

تحلیل دقت ناوبری تلفیقی INS/GNSS در مسیر مستقیم و با سرعت ثابت برای کاربرد رادار دهانه مصنوعی هواپایه

هادی مکارم^{۱*}، وحید چراغی محمودآبادی^۲

۱- استادیار، ۲- دانشجوی دکتری، پژوهشگاه فضایی ایران، پژوهشکده مکانیک شیراز، ایران
(دریافت: ۱۳۹۸/۸/۲۲، پذیرش: ۱۳۹۹/۱/۲۴)

چکیده

تعیین موقعیت آنتن در سامانه‌های رادار دهانه مصنوعی بسیار حائز اهمیت است و لازم است در طراحی زیرسامانه ناوبری آن، منابع مختلف خطا و نقش آنها در دقت نتایج ناوبری مورد توجه قرار گیرد. با توجه به رفتار خطاهای ناوبری اینرسی و ناوبری ماهواره‌ای، تلفیق داده حسگرهای اینرسی با سامانه‌های موقعیت‌یابی ماهواره‌ای، روشی متداول برای دستیابی به نتایج ناوبری با دقت بالا است. با این وجود، ملاحظات رادار دهانه مصنوعی استفاده از نتایج ناوبری تلفیقی را در بازه تصویربرداری با مشکل مواجه می‌کند. بنابراین، در بازه تصویربرداری فقط از نتایج ناوبری اینرسی استفاده می‌شود و نتایج ناوبری تلفیقی تنها به عنوان شرایط اولیه برای آن در نظر گرفته می‌شود. تخمین دقت این شرایط اولیه و پیش‌بینی رشد خطای ناوبری اینرسی ناشی از آن، در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به این‌که فیلتر کالمن توسعه یافته پرکاربردترین ابزار برای تلفیق حسگرهای اینرسی و داده‌های ماهواره است، درایه‌های ماتریس کوواریانس حالت آن بیانگر دقت نتایج ناوبری تلفیقی خواهد بود. در این پژوهش برای سناریوی پروازی رادار دهانه مصنوعی که مسیر نامی آن یک مسیر مستقیم با سرعت ثابت است، ماتریس کوواریانس حالت در شرایط پایا و نیز بعد از قطع شدن داده ماهواره به‌صورت تحلیلی محاسبه و درستی آن به کمک شبیه‌سازی بررسی شده است. به طور مشخص دقت تخمین موقعیت، سرعت و زوایای جهت‌گیری آنتن بر حسب سطح نویز حسگرهای اینرسی و داده‌های ماهواره محاسبه شده است. نتایج به‌دست آمده در این پژوهش می‌تواند در طراحی و یا انتخاب سامانه ناوبری مناسب برای کاربرد رادار دهانه مصنوعی مورد استفاده قرار گیرد.

واژگان کلیدی

سامانه ناوبری اینرسی، سامانه جهانی موقعیت‌یابی ماهواره‌ای، رادار دهانه مصنوعی، فیلتر کالمن، ماتریس کوواریانس

۱- مقدمه

حائز اهمیت است و ثنیا تخمین‌های آنها با گذشت زمان با خطاهای افزایشنده روبه‌رو می‌شود [۱].

سامانه‌های کمک ناوبری، می‌توانند مشکلات سامانه‌های ناوبری اینرسی را مرتفع کنند که مهم‌ترین آنها، سامانه‌های ناوبری ماهواره‌ای^۲ (GNSS) است. برخلاف سامانه‌های ناوبری اینرسی، خطای GNSS با زمان رشد نمی‌کند و همواره در محدوده مشخصی باقی می‌ماند. اما در مقابل در بازه‌های زمانی کوتاه، سطح نویز بالاتری نسبت به سامانه‌های ناوبری اینرسی دارند [۲]. هم‌چنین وابستگی GNSS به در دسترس بودن و اعتبار داده ماهواره‌ها، استفاده از آنها را در بعضی شرایط (مانند محیط‌های سرپسته) با مشکل مواجه می‌کند [۳]. نرخ داده پایین‌تر GNSS نسبت به INS نیز موضوع دیگری است که گاهی اوقات و به خصوص در کاربرد رادار دهانه مصنوعی^۳ با نام

سامانه‌های ناوبری اینرسی، ناوبری ماهواره‌ای و ناوبری تلفیقی، کاربردهای فراوانی دارند. بسته به حسگرها و الگوریتم‌هایی که در سامانه‌های ناوبری استفاده می‌شود، این سامانه‌ها می‌توانند موقعیت، سرعت و یا وضعیت لحظه‌ای را با دقت‌های مختلف تخمین بزنند.

سامانه‌های ناوبری اینرسی^۱ (INS) که معمولاً از سه حسگر شتاب‌سنج و سه ژيروسکوپ عمود بر هم و نیز یک ریزپردازنده تشکیل شده‌اند، توانایی تخمین موقعیت، سرعت و زوایا را در سه بُعد دارند؛ اما با توجه به اینکه مبنای تخمین آن‌ها، انتگرال‌گیری از شتاب و سرعت زاویه‌ای است، این سامانه‌ها با دو چالش جدی مواجه هستند: اولاً تعیین شرایط اولیه صحیح برای آنها بسیار

^۲ Global Navigation Satellite Systems

^۳ Synthetic Aperture Radar

* رایانامه نویسنده مسئول: hmakarem@mech.sharif.ir

^۱ Inertial Navigation Systems

اختصاری SAR اهمیت زیادی پیدا می‌کند.

تلفیق INS با GNSS یکی از روش‌های متداول برای استفاده همزمان از مزایای هر یک از این دو سامانه است که از یک سو قابلیت پویایی^۱ سریع INS را حفظ می‌کند و از سوی دیگر بزرگی خطای ناوبری را در حد خطای GNSS نگه می‌دارد [۴]. معماری‌های بسیار متنوعی برای تلفیق INS و GNSS وجود دارد؛ به‌طور مثال، بسته به این‌که از داده خام یا پردازش شده GNSS در تلفیق استفاده شود، تلفیق میان INS و GNSS به سه دسته ضعیف^۲، قوی^۳ و عمیق^۴ تقسیم‌بندی می‌شود [۵]، که تلفیق ضعیف ساده‌ترین و پرکاربردترین نوع آن است. به عنوان ابزار ریاضی تلفیق، معمولاً از فیلتر کالمن استفاده می‌شود و تاکنون ویرایش‌های متنوعی از آن ارائه شده است [۶، ۷]. در صورت اطلاع از سطح نویز حسگرهای اینرسی و داده‌های GNSS، می‌توان فیلتر کالمن مناسب را برای ناوبری تلفیقی INS/GNSS طراحی و پیاده‌سازی کرد.

یکی از کاربردهای سامانه‌های ناوبری تلفیقی، در SAR است. سامانه SAR هنگامی که بر روی وسیله متحرک (مانند هواپیما و ماهواره) نصب شود می‌تواند با تابش و دریافت سیگنال، تصویری از ناحیه تحت پوشش به‌دست آورد [۸]. اما دستیابی به این هدف، مستلزم حرکت وسیله بر روی یک مسیر نامی است. در سامانه‌های SAR هواپایه، این مسیر نامی معمولاً یک مسیر مستقیم با سرعت ثابت است [۹]، هرچند می‌تواند شکل‌های دیگری نظیر دایره نیز داشته باشد [۱۰]. رعایت این الزام حرکتی، صرفاً به صورت تقریبی ممکن است و به دلایل مختلف از جمله وجود باد و خطاهای کاربری و یا کنترلی، همواره انحرافات از این مسیر نامی وجود خواهد داشت. وظیفه سامانه ناوبری در این شرایط، اندازه‌گیری انحراف از مسیر نامی و اعلام آن به الگوریتم پردازش SAR است. اگر این کار به درستی انجام نشود، کیفیت تصویر SAR افت خواهد کرد و حتی ممکن است اجزای تصویر به کلی محو شوند [۱۱].

ناوبری تلفیقی INS/GPS یک روش مناسب برای ناوبری در کاربرد SAR به نظر می‌رسد. با این حال سامانه ناوبری در کاربرد SAR با یک ملاحظه مهم مواجه است. برای تشکیل تصویر SAR، نه تنها خطای بلند مدت ناوبری باید از حد مشخصی کوچکتر باشد، بلکه خطاهای کوتاه‌مدت و فرکانس بالا نیز در کیفیت تصویر اثرگذار هستند، به طوری که کوچکترین ناپیوستگی در داده‌های ناوبری کیفیت تصویر را تحت تاثیر قرار می‌دهد [۱۲]. این در

حالی است که استفاده از GNSS برای اصلاح INS (به وسیله فیلتر کالمن) موجب بروز ناپیوستگی در نتایج ناوبری می‌شود. یک راه حل ساده برای این مسئله این است که تلفیق INS/GNSS در بازه تصویربرداری موقتاً متوقف شود. به عبارت دیگر تا قبل از شروع بازه تصویربرداری، ناوبری تلفیقی انجام می‌گیرد و بردار حالت ناوبری اصلاح می‌شود، ولی با وارد شدن به بازه تصویربرداری، از داده‌های GNSS صرف نظر شده و ناوبری فقط به صورت اینرسی پیگیری می‌شود [۱۳].

در طراحی سامانه SAR هواپایه، انتخاب سامانه ناوبری مناسب با دقت کافی بسیار اهمیت دارد. آنچه در منابع مختلف [۱۴-۱۶] معیار دقت ناوبری قرار گرفته است، خطای ناشی از نویز حسگرهای اینرسی است و به طور صریح یا ضمنی فرض شده است که شرایط اولیه ناوبری (در ابتدای بازه تصویربرداری) از دقت مطلوبی برخوردار باشد. این در حالی است که شرایط اولیه‌ای که از ناوبری تلفیقی INS/GNSS (با هر روش دیگر) به دست می‌آید مصون از خطا نبوده و ممکن است اهمیت آن کمتر از نویز حسگرهای اینرسی نباشد. البته برخی پژوهشگران اثر خطای شرایط اولیه را نیز در نظر گرفته‌اند اما در مورد منشأ این خطا و نحوه محاسبه بزرگی آن سخنی به میان نیاورده‌اند [۱۷]. همچنین در مقاله دیگر [۱۸] اثر خطای تخمین زاویه اولیه در نظر گرفته شده و بیان شده که بزرگی خطای زاویه از یک کران پایین بیشتر است. با این حال مقدار این کران پایین مبتنی بر یک ثابت زمانی T_W بوده که مقدار دقیقی برای آن ارائه نشده است.

به این ترتیب در انتخاب و طراحی سامانه ناوبری برای سامانه SAR، لازم است منابع مختلف خطا و سهم آنها در کیفیت ناوبری مورد توجه قرار گیرد که خطای شرایط اولیه یکی از مهمترین آنها است. چنانچه شرایط اولیه ناوبری اینرسی، از خروجی یک ناوبری تلفیقی به دست آمده باشد، می‌توان با تحلیل الگوریتم تلفیق، دقت این بردار حالت اولیه را پیش‌بینی کرد. بنابراین در سامانه‌های ناوبری برای کاربرد SAR، لازم است که هم دقت ناوبری اینرسی و هم دقت ناوبری تلفیقی مورد توجه قرار گیرد تا پیش‌بینی درستی از عملکرد سامانه ناوبری در بازه تصویربرداری به‌دست آید.

در این مقاله با محوریت کاربرد SAR، دقت ناوبری تلفیقی INS/GNSS در مسیر مستقیم و با سرعت ثابت مورد بررسی قرار می‌گیرد. با فرض اینکه از فیلتر کالمن توسعه یافته برای ناوبری استفاده شود و ماتریس‌های نویز به درستی مقداردهی گردد، درایه‌های ماتریس کوواریانس حالت معیاری از دقت ناوبری خواهند بود. بنابراین در این مقاله با حل تحلیلی این ماتریس در

¹ Dynamic

² Loose Coupling

³ Tight Coupling

⁴ Deep Coupling

یک فیلتر کالمن توسعه یافته استفاده کرده است. او با حل تحلیلی ماتریس کوواریانس فیلتر کالمن، دقت تخمین زوایا و همچنین دقت تخمین بایاس حسگرهای ژيروسکوپ را در حالت پایا به دست آورده است. البته سامانه‌های مورد بررسی در دو منبع فوق متفاوت از سامانه مورد بررسی در این پژوهش بوده و از طرفی حالت‌های مختلف حضور و عدم حضور داده‌های مشاهده در آن‌ها مطرح نبوده است.

در ادامه، ابتدا معادلات ناوبری اینرسی و ناوبری تلفیقی در بخش ۲ معرفی می‌گردد. سپس در بخش ۳ محاسبات مربوط به دقت ناوبری تلفیقی در زمان حضور و عدم حضور داده ماهواره بیان می‌شود. آنگاه به منظور بررسی صحت محاسبات، نتایج شبیه‌سازی در بخش ۴ ارائه می‌گردد و نتیجه‌گیری موضوع در بخش ۵ خواهد بود.

۲- ناوبری تلفیقی INS/GNSS

۲-۱-۲ معادلات ناوبری اینرسی

در یک سامانه ناوبری اینرسی، از مقادیر اندازه‌گیری شده شتاب و سرعت‌زاویه‌ای سه محوره برای تخمین بردار حالت (شامل موقعیت، سرعت و وضعیت) استفاده می‌شود. مجموعه معادلات دیفرانسیل حاکم بر بردار حالت، معادلات ناوبری نامیده می‌شود که در دستگاه‌های مختلف شکل‌های مختلفی به خود می‌گیرد. همچنین بسته به این‌که دوران زمین در معادلات لحاظ شود یا نشود، شکل معادلات اندکی تغییر می‌کند. در یک دستگاه مختصات محلی، شکل ساده معادلات ناوبری اینرسی با صرف نظر کردن از جملات مربوط به دوران زمین به صورت زیر است [۱]:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v \\ \dot{\psi} &= Cf + g \\ \dot{C} &= C\Omega \end{aligned} \quad (1)$$

در این معادلات، r و v به ترتیب بردارهای موقعیت و سرعت در دستگاه مختصات مرجع و هر یک دارای سه مؤلفه هستند. همچنین ماتریس دوران C ، دوران نسبی بین بدنه و دستگاه مرجع را بیان می‌کند و تابعی از سه زاویه رول^۲ (ϕ)، پیچ^۳ (θ) و یاو^۴ (ψ) است. ماتریس Ω ماتریس پادمقارن نظیر بردار سرعت زاویه‌ای ω می‌باشد و f بردار شتاب خطی را نشان می‌دهد. هر دو بردار f و ω توسط حسگرهای ناوبری در دستگاه بدنی اندازه‌گیری شده است. به علاوه بردار جاذبه در دستگاه مرجع با g نمایش داده شده است. در حالت استاندارد، دستگاه مختصات مرجع طوری انتخاب می‌شود که محورهای x و y آن در صفحه افق بوده و محور z آن عمود بر سطح زمین به سمت پایین باشد.

زمان حضور و عدم حضور GNSS، دقت نتایج ناوبری به‌عنوان تابعی از سطح نویز حسگرهای اینرسی و داده‌های ماهواره به دست می‌آید. این نتایج می‌تواند در انتخاب سامانه ناوبری برای کاربرد SAR و تحلیل رفتار آن مورد استفاده قرار گیرد. البته کاربرد این نتایج محدود به سامانه SAR نبوده و در هر سامانه ناوبری تلفیقی INS/GNSS با پویایی کم می‌تواند مورد توجه قرار گیرد.

لازم به تأکید است که با توجه به رفتار خطاهای ذاتی سامانه ناوبری اینرسی و سامانه‌های موقعیت‌یاب ماهواره‌ای، ناوبری تلفیقی INS/GNSS یک روش مناسب برای استفاده هم‌زمان از مزایای هر دو سامانه است. تا زمانی که داده GNSS با دقت کافی در اختیار باشد، سامانه ناوبری تلفیقی می‌تواند موقعیت، سرعت و زوایا را به خوبی تخمین بزند. چنانچه داده GNSS قطع شود، شرایط انجام تلفیق از بین می‌رود و ناوبری به صورت اینرسی ادامه می‌یابد که در نتیجه با رشد تدریجی خطای ناوبری مواجه خواهد شد. رشد خطای ناوبری اینرسی از دو منبع اصلی سرچشمه می‌گیرد که شامل نویز حسگرهای اینرسی و خطای شرایط اولیه می‌باشد. در اینجا شرایط اولیه ناوبری اینرسی، نتایج ناوبری در لحظه قطع شدن داده GNSS است. بنابراین به منظور پیش‌بینی میزان رشد خطا در زمان قطع GNSS، لازم است هم اثر نویز ذاتی حسگرها و هم اثر خطای شرایط اولیه مورد توجه قرار گیرد. پیش‌بینی آماری میزان رشد خطای ناوبری ناشی از نویز ذاتی حسگرها به صورت تحلیلی امکان‌پذیر است، این در حالی است که تاکنون روشی برای تعیین بزرگی خطای شرایط اولیه (خطای ناوبری در لحظه قطع شدن GNSS) ارائه نشده است و به همین جهت نقش آن در رشد خطای ناوبری پس از قطع شدن GNSS به صورت تحلیلی مورد ارزیابی قرار نگرفته است. در واقع مقدار خطای شرایط اولیه وابستگی زیادی به سناریوی حرکت دارد و در حالت کلی بررسی آن تنها با شبیه‌سازی میسر است، اما در شرایط خاص و سناریوهای حرکتی ساده بررسی آماری آن به صورت تحلیلی امکان‌پذیر است و تمرکز پژوهش حاضر بر انجام این تحلیل است.

لازم به توضیح است که حل تحلیلی ماتریس کوواریانس فیلتر کالمن در منابع مختلف مورد توجه قرار گرفته است. به عنوان نمونه، اکسترند [۱۹] حل تحلیلی این ماتریس را برای یک رادار در مود TWS^۱ مورد بررسی قرار داده است. این رادار مقدار برد و نرخ تغییرات برد را اندازه می‌گیرد و با بهره‌گیری از فیلتر کالمن دقت این مقادیر را بهبود می‌بخشد. آنگاه حل تحلیلی ماتریس کوواریانس معیاری از دقت نتایج حاصل را به دست می‌دهد. همچنین، مارکلی [۲۰] جهت تخمین وضعیت سه بعدی یک فضاپیما، بر اساس مشاهدات حسگر ستاره و ژيروسکوپ، از

^۲ Roll

^۳ Pitch

^۴ Yaw

^۱ Track While Scan

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + u \\ x &= \begin{pmatrix} r \\ v \\ e \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 1} \\ \Delta f \\ \omega \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & I & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & G \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \\ I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

۴-۲ - فیلتر کالمن

کالمن [۲۲، ۲۱] با در نظر گرفتن مدل‌های تصادفی برای معادلات حالت و مشاهده یک سامانه خطی، مشاهده‌گر بهینه‌ای برای تخمین بردار حالت سامانه معرفی کرد که به فیلتر کالمن شهرت دارد. وی مشاهده‌گر پیشنهادی خود را به دو صورت زمان-گسسته [۲۱] و زمان-پیوسته [۲۲] ارائه نمود. یک دستگاه معادلات فضای حالت را به صورت زیر در نظر بگیرید که در آن $u(t)$ ورودی به سامانه و $v(t)$ نشان‌دهنده نوفه‌های سامانه است:

$$\dot{x} = Ax + u(t) + v(t) \quad (5)$$

همچنین فرض کنید مشاهده (اسکالر یا برداری) y به صورت زیر هر لحظه به صورت پیوسته در اختیار باشد که در آن $\varepsilon(t)$ نویز مشاهده را بیان می‌کند:

$$y = Hx + \varepsilon(t) \quad (6)$$

با فرض این که هم $v(t)$ و هم $\varepsilon(t)$ نویزهای گوسی سفید با متوسط صفر باشند، می‌توان مشاهده‌گر بهینه‌ای بر اساس فیلتر کالمن زمان-پیوسته طراحی کرد. برای این منظور، ماتریس‌های معلوم، متقارن و مثبت نیمه معین Q و R را به عنوان ماتریس‌های کوواریانس نوفه‌های سامانه و مشاهده، به ترتیب نظیر $v(t)$ و $\varepsilon(t)$ در نظر می‌گیریم. همچنین ماتریس کوواریانس خطای لحظه‌ای تخمین بردار حالت x را با P نمایش می‌دهیم. به این ترتیب معادلات مشاهده‌گر فیلتر کالمن به صورت زیر نوشته می‌شود [۲۲]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + u(t) + K(y - Hx) \\ K &= PH^T R^{-1} \\ \dot{P} &= AP + PA^T + Q - PH^T R^{-1} HP \end{aligned} \quad (7)$$

از آن جا که رابطه حاکم بر تغییرات P ، یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است، لازم است مقدار ماتریس P در لحظه اول معلوم باشد. ولی به هر حال اگر سامانه مشاهده پذیر باشد، با گذشت زمان ماتریس P به یک مقدار ثابت همگرا می‌شود که در معادله جبری زیر صدق می‌کند [۲۳]:

$$AP + PA^T + Q - PH^T R^{-1} HP = 0 \quad (8)$$

در این صورت تنها مؤلفه غیر صفر بردار g مؤلفه سوم آن خواهد بود که اندازه شتاب جاذبه (γ) را نشان می‌دهد و مدل‌های مختلفی برای آن ارائه شده است [۶]:

$$g = (0, 0, \gamma)^T \quad (2)$$

۲-۲ - معادلات ناوبری در مسیر نامی

مادامی که وسیله در یک مسیر مستقیم با سرعت ثابت حرکت می‌کند، شتاب خالص برابر صفر است و شتاب‌سنج فقط شتاب جاذبه را اندازه‌گیری می‌کند. همچنین سرعت زاویه‌ای برابر صفر بوده و زوایای رول، پیچ و یاو ثابت باقی می‌ماند. این مسیر نامی معمولاً یک مسیر افقی و به موازات سطح زمین در نظر گرفته می‌شود. بنابراین دستگاه مختصات مرجع را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که محور x آن در امتداد این مسیر و محور z آن عمود بر سطح زمین و به سمت پایین باشد. همچنین فرض می‌کنیم که سامانه ناوبری به گونه‌ای نصب شده باشد که در مسیر نامی، محورهای سامانه ناوبری اینرسی موازی با محورهای دستگاه مرجع باشد؛ در غیر این صورت اندازه‌گیری‌های حسگرهای ناوبری را در یک ماتریس دوران مناسب ضرب می‌کنیم تا در دستگاه مرجع بیان شود. به این ترتیب هر سه زاویه رول، پیچ و یاو در حالت نامی مقدار صفر به خود می‌گیرند. همچنین شتاب بدنی f در مسیر نامی برابر $(0, 0, -\gamma)^T$ خواهد بود و سرعت زاویه‌ای بدنی ω (با صرف نظر از سرعت دورانی زمین) در هر سه محور مقدار صفر را تجربه می‌کند.

۳-۲ - معادلات ناوبری حول مسیر نامی

یکی از الزامات سامانه SAR، حرکت آنتن بر روی مسیر نامی مستقیم و با سرعت ثابت است. البته حفظ دقیق یک مسیر مستقیم در عمل امکان پذیر نیست و پرندۀ صرفاً به صورت تقریبی می‌تواند این مسیر را دنبال کند.

به این ترتیب با فرض این که پرندۀ در نزدیکی مسیر نامی حرکت می‌کند، می‌توان معادلات ناوبری را حول آن خطی سازی کرد. رفتار غیر خطی معادلات (۱) صرفاً مربوط به ماتریس دوران C می‌شود. بنابراین خطی شده آن حول $\phi = \theta = \psi = 0$ و با تعریف بردار زوایای $e = (\phi, \theta, \psi)^T$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v \\ \dot{v} &= g \times e + \Delta f \\ \dot{e} &= \omega \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن، $\Delta f = f + g$ در مسیر نامی برابر صفر بوده و در صورت انحراف از مسیر نامی، مقدار غیر صفر خواهد داشت. با تعریف I به عنوان ماتریس واحد سه در سه و G به عنوان ماتریس پادمتقارن نظیر بردار g ، معادلات (۳) در شکل ماتریسی به صورت زیر به دست می‌آید:

۲- در فرایند استخراج معادلات، فرضیات متنوعی به سامانه تحمیل شده است. در حقیقت معادلات ناوبری و تلفیق در شکل کامل آن، پیچیدگی‌های بیشتری دارد. در این میان، هدف این پژوهش بررسی اثر نوفه‌های سفید در دقت ناوبری تلفیقی در مسیر مستقیم و با سرعت ثابت است. بنابراین فرضیات یاد شده که به هدف ساده شدن معادلات اعمال شده است، در دست‌یابی به این هدف خللی وارد نمی‌کند.

۳- فرض شده است که مشاهده GNSS به صورت پیوسته در اختیار باشد. این در حالی است که اندازه‌گیری‌های GNSS همواره به صورت گسسته و با فواصل نمونه‌برداری مشخص (مثلاً $\Delta t = 1s$) انجام می‌شود. در این شرایط، اگر انحراف معیار خطای داده گسسته هر محور GNSS را با s_{dis} بیان کنیم، مقدار معادل (تقریبی) آن برای حالت پیوسته (در معادله (۱۱)) از رابطه $s = s_{dis} \sqrt{\Delta t}$ محاسبه می‌شود.

۶-۲ خلاصه فرضیات

در فرایند مدل‌سازی سامانه ناوبری و تشکیل فیلتر کالمن، فرضیات متنوعی اعمال شده است که به طور خلاصه شامل موارد زیر است:

۱- برای تشکیل تصویر SAR (به ویژه در تصویربرداری نوری)، حرکت مطلوب سامانه، یک مسیر مستقیم به موازات سطح زمین و با سرعت ثابت خواهد بود که البته بسته به دینامیک پرنده و شرایط جوی، همواره مقداری از آن منحرف می‌شود. مادامی که انحراف پرنده از این مسیر نامی زیاد نباشد، خطی‌سازی (۳) و نتایج این پژوهش معتبر خواهد بود.

۲- از اثر سرعت زاویه‌ای زمین و نیز کروی بودن آن صرف نظر شده است. در واقع این دو پدیده اگرچه بر خروجی ناوبری تاثیرگذار هستند، میزان تاثیر آن‌ها در مقایسه با اثرات دیگر و به ویژه نوفه حسگرهای ارزان قیمت کوچک بوده و در تحلیل خطا می‌توان از آن‌ها صرف نظر کرد. البته در صورت استفاده از ژایروهای با دقت بالا، لحاظ سرعت زاویه‌ای زمین در معادلات اهمیت پیدا می‌کند.

۳- به منظور ساده شدن تحلیل، معادلات فیلتر کالمن به صورت پیوسته-زمان در نظر گرفته شده است. اما در عمل داده‌های حسگرهای اینرسی و نیز داده‌های ماهواره، به صورت گسسته-زمان و با نرخ‌های متفاوت اندازه‌گیری می‌شوند. این تقریب با توجه به دینامیک

لازم به ذکر است که معادله (۷)، شکل پیوسته فیلتر کالمن را بیان می‌کند. فیلتر کالمن به صورت گسسته نیز قابل پیاده‌سازی است. اما از آن‌جا که تحلیل رفتار فیلتر کالمن در حالت پیوسته ساده تر است، شکل پیوسته فیلتر کالمن در این مطالعه مورد توجه می‌باشد.

۵-۲ معادلات ناوبری تلفیقی

اکنون بر اساس معادلات خطی‌سازی شده (۴) و معادلات فیلتر کالمن (۷)، معادلات ناوبری تلفیقی INS/GNSS را حول مسیر نامی به دست می‌آوریم. برای این کار لازم است ماتریس‌های کوواریانس Q و R و نیز بردار مشاهده y و ماتریس مشاهده H مشخص شود. ماتریس Q دربرگیرنده واریانس نویز حسگرهای شتاب‌سنج و ژایرو است. انحراف معیار نویز سفید شتاب‌سنج‌ها را یکسان و برابر σ_a در نظر می‌گیریم. همچنین مقدار نظیر آن را برای هر یک از سه محور ژایرو با σ_ω نشان می‌دهیم. آنگاه با فرض مستقل بودن نویز حسگرها از یکدیگر، ماتریس قطری Q به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q = \text{diag}(0,0,0, \sigma_a^2, \sigma_a^2, \sigma_a^2, \sigma_\omega^2, \sigma_\omega^2, \sigma_\omega^2) \quad (9)$$

با توجه به اینکه شتاب در هر راستا و سرعت زاویه‌ای حول هر محور، توسط حسگرهای مجزا و مستقل از یکدیگر اندازه‌گیری می‌شود، فرض استقلال نوفه آن‌ها از یکدیگر معتبر است.

بردار y اندازه‌گیری GNSS را نشان می‌دهد که در دستگاه مرجع بیان شده است. با توجه به اینکه GNSS بردار موقعیت سه بعدی را اندازه‌گیری می‌کند، ماتریس H به صورت زیر خواهد بود:

$$H = (I_{3 \times 3} \quad 0_{3 \times 6}) \quad (10)$$

همچنین ماتریس R کوواریانس نویز y را نشان می‌دهد که در حالت ساده، یک ماتریس قطری با درایه‌های قطری یکسان خواهد بود:

$$R = s^2 I_{3 \times 3} \quad (11)$$

به این ترتیب با مشخص شدن تمام پارامترهای فیلتر کالمن (۷)، طراحی معادلات ناوبری تلفیقی کامل می‌شود. در این میان توجه به چند نکته ضروری است:

۱- معادلات (۳)، شکل خطی‌سازی شده معادلات ناوبری حول یک مسیر نامی مستقیم با سرعت ثابت است. وجود این فرض، امکان استفاده از فیلتر کالمن خطی را فراهم کرده است. در غیر این صورت لازم است از فیلترهای پیچیده‌تر مانند فیلتر کالمن توسعه یافته استفاده شود.

پیوست):

$$\begin{aligned} P_{rr} &= \text{diag}(p_{rrx}, p_{rrx}, p_{rrz}) \\ P_{rv} &= \text{diag}(p_{rvx}, p_{rvx}, p_{rvz}) \\ P_{vv} &= \text{diag}(p_{v vx}, p_{v vx}, p_{v vz}) \\ P_{ee} &= \text{diag}(p_{e ex}, p_{e ex}, p_{e ez}) \\ P_{re} &= p_{re} J \\ P_{ve} &= p_{ve} J \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن، p_{rrx} در تساوی زیر صدق می‌کند:

$$\frac{1}{4} s^{-6} p_{rrx}^4 - 2s^{-1} \gamma \sigma_{\omega} p_{rrx} = \sigma_a^2 \quad (15)$$

و بقیه پارامترهای مجهول به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} p_{rrz} &= \sqrt{2s^3 \sigma_a} & p_{v vz} &= \frac{1}{2} s^{-4} p_{rrz}^3 \\ p_{rvx} &= \frac{1}{2} s^{-2} p_{rrx}^2 & p_{rvz} &= \frac{1}{2} s^{-2} p_{rrz}^2 \\ p_{e ex} &= \frac{s^{-3} \sigma_{\omega}}{2\gamma} p_{rrx}^2 & p_{e ez} &\rightarrow \infty \\ p_{re} &= s \sigma_{\omega} & p_{ve} &= s^{-1} \sigma_{\omega} p_{rrx} \\ p_{v vx} &= \frac{1}{2} s^{-4} p_{rrx}^3 - s\gamma \sigma_{\omega} \end{aligned} \quad (16)$$

در میان پارامترهای مجهول فوق، مقدار $p_{e ez}$ هیچ‌گاه همگرا نمی‌شود و به صورت نامتناهی رشد می‌کند. این رفتار نشان می‌دهد که در سناریوی مسیر مستقیم با سرعت ثابت، تلفیق INS/GNSS قادر به تخمین و اصلاح زاویه سمت نمی‌باشد؛ بنابراین با توجه به نویز ژایروی سمت، هر چه زمان پیش می‌رود، خطای تخمین زاویه سمت افزایش می‌یابد. البته توجه کنید که ما در ساده‌سازی معادلات ناوبری از اثر سرعت زاویه‌ای دوران زمین چشم‌پوشی کرده‌ایم، چرا که ژایروهای ارزان قیمت، قادر به اندازه‌گیری آن نیستند. چنانچه ژایرو بسیار دقیق باشد به طوری که بتواند سرعت زاویه‌ای زمین را با دقت کافی اندازه بگیرد، آنگاه با احتساب سرعت دورانی زمین در معادلات، زاویه سمت مشاهده‌پذیر خواهد بود [۲۴].

در روابط (۱۴)، دقت تخمین موقعیت در راستای x با مقدار نظیر آن در امتداد y برابر است. این برابری دقت تخمین، برای مؤلفه‌های سرعت و وضعیت نیز تکرار شده است. علت این موضوع، مشابه بودن دینامیک ناوبری و معادلات حالت سامانه در محورهای x و y است. به عبارت دیگر بردار جاذبه g در معادلات ناوبری (۳) در امتداد محور z بوده که موجب اختلاف رفتار ناوبری در امتداد قائم در مقایسه با دو محور دیگر می‌شود.

دقت کنید که اگر در تساوی (۱۵)، با فرض $\sigma_{\omega} = 0$ جمله دوم طرف سمت چپ برابر صفر می‌شود و مقدار p_{rrx} با p_{rrz} برابر خواهد بود که این به معنی یکسان بودن دقت تخمین

کند سامانه و تغییرات آهسته آن، قابل توجه خواهد بود. به علاوه، نتایج شبیه سازی بخش ۴- نیز نشان می‌دهد که خطای ناشی از این تقریب قابل چشم‌پوشی است.

۴- در مدل‌سازی حسگرهای اینرسی، ساده‌ترین مدل برای خطای حسگرها در نظر گرفته شده است که عبارت از نوفه‌های سفید جمع‌شونده و مستقل از یکدیگر در هر یک از محورهای شتاب‌سنج و ژایرو می‌باشد. در واقع منابع نوفه و خطا در حسگرهای اینرسی بسیار متنوع هستند که البته بسیاری از آن‌ها در فرایند کالیبراسیون و یا ترازبایی قابل شناسایی و حذف می‌باشند. به عبارت دیگر در دمای پایدار و شرایط محیطی مناسب و در بازه‌های زمانی نسبتاً کوتاه (مانند بازه تصویربرداری SAR)، نویز سفید حسگرهای اینرسی مهم‌ترین سهم را در رشد خطای ناوبری دارد. مشابه همین فرض، برای داده ماهواره نیز لحاظ شده است و خطای آن به صورت نوفه سفید در نظر گرفته شده است. ملاحظه خطاهای دیگر اگرچه بر دقت تحلیل می‌افزاید، معادلات ناوبری و فیلتر کالمن را بسیار پیچیده‌تر کرده و دست‌یابی به نتایج تحلیلی را مشکل می‌کند.

۳- تحلیل دقت تلفیق

اکنون با حل معادله (۸) و محاسبه ماتریس P ، دقت نتایج ناوبری تلفیقی INS/GNSS بر حسب دامنه نوفه شتاب‌سنج (σ_a)، دامنه نویز ژایرو (σ_{ω}) و دامنه نوفه داده ماهواره (s) به دست می‌آید. این تحلیل در دو بخش انجام می‌شود: ابتدا با فرض حضور دائمی داده GNSS واریانس خطای حالت پایا محاسبه می‌گردد. سپس رشد خطای ناوبری پس از قطع شدن GNSS به صورت تابعی از زمان مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۳-۱- خطای ناوبری تلفیقی در حالت پایا

در این قسمت معادله جبری (۸) را برای محاسبه ماتریس P حل می‌کنیم. ماتریس P یک ماتریس متقارن 9×9 است و می‌توان آن را به 9 ماتریس 3×3 تجزیه نمود:

$$P = \begin{pmatrix} P_{rr} & P_{rv} & P_{re} \\ P_{rv}^T & P_{vv} & P_{ve} \\ P_{re}^T & P_{ve}^T & P_{ee} \end{pmatrix} \quad (12)$$

ماتریس کمکی J را به صورت زیر تعریف می‌شود:

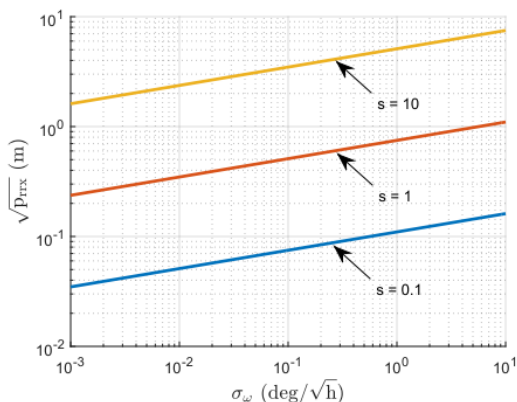
$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

درایه‌های ماتریس P به صورت زیر به دست می‌آید (بخش

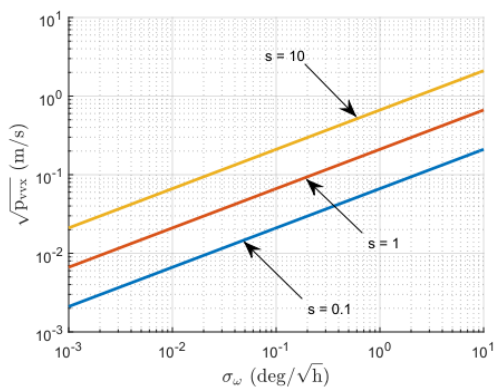
نتیجه آن، ارتباط p_{rrx} با s درجه دوم خواهد بود. این در حالی است که طبق رابطه (۱۸)، p_{rrx} با s به توان پنج سوم تناسب دارد.

در ناوبری تلفیقی INS/GNSS دقت تعیین موقعیت (افقی)، نه تنها به دقت داده ماهواره، بلکه به دقت داده‌های ژایرو نیز وابسته است. دقت تخمین سرعت (افقی)، وابستگی بیشتری به σ_ω دارد و این وابستگی در دقت تخمین زاویه، باز هم بیشتر می‌شود. بنابراین، افت کیفیت ژایرو تا حدی بر دقت تخمین موقعیت تاثیر می‌گذارد، با دقت تخمین سرعت رابطه خطی دارد و تاثیر متوسطی بر آن دارد، و دقت تخمین زاویه را به شدت تحت تاثیر قرار می‌دهد.

تاثیر دقت داده ماهواره (s) بر دقت تخمین موقعیت، سرعت و وضعیت، در مقایسه با تاثیر σ_ω ، روندی معکوس دارد. افت کیفیت داده ماهواره تا حدی بر دقت تخمین زاویه تاثیر می‌گذارد، با دقت تخمین سرعت رابطه خطی دارد و تاثیر متوسطی بر آن دارد، و دقت تخمین موقعیت را به شدت تحت تاثیر قرار می‌دهد.



شکل (۲): انحراف معیار تخمین موقعیت (معادله (۱۸))



شکل (۳): انحراف معیار تخمین سرعت (معادله (۱۹))

موقعیت در راستای عمودی با دو راستای افقی است. با افزایش σ_ω ، مقدار p_{rrx} در معادله (۱۵) بزرگ‌تر می‌شود. به عبارت دیگر، وجود نوفه در ژایرو بر روی دقت تخمین ارتفاع تاثیر ندارد اما دقت تخمین موقعیت افقی را تحت تاثیر قرار می‌دهد. در حالت کلی اگر نسبت p_{rrx}/p_{rrz} را λ بنامیم، بر اساس معادله (۱۵) تساوی زیر بر آن حاکم خواهد بود:

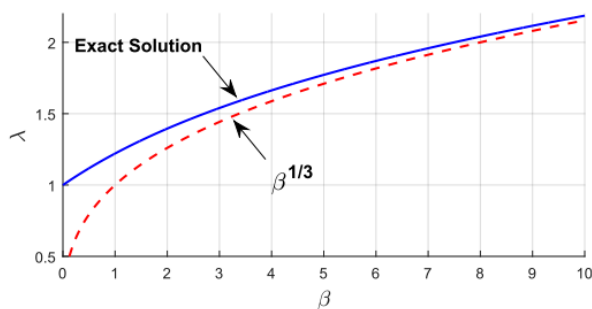
$$\lambda^3 - \frac{1}{\lambda} = 2\gamma\sigma_\omega \sqrt{\frac{2s}{\sigma_a^3}} \stackrel{\text{def}}{=} \beta \quad (17)$$

طرف راست تساوی فوق (β) یک کمیت بدون بعد است و برای حسگرهای ارزان قیمت، مقادیر بزرگی (مثلاً بزرگ‌تر از ۱۰) به خود می‌گیرد. در این شرایط مقدار λ به اندازه‌ای بزرگ خواهد بود که می‌توان از $1/\lambda$ نسبت به λ^3 صرف نظر نمود. در این صورت $\lambda \approx \beta^{1/3}$ (شکل (۱)) و حل تقریبی p_{rrx} به صورت زیر به دست می‌آید:

$$p_{rrx} \approx 2s^2 \left(\frac{\gamma\sigma_\omega}{s} \right)^{1/3} \quad (18)$$

بنابراین، بر خلاف p_{rrz} که مستقل از نوفه ژایرو بوده و تنها از نوفه شتاب‌سنج تاثیر می‌گیرد، خطای موقعیت در جهت‌های افقی به طور عمده وابسته به سطح نوفه ژایرو می‌باشد. با جای‌گذاری (۱۸) در (۱۶)، مقادیر تقریبی برای درایه‌های ماتریس P به دست می‌آید. در این میان، مقادیر واریانس سرعت خطی $p_{v vx}$ و واریانس تخمین زاویه $p_{e ex}$ از اهمیت بیشتری برخوردار هستند:

$$\begin{aligned} p_{v vx} &\approx 3s\gamma\sigma_\omega \\ p_{e ex} &\approx 2\sigma_\omega^2 \left(\frac{s}{\gamma\sigma_\omega} \right)^{1/3} \end{aligned} \quad (19)$$



شکل (۱): حل دقیق و تقریبی معادله (۱۷)

روابط (۱۸) و (۱۹) در شکل‌های (۲) تا (۴) نشان داده شده است. این روابط نتایج جالب توجه‌ای را به همراه دارند که از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

در نگاه اول انتظار می‌رود که خطای تعیین موقعیت، تناسب خطی با خطای GNSS داشته باشد، که در

مقادیر شرط اولیه $P_{ve}(0), P_{vv}(0), P_{re}(0), P_{rv}(0), P_{rr}(0)$ و $P_{ee}(0)$ در واقع همان مؤلفه‌های ماتریس کوواریانس P در حالت ماندگار هستند که در بخش گذشته محاسبه شدند. بنابراین با جای‌گذاری (۱۴)، (۱۵) و (۱۶) در (۲۳)، ماتریس $P_{rr}(t)$ یک ماتریس قطری به شکل زیر خواهد بود:

$$P_{rr}(t) = \text{diag}(p_x(t), p_x(t), p_z(t)) \quad (24)$$

توابع چندجمله‌ای $p_x(t)$ و $p_z(t)$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند که در آن p_{rrz} و p_{rrx} به ترتیب از روابط (۱۵) و (۱۶) به دست می‌آیند:

$$p_x(t) = p_{rrx} + \frac{1}{s^2} p_{rrx}^2 t + \frac{1}{2s^4} p_{rrx}^3 t^2 + \left(\frac{1}{3} \sigma_a^2 + \frac{1}{s} \gamma \sigma_\omega p_{rrx} \right) t^3 + \frac{1}{8s^3} \gamma \sigma_\omega p_{rrx}^2 t^4 + \frac{1}{20} \gamma^2 \sigma_\omega^2 t^5 \quad (25)$$

$$p_z(t) = p_{rrz} + \frac{1}{s^2} p_{rrz}^2 t + \frac{1}{2s^4} p_{rrz}^3 t^2 + \frac{1}{3} \sigma_a^2 t^3$$

۳-۳- خطای ناوبری اینرسی با فرض شرایط اولیه دقیق

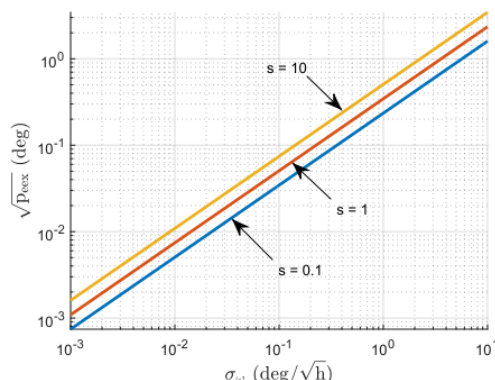
روابط (۲۴) و (۲۵) واریانس خطای موقعیت ناوبری اینرسی را پس از قطع داده ماهواره نشان می‌دهد که در آن‌ها خطای شرایط اولیه نیز لحاظ شده است. اکنون حالتی را فرض کنید که شرایط اولیه ناوبری اینرسی کاملاً دقیق باشد و داشته باشیم: $P(0) = 0$. در این شرایط رابطه (۲۵) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$p_x(t) = \frac{1}{3} \sigma_a^2 t^3 + \frac{1}{20} \gamma^2 \sigma_\omega^2 t^5 \quad (26)$$

$$p_z(t) = \frac{1}{3} \sigma_a^2 t^3$$

با نادیده گرفتن خطای شرایط اولیه، پیش‌بینی نرخ رشد خطای ناوبری اینرسی، کوچک‌تر خواهد بود و این موضوع می‌تواند بر روند طراحی سامانه ناوبری تأثیرگذار باشد.

رابطه (۲۶) معرف خطای ناوبری اینرسی در حالت شرایط اولیه بدون خطا و رابطه (۲۵) معرف خطای ناوبری اینرسی در حالت شرایط اولیه مستخرج از تلفیق INS/GNSS است. بنابراین اختلاف روابط (۲۵) و (۲۶) مشخصاً اثر خطای شرایط اولیه را بیان می‌کند که این شرایط اولیه از ناوبری تلفیقی INS/GNSS به دست آمده است. نتیجه به دست آمده به ویژه در کنار نتایج دیگر محققان اهمیت پیدا می‌کند که ایشان اثر خطاهای دیگر (نظیر خطای مقیاس، عدم تعامد، ناپایداری بایاس و ...) بر رشد خطای



شکل (۴): انحراف معیار تخمین وضعیت (معادله (۱۹))

۳-۲- خطای ناوبری پس از قطع داده ماهواره

با در اختیار داشتن ماتریس P در حالت پایای تلفیق INS/GNSS، می‌توان رشد خطا را پس از قطع داده ماهواره پیش‌بینی کرد. در شرایطی که بردار مشاهده وجود نداشته باشد، معادله دیفرانسیل حاکم بر ماتریس P در رابطه (۷) به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\dot{P} = AP + PA^T + Q \quad (20)$$

با جای‌گذاری (۹) و (۱۲) در (۲۰) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_{rr} &= P_{rv} + P_{rv}^T \\ \frac{d}{dt} P_{rv} &= P_{vv} + P_{re} G^T \\ \frac{d}{dt} P_{re} &= P_{ve} \\ \frac{d}{dt} P_{vv} &= P_{ve} G^T + G P_{ve}^T + \sigma_a^2 I \\ \frac{d}{dt} P_{ve} &= G P_{ee} \\ \frac{d}{dt} P_{ee} &= \sigma_\omega^2 I \end{aligned} \quad (21)$$

در صورت معلوم بودن شرایط اولیه در $t = 0$ ، معادلات فوق از آخر به اول به سادگی حل می‌شود. مهم‌ترین جواب معادلات فوق مربوط به P_{rr} است که یک چندجمله‌ای درجه پنجم بر حسب زمان t می‌باشد:

$$P_{rr}(t) = P_0 + P_1 t + P_2 t^2 + P_3 t^3 + P_4 t^4 + P_5 t^5 \quad (22)$$

ضرایب این چندجمله‌ای به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} P_0 &= P_{rr}(0) \\ P_1 &= P_{rv}(0) + P_{rv}(0)^T \\ P_2 &= P_{vv}(0) + \frac{1}{2} (P_{re}(0) G^T + G P_{re}(0)^T) \\ P_3 &= \frac{1}{3} \sigma_a^2 I + \frac{1}{2} (P_{ve}(0) G^T + G P_{ve}(0)^T) \\ P_4 &= \frac{1}{4} G P_{ee}(0) G^T \\ P_5 &= \frac{1}{20} \sigma_\omega^2 G G^T \end{aligned} \quad (23)$$

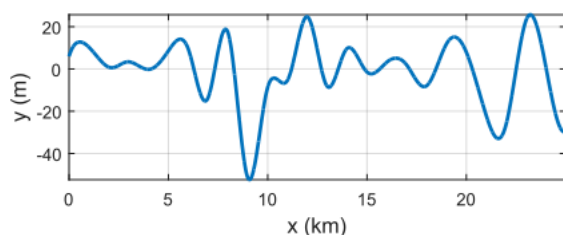
و سرعت زاویه‌ای استخراج شده است. سپس با توجه به سطح نوفه در نظر گرفته شده برای شتابسنج و ژایرو، داده‌های حسگرهای اینرسی تولید شده است. داده‌های GNSS نیز با نرخ و سطح نوفه مشخص شبیه‌سازی شده است. جدول (۱) مقادیر کلیه پارامترها را نشان می‌دهد که متناسب با حسگرهای اینرسی با فناوری MEMS تدوین شده است [۲۵]. سپس سامانه ناوبری تلفیقی برای این خط مشی طراحی و اجرا شده و خطای ناوبری در زمان حضور داده ماهواره و بعد از قطع شدن آن به دست آمده است. در نهایت مقادیر خطای ناوبری با نتایج به دست آمده در بخش گذشته مقایسه شده است.

جدول (۱): مقادیر پارامترهای حسگرهای اینرسی

پارامتر	مقدار	واحد
انحراف معیار نویز شتابسنج	0.05	mg/\sqrt{Hz}
انحراف معیار نویز ژایرو	0.5	$^{\circ}/\sqrt{hr}$
انحراف معیار نویز GNSS (گسسته)	1	m
نرخ داده‌برداری GNSS	1	Hz
نرخ داده‌برداری حسگرهای اینرسی	100	Hz

بسیاری از فرضیات ساده کننده که در روش‌های تحلیلی فوق لحاظ شده است، در فرایند شبیه‌سازی وجود ندارد. به طور مشخص، کروی بودن زمین، سرعت دورانی زمین و نیز گسسته-زمان بودن داده GNSS در شبیه‌سازی در نظر گرفته شده است. به علاوه فیلتر کالمن نه به صورت پیوسته-زمان، بلکه به صورت گسسته-زمان و هماهنگ با نرخ داده‌برداری حسگرهای اینرسی اجرا شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که تأثیر این فرضیات بر دقت نتایج تحلیلی قابل چشم‌پوشی است.

شکل (۵) مسیر طراحی شده را در صفحه افقی نشان می‌دهد. همچنین زاویه رول طراحی شده در شکل (۶) نشان داده شده است. تغییرات موقعیت و زوایا در محورهای دیگر نیز رفتار مشابهی دارد.



شکل (۵): مسیر طراحی شده در صفحه افقی

ناوبری و نقش آنها در کاربرد SAR را مورد بررسی قرار داده‌اند [۱۴-۱۶].

۳-۴- اثر خطای شرایط اولیه ناوبری در کاربرد SAR

برای تشکیل تصویر SAR، لازم است خطای تخمین موقعیت سامانه ناوبری در بازه تصویربرداری از حد مشخصی کمتر باشد. با این حال، علاوه بر بزرگی خطا، رفتار زمانی خطای تخمین نیز اهمیت زیادی دارد. اگر خطای تخمین موقعیت در مدت تصویربرداری مقدار ثابتی داشته باشد، تأثیر آن در کیفیت تصویر نهایی ناچیز خواهد بود. به طور مشابه رشد خطی خطای موقعیت با زمان، تأثیری در کیفیت تصویر ندارد و فقط باعث جابه‌جایی و تغییر مقیاس آن می‌شود. در واقع آنچه اهمیت دارد بزرگی خطای موقعیت پس از حذف این دو دسته از خطاها است. به این ترتیب خطای تخمین موقعیت اولیه و خطای تخمین سرعت اولیه، تأثیری بر کیفیت تصویر ندارد، هر چند موجب خطای هندسی آن می‌شود. بنابراین اهمیت شرایط اولیه ناوبری در کیفیت تصویر SAR، محدود به دقت تخمین زوایا ($P_{ee}(0)$) خواهد بود. بنابراین تفاضل روابط (۲۵) و (۲۶) با حذف اثر خطاهای موقعیت و سرعت اولیه به صورت زیر ساده می‌شود:

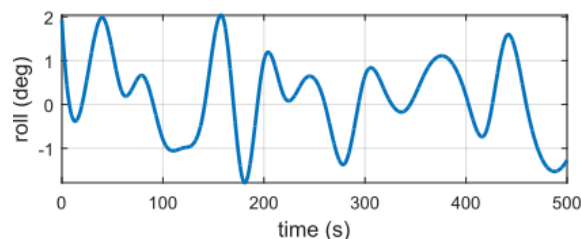
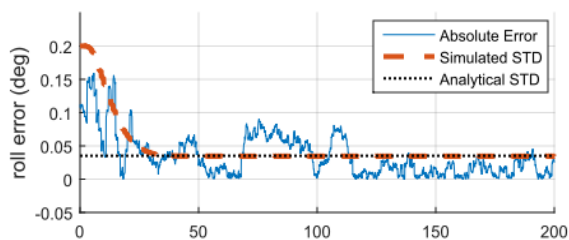
$$\Delta p_x(t) = \frac{1}{4} \gamma^2 p_{eext} t^4 \approx \frac{1}{2} \left(\frac{s \sigma_{\omega}^5}{\gamma} \right)^{1/3} \gamma^2 t^4 \quad (27)$$

$$\Delta p_z(t) = 0$$

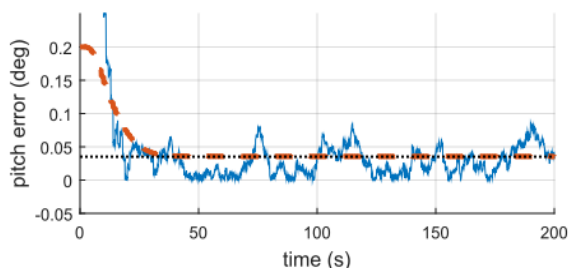
به این ترتیب سهم خطای زاویه اولیه در خطای موقعیت (ناشی از شرایط اولیه نادقیق) در راستای ارتفاع (با تقریب مرتبه اول) برابر صفر است اما در راستای افقی سهم قابل توجهی دارد. توضیح اینکه بردار شتاب به کمک زوایای اولیه از دستگاه بدنی به دستگاه مرجع منتقل می‌شود و وجود خطا در زوایای رول و پیچ، مولفه‌های بردار شتاب را در دستگاه مرجع دچار خطا می‌کند که در نهایت منجر به خطای تعیین موقعیت می‌گردد. با توجه به این که بردار شتاب در امتداد قائم فرض شده است، وجود خطای کوچک در زوایا، بر مولفه‌های افقی شتاب به صورت خطی و بر مولفه قائم آن به صورت درجه دوم تأثیر می‌گذارد. به این ترتیب با تقریب مرتبه اول، می‌توان از خطا در مولفه قائم صرف نظر نمود.

۴- شبیه‌سازی

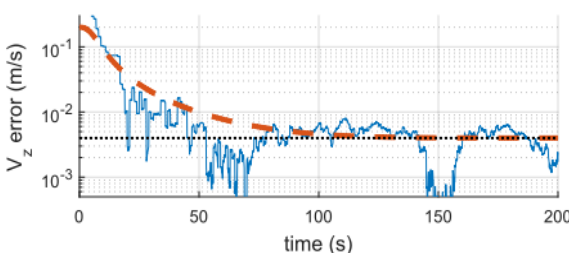
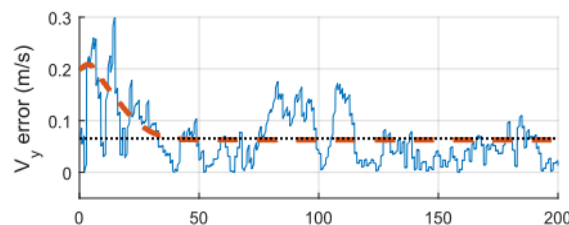
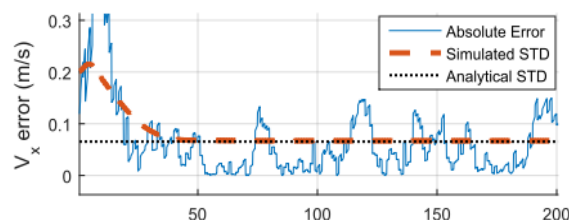
با هدف بررسی نتایج ارائه شده در بخش گذشته، یک طرح کلی از ناوبری تلفیقی شبیه‌سازی شده است. برای این منظور یک مسیر تقریباً مستقیم برای وسیله طراحی شده و داده‌های شتاب



شکل (۶): تغییرات زاویه رول طراحی شده



شکل (۷): قدر مطلق خطای تخمین رول و پیچ در مقایسه با انحراف معیار حاصل از شبیه‌سازی و حل تحلیلی



شکل (۸): قدر مطلق خطای تخمین سرعت در مقایسه با انحراف معیار حاصل از شبیه‌سازی و حل تحلیلی. برای وضوح بیشتر، نمودار محور Z به صورت لگاریتمی رسم شده است.

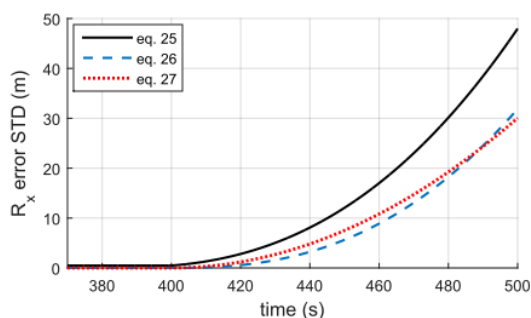
در طراحی تخمین گر فیلتر کالمن، لازم است تخمین اولیه از بردار حالت در لحظه آغازین و ماتریس کوواریانس نظیر آن مقاردهی شود. متناسب با دقت GNSS، موقعیت اولیه با خطایی با انحراف معیار ۱ m (در هر راستا) به سامانه اعلام شده است. به طور مشابه سرعت اولیه با 0.7 m/s خطا در هر راستا، و زوایای اولیه با 0.7 درجه خطا حول هر محور، مقاردهی شده است. ماتریس کوواریانس خطا (P) در لحظه آغازین نیز متناسب با مقادیر انحراف معیار فوق، تعریف شده است. با اجرای فیلتر کالمن، انتظار می‌رود که از یک سو ماتریس P به مقادیر حالت پایای خود همگرا شود و از سوی دیگر تخمین گر بتواند مؤلفه‌های بردار حالت را به مقادیر واقعی آنها نزدیک کند، به طوری که واریانس خطای تخمین در حالت پایا، از درایه‌های ماتریس P تبعیت نماید.

قدر مطلق خطای تخمین زوایای رول و پیچ در شکل (۷) نشان داده شده است. همچنین انحراف معیار مربوط به این دو زاویه در مدت شبیه‌سازی از روی درایه‌های ماتریس P استخراج و رسم شده است. مشاهده می‌شود که این مقادیر در ابتدای حرکت، متأثر از شرایط اولیه بوده و با گذشت زمان به مقادیر پایای خود همگرا می‌شود. همچنین همان‌طور که انتظار می‌رود، مقدار پایای انحراف معیار مربوط به این دو زاویه که از درایه‌های ماتریس P در شبیه‌سازی به دست آمده است، تطابق خوبی با مقدار تحلیلی آن (جذر p_{eex} در روابط (۱۶)) دارد.

شکل (۸) خطای تخمین سرعت را در سه محور، در مقایسه با مقادیر انحراف معیار حاصل از شبیه‌سازی ماتریس P و نیز در مقایسه با مقادیر تحلیلی به دست آمده برای حالت پایا نشان می‌دهد. نمودارهای مشابه برای خطای موقعیت در شکل (۹) نمایش داده شده است.

مشاهده می‌شود که روابط تحلیلی (۲۵) تطابق خوبی با نتایج حاصل از شبیه‌سازی ماتریس P دارند. توجه کنید که اختلاف خطای تعیین موقعیت با انحراف معیار آن در نمودارهای شکل (۱۰)، به جهت ماهیت تصادفی خطای ناوبری است.

در ادامه اهمیت خطای شرایط اولیه و به خصوص خطای زاویه اولیه در رشد خطای ناوبری بررسی می‌گردد. منحني انحراف معیار تحلیلی که در نمودارهای اول و دوم شکل (۱۰) رسم شده است، در واقع جذر $p_x(t)$ در معادله (۲۵) می‌باشد. شکل (۱۱) این مقدار را با جذر $p_x(t)$ در (۲۶) و جذر $\Delta p_x(t)$ در (۲۷) مقایسه می‌کند. مشاهده می‌شود که خطای زاویه اولیه (معادله (۲۷)) سهم قابل توجهی در کل خطای موقعیت دارد و نباید از آن چشم‌پوشی کرد.

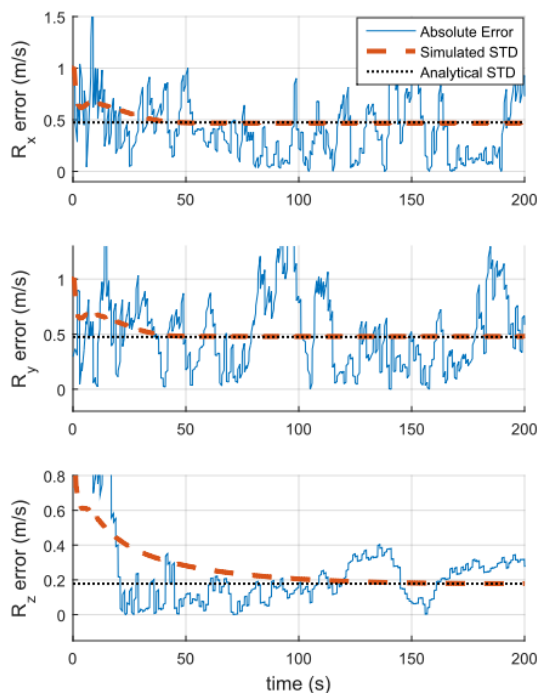


شکل (۱۱). انحراف معیار خطای تخمین موقعیت افقی پس از قطع داده ماهواره و سهم اثرات مختلف در آن.

۵- نتیجه‌گیری

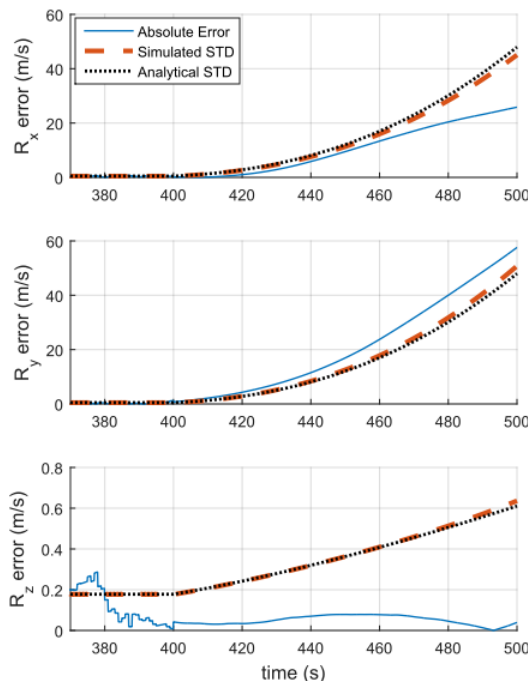
تحلیل دقت ناوبری تلفیقی INS/GNSS بر اساس فیلتر کالمن، در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفت. با فرض حرکت در مسیر مستقیم با سرعت ثابت، شکل ساده معادلات ناوبری اینرسی و تلفیقی به دست آمده است و ماتریس کوواریانس حالت در حالت پایا به صورت تحلیلی محاسبه شده است. آنگاه دقت نتایج ناوبری بر اساس درایه‌های این ماتریس به دست آمده است. همچنین روند مشابهی برای پیش‌بینی رشد خطای ناوبری بعد از قطع شدن داده ماهواره اجرا شده است. شبیه‌سازی‌های انجام شده صحت نتایج تحلیلی را تایید می‌کند.

نتایج این مقاله به ویژه در سامانه‌های SAR هواپایه حائز اهمیت است که در آنها سامانه ناوبری وظیفه اندازه‌گیری انحراف لحظه‌ای پرنده را از مسیر مستقیم به عهده دارد. دستاورد اصلی این مقاله، تخمین دقت شرایط اولیه ناوبری اینرسی پس از قطع داده ماهواره و تاثیر آن در کاربرد SAR هواپایه است، مشروط بر اینکه الگوریتم ناوبری آن از یک ساختار متداول INS/GNSS



شکل (۹): قدر مطلق خطای تخمین موقعیت در مقایسه با انحراف معیار حاصل از شبیه‌سازی و حل تحلیلی

برای ارزیابی روابط (۲۵)، داده ماهواره از ثانیه ۴۰۰ تا ۵۰۰ قطع شده و رفتار خطای تخمین موقعیت در سه محور مورد بررسی قرار گرفته است (شکل (۱۰)).



شکل (۱۰): قدر مطلق خطای تخمین موقعیت پس از قطع داده ماهواره در مقایسه با انحراف معیار حاصل از شبیه‌سازی و حل تحلیلی. داده ماهواره از ثانیه ۴۰۰ قطع شده است.

- [8] K.-S. Chen, "Principles of Synthetic Aperture Radar Imaging," A System Simulation Approach: CRC Press, 2016.
- [9] I. G. C. F. H. Wong, "Digital processing of synthetic aperture radar data," algorithms and implementation: Artech House, 2004.
- [10] S. A. S. S. R. Samareh Hashemi, "Fast Imaging in Ground-Based Circular Strip-Map Synthetic Aperture Radar," *Journal of Radar*, vol. 3, 2015.
- [11] J. Saeedi and S. M. Alavi, "Improved navigation-based motion compensation for LFM/CW synthetic aperture radar imaging," *Signal, Image and Video Processing*, vol. 10, pp. 405-412, 2016.
- [12] J. W. Song and C. G. Park, "INS/GPS integrated smoothing algorithm for synthetic aperture radar motion compensation using an extended kalman filter with a position damping loop," *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, vol. 18, pp. 118-128, 2017.
- [13] J. Fang and X. Gong, "Predictive Iterated Kalman Filter for INS/GPS Integration and Its Application to SAR Motion Compensation," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 59, pp. 909-915, 2009.
- [14] A. W. Doerry, "Motion measurement for synthetic aperture radar," in Sandia, ed. United States, 2015.
- [15] E. P. Velikanova, A. A. Gel'tser, Z. T. Erdyneev, and N. V. Panokin, "Analysis of the accuracy requirements for the inertial navigation system in synthetic aperture radars," *Gyroscopy and Navigation*, vol. 95, pp. 47-58, 2017.
- [16] R. E. Ebner and N. K. Datta, "Specification of internal sensor noise to meet SAR motion compensation requirements," in *Proceeding of the IEEE 1988 National Aerospace and Electronics Conference*, Dayton, OH, USA, 1988.
- [17] S. Buckreuss, "Motion errors in an airborne synthetic aperture radar system," *European Transactions on Telecommunications*, vol. 2, pp. 655-664, 1991.
- [18] J. L. Farrell, "Strapdown inertial navigation system requirements imposed by synthetic aperture radar," *Control and Dynamic Systems*, vol. 33, pp. 177-198, 1990.
- [19] B. Ekstrand, "Analytical Steady State Solution for a Kalman Tracking Filter," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-19, 1983.
- [20] F. L. Markley, "Analytic Steady-State Accuracy of a Three-Axis Spacecraft Attitude Estimator," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 40, 2017.
- [21] R. E. Kalman, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," *Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering*, vol. 82, pp. 34-45, 1960.
- [22] R. E. Kalman, "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory," *Journal of Basic Engineering*, 1961.
- [23] M. Salgado, R. Middleton, and G. C. Goodwin, "Connection between continuous and discrete Riccati equations with applications to Kalman filtering," *Control Theory and Applications*, IEE Proceedings D, 1988.
- [24] S. Hong, M. H. Lee, S. Member, H.-h. Chun, S.-h. Kwon, and J. L. Speyer, "Observability of Error States in GPS/INS Integration," *IEEE transactions on Vehicular Technology*, vol. 54, pp. 731-743, 2005.
- [25] Analog Devices, "ADIS16488 Tactical Grade Ten Degree of Freedom Inertial Sensor (Rev. C)," 2013.

پیروی کند.

همچنین از دید سامانه‌های ناوبری با کاربرد عمومی، این پژوهش نشان می‌دهد که در یک سامانه ناوبری تلفیقی INS/GNSS چگونه می‌توان دقت تخمین موقعیت، سرعت و زوایا را پیش‌بینی کرد. در حالتی که سامانه برای مدت طولانی در مسیر (تقریباً) مستقیم و با سرعت (تقریباً) ثابت حرکت کند، دقت نتایج ناوبری از رابطه (۱۶) تبعیت خواهد کرد. آنگاه چنان‌چه داده ماهواره به هر دلیل قطع شود، رابطه (۲۵) واریانس خطای تعیین موقعیت را بر حسب زمان پیش‌بینی می‌کند.

همچنین نشان داده شده است که در یک مسیر مستقیم و با سرعت ثابت، ناوبری تلفیقی INS/GNSS قادر به اصلاح زاویه سمت نخواهد بود و خطای تخمین زاویه سمت به صورت نامحدود با زمان رشد می‌کند. البته این نتیجه با صرف نظر کردن از اثر دوران زمین در معادلات به دست آمده و تنها برای سامانه‌های ناوبری ارزان قیمت معتبر است که در آنها سطح نوفه ژایرو بالا بوده و قادر به اندازه‌گیری و شناسایی سرعت دورانی زمین نمی‌باشند.

اگرچه این مقاله با تمرکز بر سامانه‌های SAR هواپایه، مشخصاً طرح کلی حرکت بر روی مسیر مستقیم را بررسی کرده است، رویکرد این پژوهش می‌تواند در پیش‌بینی خطای سامانه‌های ناوبری تلفیقی در کاربردهای دیگر و با طرح‌های حرکتی متفاوت مورد استفاده قرار گیرد.

۶- مراجع

- [1] D. H. Titterton, "Strapdown Inertial Navigation Technology: The Institution of Electrical Engineers," 2004.
- [2] W. Quan, J. Li, X. Gong, and J. Fang, *INS/CNS/GNSS Integrated Navigation Technology*: Springer Berlin Heidelberg, 2015.
- [3] N. B. Y. Norouzi, "Navigation Quality Improvement Using Passive Angle of Arrival Measurement," *Journal of Radar* vol. 5, 2017.
- [4] J. Li, J. Fang, Z. Lu, and L. Bai, "Airborne Position and Orientation System for Aerial Remote Sensing," *International Journal of Aerospace Engineering*, vol. 2017, pp. 1-11, 2017.
- [5] C. Kreye, B. Eissfeller, and G. Ameres, "Architectures of gnss/ins integrations: Theoretical approach and practical tests," *Symposium on Gyro Technology*, pp. 10-14, 2004.
- [6] P. D. Groves, "Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems," Artech House, 2008.
- [7] M. S. Grewal and A. P. Andrews, "Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB California State University at Fullerton," *Theory and Practice*, vol. 5, pp. A223-34, 2001.

آنگاه با جایگذاری (۳۰) در (۳۱)، شش معادله به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \hat{P}_{re} \hat{P}_{re}^T &= s^2 \sigma_w^2 \hat{I} \\ \hat{P}_{ve} &= s^{-2} P_{rr} \hat{P}_{re} \\ P_{vv} &= s^{-2} P_{rr} P_{rv} - \gamma \hat{P}_{re} \hat{J}^T \\ P_{rv}^T P_{rv} &= s^2 (\gamma \hat{J} \hat{P}_{ve}^T + \gamma \hat{P}_{ve} \hat{J}^T + \sigma_a^2 I) \\ \gamma \hat{J} \hat{P}_{ee} &= s^{-2} P_{rv}^T \hat{P}_{re} \\ P_{rv} + P_{rv}^T &= s^{-2} P_{rr}^2 \end{aligned} \quad (32)$$

از آنجا که معادله فوق برای سامانه مشاهده پذیر، یک جواب (مثبت نیمه معین) یکتا دارد، می‌توانیم شکل به خصوصی برای جواب فرض کرده و صدق آن را در معادله نشان دهیم. برای این منظور ماتریس‌های P_{rr} , P_{rv} , P_{vv} , P_{re} و P_{ve} را به صورت قطری در نظر می‌گیریم به طوری که درایه‌های اول و دوم روی قطر هر یک از آنها با یکدیگر برابر باشد. همچنین ماتریس‌های \hat{P}_{ve} و \hat{P}_{re} را مضاربی از \hat{J} در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} P_{rr} &= \text{diag}(p_{rrx}, p_{rrx}, p_{rrz}) \\ P_{rv} &= \text{diag}(p_{rvx}, p_{rvx}, p_{rvz}) \\ P_{vv} &= \text{diag}(p_{v vx}, p_{v vx}, p_{v vz}) \\ \hat{P}_{ee} &= p_{eex} \hat{I} \\ \hat{P}_{re} &= p_{re} \hat{J} \\ \hat{P}_{ve} &= p_{ve} \hat{J} \end{aligned} \quad (33)$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} p_{re}^2 &= s^2 \sigma_w^2 \\ p_{ve} &= s^{-2} p_{rrx} p_{re} \\ p_{v vx} &= s^{-2} p_{rrx} p_{rvx} - \gamma p_{re} \\ p_{v vz} &= s^{-2} p_{rrz} p_{rvz} \\ p_{rvx}^2 &= 2\gamma s^2 p_{ve} + s^2 \sigma_a^2 \\ p_{rvz} &= s^2 \sigma_a^2 \\ \gamma p_{eex} &= s^{-2} p_{rvx} p_{re} \\ 2p_{rvx} &= s^{-2} p_{rrx}^2 \\ 2p_{rvz} &= s^{-2} p_{rrz}^2 \end{aligned} \quad (34)$$

از حل معادلات فوق، p_{eex} به صورت زیر به دست می‌آید:

$$p_{eex} = \frac{1}{2} \gamma^{-1} s^{-4} p_{rrx}^2 p_{re} \quad (35)$$

برای این که \hat{P} مثبت (نیمه) معین باشد، باید داشته باشیم $p_{eex} \geq 0$. بنابراین مقدار p_{re} باید مثبت باشد:

$$p_{re} = s \sigma_w \quad (36)$$

به این ترتیب سایر مجهولات در معادلات (۳۴) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} p_{rrz} &= \sqrt{2s^3 \sigma_a} & p_{v vx} &= \frac{1}{2} s^{-4} p_{rrz}^3 \\ p_{rvx} &= \frac{1}{2} s^{-2} p_{rrx}^2 & p_{rvz} &= \frac{1}{2} s^{-2} p_{rrz}^2 \end{aligned} \quad (37)$$

پیوست (الف): محاسبه ماتریس P در حالت پایا

با بررسی معادلات (۴) مشاهده می‌شود که هم سطر آخر و هم ستون آخر از ماتریس A تماماً برابر صفر است. این موضوع نشان می‌دهد که مؤلفه آخر از بردار حالت x کاملاً از هشت متغیر حالت دیگر مستقل می‌باشد و می‌توان آن را از معادلات حذف کرد. تشکیل ماتریس مشاهده‌پذیری سامانه نیز مشاهده پذیر بودن هشت مؤلفه اول و مشاهده ناپذیر بودن مؤلفه نهم را تایید می‌کند:

$$\begin{pmatrix} H \\ HA \\ HA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & G \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$HA^n = 0_{3 \times 9} \quad \forall n > 2$$

مشابه این رفتار در دینامیک حاکم بر ماتریس P (تساوی سوم از معادلات (۷)) مشاهده می‌شود. اگر ماتریس P را به صورت زیر بلوک بندی کنیم:

$$P = \begin{pmatrix} \hat{P}_{(8 \times 8)} & P_{\psi(8 \times 1)} \\ P_{\psi^T(1 \times 8)} & p_{\psi} \end{pmatrix} \quad (29)$$

مقادیر P_{ψ} و p_{ψ} نقشی در معادله دیفرانسیل حاکم بر \hat{P} ندارند (البته معکوس این گزاره صادق نیست). بنابراین به جای ماتریس P با نه سطر و ستون، می‌توان تساوی سوم از معادلات (۷) را برای \hat{P} با هشت سطر و ستون بازنویسی کرد.

اکنون با توجه به مشاهده‌پذیر بودن هشت متغیر اول از بردار حالت، می‌توان تضمین کرد که \hat{P} در $t \rightarrow \infty$ به مقدار پایای آن همگرا می‌شود؛ در حالی که چنین تضمینی برای کل ماتریس P وجود ندارد. در ادامه ابتدا مقدار پایای \hat{P} را به دست آورده و سپس رفتار P_{ψ} و p_{ψ} را در $t \rightarrow \infty$ بررسی می‌کنیم.

همانند رابطه (۱۲)، ماتریس \hat{P} را به بلوک‌های زیر تقسیم می‌کنیم که در آن، \hat{P}_{re} و \hat{P}_{ve} ماتریس‌های سه در دو، \hat{P}_{ee} ماتریس دو در دو، و سایر ماتریس‌ها سه در سه هستند:

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} P_{rr} & P_{rv} & \hat{P}_{re} \\ P_{rv}^T & P_{vv} & \hat{P}_{ve} \\ \hat{P}_{re}^T & \hat{P}_{ve}^T & \hat{P}_{ee} \end{pmatrix} \quad (30)$$

در شرایط پایا، مقدار $\frac{d}{dt} \hat{P}$ برابر صفر بوده و معادله جبری حاکم بر \hat{P} به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{A} \hat{P} + \hat{P} \hat{A}^T + \hat{Q} - \hat{P} \hat{H}^T R^{-1} \hat{H} \hat{P} = 0 \quad (31)$$

در این معادله، ماتریس‌های \hat{A} و \hat{Q} ، از حذف سطر و ستون آخر ماتریس‌های A و Q به دست می‌آیند. ماتریس \hat{H} نیز از حذف ستون آخر ماتریس H به دست می‌آید. به علاوه با حذف ستون آخر ماتریس J، ماتریس \hat{J} را به صورت یک ماتریس سه در دو تشکیل می‌دهیم. ماتریس یکه دو در دو را نیز با \hat{I} نشان می‌دهیم.

پیوست (ب): حل معادلات ۲۱

معادلات ۲۱، مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول است که می‌توان آنها را از آخر به اول حل کرد. از حل معادله آخر آن، ماتریس P_{ee} به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P_{ee}(t) = P_{ee}(0) + (\sigma_a^2 I)t \quad (41)$$

سپس از حل معادله قبل از آن داریم:

$$P_{ve}(t) = P_{ve}(0) + GP_{ee}(0)t + G \frac{\sigma_a^2 t^2}{2} \quad (42)$$

آنگاه P_{ve} و P_{re} به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} P_{re}(t) &= P_{ve}(0)t + GP_{ee}(0) \frac{t^2}{2} + G \frac{\sigma_a^2 t^3}{6} \\ &\quad + P_{re}(0) \\ P_{vv}(t) &= (P_{ve}(0)G^T + GP_{ve}(0)^T + \sigma_a^2 I)t \\ &\quad + GP_{ee}(0)G^T t^2 \\ &\quad + GQ_\omega G^T \frac{t^3}{3} + P_{vv}(0) \end{aligned} \quad (43)$$

به این ترتیب P_{rv} به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} P_{rv}(t) &= (2P_{ve}(0)G^T + GP_{ve}(0)^T + \sigma_a^2 I) \frac{t^2}{2} \\ &\quad + (P_{re}(0)G^T + P_{vv}(0))t \\ &\quad + GP_{ee}(0)G^T \frac{t^3}{2} \\ &\quad + GG^T \frac{\sigma_a^2 t^4}{8} + P_{rv}(0) \end{aligned} \quad (44)$$

و در نهایت $P_{rr}(t)$ به صورت رابطه (۲۱) خواهد بود.

$$p_{eex} = \frac{s^{-3}\sigma_\omega}{2\gamma} p_{rrx}^2 \quad p_{ve} = s^{-1}\sigma_\omega p_{rrx}$$

$$p_{v vx} = \frac{1}{2}s^{-4}p_{rrx}^3 - s\gamma\sigma_\omega$$

همچنین تساوی پنجم در معادلات (۳۴)، معادله درجه چهارم زیر را برای p_{rrx} به دست می‌دهد:

$$\frac{1}{4}s^{-6}p_{rrx}^4 = 2\gamma\sigma_\omega s^{-1}p_{rrx} + \sigma_a^2 \quad (38)$$

پس از محاسبه ماتریس \hat{P} اکنون رفتار بردار P_ψ و اسکالر p_ψ را (بعد از همگرا شدن \hat{P}) بررسی می‌کنیم. با توجه به تساوی سوم از معادلات (۷)، دینامیک حاکم بر P_ψ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d}{dt}P_\psi = (\hat{A} - \hat{P}\hat{H}^T R^{-1}\hat{H})P_\psi \quad (39)$$

با توجه به مشاهده پذیر بودن سامانه (\hat{A}, \hat{H}) ، قضایای مربوط به معادله ریکاتی، منفی معین بودن ماتریس $\hat{A} - \hat{P}\hat{H}^T R^{-1}\hat{H}$ را تضمین می‌کنند و در نتیجه در $t \rightarrow \infty$ مؤلفه‌های بردار P_ψ به صفر همگرا می‌شوند.

بعد از همگرا شدن \hat{P} و P_ψ ، معادله حاکم بر p_ψ به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d}{dt}p_\psi = \sigma_\omega^2 \quad (40)$$

و در نتیجه p_ψ به صورت نامتناهی با زمان رشد می‌کند.

با جایگذاری مقادیر به دست آمده برای \hat{P} ، P_ψ و p_ψ در (۲۹)، ماتریس P در $t \rightarrow \infty$ به دست می‌آید (معادلات (۱۲) تا (۱۶)).

Accuracy Analysis of INS/GNSS Integrated Navigation on a Straight Path with Constant Velocity for Airborne Synthetic Aperture Radar Application

H. Makarem^{*}, V. Cheraghi Mahmudabadi

^{*}Iranian Space Research Center

(Received: 13/11/2019, Accepted: 12/04/2020)

Abstract

Antenna positioning is very important in synthetic aperture radar systems and it is necessary in the design of a navigation subsystem to account for different sources of error and their effects on the accuracy of navigation results. According to the error behavior of inertial and satellite navigation systems, integration of inertial sensors with satellite positioning systems is a common method to achieve high accuracy navigation results. However, synthetic aperture radar considerations, lead to some problems in the utilization of integrated navigation results in the imaging period. Therefore, only the inertial navigation results are used in the imaging period, and integrated navigation results are used just as the initial conditions for the algorithm. This paper studies the estimation of these initial conditions and predicts the navigation error growth caused by them. Since the extended Kalman filter is the most common tool for the integration of inertial sensors and satellite data, the elements of the corresponding state covariance matrix represent the accuracy of integrated navigation results. In this study for a synthetic aperture radar flight scenario, in which the nominal path is a straight path with a constant velocity, the state covariance matrix is calculated analytically both in the steady-state conditions and after the GNSS data outage. These analytical results are verified with simulations. Specifically, the estimation accuracy of antenna position, velocity and attitude are calculated with respect to the noise level of inertial sensors and GNSS data. Results can be used in the design and/or selection of a proper navigation system in synthetic aperture radar applications.

Keywords: Inertial Navigation System (INS), Global Navigation Satellite System (GNSS), Synthetic Aperture Radar (SAR), Kalman Filter, Covariance Matrix

^{*} Corresponding author E-mail: hmakarem@mech.sharif.ir