q\|_F^2 \\ &= trace\{(\hat{R} - BB^H - Q)(\hat{R} - BB^H - Q)^H\} \\ &= trace\{\hat{R}^2\} - 2trace\{B^H \hat{R} B\} \\ &\quad - 2trace\{Q \hat{R}\} + 2trace\{B^H Q B\} \end{aligned}$$

با ماتریس کواریانس خروجی آرایه تنها در المان‌های روی قطر اصلی است، می‌توان به صورت زیر از الگوریتم تکمیل ماتریس برای کامل کردن ماتریس  $APA^H$  بهره گرفت.

۱. حذف درایه‌های قطر اصلی ماتریس کواریانس خروجی آرایه
۲. کامل کردن ماتریس  $APA^H$  با استفاده از الگوریتم تکمیل ماتریس کم‌رتبه

با انجام دو مرحله فوق می‌توان ماتریس کواریانس بدون نویز را استخراج کرد و سپس از آن در الگوریتم جهت‌یابی میوزیک استفاده نمود. روابط ریاضی مربوط به این روش در ادامه آمده است.

فرض کنید تمامی درایه‌های ماتریس کواریانس بدون نویز به جز درایه‌های روی قطر اصلی معتبر هستند. در این صورت عملگر نمونه‌برداری  $\mathcal{A} : \mathbb{C}^{M \times M} \rightarrow \mathbb{C}^{M \times M}$  بر روی ماتریس کواریانس خروجی آرایه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\mathcal{A}(X)]_{ij} = \begin{cases} X_{ij} & i \neq j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (18)$$

در رابطه (۱۸) عبارت  $X_{ij}$  و  $[\mathcal{A}(X)]_{ij}$  به ترتیب بیان‌گر درایه  $(i, j)$  ام ماتریس  $X$  و  $\mathcal{A}(X)$  است. سپس با توجه به این که می‌دانیم ماتریس  $APA^H$  یک ماتریس کم‌رتبه است، می‌توانیم با استفاده از مساله حداقل‌سازی رتبه که در مرجع [۹] برای حل مساله تکمیل ماتریس کم‌رتبه پیشنهاد می‌شود و به صورت زیر است، به بازیابی ماتریس کواریانس بدون نویز  $R_s = APA^H$  پردازیم.

در صورتی که تعداد درایه‌های ماتریس بازیابی شونده به حد کافی زیاد باشد و نیز این درایه‌ها به صورت تصادفی یکنواخت بر روی مکان‌های مختلف ماتریس توزیع شده باشد، در این صورت می‌توان ماتریس کم‌رتبه  $R_s$  را با استفاده از درایه‌های موجود و حل مساله بهینه‌سازی زیر به صورت تقریبی بازیابی نمود. مساله تکمیل ماتریس با استفاده از نرم هسته‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\min_{R_s} \|R_s\|_* \quad (19)$$

subject to  $\mathcal{A}(R_s) = \mathcal{A}(R)$

در رابطه بالا  $\|\cdot\|_*$ ، نرم هسته‌ای ماتریس است. اگر  $\sigma_k(R_s)$  بیان‌گر  $k$ امین مقدار تکین بزرگ‌تر ماتریس  $R_s$  باشد، داریم:

$$\|R_s\|_* = \sum_{k=1}^L \sigma_k(R_s) \quad (20)$$

استفاده از نرم هسته‌ای که بیان‌گر مجموع مقادیر تکین

کواریانس نویز،  $L$  بردار ویژه بزرگ‌تر و  $M-L$  بردار ویژه کوچک‌تر از ماتریس  $\hat{R}$  خواهند بود که در آخرین حلقه تکرار الگوریتم IMLSE به دست می‌آیند. با توجه به ماتریس‌های فوق رابطه جهت‌یابی با استفاده از الگوریتم IMLSE و میوزیک به صورت رابطه (۲۹) خواهد بود.

$$S_{IMLSE+MUSIC}(\theta) = \|\hat{\mathbf{a}}^H(\theta) \hat{\mathbf{U}}_N\|^{-2} \quad (15)$$

در رابطه (۱۵)، داریم:  $\hat{\mathbf{a}}(\theta) = \hat{\mathbf{Q}}^{-1/2} \mathbf{a}(\theta)$ . با استفاده از ترکیب روش‌های IMLSE و Uniform ML(UML) می‌توان به تخمینی بهتر دست یافت. اما جهت‌یابی در این شرایط، نیاز به حجم بالایی از محاسبات داشته و فرایندی زمان‌بر است. زیرا روش‌های ML نیاز به جست‌وجو در فضایی چند بعدی دارند. با توجه به ماتریس‌های فوق رابطه جهت‌یابی با استفاده از الگوریتم IMLSE و UML به صورت رابطه (۱۶) خواهد بود.

$$S_{IMLSE+UML}(\theta) = \arg \min_{\theta} \text{trace}\{P_A^{\perp} \hat{R}\} \quad (16)$$

در این رابطه پارامتر  $P_A^{\perp}$  بیان‌گر عملگر تصویرسازی است. جزئیات مربوط به جهت‌یابی به روش UML در مرجع [۳] آمده است.

به‌طور مشابه در روش ILSSE، با تجزیه ویژه ماتریس کواریانس زیرفضای  $\hat{R} - Q$  به ماتریس‌های  $\hat{U}_P$  و  $\hat{U}_N$  می‌رسیم که به ترتیب شامل  $L$  بردار ویژه بزرگ‌تر و  $M-L$  بردار ویژه کوچک‌تر ماتریس  $\hat{R} - Q$  هستند. در این حالت جهت‌یابی و تخمین زاویه ورود منابع به روش میوزیک به صورت رابطه (۱۷) خواهد بود.

$$S_{ILSSE+MUSIC}(\theta) = \|\mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{U}}_N\|^{-2} \quad (17)$$

### ۲-۳. تخمین زیرفضا بر اساس روش تکمیل ماتریس

یکی از روش‌های حذف اثر نایکنواختی نویز از ماتریس کواریانس آرایه استفاده از روش تکمیل ماتریس است. این روش در مرجع [۷] معرفی شده است. تکمیل ماتریس یکی از روش‌های قدرتمند در بازیابی ماتریس‌های کم‌رتبه از روی تعداد محدودی از نمونه‌های موجود و معتبر ماتریس است [۹-۱۵]. با توجه به رابطه (۳)، ماتریس کواریانس آرایه و ماتریس کواریانس نویز، ماتریس‌هایی با رتبه کامل هستند و ماتریس  $APA^H$  ماتریس کواریانس فاقد نویز است که دارای رتبه برابر با  $L$ ، یعنی برابر با تعداد منابع موجود در محیط است. با توجه به کم‌رتبه بودن ماتریس  $APA^H$  و دانستن این فرض که تنها تفاوت این ماتریس

بهینه‌سازی رابطه (۲۴) با استفاده از جعبه‌ابزار بهینه‌سازی CVX در نرم‌افزار MATLAB پیاده‌سازی می‌شود [۶].

### ۳-۳. تخمین زیرفضا بر اساس روش پیشنهادی

روش پیشنهادی در این مقاله جهت حذف اثر نایکنواختی نویز و در نتیجه جداسازی زیرفضاهای سیگنال و نویز، جایگذاری کم‌ترین درایه روی قطر اصلی به‌جای تمامی درایه‌های روی قطر است. در واقع در صورتی که فرض کنیم توان دریافتی مجموع سیگنال‌ها در تمامی المان‌های آرایه یکسان است، این مقدار بر روی تمامی درایه‌های روی قطر اصلی مشترک خواهد بود. بنابراین، با جایگذاری کم‌ترین مقدار روی قطر اصلی به‌جای تمامی المان‌های روی قطر، توان نویز در تمامی المان‌ها را یکسان و برابر با کم‌ترین توان نویز در المان‌های آرایه در نظر می‌گیریم. با انجام این عمل، در واقع اثر نایکنواختی نویز، ناشی از یکسان نبودن توان نویز در المان‌های آرایه از بین رفته و ماتریس کواریانس به‌دست‌آمده پس از این مرحله معادل با ماتریس کواریانسی است که توان نویز موجود بر روی قطر اصلی آن، برابر با کم‌ترین توان نویز در بین تمامی المان‌های آرایه است. در نتیجه پس از این حالت می‌توان از الگوریتم میوزیک به‌منظور جهت‌یابی استفاده نمود. ماتریس کواریانس نویز نایکنواخت را مطابق با رابطه (۶) در نظر بگیرید. این ماتریس را می‌توان به‌صورت ترکیب یک ماتریس کواریانس نویز یکنواخت و یک ماتریس کواریانس نویز نایکنواخت به‌صورت رابطه (۲۶) تجزیه کرد.

$$Q = Q_{un} + Q_{nu} \quad (26)$$

در این رابطه ماتریس‌های  $Q_{un}$  و  $Q_{nu}$  به ترتیب نمایش‌دهنده ماتریس کواریانس حاوی حداقل توان نویز و ماتریس کواریانس بخش نایکنواخت توان نویز بوده که به‌صورت روابط (۲۷) و (۲۸) تعریف می‌شوند:

$$Q_{un} = \sigma_{min}^2 \times I \quad (27)$$

$$Q_{nu} = \text{diag}([\sigma_{1r}^2, \sigma_{2r}^2, \dots, \sigma_{Mr}^2]) \quad (28)$$

در رابطه (۲۷) متغیر  $\sigma_{min}^2$ ، به‌صورت رابطه (۲۹) تعریف می‌گردد.

$$\sigma_{min}^2 = \min([\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_M^2]) \quad (29)$$

از این رو توان نویز در هر یک از المان‌های آرایه به‌صورت رابطه (۳۰) خواهد بود.

$$\sigma_i^2 = \sigma_{min}^2 + \sigma_{ir}^2 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, M \quad (30)$$

ماتریس است به‌جای تابع رتبه ماتریس که بیان‌گر تعداد مقادیر تکین می‌باشد، معادل استفاده از نرم یک در بردارها به‌جای استفاده از نرم صفر در آن‌ها است. از طرفی با توجه به این‌که ماتریس  $R_S$  یک ماتریس مثبت نیمه معین<sup>۱</sup> است، می‌توان رابطه (۲۱) را نوشت و در رابطه (۱۹) جایگذاری کرد.

$$\|R_S\|_* = \text{trace}(R_S) \quad (21)$$

شرط بیان‌شده در رابطه (۱۹) را می‌توان به‌صورت رابطه (۲۲) نوشت.

$$J\text{vec}(R_S - R) = 0 \quad (22)$$

در رابطه (۲۲)، ماتریس  $J$ ، یک ماتریس انتخاب با ابعاد  $M(M-1) \times M^2$  است که با حذف  $M$  ردیف از ماتریس واحد  $I$  با ابعاد  $M^2 \times M^2$  و اندیس‌های زیر به دست می‌آید:

$$(M+1)k + 1, \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

در نهایت با توجه به توضیحات گفته‌شده در بالا مساله رابطه (۱۹) را می‌توان به فرم رابطه (۲۳) نوشت که این رابطه یک نوع از مسائل برنامه‌نویسی خطی است.

$$\min_{R_S} \text{trace}(R_S) \quad (23)$$

subject to  $J\text{vec}(R_S - R) = 0$

با توجه به این‌که تنها تخمینی از ماتریس  $R$  یعنی  $\hat{R}$  در اختیار است، شرط تساوی رابطه (۲۳) برقرار نبوده و با اندکی خطا همراه است. به‌منظور در نظر گرفتن خطای ناشی از تخمین ماتریس کواریانس، مساله (۲۳) به‌صورت رابطه (۲۴) بیان می‌شود:

$$\min_{R_S} \text{trace}(R_S) \quad (24)$$

subject to  $\|J\text{vec}(R_S - \hat{R})\|_2 \leq \zeta$

در رابطه (۲۴)، عبارت  $\|\cdot\|_2$ ، بیان‌گر نرم ۲ برداری است و متغیر  $\zeta$  یک مقدار ثابت انتخابی است که به دقت تخمین ماتریس کواریانس  $\hat{R}$  بستگی دارد و هرچه تعداد نمونه‌های زمانی گرفته شده از المان‌های آرایه بیشتر باشد، مقدار متغیر  $\zeta$  کوچک‌تر خواهد بود.

در نهایت پس از تخمین ماتریس کواریانس بدون نویز  $R_S$ ، ماتریس کواریانس نویز  $Q$ ، طبق رابطه (۲۵) به دست می‌آید.

$$\hat{Q} = D\{\hat{R} - R_S\} \quad (25)$$

در روابط فوق عملگر  $D\{\cdot\}$ ، عملگر قطری‌ساز ماتریس است که تنها درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس ورودی را برمی‌گرداند و سایر درایه‌ها را صفر می‌کند. قابل ذکر است که، مساله

<sup>1</sup> Positive Semi-definite

روش‌ها را به‌طور نسبی با این کران سنجید.

در قضیه ۲ در مرجع [۲] نشان داده شده است که ماتریس CRB جهت تخمین زاویه ورود منابع سیگنال در حالت تصادفی بودن منابع سیگنال در محیط و نیز حضور  $L$  منبع سیگنال در محیط به‌صورت ماتریس  $L \times L$  زیر داده می‌شود:

$$CRB_{STOC\theta\theta} = \frac{1}{N} \{2\text{Re}[(\mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}^H\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{P}) \odot (\tilde{\mathbf{D}}^H\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{A}}}^{\perp}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\tilde{\mathbf{D}})^T] - \mathbf{M}\mathbf{T}\mathbf{T}^T\}^{-1} \quad (34)$$

در رابطه فوق عملگر  $\odot$ ، ضرب کرانکر ماتریس است و ماتریس‌های استفاده‌شده در رابطه به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{A}}}^{\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{A}}}(\boldsymbol{\theta}) \quad (35)$$

در رابطه (۳۵)، عملگر تصویرسازی است که مطابق با رابطه (۳۶) تعریف می‌شود و  $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{A}}}^{\perp}$ ، عملگر تصویرسازی متعامد است.

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{A}}}(\boldsymbol{\theta}) = \tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}) \left( \tilde{\mathbf{A}}^H(\boldsymbol{\theta})\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}) \right)^{-1} \tilde{\mathbf{A}}^H(\boldsymbol{\theta}) \quad (36)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1/2}\mathbf{A} \quad (37)$$

در رابطه (۳۷)، ماتریس  $\mathbf{A}$ ، ماتریس منیفولد آرایه و  $\mathbf{Q}$  ماتریس کواریانس نویز است.

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{Q}^{-1/2}\mathbf{D} \quad (38)$$

در رابطه (۳۸)، ماتریس  $\mathbf{D}$  مشتق ماتریس منیفولد آرایه  $\mathbf{A}$ ، نسبت به پارامتر  $\boldsymbol{\theta}$  است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{D} = \left[ \frac{d\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_1}, \frac{d\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_2}, \dots, \frac{d\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_L} \right] \quad (39)$$

$$\mathbf{M} = 2\text{Re}\{(\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{P})^T \odot (\tilde{\mathbf{D}}^H\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{A}}}^{\perp})\} \quad (40)$$

$$\mathbf{T} = \{(\tilde{\mathbf{R}}^{-1})^* \odot \tilde{\mathbf{R}}^{-1} - (\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{A}}}\tilde{\mathbf{R}}^{-1})^* \odot (\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{A}}}\tilde{\mathbf{R}}^{-1})\}^{-1} \quad (41)$$

#### ۴. شبیه‌سازی و مقایسه روش‌های جهت‌یابی در حضور نویز نایکنواخت

در این بخش به شبیه‌سازی و مقایسه عملکرد روش‌های مختلف جهت‌یابی در حضور نویز نایکنواخت خواهیم پرداخت. روش‌های ILSSE، JMLSE، تکمیل ماتریس و روش پیشنهادی از جمله روش‌های شبیه‌سازی‌شده در این قسمت هستند که پس از

از تجزیه ماتریس کواریانس نویز به‌صورت بالا می‌توان نتیجه گرفت که این تجزیه به‌طور مشابه به ماتریس کواریانس خروجی آرایه نیز قابل اعمال است و می‌توان با استفاده از تجزیه ماتریس کواریانس تخمینی، زیرفضای نویز و سیگنال را مطابق با رابطه (۳۱) از یکدیگر جدا نمود:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \mathbf{Q} \\ &= \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \mathbf{Q}_{un}}_{\mathbf{R}_{sig+un}} + \mathbf{Q}_{nu} \\ &= \mathbf{R}_{sig+un} + \mathbf{Q}_{nu} \end{aligned} \quad (31)$$

با فرض یکسان در نظر گرفتن مجموع توان سیگنال‌ها در تمامی المان‌های آرایه، قسمت اول عبارت سمت راست رابطه (۳۱) معادل جایگذاری کم‌ترین توان نویز در تمامی المان‌های آرایه است و قسمت دوم عبارت سمت راست، معادل بخش نایکنواخت باقی‌مانده از توان نویز المان‌ها است. با انجام این تجزیه بر روی ماتریس کواریانس سیگنال می‌توان به‌راحتی زیرفضای سیگنال و نویز را از یکدیگر جدا نمود. در نتیجه، با از بین بردن اثر نایکنواختی نویز، در مرحله بعد الگوریتم میوزیک را طبق روابط (۳۲) و (۳۳) بر روی ماتریس کواریانس اصلاح‌شده  $\mathbf{R}_{sig+un}$  به‌صورت زیر اعمال می‌کنیم و عملیات جهت‌یابی را انجام می‌دهیم.

$$\mathbf{R}_{sig+un} = \mathbf{U}_{sig}\boldsymbol{\Sigma}_{sig}\mathbf{U}_{sig}^H + \mathbf{U}_{un}\boldsymbol{\Sigma}_{un}\mathbf{U}_{un}^H \quad (32)$$

$$S(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\|\mathbf{U}_{un}^H\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})\|_2^2} \quad (33)$$

در رابطه (۳۲)، ماتریس‌های  $\mathbf{U}_{un}$  و  $\mathbf{U}_{sig}$  به ترتیب ماتریس شامل بردارهای ویژه زیر فضای سیگنال و ماتریس شامل بردارهای ویژه زیر فضای نویز هستند و ماتریس‌های  $\boldsymbol{\Sigma}_{un}$  و  $\boldsymbol{\Sigma}_{sig}$  شامل  $L$  مقدار ویژه زیر فضای سیگنال و  $M-L$  مقدار ویژه زیر فضای نویز هستند. در رابطه (۳۳)،  $S(\boldsymbol{\theta})$  طیف فضایی سیگنال‌ها در زوایای مختلف را نشان می‌دهد که زوایای متناظر با قله‌های این طیف نشان‌دهنده زاویه اهداف است. عملکرد روش پیشنهادی به همراه دیگر الگوریتم‌ها در بخش شبیه‌سازی مورد ارزیابی قرار خواهد گرفت.

#### ۴-۳. کران کرامر-رائو در حالت تصادفی و نویز نایکنواخت

جهت بررسی کیفیت عملکرد روش‌های مختلف جهت‌یابی، از مقایسه این روش‌ها با کران کرامر-رائو (CRB) در حالت تصادفی و نایکنواخت استفاده می‌کنیم. این کران، بهترین عملکرد تخمین‌های بی‌بایاس را نشان می‌دهند و می‌توان عملکرد سایر

<sup>1</sup> Spatial Spectrum

فاصله زاویه‌ای منابع، به صورت اختلاف زاویه میان دو منبع در محیط تعریف می‌شود.

تمامی شبیه‌سازی‌ها در باند پایه و با فرض باریک باند بودن سیگنال‌ها انجام می‌شود.

مقدار اولیه ماتریس کواریانس نویز در روش‌های IMLSE و ILSSE برابر با  $\mathbf{Q}_{initial} = (\mathcal{D}\{\hat{\mathbf{R}}^{-1}\})^{-1}$ ، گام زاویه سنجی در جهت‌یابی به روش میوزیک برابر با ۰٫۰۵، درجه، مقدار پارامتر خطای آستانه  $\zeta$  در رابطه (۲۴) در روش تکمیل ماتریس برابر با ۰٫۵، و مقدار پارامتر خطای آستانه  $\epsilon$  در روش IMLSE و ILSSE برابر با  $10^{-4}$  در نظر گرفته شده است.

در شبیه‌سازی‌های شکل‌های اول تا سوم، تعداد حس‌گرهای آرایه خطی یکنواخت ۸ عدد، فاصله بین حس‌گرها برابر با نصف طول موج، تعداد آزمایش‌های مستقل مونت کارلو برابر با ۵۰۰، تعداد اهداف در محیط برابر با ۲، زاویه اهداف برابر با ۳- و ۶+ درجه، فرکانس مرکزی سیگنال‌ها برابر با ۳ کیلوهرتز و سرعت موج برابر ۱۵۰۰ متر بر ثانیه در نظر گرفته می‌شود.

به دلیل کاهش کیفیت شبیه‌سازی‌ها در مقیاس کوچک، تمامی شکل‌ها در بخش آخر مقاله و پس از مراجع آورده شده است.

در آزمایش انجام‌شده در شکل (۱) عملکرد روش‌های مختلف جهت‌یابی در حضور نویز نایکنواخت در مقادیر مختلف SNR ارزیابی می‌شود.

همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود عملکرد تمامی روش‌ها با افزایش SNR بهبود می‌یابد. در این شبیه‌سازی تعداد برداشت‌ها از خروجی حس‌گرها برابر با ۵۰۰ نمونه و بدترین نسبت توان نویز برابر با ۱۲ در نظر گرفته شده است. سیگنال‌های منابع با یکدیگر ناهمبسته هستند. ماتریس کواریانس نویز در هر آزمایش مستقل مونت کارلو با دستوری به صورت زیر در نرم‌افزار متلب تعیین شده است:

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(0.5 * \text{randi}([1,12], 1, M))$$

یعنی توان نویز هر حس‌گر عددی تصادفی میان ۰٫۵ و ۶ است و نویز حس‌گرها هم ناهمبسته هستند. از شکل (۱) دیده می‌شود که تمامی روش‌ها در SNRهای مختلف دارای عملکرد بهتری نسبت به روش میوزیک عادی هستند. روش پیشنهادی و روش IMLSE در همه مقادیر SNR نسبت به سایر روش‌ها دارای خطای کم‌تری بوده و در اکثر موارد نزدیک به کران کرامر-رائو

جبران اثر نایکنواختی نویز با الگوریتم جهت‌یابی میوزیک ترکیب می‌شوند و عملکرد آن‌ها بررسی می‌شود. به منظور مقایسه، عملکرد الگوریتم میوزیک معمولی (بدون جبران اثر نایکنواختی نویز) نیز بررسی می‌شود. هم‌چنین کران کرامر-رائو برای نویز نایکنواخت جهت ارزیابی عملکرد روش‌ها رسم خواهد شد. معیار ارزیابی در تمامی شبیه‌سازی‌ها، بررسی مقادیر جذر میانگین مربعات خطای (RMSE) جهت‌یابی بر حسب پارامترهای نسبت سیگنال به نویز (SNR)، تعداد برداشت‌ها (N)، بدترین نسبت توان نویز (WNPR)، فاصله زاویه‌ای منابع<sup>۵</sup> و تعداد المان‌های آرایه (M) است. معیار RMSE در محاسبه خطای تخمین زوایای منابع به صورت رابطه (۴۲) محاسبه می‌شود.

$$RMSE_{\theta} = \sqrt{\frac{1}{KL} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L (\hat{\theta}_{k,l} - \theta_l)^2} \quad (42)$$

در رابطه (۴۲)، متغیر K، تعداد آزمایش‌های مستقل مونت کارلو، متغیر L، تعداد منابع موجود در محیط، متغیر  $\hat{\theta}_{k,l}$  تخمین زاویه منبع lam در آزمایش kام و متغیر  $\theta_l$  مقدار واقعی زاویه منبع lam است. دیگر پارامترهای مورد استفاده در شبیه‌سازی‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

نسبت سیگنال به نویز (SNR) متوسط در تمامی حس‌گرها، به صورت رابطه (۴۳) تعریف می‌شود.

$$SNR = \frac{\sigma_s^2}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{\sigma_m^2} \quad (43)$$

در رابطه (۴۳)، متغیر  $\sigma_s^2$  توان هر یک از سیگنال‌های موجود و متغیر  $\sigma_m^2$  توان نویز در المان lam است و M هم تعداد المان‌های آرایه است.

تعداد برداشت‌ها (N)، تعداد نمونه‌های زمانی گرفته‌شده از خروجی تک تک المان‌ها به ازای هر بار انجام یک آزمایش مستقل است.

بدترین نسبت توان نویز (WNPR)، برابر با حداکثر توان نویز در المان‌های آرایه تقسیم بر حداقل توان نویز در آن‌ها است و به صورت رابطه (۴۴) تعریف می‌شود.

$$WNPR = \frac{\sigma_{max}^2}{\sigma_{min}^2} \quad (44)$$

<sup>1</sup> Root Mean Square Error

<sup>2</sup> Signal to Noise Ratio

<sup>3</sup> Number of Snapshots

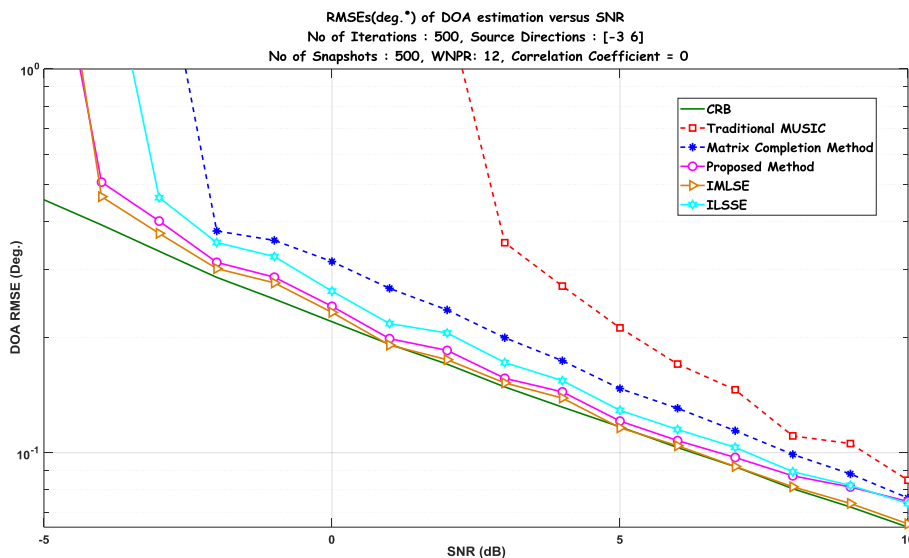
<sup>4</sup> Worst Noise Power Ratio

<sup>5</sup> Angle Separation



ترتیب روش‌های بعدی هستند که در مقابل نایکنواختی نویز دارای عملکرد بهتری نسبت به روش میوزیک عادی هستند.

هستند. این دو روش تقریباً عملکرد یکسانی را در این شرایط از آزمایش دارا هستند. دو روش ILSSE و تکمیل ماتریس نیز به

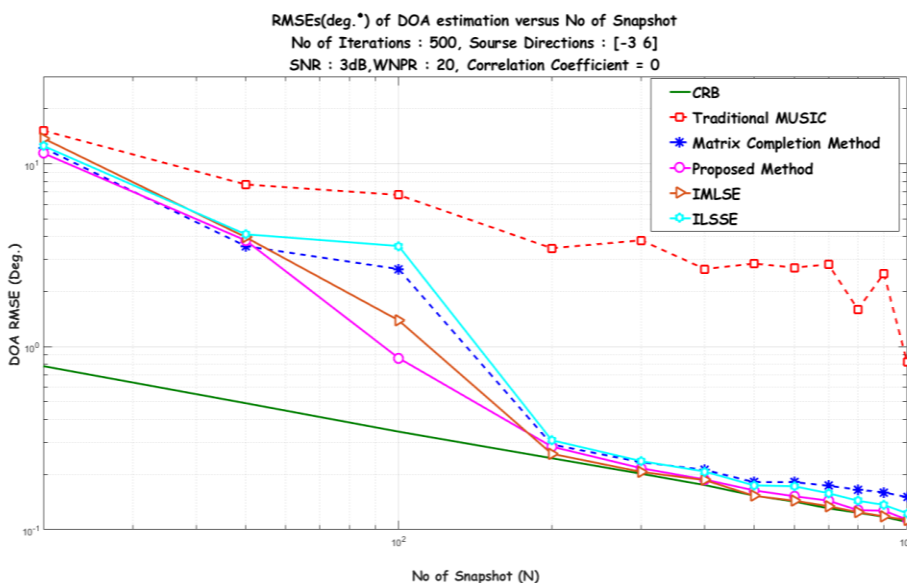


شکل (۱): نمودار RMSE زاویه‌های تخمینی منابع بر حسب SNR

همان‌طور که در شکل (۲) مشاهده می‌شود تقریباً تمامی روش‌ها در مقادیر مختلف برداشت‌ها (N)، دارای عملکرد بهتری نسبت به روش میوزیک عادی هستند. روش پیشنهادی و روش تکمیل ماتریس در مقادیر بین ۲۰ تا ۲۰۰ از N دارای عملکرد بهتری نسبت به سایر روش‌ها هستند و در مقادیر بین ۲۰۰ تا ۱۰۰۰ از N دو روش پیشنهادی و روش IMLSE نسبت به سایر روش‌ها بهترین عملکرد را دارند. به‌طور کلی می‌توان گفت روش پیشنهادی در این سطح از نایکنواختی نویز عملکرد بهتری نسبت به تمامی روش‌ها دارد.

در شکل (۲)، عملکرد روش‌های مختلف جهت‌یابی در حضور نویز نایکنواخت بر حسب مقادیر مختلف برداشت‌ها (N) ارزیابی می‌شود. همان‌طور که در شکل (۲) مشاهده می‌کنیم در همه روش‌ها، RMSE زاویه‌های تخمینی با افزایش N دارای یک روند کاهشی است. در این شبیه‌سازی، نسبت سیگنال به نویز برابر با ۳ dB و بدترین نسبت توان نویز برابر با ۲۰ در نظر گرفته شده است. سیگنال‌های منابع با یکدیگر نامبسته هستند و ماتریس کواریانس نویز به‌صورت زیر است:

$$Q = \text{diag}(0.5 * \text{randi}([1,20], 1, M))$$



شکل (۲): نمودار RMSE زاویه‌های تخمینی منابع بر حسب N

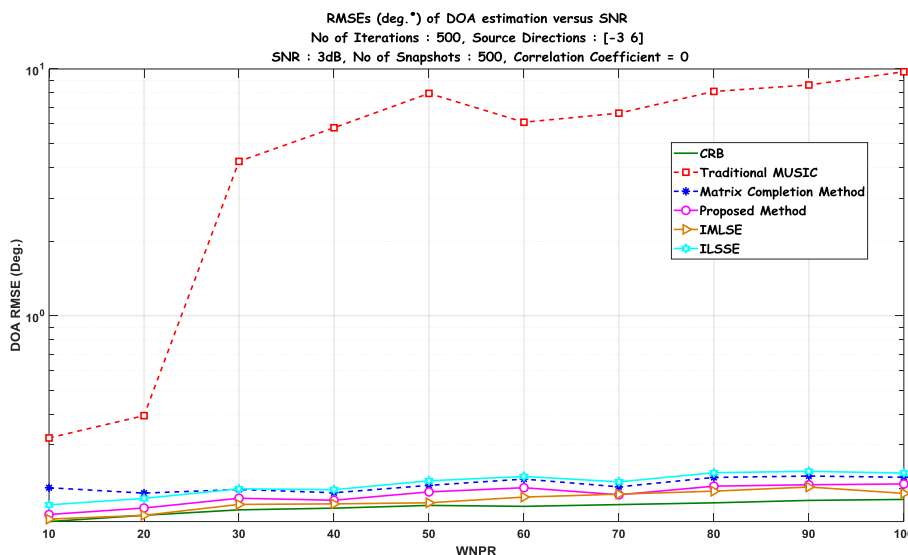
تعریف می‌شود.

با توجه به شکل (۳)، روش میوزیک عادی، با افزایش میزان نایکنواختی نویز، خطای قابل ملاحظه‌ای خواهد داشت. سایر روش‌ها در برابر افزایش پارامتر WNPR، نسبتاً مقاوم بوده و از بین این روش‌ها، روش IMLSE و سپس روش پیشنهادی دارای بیشترین دقت هستند. دو روش ILSSE و تکمیل ماتریس نیز دقت تقریباً یکسانی بر حسب این پارامتر دارند که این دقت از الگوریتم میوزیک عادی بسیار بهتر و نسبت به دو روش IMLSE و روش پیشنهادی کم‌تر است. به علاوه مشاهده می‌شود که نوع تغییرات روش‌ها با افزایش میزان نایکنواختی تنها دارای روندی افزایشی نیست و به‌طور دقیق‌تر RMSE زاویه، در برخی مقادیر WNPR دارای یک روند افزایشی-کاهشی-افزایشی است.

در ادامه عملکرد روش‌های مختلف جهت‌یابی در حضور نویز نایکنواخت را بر حسب پارامتر بدترین نسبت توان نویز (WNPR) ارزیابی می‌کنیم. همان‌طور که در شکل (۳) مشاهده می‌شود در همه روش‌ها، RMSE زاویه با افزایش WNPR دارای یک روند کمابیش افزایشی است. در این شبیه‌سازی، نسبت سیگنال به نویز برابر با ۳ dB و تعداد برداشت‌ها از حس‌گرهای آرایه در هر بار آزمایش مستقل برابر با ۵۰۰ برداشت در نظر گرفته شده است. سیگنال‌ها با یکدیگر ناهمبسته هستند و ماتریس کواریانس نویز به‌صورت زیر است:

$$Q = \text{diag}(0.5 * \text{randi}([1, wnpr(l)], 1, M))$$

در این رابطه برای تغییر میزان نایکنواختی نویز در المان‌های آرایه، بردار  $wnpr$  به‌صورت برداری از اعداد ۱۰ تا ۱۰۰ با گام ۱۰



شکل (۳): نمودار RMSE زاویه‌های تخمینی منابع بر حسب WNPR

سیگنال‌ها با یکدیگر ناهمبسته هستند و ماتریس کواریانس نویز به‌صورت زیر است:

$$Q = \text{diag}(0.5 * \text{randi}([1,12], 1, M))$$

با توجه به شکل (۴)، روش میوزیک عادی، با افزایش پارامتر فاصله زاویه‌ای منابع، دارای یک روند کاهشی-افزایشی است و دارای عملکرد ضعیف‌تری نسبت به سایر روش‌هاست. این اثر در فواصل زاویه‌ای کم منابع بیش‌تر دیده می‌شود و با افزایش فاصله زاویه‌ای منابع، عملکرد روش میوزیک به سایر روش‌ها نزدیک‌تر می‌گردد. توجه شود که بررسی دقت روش‌ها در فواصل زاویه‌ای کم حائز اهمیت بیشتری است. از بین روش‌های جهت‌یابی در حضور نویز نایکنواخت روش IMLSE در فواصل زاویه‌ای مختلف عملکرد بهتری نسبت به سایر روش‌ها داشته و روش‌های پیشنهادی، تکمیل ماتریس و ILSSE دارای عملکرد تقریباً

حال عملکرد روش‌های مختلف جهت‌یابی در حضور نویز نایکنواخت را بر حسب پارامتر فاصله زاویه‌ای منابع ارزیابی می‌کنیم. همان‌طور که در شکل (۴) مشاهده می‌شود در همه روش‌ها RMSE زاویه با افزایش فاصله زاویه‌ای منابع تا ۲۰ درجه دارای یک روند کاهشی است و پس از آن قدری افزایش می‌یابد. در این شبیه‌سازی، تعداد حس‌گرهای آرایه خطی یکنواخت ۸ عدد، فاصله بین حسگرها برابر با نصف طول موج، تعداد آزمایش‌های مستقل مونت کارلو برابر با ۵۰۰ آزمایش، نسبت سیگنال به نویز برابر با ۳ dB، تعداد برداشت‌ها در هر بار آزمایش مستقل برابر با ۵۰۰ نمونه، تعداد اهداف در محیط برابر با ۲، زاویه اهداف ۳- و  $\phi_{ix}$  درجه است که متغیر  $\phi_{ix}$  نشان‌دهنده زاویه منبع دوم است که مقدار آن از ۶+ درجه تا ۲۱+ درجه با گام ۱ درجه متغیر بوده است. فرکانس مرکزی سیگنال‌ها برابر با ۳ کیلوهرتز و سرعت موج برابر با ۱۵۰۰ متر بر ثانیه می‌باشد.

عنصر، تقریباً عملکردی نزدیک به هم دارند و در سایر مقادیر، روش IMLSE نسبت به سایر روش‌ها دارای بهترین عملکرد بوده و تقریباً نزدیک به کران کرامر-رائو است. همان‌طور که در شکل‌ها دیده می‌شود با افزایش تعداد عناصر آرایه به بیش از ۱۵ حس‌گر، عملکرد تمامی روش‌ها به‌جز روش IMLSE، تقریباً یکسان است و روش میوزیک نیز با افزایش تعداد عناصر آرایه به عملکردی نزدیک به دیگر روش‌ها دست می‌یابد.

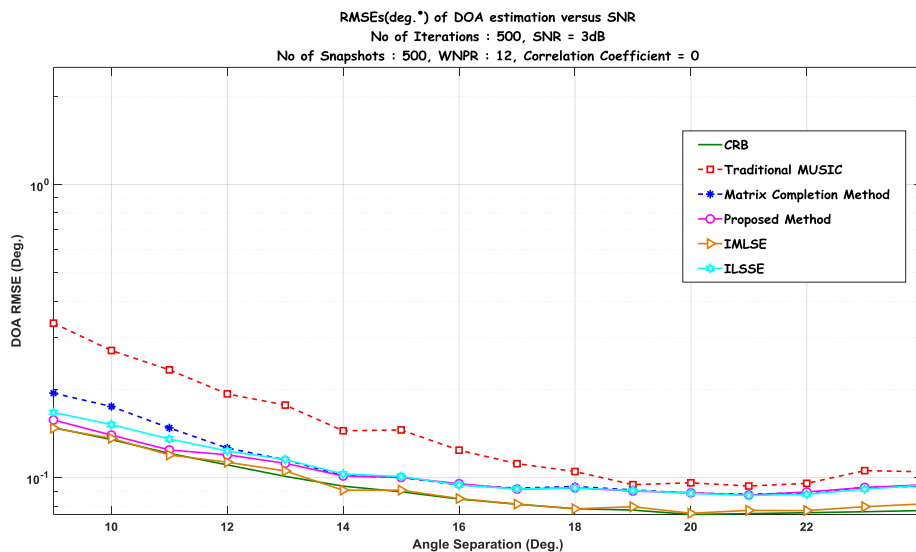
زمان مورد نیاز برای اجرای حذف اثر نایکنواختی نویز در تمامی روش‌ها محاسبه شده و در جدول (۱) آورده شده است. این زمان شامل الگوریتم جهت‌یابی میوزیک نبوده و فقط زمان لازم برای حذف اثر نایکنواختی نویز اندازه‌گیری شده است. تمامی شبیه‌سازی‌ها با استفاده از یک کامپیوتر شخصی با حافظه داخلی ۱۲ گیگا بایت و پردازنده مدل اینتل با ۷ هسته و فرکانس کاری ۳/۲ گیگاهرتز صورت گرفته است. زمان محاسبات به‌دست‌آمده برای هر یک از روش‌ها بر حسب ثانیه در جدول (۱) آورده شده است. این جدول، زمان اجرای هر یک از روش‌ها در ۵ آزمایش با شرایط مختلف را بر حسب ثانیه نشان می‌دهد. مطابق با این جدول، مشاهده می‌شود که روش پیشنهادی این مقاله نسبت به سایر روش‌های معرفی‌شده دارای حجم محاسباتی بسیار اندکی است و معمولاً به زمان محاسباتی در حدود ۰,۰۰۲ ثانیه نیاز دارد که بسیار کمتر از روش‌های دیگر است. پس از روش پیشنهادی هم روش IMLSE دارای کمترین زمان محاسبات می‌باشد.

مشابهی هستند. روش پیشنهادی در فواصل زاویه‌ای کم، عملکردی نزدیک به روش IMLSE دارد و نزدیک به کران کرامر-رائو است. سایر روش‌ها نیز دارای یک روند کاهشی-افزایشی با افزایش پارامتر زاویه‌ای منابع هستند.

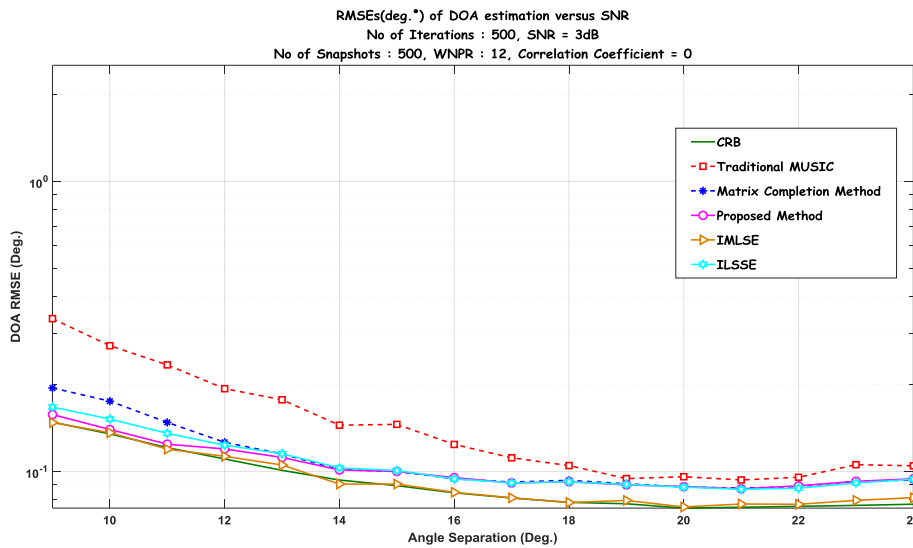
در آخرین شبیه‌سازی، عملکرد روش‌های مختلف جهت‌یابی در حضور نویز نایکنواخت بر حسب پارامتر تعداد حس‌گرها مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. همان‌طور که در شکل (۵) مشاهده می‌شود، با افزایش تعداد حس‌گرهای آرایه، RMSE زاویه برای تمامی روش‌ها کاهش می‌یابد. در این شبیه‌سازی، فاصله بین حس‌گرهای آرایه خطی یکنواخت برابر با نصف طول موج، تعداد آزمایش‌های مونت کارلو برابر با ۵۰۰ آزمایش، نسبت سیگنال به نویز برابر با ۳ dB، تعداد برداشت‌ها در هر بار آزمایش مستقل برابر با ۵۰۰ نمونه، تعداد اهداف در محیط برابر با ۲، زاویه اهداف ۳- و ۶+ درجه، فرکانس مرکزی سیگنال‌ها برابر با ۳ کیلوهرتز و سرعت صوت برابر با ۱۵۰۰ متر بر ثانیه می‌باشد. سیگنال‌ها با یکدیگر ناهمبسته هستند و ماتریس کواریانس نویز به‌صورت زیر است:

$$Q = \text{diag}(0.5 * \text{randi}([1,12], 1, M(l)))$$

در رابطه فوق تعداد عناصر آرایه یعنی M از ۵ تا ۲۰ حس‌گر با گام ۱ متغیر است. با توجه به شکل (۵)، مشاهده می‌شود که RMSE زاویه با افزایش تعداد حس‌گرها به ازای تمامی روش‌ها دارای یک روند کاهشی بوده و تمامی روش‌ها به‌جز روش میوزیک عادی در تعداد کم عناصر آرایه، یعنی تعداد کمتر از ۱۱



شکل (۴): نمودار RMSE زاویه‌های تخمینی منابع بر حسب فاصله زاویه‌ای منابع



شکل (۵): نمودار RMSE زاویه‌های تخمینی منابع بر حسب M

جدول (۱): زمان محاسبات لازم بر حسب ثانیه برای حذف اثر نایک‌ناوختی نویز در روش‌های ILSSE، IMLSE، تکمیل ماتریس و روش پیشنهادی

Method	Parameters	IMLSE	ILSSE	Matrix Completion	Proposed Method
	SNR : -5dB, N : 500, WNPR : 20, M : 8 Angle Separation(-3,6)	0.116820s	0.214447s	0.254843s	0.002206s
	SNR : 0 dB, N : 100, WNPR : 20, M : 8 Angle Separation(-3,6)	0.139345s	0.163424s	0.287358s	0.002220s
	SNR : 0 dB, N : 300, WNPR : 40, M : 8 Angle Separation(-3,6)	0.127151s	0.207560s	0.278905s	0.002497s
	SNR : -5dB, N : 500, WNPR : 20, M : 8 Angle Separation(-3,3)	0.103781s	0.506725s	0.255628s	0.002266s
	SNR : 0 dB, N : 100, WNPR : 12, M : 5 Angle Separation(-3,6)	0.102080s	1.340084s	0.246258s	0.001816s

یکدیگر استفاده می‌شوند، در این حالت معتبر نخواهند بود. بنابراین، به منظور استفاده از روش‌های جهت‌یابی موجود نیاز است به دنبال روش‌هایی بود که به‌وسیله آن‌ها بتوان اثر نایک‌ناوختی را از بین برد و زیرفضای سیگنال و نویز را از یکدیگر تفکیک نمود. به این منظور روش‌های پیشنهادشده، به دنبال یافتن تخمینی از ماتریس کواریانس نویز نایک‌ناوخت و زیر فضای سیگنال هستند. در این خصوص دسته‌ای از مهم‌ترین روش‌ها نظیر روش‌های مبتنی بر تکرار، روش تکمیل ماتریس و روش پیشنهادی این مقاله از جمله روش‌های بررسی‌شده در این مقاله هستند. تمامی روش‌ها با کران کرامر-رائو در حالت تصادفی و نایک‌ناوخت مقایسه شده‌اند. معیار ارزیابی در این مقاله RMSE

## ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، هدف بررسی روش‌های جهت‌یابی در حضور نویز نایک‌ناوخت در محیط بوده است. نویز نایک‌ناوخت از یکسان نبودن توان نویز در حس‌گرهای آرایه ناشی می‌شود. این نویز تنها بر روی المان‌های قطری ماتریس کواریانس خروجی آرایه تأثیر داشته و به دلیل برابر نبودن مقدار آن در تمامی درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس کواریانس، دیگر نمی‌توان به راحتی زیر فضای سیگنال و نویز را از یکدیگر جدا نمود. علت آن است که در این حالت زیرفضای نویز در زیرفضای سیگنال و برعکس نشسته کرده و روش‌های جهت‌یابی موجود که با فرض جدا بودن زیرفضاها از

- [5] J. Yin and T. Chen, "Direction-of-arrival estimation using a sparse representation of array covariance vectors," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 59, no. 9, pp. 4489-4493, 2011.
- [6] M. Grant and S. Boyd, "CVX: Matlab software for disciplined convex programming," version 2.1, 2017. <http://cvxr.com/cvx/>
- [7] B. Liao, "Matrix completion based direction-of-arrival estimation in nonuniform noise," C. Guo, L. Huang, and J. Wen, In *Digital Signal Processing (DSP)*, 2016 IEEE International Conference on, pp. 66-69, October 2016.
- [8] C. E. Chen, F. Lorenzelli, R. E. Hudson, and K. Yao, "Stochastic maximum-likelihood DOA estimation in the presence of unknown nonuniform noise," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 7, pp. 3038-3044, 2008.
- [9] E. J. Candès and B. Recht, "Exact matrix completion via convex optimization," *Foundations of Computational mathematics*, vol. 9, no. 6, p. 717, 2009.
- [10] M. Davenport and J. Romberg, "An overview of low-rank matrix recovery from incomplete observations," *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, vol. 10, no. 4, pp. 608-622, 2016.
- [11] M. Malek-Mohammadi, M. Jansson, A. Owrang, A. Koochakzadeh, and M. Babaie-Zadeh, "DOA estimation in partially correlated noise using low-rank/sparse matrix decomposition," In *Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM)*, 2014 IEEE 8<sup>th</sup>, pp. 373-376, June 2014.
- [12] R. H. Keshavan, A. Montanari, and S. Oh, "Matrix completion from noisy entries," *Journal of Machine Learning Research*, vol. 11, no. Jul, pp. 2057-2078, 2010.
- [13] R. H. Keshavan, A. Montanari, and S. Oh, "Matrix completion from a few entries," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 56, no. 6, pp. 2980-2998, 2010.
- [14] J. F. Cai, E. J. Candès, and Z. Shen, "A singular value thresholding algorithm for matrix completion," *SIAM Journal on Optimization*, vol. 20, no. 4, pp. 1956-1982, 2010.
- [15] B. Recht, "A simpler approach to matrix completion," *Journal of Machine Learning Research*, vol. 12, no. Dec, pp. 3413-3430, 2011.

زاویه دریافتی است که بر حسب پارامتر نسبت سیگنال به نویز (SNR)، تعداد برداشت‌ها (N)، بدترین نسبت توان نویز (WNPR)، فاصله زاویه‌ای منابع و تعداد حس‌گرها رسم می‌شود. بر اساس نتایج شبیه‌سازی‌ها و مقایسه‌های صورت گرفته، مشاهده شد که در بررسی معیار RMSE بر حسب ۵ پارامتر نام برده شده، تمامی روش‌های معرفی شده، دارای عملکرد بهتری نسبت به روش میوزیک عادی هستند. از بین تمامی روش‌های IMLSE و روش پیشنهادی دارای بهترین عملکرد در نمودارهای RMSE بر حسب SNR، N، M.WNPR و فاصله زاویه‌ای منابع می‌باشند. اگر چه روش IMLSE در حالت کلی دارای عملکرد خوبی است اما این روش و روش ILSSSE در برخی شرایط (به‌عنوان مثال در شرایطی که هم نسبت سیگنال به نویز پایین باشد و هم تعداد برداشت‌ها کم باشد و نسبت نایکنواختی نویز هم زیاد باشد) به زمان همگرایی بالایی نیاز دارند و یا ممکن است اصلاً همگرا نشوند. در مقابل روش پیشنهادی این مقاله حجم محاسباتی بسیار کمی داشته و تحت این‌گونه شرایط نیز به خوبی عمل می‌کند.

## ۶. منابع

- [1] B. Liao, S. C. Chan, L. Huang, and C. Guo, "Iterative Methods for Subspace and DOA Estimation in Nonuniform Noise," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 64, no. 12, pp. 3008-3020, 2016.
- [2] M. Pesavento and A. B. Gershman, "Maximum-likelihood direction-of-arrival estimation in the presence of unknown nonuniform noise," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 7, pp. 1310-1324, 2001.
- [3] P. Stoica and R. L. Moses, "Spectral analysis of signals," Upper saddle River, NJ: Prentice Hall, 2005.
- [4] P. Stoica and A. Nehorai, "MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 37, no. 5, pp. 720-741, 1989.

---

## Direction of Arrival Estimation in Presence of Nonuniform Noise Using Subspace Based Methods

S. Alibani, M. Karimi<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> Shiraz University, Shiraz, Iran

(Received: 16/07/2018, Accepted: 04/05/2019)

### Abstract

In the most of DOA estimation methods, environmental noise model is considered to be uniform spatial white noise. However, in many applications this kind of modeling may not be appropriate and leads to considerable direction finding errors. Non-equal output noise power of array elements that causes nonuniform noise is one of these cases. The most important goal of this paper is the investigation and comparison of DOA estimation in presence of nonuniform noise using simulation as well as presenting a novel and effective method for DOA estimation in the mentioned situation. A novel low complexity algorithm for DOA estimation in presence of nonuniform spatial white noise is proposed. Additionally, the performance of the proposed method is simulated and compared with that of matrix completion based method and also iterative subspace estimation schemes for various parameters. The simulation results demonstrate that the proposed scheme achieves a considerable advantage over the existing schemes with remarkably lower complexity.

**Keywords:** Direction of Arrival Estimation, Subspace Based DOA Estimation, Nonuniform Noise, Low Rank Matrix Completion

---

<sup>\*</sup> Corresponding author E-mail: karimi@shirazu.ac.ir